[9] J. Paris, L. Kirby, *Accessible independence results for Peano arithmetic*, maszynopis.
[10] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1929), 264–286.
[11] C. Smoryński, *The incompleteness theorems*, w: J. Barwise, red., *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1977, 821–865.
[12] —, *Fifty years of self-reference in arithmetic*, Notre Dame Journal of Formal Logic 22 (1981), 357–374.
[13] A. A. Tverskoj, *Posledovatelnost' kombinatornych sużdenij nezavisimych ot arifmetiki Peano*, Vestnik Mosk. Universiteta, ser. 1, Matematika, Mechanika 5 (1980), 7–13.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Roman Kossak (Warszawa)

Dodatek do artykułu R. Murawskiego

W *Dodatku* tym chcielibyśmy przedstawić zdanie niezależne od arytmetyki Peano PA znalezione przez P. Pudlaka (i opisane w nieopublikowanej pracy *Another combinatorial sentence independent of Peano's axioms*). Wybraliśmy to właśnie zdanie z dwu powodów: 1° ma ono jasną i zrozumiałą dla każdego matematyka treść, 2° można podać stosunkowo przejrzysty i dostępny nawet dla niespecjalisty szkic dowodu jego niezależności.

Zdanie Pudlaka i jego własności opiszemy opierając się na notatkach C. Smoryńskiego do jego wykładów w Utrechcie (C. Smoryński, *Nonstandard Models of Arithmetic*, University Utrecht, Preprint Nr 153, April 1980).

Definicja 1. Niech f będzie funkcją o dziedzinie i przeciwdziedzinie zawartych w zbiorze liczb naturalnych $\boldsymbol{N}$. Mówimy, że zbiór skończony $A \subseteq \boldsymbol{N}$, $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ jest *aproksymacją funkcji f*, jeśli dla każdego $i < n$ spełniony jest warunek

$$\forall x \leqslant a_i [x \in \mathrm{dom} f \to f(x) \leqslant a_{i+1} \cup f(x) > a_n],$$

gdzie dom$f$ oznacza dziedzinę funkcji f.

Na przykład zbiór $A = \{10, 12, 13, 14\}$ jest aproksymacją dowolnego skończonego obcięcia funkcji $f(x) = x^2$. Zauważmy, że zbiór dwuelementowy jest aproksymacją każdej funkcji.

Definicja 2. Jeśli X jest skończonym podzbiorem zbioru $\boldsymbol{N}$, to mówimy, że X jest 0-*gęsty*, jeżeli X ma co najmniej trzy elementy. Mówimy, że X jest $(n+1)$-*gęsty*, jeśli dla każdej funkcji f o dziedzinie i przeciw-

dziedzinie zawartych w $\boldsymbol{N}$ istnieje taki n-gęsty zbiór Y, że $Y \subseteq X$ oraz Y jest aproksymacją f.

Zbiór $\{0, 1, 2\}$ jest 1-gęsty. Nie jest łatwo podać inne przykłady zbiorów 1-gęstych. Mimo to dowód następującego twierdzenia nie jest szczególnie trudny.

TWIERDZENIE 1. *Dla dowolnych liczb* $a, n \in \boldsymbol{N}$ *istnieje taka liczba* $b \in \boldsymbol{N}$, *że* $a < b$ *i odcinek* $[a, b]$ *jest* n*-gęsty.*

Jak pogodzić ze sobą dwie uwagi poprzedzające sformułowanie twierdzenia? Otóż dowód twierdzenia rzeczywiście nie jest trudny, ale jest za to nieefektywny i, jak się okazuje, w istotny sposób wykracza poza ramy środków dających się sformalizować w arytmetyce Peano. Korzysta on mianowicie z następującej nieskończonej zasady kombinatorycznej: dla każdego nieskończonego zbioru $Y \subseteq \boldsymbol{N}$ i dowolnej funkcji f o dziedzinie i przeciwdziedzinie zawartych w $\boldsymbol{N}$ istnieje nieskończony zbiór $X \subseteq Y$ aproksymujący f (mówimy, że zbiór nieskończony $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$, gdzie $x_0 < x_1 < \ldots$, aproksymuje funkcję f, jeśli dla dowolnego $i \in \boldsymbol{N}$ zachodzi $\forall x \leqslant x_i\,(x \in \mathrm{dom} f \to f(x) \leqslant x_{i+1})$). Dowód tej zasady jest nieefektywny.

Odnotujmy przy okazji, że funkcja $F_a\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ określona wzorem

$$F_a(n) = \min\{b\colon [a, b] \text{ jest } n\text{-gęsty}\}$$

rośnie niebywale szybko dla każdego $a \in \boldsymbol{N}$. Wartości F_a już dla niedużych argumentów przewyższają wartości funkcji znanych w teorii liczb i uznanych za szybko rosnące (por. C. Smoryński, *Some rapidly growing functions*, The Mathematical Intelligencer 2 (1980), 149–154).

Oznaczmy przez φ następujące zdanie:

$$\forall v_0, v_1 \exists v_2 (v_2 > v_0 \;\&\; [v_0, v_2] \text{ jest } v_1\text{-gęsty}).$$

Okazuje się, że φ jest zdaniem niezależnym od arytmetyki Peano. Twierdzenie 1 pokazuje, że zdanie φ jest prawdziwe w modelu standardowym $\boldsymbol{N}_0$ arytmetyki Peano. Wystarczy zatem znaleźć model, w którym prawdziwa byłaby negacja zdania φ. Tym właśnie się teraz zajmiemy.

Przypomnijmy, że arytmetyka Peano ma oprócz naturalnego modelu $\boldsymbol{N}_0$, zwanego *standardowym*, ogromne bogactwo modeli nieizomorficznych z nim, zwanych modelami *niestandardowymi*. Każdy model niestandardowy jest uporządkowany przez naturalną relację mniejszości $(a \leqslant b \equiv \equiv \exists c(b = a + c))$ w typ porządkowy $\omega + (\omega^* + \omega)\,\varrho$, gdzie ϱ jest pewnym typem porządkowym gęstym, ω jest typem porządkowym zbioru liczb naturalnych, $\omega^* + \omega$ typem zbioru liczb całkowitych. W przypadku modeli przeliczalnych ϱ jest typem porządkowym zbioru liczb wymiernych. Widać więc, że każdy model niestandardowy ma odcinek początkowy

izomorficzny ze zbiorem liczb naturalnych. Elementy tego odcinka nazywamy *elementami standardowymi*, pozostałe — *niestandardowymi*.

Nie jest trudno skonstruować niestandardowy model arytmetyki Peano. W szczególności, stosunkowo łatwo skonstruować można przeliczalny niestandardowy model $\mathbf{M}$ będący elementarnym rozszerzeniem modelu $\mathbf{N}_0$, tzn. modelem, w którym prawdziwe są dokładnie te same zdania języka arytmetyki Peano, które są prawdziwe w modelu $\mathbf{N}_0$.

Weźmy taki model $\mathbf{M}$. Na mocy twierdzenia 1, w $\mathbf{M}$ prawdziwe jest zdanie φ. Niech a i c będą niestandardowymi elementami modelu $\mathbf{M}$. Istnieje element $b \in \mathbf{M}$ taki, że $a < b$ oraz w $\mathbf{M}$ prawdziwe jest zdanie: zbiór $[a, b]$ *jest c-gęsty*. Model $\mathbf{M}$ jest modelem arytmetyki Peano, a zatem w $\mathbf{M}$ prawdziwa jest zasada minimum. Możemy więc znaleźć najmniejszy w $\mathbf{M}$ element b o powyższej własności. Nazwijmy go b_0.

Najtrudniejszy, lecz w istocie techniczny punkt dowodu niezależności zdania φ (który tu, rzecz jasna, pominiemy) polega na wykazaniu, że jeżeli a, b, c są niestandardowe i w modelu $\mathbf{M}$ prawdziwe jest zdanie: zbiór $[a, b]$ jest c-gęsty, to istnieje odcinek początkowy $\mathbf{M}_0$ modelu $\mathbf{M}$ (w sensie relacji $\leqslant$) będący modelem arytmetyki Peano i taki, że $a \in \mathbf{M}_0$, $c \in \mathbf{M}_0$, ale $b \notin \mathbf{M}_0$ (oznacza to, innymi słowy, że funkcja

$$Y(x, y) = \max\{c\colon [x, y] \text{ jest } c\text{-gęsty}\}$$

jest informatorem dla rodziny odcinków początkowych będących modelami arytmetyki Peano).

Jeśli $\mathbf{M}_0$ jest odcinkiem początkowym modelu $\mathbf{M}$ takim, że $a, c \in \mathbf{M}_0$, ale $b_0 \notin \mathbf{M}_0$, to w $\mathbf{M}_0$ nie ma elementu b takiego, że $a < b$ oraz $[a, b]$ jest c-gęsty. Model $\mathbf{M}_0$ jest zatem modelem dla negacji zdania φ, co kończy dowód. Warto zauważyć, że skorzystaliśmy tu z faktu, iż zdanie $[a, b]$ *jest c-gęsty* dla $a, b, c \in \mathbf{M}_0$ jest prawdziwe w modelu $\mathbf{M}_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono prawdziwe w modelu $\mathbf{M}$.