ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVI (1984)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

JEAN DIEUDONNÉ (Nicea)

Kierunki rozwoju matematyki czystej*

Co miesiąc ukazuje się w *Mathematical Reviews* ponad 1500 recenzji prac z matematyki czystej. Czy w warunkach takiej eksplozji wyników jest w ogóle możliwe wyróżnienie jakichkolwiek kierunków? Oto pytanie, na które spróbuję dać tutaj odpowiedź; jest jasne, że odpowiedź taka może być jedynie wysoce subiektywna.

Jeśli problemy i twierdzenia matematyki przyrównać do indywidualnych atomów, to kierunki mogą się pojawić wtedy, gdy atomy te będą z sobą jakoś powiązane. Nasuwa się tu porównanie ze sposobem, w jaki astrofizycy opisują ewolucję gwiazd. Powiadają oni, że na początku kawałki rozproszonej materii skupiają się pod wpływem grawitacji, aż osiągną gęstość, w której zapala się paliwo nuklearne; rodzi się gwiazda i wchodzi do Głównego Ciągu, gdzie pozostaje przez pewien czas w stanie niemal niezmienionym, póki starczy paliwa, a wtedy opuszcza Główny Ciąg w rozmaity sposób. W matematyce narodziny gwiazdy dają się przyrównać do zespolenia się grupy problemów w ogólną metodę lub do ich organizacji w postaci teorii aksjomatycznej; metoda (teoria) zaczyna być wówczas fragmentem tego, co możemy nazwać Głównym Nurtem matematyki, charakteryzującym się licznymi związkami między swoimi składowymi oraz wielorakimi wpływami, jakie one na siebie wzajemnie wywierają. Teoria pozostaje w Głównym Nurcie, póki nie wyczerpią się jej wielkie problemy, a wówczas ujawnia skłonność do utraty kontaktu z resztą matematyki bądź przez pogrążenie się w nader wyspecjalizowanych pytaniach, bądź przez ześlizgnięcie się w nieumotywowane studia aksjomatyczne.

Typowymi przykładami fragmentów poprzedzających Główny Nurt matematyki są niezliczone problemy teorii liczb i kombinatoryki, sięga-

---

* Przekład artykułu *Present trends in pure mathematics*, Advances in Mathematics 27 (1978), str. 235–255.

© Copyright by Academic Press, Inc., New York, N.Y. Tłumaczył Roman Duda.

jące Diofantosa (patrz [4], [5], [7]). Ich rozwiązania, jeśli dawały się uzyskać, otrzymywano zwykle przez rozumowanie *ad hoc* i choć bywało ono wielce pomysłowe, nie dawało się przenieść na inne przypadki. Przykładami teorii, które opuściły Główny Nurt matematyki w XIX wieku przez koncentrację na specjalnych problemach, są: geometria elementarna, funkcje eliptyczne i teoria niezmienników, a w naszych czasach teoria funkcji analitycznych jednej zmiennej zespolonej. Przykładów innego sposobu oderwania się od Głównego Nurtu dostarcza w XX wieku większość algebry nieprzemiennej i niełącznej, topologia ogólna i „abstrakcyjna" analiza funkcjonalna.

Kierunki, które chcę omówić, są wybrane spośród tych, które dają się zauważyć wśród teorii należących współcześnie do Głównego Nurtu. Większość z nich była przedmiotem specjalnych posiedzeń seminarium Bourbakiego i ostatnio opublikowałem książkę (1) stanowiącą rodzaj przewodnika po około 500 *exposé* tego seminarium, dającą krótki opis problemów, metod i wyników każdej teorii, bardziej obszernie omówionych w odpowiednich *exposé* (2). Ponieważ w tym artykule będę musiał używać wielu terminów bez wyjaśnień, odsyłam czytelnika do tamtej książki po definicje, które z braku miejsca muszę tu pominąć.

Niektóre kierunki ogólne

Stało się już banałem stwierdzenie, że około 1920 r. (a pod koniec długiej ewolucji rozpoczętej około 1840 r.) głównym przedmiotem matematyki czystej stało się bardziej badanie *struktur* niż *obiektów* wyposażonych w te struktury. Wiele ważnych zagadnień matematyki daje się sformułować w postaci pytań o *klasyfikację* struktur danego typu, z dokładnością do izomorfizmu. Najlepszą możliwą odpowiedzią na takie pytanie jest dany *explicite* opis struktury w każdej klasie izomorfizmu. Taki opis istnieje, na przykład, dla struktury skończenie generowalnej grupy przemiennej. Tego rodzaju sukces jest jednak wyjątkowy i na ogół trzeba się zadowolić czymś znacznie mniejszym. Zwykle więc próbuje się klasyfikować struktury względem jakiejś *relacji równoważności* słabszej od izomorfizmu, np. względem równoważności homotopijnej zamiast homeomorfizmu dla przestrzeni topologicznych albo posiadania tych samych faktorów prostych w ciągu Jordana–Höldera zamiast izomorfizmu dla grup skończonych. W tym ostatnim przypadku prowadzi to do za-

(1) *Panorama des mathématiques pures: Le choix bourbachique*, Gauthier-Villars, Paris 1977.

(2) Stosunek tego artykułu do ogromu literatury matematycznej jest więc taki, jak streszczenie streszczenia streszczenia!

gadnienia klasyfikacji podkategorii grup skończonych, składającej się wyłącznie z grup prostych.

Jeden z najstarszych sposobów definiowania takich relacji równoważności polega na przypisywaniu strukturze *niezmiennika liczbowego*, tj. liczby, która jest taka sama dla dwóch struktur izomorficznych. Przykłady: wymiar przestrzeni wektorowej, rodzaj krzywej algebraicznej. Delikatniejsza wersja tej idei została usystematyzowana przez pojęcie kategorii. Polega ona na zdefiniowaniu *funktora* przeprowadzającego klasy izomorficzne na klasy izomorficzne, dzięki czemu odpowiednia relacja równoważności oznacza po prostu tyle, że nałożenie takiego funktora na dwa obiekty prowadzi do obiektów izomorficznych. Typowymi przykładami są: algebra zewnętrzna modułu, algebra Liego grupy Liego czy pierścień kohomologii przestrzeni topologicznej. Można nawet powiedzieć, że *wymyślanie funktorów* jest jednym z głównych zadań współczesnego matematyka, prowadzącym zresztą do nadzwyczaj interesujących wyników.

Inny sposób traktowania zbiorów obiektów lub zbiorów klas izomorfizmu polega na „organizowaniu" ich przez definiowanie na takim zbiorze pewnego rodzaju struktury. Wydaje się, że idea ta pojawiła się w geometrii algebraicznej, kiedy Grassmann i Cayley dali pierwsze przykłady „współrzędnych" dla takich obiektów geometrycznych, jak podrozmaitości liniowe w C^n czy krzywe algebraiczne danego stopnia w C^3, i wówczas, znacznie już głębiej, Riemann ujął klasy izomorficznych krzywych algebraicznych danego rodzaju jako zależne od zespolonych parametrów, które nazywał *moduli*. Idea ta skolonizowała dzisiaj już także inne obszary: przekształcenia, pola wektorowe, struktury różniczkowe czy ich klasy izomorfizmu są „organizowane" w postaci przestrzeni topologicznych, grup itp. *Wymyślanie struktur* w zagadnieniach klasyfikacji stało się w ten sposób źródłem dużych postępów.

Związane z tą ideą jest pojęcie *„generyczności"*, zresztą również pochodzące od geometrii algebraicznej. Struktury mogą dopuszczać tyle „patologii", że ich klasyfikacja wydaje się beznadziejna. Sytuacja się jednak zmienia, kiedy można pokazać, że całkowite pominięcie „złych" struktur i pozostanie jedynie przy „dobrych", których jest dostatecznie „dużo" w jakimś rozsądnym sensie, pozwala na sensowną klasyfikację.

Stare i nowe narzędzia

Już około 1900 r. dostrzeżono, że większość metod matematycznych jest mieszaniną, w zmiennych proporcjach, twierdzeń algebraicznych i twierdzeń topologicznych. Dziesięciolecia, które potem nastąpiły, widziały narodziny „abstrakcyjnej" algebry i topologii, zdano sobie bowiem

sprawę, że dla zwiększenia użyteczności pojęć algebraicznych i topologicznych należy je oczyścić ze szczególnych rysów pochodzących z ich związku z bardziej szczególnymi teoriami, gdzie zostały po raz pierwszy wykryte, zachowując wszakże ich siłę, którą ujawniły w tych specjalnych zagadnieniach. Około 1940 r. użyteczne części algebry współczesnej i topologii ogólnej były już wyraźnie zarysowane i od tego czasu pozostają właściwie bez zmiany, tworząc to, co można nazwać „podstawową matematyką" naszych czasów: liniową i wieloliniową algebrę nad ciałami, przestrzenie metryczne i jednostajne, ich kombinację w postaci teorii lokalnie wypukłych przestrzeni wektorowych (głównie przestrzeni Banacha i Frécheta) oraz teorię całkowania.

Od 1940 r. wzbogacono ten arsenał o sporą liczbę nowych narzędzi i większość z nich bierze swój początek ze wzajemnych oddziaływań idei algebraicznych i topologicznych (wielu różnych rodzajów). Spośród nich najbardziej rzucają się w oczy narodziny *algebry homologicznej*, która wzięła się z uświadomienia sobie, że idea grup homologii, które w pewnym sensie „mierzą odstępstwo" danego kompleksu od acykliczności, może być równie dobrze zastosowana do wielu sytuacji algebraicznych i w podobny sposób mierzyć takie rzeczy, jak zachowanie się modułów nad mniej czy więcej dowolnymi obszarami operatorów „odchyla się" od klasycznego zachowania skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych. Bardziej współcześnie, topologiczna *K-teoria*, która początkowo miała do czynienia z klasami izomorfizmu wiązek, została przeniesiona na dowolne kategorie z pomocą niezwykłej konstrukcji umożliwiającej interpretację pojęć kombinatorycznych przy użyciu topologicznego pojęcia homotopii [LN 341]. W algebrze przemiennej (nowa i żywa gałąź algebry, używana w wielu teoriach matematycznych) szczególnie ważne okazało się wprowadzenie struktur topologicznych i topologicznej idei uzupełniania. Z drugiej strony, to właśnie algebraiczny charakter teorii dystrybucji sprawił, że stała się ona tak użytecznym rozszerzeniem teorii miary, a jedną z najdoskonalszych mieszanek algebry i topologii jest teoria algebr z normą, która w spektakularny sposób odnowiła teorię spektralną i jej zastosowania.

Innym rysem wielu obszarów matematyki współczesnej jest posługiwanie się bliźniaczymi ideami *lokalizacji* i *globalizacji*. Lokalne twierdzenia o istnieniu były dostatecznie znane już od czasów Cauchy'ego, ale globalne badania w analizie były raczej nieliczne i bardzo specjalne aż do pionierskich badań Poincarégo i Painlevégo pod koniec XIX w. Nowe okazało się to, że te pojęcia analityczne przeniknęły dziś, wraz z wprowadzeniem idei topologicznych, do „abstrakcyjnej" geometrii algebraicznej i teorii liczb, daleko poza analizę i geometrię różniczkową. Co więcej, ich zastosowania stały się dziś znacznie łatwiejsze dzięki cudownie giętkim narzędziom *rozwłóknień* i *snopów*, podczas gdy topologiczne pojęcia po-

zwalają na precyzyjne sformułowanie „przeszkód" przy przechodzeniu od własności lokalnych do globalnych.

I wreszcie, nie można pomniejszać wpływu *teorii kategorii* na wiele teorii matematycznych. Trudno uznać ją, podobnie jak na przykład algebrę Boole'a, za narzędzie: oczekiwanie, że trudny dowód strywializuje się dzięki kategoriom, jest nierealistyczne. Dostarcza ona jednak (1) ogólnego schematu, podobnego do tego, jakiego wcześniej dostarczyła teoria mnogości, (2) wielce użytecznych ogólnych pojęć, takich jak funktory reprezentowalne i funktory sprzężone, (3) przewodnich zasad, takich jak „Nigdy nie definiuj obiektów bez zdefiniowania morfizmów między nimi". Upowszechnienie idei, że odwzorowanie mnogościowe należy traktować jako szczególny rodzaj morfizmu, pomogło wyjaśnić takie zawiłe pojęcia, jak grupa algebraiczna czy grupa formalna, przez włączenie ich w ramy ogólnego pojęcia struktur algebraicznych na kategoriach. Ale najbardziej zadziwiające zastosowanie znalazły kategorie w bardzo oryginalnym pojęciu topologii Grothendiecka (czyli „sites", — „miejsc") i zdefiniowanych na nich snopach („toposach"), uogólniających w nieoczekiwany i dalekosiężny sposób klasyczne pojęcia topologiczne.

Szczególne kierunki i wyniki

Przechodząc do indywidualnego przeglądu najważniejszych gałęzi matematyki współczesnej pokażę, że w wielu z nich metody, a nawet podstawowe pojęcia, zmieniły się radykalnie od 1940 r., a także powiem o najwybitniejszych problemach, jakie od tego czasu zostały w nich rozwiązane.

1. Logika i podstawy. Jak dobrze wiadomo, rozwój logiki matematycznej i teorii zbiorów w drugiej połowie XIX wieku był przez wielu ówczesnych poważnych matematyków obserwowany z wielkim zainteresowaniem, a nawet z pasją i nie wahali się oni angażować w spory, jakie wybuchały wokół tych spraw, chociaż często nie byli zawodowymi logikami. Dziś sytuacja jest całkowicie odmienna i nie słyszałem, by którykolwiek z młodych liderów matematyki naszego czasu ujawniał zainteresowanie zagadnieniami podstaw, chyba że akurat w tym się specjalizuje. Sądzę, że bierze się to stąd, iż od czasu, gdy aksjomatyczna teoria zbiorów została wyraźnie ukształtowana przez Zermelo, Fraenkla i Skolema, dostarczyła ona niemal wszystkim matematykom (wyjąwszy małą grupę „intuicjonistów" i „konstruktywistów"([3])) dostatecznej podstawy dla ich

([3]) Wyrywkowe sprawdzanie pokazuje, że jeśli spośród około 1500 prac recenzowanych w każdym numerze *Mathematical Reviews* wydzieli się prace z logiki i teorii mnogości, to przeciętnie tylko jedna lub dwie będą związane z intuicjonistycznym lub konstruktywistycznym tabu.

pracy i to w takim stopniu, że praktycznie nikt się nawet nie stara do niej odwoływać: wszystkie rozumowania wyraża się językiem „naiwnej" teorii mnogości. Nie sądzę też, by wielu matematyków poważnie brało pod uwagę niebezpieczeństwo sprzeczności w tym systemie aksjomatów.

Mimo to logika matematyczna jest dziś bardziej aktywna niż kiedykolwiek, a jej specjaliści badają całą masę innych systemów logicznych, jak logiki „drugiego rzędu", logiki modalne, logiki wielowartościowe itd., dla których matematycy pracujący na obszarach innych niż teoria mnogości nie znaleźli dotychczas żadnego zastosowania. Można by więc ulec pokusie wnioskowania, że logika matematyczna znalazła się poza Głównym Nurtem, gdyby nie jej niektóre najbardziej spektakularne sukcesy, dzięki którym zachowuje bardzo ścisły związek z resztą matematyki.

Mam przede wszystkim na myśli słynne rozwiązania dwóch problemów Hilberta odnoszących się do logiki (problemy 2 i 10). „Modele" Gödla i P. Cohena pokazały, że aksjomat wyboru i hipoteza continuum ($2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$) są zdaniami nierozstrzygalnymi w ramach aksjomatyki Zermelo–Fraenkla. Co więcej, nowa potężna metoda *forcingu* Cohena została przez innych użyta do pokazania nierozstrzygalności wielu innych otwartych zagadnień teorii mnogości. Znaleźliśmy się w nieprzewidywanej sytuacji, możemy bowiem wybierać, oprócz elementarnych aksjomatów Zermelo–Fraenkla, *nieskończenie wiele* różnych systemów aksjomatycznych bez podjęcia ryzyka sprzeczności większego niż w samym systemie Zermelo–Fraenkla. Jest to nieco kłopotliwe dla niektórych matematyków i myślę, że nikt dziś nie potrafi przewidzieć, jak się sprawa dalej potoczy i czy zostanie kiedyś uzyskany *consensus* co do tego, które aksjomaty stanowią podstawę matematyki. Na szczęście, ogromna większość wyników matematycznych z Głównego Nurtu opiera się jedynie na aksjomatach Zermelo–Fraenkla, a przeto te wyniki są całkowicie niezależne od wyboru dodatkowych aksjomatów.

Drugim problemem Hilberta było pytanie o istnienie regularnego algorytmu, który w skończenie wielu krokach rozstrzygałby, czy dany układ równań diofantycznych ma rozwiązania czy nie. Jest wątpliwe, czy Hilbert oczekiwał odpowiedzi pozytywnej, wielu bowiem dzisiejszych matematyków podejrzewało raczej odpowiedź negatywną. I to właśnie udowodnił Matiasewicz w pracy z 1970 r., opierającej się na fundamentalnej pracy nad funkcjami rekursywnymi, wykonanej wcześniej przez Julię Robinson, M. Davisa i H. Putnama. Wypada jednak ostrzec przed „intuicją" w tych sprawach, za pomocą tych samych metod dowodzi się bowiem istnienia wielomianu o 21 zmiennych i współczynnikach całkowitych, którego dodatnie wartości w punktach całkowitych wyczerpują cały zbiór liczb pierwszych. Wielce nieprawdopodobny obiekt!

Wreszcie, spory wpływ wywiera logika na matematykę przez zastosowania „ultraproduktów" i „niestandardowej analizy". To są naprawdę

bona fide pojęcia matematyczne, które mogą być zdefiniowane bez śladu powołania się na logikę. Takie podejście byłoby jednak mylące, zaciemniałoby bowiem zasadnicze idee, które dały początek tym metodom. Jest wszakże wielce prawdopodobne, że one właśnie mogą wpłynąć na dalszy rozwój tych metod i powiększyć w ten sposób ich i tak już wielką użyteczność.

2. Topologia algebraiczna i różniczkowa. Przez swój ogromny wpływ na wszystkie pozostałe gałęzie może być ona słusznie nazwana królową XX-wiecznej matematyki. Jej główne pojęcia — homotopia, izotopia, homologia i kohomologia, teoria Morse'a — ciągle jeszcze pochodzą sprzed 1940 roku, zostały jednak znacznie zróżnicowane i wzbogacone na wiele sposobów przez takie pojęcia, jak prosta homotopijna równoważność, wyjątkowe teorie kohomologii i zupełnie świeża homotopia wymierna D. Sullivana. Do tych tradycyjnych narzędzi została dodana spora liczba nowych: CW-kompleksy, operatory Bocksteina, zredukowane potęgi Steenroda, przestrzenie Eilenberga–MacLane'a, rozwłóknienia i korozwłóknienia, przestrzenie klasyfikujące, klasy charakterystyczne, wieże Postnikowa, kompleksy Thoma, grupy kobordyczne, produkty Masseya i Whiteheada itd. Nie należy też zapominać o takich narzędziach algebry homologicznej, jak teoria symplicjalna i K-teoria, a w szczególności słynne ciągi spektralne, wymyślone przez Leraya dla potrzeb kohomologii wiązek włóknistych, mogące być jednak zastosowane do wielu innych sytuacji.

Spośród zebranego tymi metodami bardzo bogatego plonu, z braku miejsca mogę wspomnieć jedynie o kilku tylko wynikach wybranych spośród najbardziej zadziwiających. Najwcześniej wyznaczono niemal całkowicie pierścień kohomologii prostych grup Liego i wielu ich przestrzeni jednorodnych, co było wielkim problemem od 1930 r. [6]. Następnie przyszły pierwsze ogólne wyniki o grupach homotopii, dowód Serre'a skończoności grup homotopii sfer $\pi_m(S^n)$ dla $m > n$ (wyjąwszy grupy $\pi_{2n-1}(S^n)$ dla n parzystych) i twierdzenie Botta o periodyczności grup homotopii grup unitarnych i grup ortogonalnych. Od 1954 r. najbardziej zadziwiające postępy zostały uzyskane w teorii różnych rodzajów rozmaitości, a ściślej w badaniu związków pomiędzy trzema podstawowymi kategoriami rozmaitości: TOP, PL i DIFF. Wszystkie są definiowane przez „mapy", tj. homeomorfizmy ze zbiorów otwartych na rozmaitości na podzbiory otwarte R^n, różnią się zaś warunkami nakładanymi na homeomorfizmy przejścia między mapami (żadne warunki dla TOP, kawałkami liniowość dla PL, C^∞ dla DIFF). Przed 1960 r. teoria ograniczała się do PL i DIFF, nikt bowiem nie potrafił wiele zrobić dla TOP. Głównym problemem było poznanie, kiedy struktura DIFF istnieje na danej rozmaitości. Został on w znacznym stopniu rozstrzygnięty po pierwszych wyłomach: odkryciu Milnora istnienia więcej niż jednej klasy struktur

DIFF na sferze S^7 i kontrprzykładzie Kervaire'a 10-wymiarowej rozmaitości PL, na której nie istnieje żadna struktura DIFF. Nieco później Smale rozstrzygnął hipotezę Poincarégo dla rozmaitości DIFF wymiaru $\geqslant 5$ pokazując, techniką „chirurgii" inspirowaną przez teorię Morse'a, że jednospójna rozmaitość zwarta DIFF, mająca grupy homologii sfery, jest homeomorficzna (ale niekoniecznie dyfeomorficzna) ze sferą.

Podobne problemy dla PL i TOP polegają na tym, by poznać, kiedy istnieje struktura PL na rozmaitości TOP i sklasyfikować takie struktury (to ostatnie jest rozszerzeniem sięgającej początków topologii algebraicznej słynnej hipotezy *Hauptvermutung*: wszystkie PL struktury na tej samej rozmaitości TOP są PL równoważne). Pierwszym wynikiem w tym kierunku był dowód hipotezy Poincarégo dla wymiarów $\geqslant 5$ w kategorii TOP (M. H. A. Newman, 1966). W 1969 r., po wstępnych wynikach wielu matematyków, centralny problem został całkowicie rozstrzygnięty przez Kirby'ego i Siebenmanna. Jak zwykle, w niskich wymiarach pojawiają się trudności, odpowiednie jednak przykłady pokazują, że (inaczej niż w przypadku hipotezy Poincarégo) „przeszkody" są tutaj prawdziwe i nie biorą się jedynie z niedostatków techniki dowodu.

Wcześnie zdano sobie sprawę, że w pracy ze skończonymi kompleksami byłoby bardzo użyteczne użycie nieskończenie wymiarowych przestrzeni takich jak przestrzenie Eilenberga–MacLane'a (w dowodach Kirby'ego i Siebenmanna przestrzenie klasyfikujące, które są nieskończenie wymiarowe, odgrywały istotną rolę). Jednakże pierwsze próby badania nieskończenie wymiarowych rozmaitości, modelowanych na przestrzeniach Banacha lub Frécheta zamiast na przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$, ujawniały ich jakoby patologiczne zachowanie, zamazujące podstawowe różnice, które miały takie znaczenie dla topologii algebraicznej. Na przykład, wszystkie nieskończenie wymiarowe ośrodkowe przestrzenie Frécheta są homeomorficzne, nieskończenie wymiarowa przestrzeń Hilberta i dopełnienie punktu w tej przestrzeni są homeomorficzne itd. Jednakże ostatnio stało się widoczne, że zastosowanie tych wyników może dopomóc w rozwiązywaniu najbardziej klasycznych problemów w skończonych wymiarach. Najważniejszym ostatnim sukcesem tej metody jest pierwszy dowód hipotezy J. H. C. Whiteheada, że każdy homeomorfizm CW-kompleksu jest prostą homotopijną równoważnością (West i Chapman); pochodzi on z badań podobnego zagadnienia w topologii nieskończenie wymiarowej.

3. Rozmaitości różniczkowe i geometria różniczkowa. Podstawowym faktem dotyczącym rozmaitości różniczkowych jest to, że kohomologie takiej rozmaitości dają się opisać w terminach form różniczkowych na rozmaitości (twierdzenie de Rhama). Ostatnio D. Sullivan zauważył, że z zachowania form różniczkowych można wyciągnąć (używając delikatniejszych narzędzi topologicznych i algebraicznych) znacznie więcej infor-

macji zmierzających do tego, co jest chyba najbliższe największemu marzeniu teorii, tj. do klasyfikacji, z dokładnością do dyfeomorfizmu, rozmaitości różniczkowych zwartych. Jego teoria przypisuje każdej takiej rozmaitości układ niezmienników algebraicznych tak, że jedynie *skończenie wiele* klas dyfeomorfizmu odpowiada jednemu układowi.

Niektóre znane zagadnienia dotyczące rozmaitości różniczkowych także doprowadziły do wykształcenia delikatnych narzędzi topologicznych. Na przykład, wyznaczenie przez J. F. Adamsa maksymalnej liczby liniowo niezależnych pól wektorowych na S^n, z użyciem K-teorii, lub fakt, że S^2 i S^6 są jedynymi sferami, na których można zdefiniować struktury prawie zespolone (Borel–Serre).

Wielki postęp osiągnięto w teorii osobliwości przekształceń $f\colon M \to N$ klasy C^∞, co uprzednio, wobec niemal dowolnie patologicznych przypadków, wydawało się beznadziejne. Problem polega na sklasyfikowaniu tych przekształceń, przy czym f i f' uznaje się za równoważne, gdy $f' = hfg$, gdzie bądź g (lub h) jest dyfeomorfizmem na M (lub na N), bądź g (lub h) jest homeomorfizmem na M (lub na N). Nowa idea (Whitney, Thom) polegała na skupieniu się na przekształceniach „generycznych", a główne wyniki (J. Mather, z użyciem fundamentalnego „twierdzenia przygotowawczego" Malgrange'a) mówiły o tym, kiedy równoważne klasy przekształceń „generycznych" (w sensie jednej z dwóch podanych relacji równoważności) tworzą „duże" zbiory przekształceń w pewnej sensownej przestrzeni topologicznej.

Jeśli rozmaitość różniczkowa jest wyposażona w strukturę riemannowską, to istnieje wiele związków między tą strukturą a topologicznymi własnościami rozmaitości. Na przykład, jeśli zwarta i spójna rozmaitość Riemanna ma tę własność, że przekroje sekcyjne w każdym punkcie leżą w odcinku $[\beta, 1]$, gdzie $\beta > \frac{1}{4}$, to M jest homeomorficzna ze sferą. Inne ciekawe wyniki wiążą kohomologie M z liczbą geometrycznie różnych geodetyk zamkniętych na M (problem sięgający Poincarégo): liczba ta jest nieskończona, gdy pierścień kohomologii M nie może być wygenerowany przez pojedynczy element [10].

4. Równania różniczkowe zwyczajne. Jakościowa teoria równań różniczkowych zwyczajnych zaczęła się w 1880 r. od H. Poincarégo i została rozwinięta przez Lapunowa, G. D. Birkhoffa, Denjoya i Siegela w pierwszym trzydziestoleciu XX wieku. Z dzisiejszej perspektywy widać, że teoria ta jest jednym z pierwszych kroków tego, co uważamy dziś za czołówkę Analizy naszych czasów, tj. *Analizy Globalnej* (czyli analizy na rozmaitościach). Od lat trzydziestych teoria ta nie notowała wielkich postępów i dopiero w 1954 r. Kołmogorow wprowadził nowe metody, które umożliwiły mu pokonanie trudności „małych dzielników", będących zmorą jego poprzedników w teorii systemów hamiltonowskich. Nieco

później idee te pozwoliły V. Arnoldowi uzyskać daleko idące wyniki w zagadnieniu stabilności układu słonecznego. W 1960 r. Smale i Peixoto, wraz z rosnącą grupą wspaniałej młodzieży, dołączyli do szkoły rosyjskiej w wielkim projekcie klasyfikacji układów równań różniczkowych na rozmaitościach różniczkowych zwartych (czyli, jak się także mówi, układów dynamicznych) i dyfeomorfizmów takich rozmaitości. Główna idea, mająca na celu uniknięcie znanych patologii, znów polega na znalezieniu prostych własności, które są generyczne w tym sensie, że mają je wszystkie dyfeomorfizmy (pola wektorowe) tworzące niepusty zbiór otwarty (a co najmniej zbiór Baire'a) w przestrzeni wszystkich dyfeomorfizmów (pól wektorowych) wyposażonych w jakąś C^r topologię. Piękne wyniki Peixoto dostarczyły rozwiązań w wymiarze 2. W wyższych wymiarach sprawy są znacznie bardziej skomplikowane, wraz z wprowadzeniem jednak wielu nowych ciekawych typów dyfeomorfizmów został dokonany istotny postęp i niemal każdy rok przynosi nowe osiągnięcia na tym bardzo aktywnym polu [3], [9].

5. Ogólna teoria równań różniczkowych cząstkowych i foliacji. Najbardziej bezpośrednim rozszerzeniem równań różniczkowych zwyczajnych na więcej zmiennych niezależnych jest teoria zupełnie całkowalnych układów różniczkowych. Aż do 1940 r. teoria ta była wyłącznie lokalna. Globalne badania rozmaitości całkowych, pod nazwą foliacji, zostały zapoczątkowane przez Ehresmanna około 1948 r. i chociaż w następnych latach zostały rozwinięte przez niego i jego ucznia Reeba, nie zwróciło to większej uwagi, dopóki około 1960 r. nie pojawiły się pierwsze prace Haefligera o foliacjach analitycznych i S. Nowikowa o istnieniu liści zwartych w foliacjach 3-wymiarowych rozmaitości zwartych. Nieco później Bott znalazł warunki topologiczne na istnienie foliacji na rozmaitości, a Haefliger rozwinął piękną homotopijną teorię struktur ogólniejszych od foliacji, ale łatwiejszych do traktowania. Całkiem zaś ostatnio prowadzenie objęła utalentowana grupa młodych matematyków dowodząc na przykład, istnienia liści zwartych dla foliacji kowymiaru 1 na rozmaitości zwartej o zerowej charakterystyce Eulera (Thurston) czy istnienia na S^3 pól wektorowych klasy C^1, bez miejsc zerowych i nie mających zwartej orbity (Schweitzer) (B 434, 499). Co więcej, ujawniono zadziwiające związki między topologicznymi niezmiennikami foliacji (w szczególności niezmiennikiem odkrytym przez Godbillona i Veya) a nową teorią kohomologii różniczkowalnych pól wektorowych, zainicjowaną przez Gelfanda i Fuksa [2].

Teoria ogólnych równań różniczkowych cząstkowych została rozwinięta dla równań analitycznych. Główne wyniki — to, z jednej strony, uzupełnienie przez Kuranishiego lokalnej teorii systemów Pfaffa rozpoczętej przez E. Cartana i przeformułowanie tej teorii w terminach kohomologii przez D. Spencera i jego szkołę oraz, z drugiej strony, osiągnięcia

J. Leraya, który, posługując się swoją teorią residuów (patrz B 202), rozciągnął klasyczne własności zwyczajnych liniowych równań różniczkowych na liniowe analityczne równania różniczkowe cząstkowe.

6. Liniowe równania różniczkowe cząstkowe. Pod wpływem nowych narzędzi analizy funkcjonalnej w teorii tej dokonał się od 1940 r. ogromny postęp. Szczególnie skuteczne okazało się połączenie teorii spektralnej i teorii dystrybucji przez znaczne rozszerzenie zakresu rozwiązania systemu równań i otwarcia w ten sposób teorii dla technik przestrzeni Hilberta.

Około 1960 r. pod wpływem uzyskanych tymi metodami wielu ogólnych wyników o istnieniu i jedyności rozwiązań zagadnień o wartościach brzegowych, w szczególności dla równań o stałych współczynnikach, specjaliści nabierali przekonania, że dla większości pytań uzyskano właściwie wszystko. W następnej dekadzie teoria rozpoczęła jednak ewolucję w całkiem innym kierunku. Zamiast opierać się niemal wyłącznie na „nierównościach *a priori*" i równaniach o stałych współczynnikach, główna idea polega dziś na traktowaniu różniczkowych operatorów liniowych jako elementów szerszej klasy operatorów pseudoróżniczkowych, które z kolei są szczególnymi przypadkami jeszcze bardziej ogólnych, zawierających operatory całkowe i wiele innych. Stanowią one uogólnienie „osobliwych operatorów całkowych" wprowadzonych wcześniej przez Michlina, Calderóna i Zygmunda, ale mogą też być zdefiniowane w sposób znacznie prostszy i mają bardzo dobre własności algebraiczne i niezmiennicze.

Ich użycie całkowicie zmieniło ogólny wygląd i filozofię teorii: dzisiaj dostaje się procedurę dla wyliczenia *explicite* rozwiązania z warunkami brzegowymi (gdy jest ono jedyne), z czego natychmiast wynika, że uzyskane rozwiązanie jest prawdziwym gładkim rozwiązaniem we wnętrzu obszaru, gdzie jest określone, podczas gdy poprzednio można było jedynie ogólnie udowodnić istnienie „słabych" rozwiązań, a następnie pokazać, że rozwiązanie to jest w istocie prawdziwe.

Co więcej, równania o stałych współczynnikach zostały zdegradowane z centralnej pozycji, jaką zajmowały, co było o tyle słuszne, że jedynie pośredniczyły one w uzyskaniu drogą aproksymacji rozwiązań w przypadku ogólnym. Pomijając tę niezdarną technikę, było *a priori* rzeczą całkowicie niepożądaną podkreślanie ich znaczenia w zagadnieniach, które są w naturalny sposób niezmiennicze względem dyfeomorfizmów, podczas gdy równania o stałych współczynnikach takimi nie są.

W rezultacie równoległej, choć niezależnej ewolucji, równania o stałych współczynnikach znalazły swoje naturalne miejsce w ogólnej teorii niezmienniczych operatorów różniczkowych na grupach Liego i przestrzeniach jednorodnych, bardzo aktywnej gałęzi Analizy Globalnej, pozwalającej w szczególności na rozwinięcie teorii potencjału, teorii funkcji harmonicznych, formuł Poissona i ich związków z teorią prawdopodobień-

stwa (B 268, 370). Operatory te grają podstawową rolę w nieprzemiennej analizie harmonicznej (p. Część 9).

Sięgający Riemanna i Beltramiego pomysł rozważania operatorów różniczkowych na rozmaitościach różniczkowych może być uważany za pierwszy przykład analizy globalnej, praca zaś Hodge'a z lat trzydziestych uwydatniła użyteczność tego punktu widzenia dla badań topologicznych własności rozmaitości. Został on teraz znacznie pogłębiony przez słynną formułę Atiyaha–Singera, daleko sięgające uogólnienie twierdzenia Riemanna–Rocha i piękne zastosowanie K-teorii. W istocie to właśnie twierdzenie Atiyaha–Singera dostarczyło głównego impulsu do wprowadzenia operatorów pseudoróżniczkowych. Dało ono też początek wielkiej liczbie podobnych związków między liniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi a topologią algebraiczną. Najbardziej znaczące w chwili obecnej jest prawdopodobnie uogólnienie Atiyaha–Singera formuły Lefschetza o punktach stałych na rozmaitości gładkiej, w którym kompleks de Rhama został zastąpiony przez dowolny kompleks złożony z operatorów eliptycznych. Innym pięknym przykładem zastosowania homologii jest uogólnienie Atiyaha–Botta–Gårdinga teorii *lacun* Petrowskiego, stanowiącej rozszerzenie i wyjaśnienie słynnej zasady Huyghensa w teorii równań hiperbolicznych.

7. Przestrzenie Banacha, teoria spektralna, algebry Banacha. Techniki teorii lokalnie wypukłych przestrzeni wektorowych, rozwinięte między rokiem 1920 a 1940, zostały uzupełnione po 1945 r. przez teorię topologicznych produktów tensorowych, głównie dzięki Schattenowi i Grothendieckowi. Ten ostatni wprowadził nowy rodzaj przestrzeni lokalnie wypukłej, tak zwane przestrzenie nuklearne, które pod wieloma względami są bliższe przestrzeniom skończenie wymiarowym niż przestrzenie Banacha i mają własności użyteczne w wielu częściach analizy funkcjonalnej i teorii prawdopodobieństwa.

Dwa stare, sięgające Banacha, zagadnienia zostały rozwiązane dopiero bardzo niedawno przez P. Enflo, oba negatywnie. Enflo skonstruował ośrodkową przestrzeń Banacha, która nie ma bazy (w sensie Banacha) i podał przykład zwartego operatora liniowego na ośrodkowej przestrzeni Banacha, który nie jest granicą (w zbieżności jednostajnej na zbiorach zwartych) operatorów skończonego rzędu.

Spektralna teoria operatorów na przestrzeni Hilberta, rozwinięta przez Hilberta, Carlemana i von Neumanna w latach 1900–1930, została znacznie uproszczona i uogólniona przez teorię algebr Banacha, zapoczątkowaną w 1941 r. przez Gelfanda i jego szkołę. Najbardziej jednak interesującą częścią tej teorii pozostaje badanie algebr von Neumanna, rozpoczęte nieco wcześniej i pozostające najściślej związane z teorią reprezentacji unitarnych grup lokalnie zwartych w przestrzeniach Hilberta (p.

Część 9). Od czasu pionierskich prac von Neumanna klasyfikacja tych algebr nie zrobiła wielkich postępów, co odnosi się zwłaszcza do dość tajemniczych składników „typu III", z których do 1967 r. znano tylko trzy nieizomorficzne przykłady. Później sprawa zaczęła się szybko rozwijać i w ciągu kilku lat wielu matematyków odkryło nowe składniki typu III, a w 1972 r. została podana ogólna teoria klasyfikacji, oparta na pomysłach Tomita i definicji Connesa nowych niezmienników, co umożliwiło mu rozwiązanie niektórych otwartych zagadnień teorii von Neumanna.

8. Przemienna analiza harmoniczna, teoria ergodyczna, teoria prawdopodobieństwa, teoria potencjału. Chociaż te cztery teorie miały bardzo różne początki, są one ściśle między sobą powiązane, w szczególności przez sposób korzystania z teorii całkowania.

Od 1925 r. znacznie się rozwinęło zastosowanie transformaty Fouriera. Stała się ona jednym z głównych narzędzi teorii prawdopodobieństwa i tworzy podstawę definicji operatorów pseudoróżniczkowych (p. Część 6), gdzie jej rozszerzenie na dystrybucje jest oczywiście istotne. Uogólnienie analizy harmonicznej na wszystkie lokalnie zwarte grupy przemienne w okresie 1930–1940 sprawiło wszakże, że pojawiły się nowe i nieoczekiwane zastosowania, z których najbardziej zasługuje na uwagę przekształcenie teorii liczb algebraicznych w rozdział analizy harmonicznej (p. Część 13).

Od 1950 r. w analizie harmonicznej zapanowała ogólna tendencja do skupiania się na trudnych zagadnieniach dotyczących „zbiorów wyjątkowych" (sięgająca Cantora i jego badań „zbiorów jednoznaczności"), która to tendencja mogła wyprowadzić teorię poza Główny Nurt, gdyby nie ciekawy sposób, w jaki w tych zagadnieniach występują algebry Banacha i topologiczne produkty tensorowe i gdyby nie tajemnicze związki, jakie te „zbiory wyjątkowe" miały z aproksymacjami diofantycznymi.

Jednakże najbardziej rzucającym się w oczy sukcesem było pozytywne rozstrzygnięcie, w klasycznej teorii Fouriera, problemu Łuzina przez L. Carlesona (1966): dokonując nadzwyczaj pomysłowych podziałów przedziałów był on w stanie wykazać, że szereg Fouriera funkcji $f \in L^2$ jest zbieżny prawie wszędzie do $f(x)$. R. Hunt rozszerzył ten wynik na wszystkie L^p dla $p > 1$.

Teoria ergodyczna zaczęła się w mechanice statystycznej, ale jako dyscyplina matematyczna mogła być sformułowana dopiero po tym, jak teoria prawdopodobieństwa została wchłonięta przez teorię miary. Wtedy też została poszerzona, obejmując badanie przekształceń zachowujących miarę i ich klasyfikację względem naturalnego pojęcia izomorfizmu. Po początkowym wyłomie, dokonanym około 1930 r. przez G. D. Birkhoffa i J. von Neumanna, z ich słynnymi twierdzeniami ergodycznymi, został wprowadzony pierwszy niezmiennik przez związanie z klasą izomorficz-

nych przekształceń zachowujących miarę klasy równoważnych operatorów unitarnych na przestrzeni Hilberta. Jednakże sam ten niezmiennik nie był w stanie scharakteryzować wszystkich typów izomorfizmów. Decydujący postęp został uzyskany przez Kołmogorowa w 1958 r. dzięki wprowadzeniu nowego niezmiennika, który nazwał on *entropią*. Zadziwiająca ta idea pozwoliła mu natychmiast na wykazanie, że entropia może w szczególności rozróżnić nieskończenie wiele klas nieizomorficznych pomiędzy najbardziej badanymi typami przekształceń zachowujących miarę, a mianowicie przesunięciami Bernoulliego. Idee te były aktywnie rozwijane przez szkołę Kołmogorowa, a w Stanach Zjednoczonych przez Ornsteina, który w 1970 r. doprowadził teorię do szczytu dowodząc, że entropia Kołmogorowa wystarcza do kompletnej klasyfikacji przesunięć Bernoulliego: dwa takie przekształcenia, mające tę samą entropię, są izomorficzne. Po tym wyniku przyszło wiele podobnych, uzyskanych głównie przez Ornsteina i jego szkołę.

Także teoria potencjału ma swoje początki w fizyce i w ciągu XIX wieku była częścią badań problemów wartości brzegowych dla równania Laplace'a: ich rozwiązania były wyrażane przez operatory całkowe, które mierze μ przypisywały funkcję postaci

$$x \to \int K(x, y)\, d\mu(y)$$

z odpowiednim jądrem K. Poczynając od około 1930 r. badanie tych operatorów całkowych stopniowo uwalniało się od klasycznej teorii „newtonowskiej" i skupiało na uogólnianiu na odpowiednie jądra różnych własności (zasada maximum, pojemność, „wymiatanie" itp.) potencjału Newtona. Doprowadziło to teorię potencjału do nawiązania stosunków z wieloma innymi częściami analizy, takimi jak nieprzemienna analiza harmoniczna (p. Część 9), teoria półgrup, a zwłaszcza teoria prawdopodobieństwa. Ten ostatni związek był raczej nieoczekiwany i okazał się nadzwyczaj owocny dla obu teorii.

9. Grupy Liego, nieprzemienna analiza harmoniczna, grupy automorficzne. Kiedy H. Weyl i E. Cartan rozwinęli w latach 1925–1930 globalną teorię półprostych grup Liego, ich skończenie wymiarowych reprezentacji i przestrzeni symetrycznych, można było pomyśleć, że ten rozdział teorii Liego zbliża się do końca. Tymczasem na odwrót, nasza wiedza o tych niezwykłych obiektach stale się wzbogaca o coraz nowe i (jak zawsze) zaskakujące własności, odkrywane przez licznych matematyków (Coxeter, Iwasawa, Chevalley, Borel, Bruhat, Coleman, Steinberg, Kostant, Tits, I. Macdonald; p. także B 483).

Nowy kierunek badań otworzył w 1939 r. fizyk E. Wigner, wyznaczając nieskończenie wymiarowe reprezentacje grupy Lorentza. Stało się to punktem wyjścia dla obszernej teorii nieskończenie wymiarowych repre-

zentacji grup Liego (i ogólniej, grup lokalnie zwartych), zwanej także nieprzemienną analizą harmoniczną, jednego z najbardziej dziś aktywnych obszarów badawczych. Może on służyć za przykład matematyki współczesnej, czerpie bowiem swoje narzędzia i pojęcia nie tylko z teorii Liego, ale także z analizy globalnej, teorii spektralnej, teorii dystrybucji etc. (LN 388, 466, 587). Najbardziej imponujące wyniki uzyskał Harish-Chandra w zakresie reprezentacji grup półprostych. Ujął je w długiej (jeszcze nie skończonej) serii głębokich i trudnych prac [11], do których inni matematycy dodali wiele ważnych własności. Kiriłłow nadał prawdopodobnie ostateczną postać teorii reprezentacji nilpotentnych grup Liego, rozpoczętej przez Dixmiera. Ostatnio spore osiągnięcia w zakresie zawiłej teorii reprezentacji rozwiązalnych grup Liego mieli Pukanszky, szkoła Dixmiera, L. Auslander i B. Kostant (LN 388).

Jednakże najbardziej rzucającą się w oczy nowością ostatnich lat było badanie nieskończenie wymiarowych reprezentacji p-adycznych i algebraicznych półprostych grup adelicznych, w szczególności tych, które są związane z dyskretnymi podgrupami „arytmetycznymi" (p. Część 13), a więc także z teorią form automorficznych i (dzięki ideom Heckego) z szeregami Dirichleta. Dotykamy tu samego jądra fascynującej teorii, o niezwykle bogatych strukturach, wspólnych z analizą harmoniczną, funkcjami holomorficznymi, teorią grup, geometrią algebraiczną i teorią liczb, do której aspektów arytmetycznych jeszcze wrócimy (p. Część 12). Ale od pracy matematyków czynnych na tym polu (Harish-Chandra, A. Weil, Gelfand i jego szkoła, Godement, A. Borel, Jacquet, Langlands, Deligne i inni) można spodziewać się jeszcze więcej. Sformułowano sporo niezwykłych hipotez, a pozytywne dotychczasowe wyniki są wysoce zachęcające. W szczególności wydaje się, że po raz pierwszy od pracy E. Artina z lat trzydziestych można mieć mniej więcej dokładny obraz tego, czym powinna być nieabelowa teoria ciał klas [8].

10. Grupy „abstrakcyjne". Teoria ta jest jedną z kilku, w której ostatnie postępy zostały uzyskane dzięki bardziej pomysłowemu stosowaniu starych narzędzi, takich jak argumentacja kombinatoryczna, teoria charakterów i podgrupy Sylowa. Na przykład P. Nowikow i jego szkoła uzyskali w końcu, po długim rozumowaniu kombinatorycznym, konstrukcję nieskończonych grup G, które spełniają warunek Burnside'a: G ma skończenie wiele generatorów i istnieje liczba całkowita $n \geqslant 697$ taka, że $x^n = e$ dla każdego $x \in G$.

Jednakże większość ostatnich postępów w teorii grup została uzyskana dzięki związkom z innymi gałęziami matematyki. Na przykład, bardzo wcześnie zdano sobie sprawę z tego (w teorii grup wolnych już około 1920 r.), że pojęcia topologiczne mogą być bardzo użyteczne, jeśli tylko jest możliwe związanie z daną grupą przestrzeni, na której ona działa.

W szczególności, w ten właśnie sposób Stallings ostatnio dowiódł, że skończenie generowalne grupy o wymiarze kohomologicznym $\leqslant 1$ są wolne (B 356). Lepsze wyniki dają się uzyskać, kiedy dana grupa może być zanurzona jako podgrupa dyskretna w półprostą grupę Liego, wtedy bowiem działa ona na obiekcie o bogatej strukturze, a mianowicie na odpowiedniej przestrzeni symetrycznej. Idea ta była ostatnio z powodzeniem stosowana przez Borela i Serre'a, używających pomysłowych kompaktyfikacji takiej przestrzeni symetrycznej.

Co więcej, dla pewnych grup, które nie mają takiego zanurzenia, Serre odkrył, że istnieje czasem dobry substytut przestrzeni symetrycznej, a mianowicie „budowle" Titsa–Bruhata, na których można sprawić, by grupa taka działała, co daje bardzo podobne wyniki. Te nadzwyczaj interesujące obiekty kombinatoryczne były najpierw wyabstrahowane przez Titsa z teorii grup Chevalleya (p. niżej), a następnie zastosowane przez niego i Bruhata do rozwinięcia bardzo ogólnej teorii grup algebraicznych nad ciałami lokalnymi. Dzisiaj wypływają one w najbardziej niespodziewanych miejscach, takich jak teoria niezmienników Mumforda czy ostatnia definicja Quillena K-teorii, a analogia między nimi a przestrzeniami symetrycznymi rozciąga się na dyskretne analogi form harmonicznych, funkcji sferycznych, potencjału itp.

Inny zadziwiający związek został ujawniony w 1955 r., kiedy to Chevalley odkrył ogólną metodę przypisywania każdej zespolonej prostej algebrze Liego i każdemu ciału K grupy „abstrakcyjnej", która jest skończona dla K skończonego, a ponadto prosta, z wyjątkiem czterech przypadków szczególnych dla ciał o dwóch lub trzech elementach. To „wyjaśniało" zbieżności dostrzeżone przez Jordana i Dicksona między klasycznymi grupami teorii Liego a „abstrakcyjnymi" klasycznymi grupami, a ponadto zapoczątkowało żywe odnowienie się teorii skończonych grup prostych, która znajdowała się w uśpieniu od roku 1900.

Zauważono najpierw, że drobne zmiany w metodach Chevalleya dawały kilka innych szeregów skończonych grup prostych. Jednocześnie powiodło się Feitowi i Thompsonowi, przez podanie niezwykłego dowodu, polegającego na sprowadzeniu do sprzeczności (300 stronic!) i stosującego wszystkie klasyczne narzędzia teorii grup — dowieść starej hipotezy Burnside'a, że wszystkie nieprzemienne grupy proste mają rząd parzysty. A nieco później, używając podobnych metod, Thompson zdołał wyznaczyć *explicite* wszystkie minimalne nieprzemienne grupy proste (tj. nie zawierające takich podgrup właściwych).

Około 1963 r. wydawało się, że istniała już kompletna lista skończonych grup prostych, a mianowicie grupy „typu Liego" otrzymane za pomocą metod Chevalleya i ich modyfikacji, do których należało dodać grupy alternujące i pięć grup odkrytych przez Mathieu w 1860 r. I wtedy, w 1966 r., młody matematyk jugosłowiański Janko odkrył nową grupę

prostą rzędu 175 560, w następnych zaś paru latach rozsypał się worek: oprócz grup Mathieu znamy dziś około dwudziestu innych „sporadycznych" grup prostych, z których największa ma rząd $\geqslant 10^{24}$; wszystkie one zostały uzyskane za pomocą pięciu czy sześciu różnych kombinatorycznych lub teoriogrupowych konstrukcji. Aż do niedawna nikt nie rozumiał należycie tej sytuacji, podobnej do tej, w jakiej znajdowali się fizycy atomowi z ich setkami cząstek elementarnych i można nawet było powiedzieć, że tutaj postęp polegał na odebraniu nam poczucia, że jesteśmy blisko osiągnięcia ostatecznego celu, i na przywróceniu stanu całkowitego zamieszania! Według wszakże ostatnich wieści, specjaliści mają pewną nadzieję, opartą na świeżych pomysłach, opanowania tej sytuacji ciężką pracą, która może się ciągnąć ponad dwadzieścia lat (!), ale która wyznaczy w końcu wszystkie skończone grupy proste (B 502)([4]).

11. Geometria analityczna. Dochodzimy w końcu do trzech teorii — geometrii analitycznej, geometrii algebraicznej, teorii liczb algebraicznych — których tradycyjna postać została przez nowe pomysły zmieniona niemal nie do poznania, a które jednocześnie zachowują tak ścisłe związki pomiędzy sobą i tak trudno jest czasem je rozgraniczyć, że zachodzi pokusa traktowania ich jako trzech postaci jednej dyscypliny.

Geometria analityczna jest nazwą przypisywaną obecnie teorii funkcji analitycznych wielu zmiennych i jej uogólnieniom w duchu analizy globalnej. Chociaż pierwsze wyniki z początku XX wieku pokazały, jak głębokie są różnice w zachowaniu funkcji analitycznych, kiedy się przechodzi od jednej zmiennej zespolonej do większej ich liczby, ogólna teoria zaczęła się dopiero od fundamentalnych prac H. Cartana, P. Thullena i K. Oki w okresie 1930–1950, przy czym większość wyników dotyczyła zasadniczo funkcji określonych na podzbiorach otwartych przestrzeni $\boldsymbol{C}^N$. Jednakże na innym kierunku, dzięki pracom H. Weyla i W. Hodge'a, rozwinęło się już wówczas badanie rozmaitości zespolonych. Oba nurty połączyły się w ogólnym pojęciu *przestrzeni zespolonej*, kiedy to H. Cartan i Serre zdali sobie sprawę, że pochodząca od Leraya teoria snopów wyjątkowo dobrze nadawała się do wyrażania wyników Cartana–Oki w sposób wewnętrzny. I w końcu najlepszą definicję przestrzeni analitycznej uzyskano przez potraktowanie jej jako szczególnego przypadku „przestrzeni upierścienionej", tj. przestrzeni topologicznej ze zdefiniowanym na niej snopem pierścieni, spełniającym pewne warunki.

Ta nowa technika kohomologiczna pozwoliła na niemal natychmiastowe rozwiązanie niektórych podstawowych problemów, takich jak

---

([4]) W chwili tłumaczenia tego artykułu wszystkie grupy sporadyczne były już wyznaczone: jest ich 26; największa, zwana Monster, ma rząd $\approx 10^{53}$; por. Michael Aschbacher, *The classification of the finite simple groups*, Math. Intellig. 3 (1981) 59–65 (*przyp. tłum.*).

charakteryzacja obszarów holomorficzności (problem E. Leviego), teoria przestrzeni Steina (opierająca się na słynnych twierdzeniach A i B — H. Cartana), fundamentalne twierdzenie Grauerta o obrazach prostych przez odwzorowania właściwe i twierdzenia o dualności Serre'a dla zwartych rozmaitości zespolonych. Większe postępy poczyniła ostatnio teoria osobliwości (przekształceń, przestrzeni) wraz z rozwiązaniem przez Hironakę osobliwości przestrzeni analitycznych, topologicznym badaniem izolowanych osobliwości (Mumford, Milnor, Pham, Brieskorn) z ich tajemniczymi związkami ze sferami egzotycznymi i diagramami Dynkina prostych algebr Liego, i w końcu Leraya teoria residuów.

Innym ciekawym kierunkiem rozwoju były uogólnienia teorii na rozmaitości p-adyczne z jednej strony i nieskończenie wymiarowe rozmaitości zespolone typu Banacha z drugiej. Nie pojawiły się one jedynie ze względu na ogólność, bez innej motywacji. Przeciwnie, p-adyczne funkcje analityczne odgrywają rosnącą i fundamentalną rolę w teorii liczb, zaś w analizie funkcjonalnej już od dłuższego czasu odczuwało się potrzebę dobrej teorii rozmaitości nieskończonego wymiaru, zwłaszcza dla zastosowań w mechanice, by można było się uporać z naturalnymi zagadnieniami o nieskończenie wielu parametrach. Najbardziej zadziwiającego zastosowania rozmaitości typu Banacha do badania zwykłych rozmaitości zespolonych skończonego wymiaru dostarczył A. Douady, który zdołał dowieść istnienia struktury lokalnie skończenie wymiarowej rozmaitości zespolonej na zbiorze wszystkich podrozmaitości analitycznych rozmaitości analitycznej (skończonego wymiaru). Prawdziwie oryginalna idea jego dowodu polega na pokazaniu istnienia na tym zbiorze struktury rozmaitości typu Banacha, a dopiero potem wykazaniu, że struktura ta jest w istocie w otoczeniu każdego punktu skończenie wymiarowa.

12. Geometria algebraiczna i algebra przemienna. W XIX stuleciu geometria algebraiczna, będąc w istocie fragmentem analizy zespolonej, zajmowała się krzywymi i powierzchniami algebraicznymi w $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{C})$ i $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$. Chociaż w 1882 r. Kronecker, Dedekind i Weber pokazali, że możliwe jest postępowanie czysto algebraiczne, potrzeba takich metod stała się wyraźna dopiero po 1926 r., kiedy głównym problemem było zbudowanie z niczego „abstrakcyjnej" geometrii algebraicznej nad dowolnymi ciałami (w szczególności nad ciałami o charakterystyce $\neq 0$) i to nie z samego tylko pragnienia większej ogólności, ale ponieważ stało się to niezbędne dla lepszego rozumienia analizy diofantycznej. Trudność wyzwania polegała na tym, by znaleźć odpowiednik wielkiej wnikliwości geometrycznej poprzednich generacji (a zwłaszcza znakomitej szkoły włoskiej), który byłby dobry także w tym znacznie rozszerzonym kontekście i jednocześnie opierał się na mniej chwiejnych podstawach.

Pierwsze próby, głównie van der Waerdena, niezupełnie osiągnęły cel. Podstawowy kłopot krył się w teorii przecięć. Został on w końcu pokonany przez A. Weila w jego trudnych „*Foundations*", w których po raz pierwszy pojęcie rozmaitości algebraicznej zostało uwolnione od wszelkiego zanurzenia w przestrzeni rzutowej. A jednocześnie, w innym kierunku, Zariski cierpliwie badał nowe pojęcia algebraiczne i topologiczne, które — jak to dziś widzimy — położyły podwaliny jeszcze lepszych rzeczy, jakie miały nadejść. Bezpośrednim rezultatem tej ich pracy było uogólnienie, przez nich samych i ich szkoły, wielkiej części klasycznej geometrii algebraicznej na przypadek „abstrakcyjny", a najbardziej się rzucającym w oczy sukcesem był słynny dowód A. Weila z 1948 r. tak zwanej „hipotezy Riemanna dla krzywych nad ciałem skończonym".

Po 1950 r. nastąpił nowy zwrot. Chociaż dorobek okresu Weil–Zariski był czysto algebraiczny, Zariski zauważył, że niektóre wyniki dają się lepiej wyrazić w przekładzie na odpowiedni język topologiczny, Weil zaś pokazał, z pomocą tej topologii, że inieje ścisły związek pomiędzy algebraicznym pojęciem dzielnika a topologicznym pojęciem wiązki. W 1955 r. Serre odkrył, że metody teorii opów, które wraz z H. Cartanem stosował w geometrii analitycznej, mogą być adaptowane do potrzeb geometrii algebraicznej nad dowolnym ciałem, a to za pomocą topologii Zariskiego, która przenosi całą maszynerię „przestrzeni upierścienionych" na rozmaitości algebraiczne w sensie A. Weila. W ten sposób odtworzył w przypadku „abstrakcyjnym" to pokrewieństwo z Analizą, które znali XIX-wieczni geometrzy.

Niemal natychmiast A. Grothendieck zdał sobie sprawę, że koncepcja Serre'a może być znacznie uogólniona i zaczął rozwijać swoją gigantyczną teorię schematów, która dziś obejmuje jako przypadek szczególny całą algebrę przemienną i która wprowadziła do gactwo nowych pojęć, metod i problemów, że kilka pokoleń matematyków może w całości poświęcić swoje życie na eksplorację wszystkich fascynujących możliwości, które ta obszerna i ciągle mało zbadana dziedzina otwiera.

Oczywiście, podobnie jak w geometrii analitycznej, kohomologie na snopach stały się podstawowym narzędziem, które tłumaczy na współczesną terminologię (naturalnie bardziej abstrakcyjną, ale też o wiele ogólniejszą i łatwiejszą w traktowaniu) techniki szkoły włoskiej. W istocie rzeczy „klasyczna kohomologia Serre'a-Grothendiecka, oparta na topologii Zariskiego, ma dziś wiele konkurencyjnych ujęć, opartych na pojęciu „topologii Grothendiecka" lub na jeszcze innych rozważaniach, i jak do tej pory nie ma ogólnej zgody co do tego, która (jeśli w ogóle) jest „najlepsza".

W każdym razie zagadnienia rozwiązane tymi metodami składają się już na obszerną listę zawierającą uogólnienie Grothendiecka formuły Riemanna–Rocha–Hirzebrucha, rozwiązanie osobliwości (w przypadku

charakterystyki 0) przez Hironakę, rozwiązanie przez Mumforda zagadnienia „moduli" dla krzywych algebraicznych nad dowolnym ciałem, a ostatnio także wyjaśnienie dwóch starych pytań, które sprawiały tyle kłopotów włoskim geometrom: istnienie rozmaitości *unirational* oraz wyznaczenie warunków zupełności szeregów trygonometrycznych.

Ale najbardziej oryginalna praca po 1960 r. skupiała się wokół całego kompleksu zagadnień ogniskujących się na hipotezach Weila dotyczących funkcji ζ rozmaitości algebraicznych nad ciałami skończonymi. Chociaż fundamentalnie arytmetyczne z natury, badanie ich konsekwencji wkrótce ujawniło ich związki z rozmaitościami abelowymi, a w szczególności z krzywymi eliptycznymi i z głęboką teorią Heckego form modularnych i ich uogólnień przez Eichlera i Shimurę. Najważniejszy wynik w tym kierunku uzyskał w 1967 r. Deligne, który pokazał, że hipotezy Weila pociągają prawdziwość starych hipotez Ramanujana–Peterssona o współczynnikach Fouriera form modularnych. Same natomiast hipotezy Weila stały się dla Grothendiecka głównym motywem dla rozwinięcia jego teorii schematów i jego definicji topologii *étale* i kohomologii *étale* jako właściwych narzędzi w ich dowodzeniu; dzięki tej wnikliwości on i M. Artin zdołali rozwiązać przynajmniej łatwiejszą część hipotez Weila o wymierności i równaniach funkcyjnych funkcji ζ i L. Jednakże stanęli oni widząc już ziemię obiecaną i dopiero w 1973 r. Deligne uzyskał kompletne dowody tych hipotez. I jak zwykle w matematyce, ten ogromny sukces niczego nie zakończył, lecz stał się kluczem otwierającym bramy nowej i nadzwyczaj podniecającej *terra incognita*, pełnej hipotez, w których analiza, geometria analityczna i teoria liczb mieszają się w fantastycznym koktajlu.

13. Teoria liczb. Teoria liczb przestępnych i teoria aproksymacji diofantycznych, które spoczywały w uśpieniu od czasów pracy Siegela i Gelfonda z lat około 1930 roku, poczyniły znaczące postępy od 1955 r., ale tylko dzięki pomysłowemu wysubtelnianiu istniejących metod i bez wprowadzania żadnego nowego pojęcia. W 1955 r. K. Roth dał najlepsze z możliwych oszacowanie w twierdzeniu aproksymacyjnym Thuego–Siegela dla liczb algebraicznych, nieco zaś później W. Schmidt rozszerzył wyniki Rotha na aproksymacje jednoczesne. W teorii liczb przestępnych A. Baker uzyskał w 1966 r. istotne wzmocnienie wyników Siegela i Gelfonda pokazując, na przykład, że liczba $\pi + \log a$ jest przestępna dla dowolnej liczby algebraicznej a. Co więcej, metody Bakera umożliwiły po raz pierwszy wyznaczenie *explicite* efektywnych oszacowań dla rozwiązań problemów diofantycznych, gdzie poprzednio wiedziano tylko, że liczba rozwiązań jest skończona. Na przykład, mamy już dziś wyznaczone efektywne oszacowanie dla tych liczb całkowitych $d > 0$, dla których ciało kwadratowe $\boldsymbol{Q}\left((-d)^{1/2}\right)$ ma liczbę klas 2; podobnie, jeżeli D jest liczbą

całkowitą, to rozwiązania w liczbach całkowitych x, y równania $y^2 = x^3 + D$ spełniają nierówność

$$\sup(|x|, |y|) < \exp(10^{10}|D|^{10\,000}) \quad \text{(patrz [1])}.$$

Natomiast w teorii liczb algebraicznych podstawowe pojęcia różnią się dziś całkowicie od tych, które były w obiegu około 1925 r. Dziś problemy są najpierw „lokalizowane" w każdym „miejscu" rozważanego ciała, wskutek czego ciało to zamienia się na „ciało lokalne", które jest uzupełnieniem pierwotnego w takim „miejscu", a następnie od badania zagadnień lokalnych przechodzi się z powrotem do problemu „globalnego" przez zanurzenie ciała liczbowego w jego pierścień *adeli*, stanowiący w istocie podpierścień produktu wszystkich ciał lokalnych. Główna nowość polega na tym, że grupa przemienna, która pojawia się w tej teorii, jest *lokalnie zwarta*, co umożliwia stosowanie potężnych środków analizy harmonicznej.

W takich ramach wyrażają się dziś wyniki abelowej teorii klas ciał i, co więcej, sformułowania głównych twierdzeń posługują się kohomologiami grup. Używając takich metod kohomologicznych Gołod i Szafarewicz rozwiązali niedawno ostatnie otwarte zagadnienie w tej teorii konstruując, w oparciu o drobiazgową analizę grup Galois p-rozszerzeń i ich grup kohomologii, przykład nieskończonej „wieży" absolutnych ciał klas.

Najciekawsze z ostatnich wyników algebraicznej teorii liczb zostały uzyskane w teorii *grup arytmetycznych*: jeśli $G \subset \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$ jest półprostą grupą Liego, to podgrupy arytmetyczne grupy G są tymi podgrupami Γ, które są współmierne z $G \cap \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{Z})$, co znaczy, że przekrój $\Gamma \cap \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{Z})$ ma skończony indeks zarówno w Γ, jak i w $G \cap \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{Z})$. Badanie tych grup obejmuje w szczególności (w innym sformułowaniu) „arytmetyczną teorię form" sięgającą Hermite'a i Jordana. Używając teorii grup algebraicznych A. Borel i Harish-Chandra wyjaśnili i uogólnili na wszystkie grupy półproste „twierdzenie o skończoności" owej teorii.

Co więcej, proces zanurzania $\boldsymbol{Q}$ w pierścień jego adeli daje się rozszerzyć prowadząc do zanurzenia G w lokalnie zwartą grupę „adeliczną" $G_{\boldsymbol{A}}$. Jeśli $G_{\boldsymbol{Q}} = G \cap \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{Q})$, to okazuje się, że badanie grup arytmetycznych $\Gamma \subset G$ daje się zredukować do badania przestrzeni jednorodnej $G_{\boldsymbol{A}}/G_{\boldsymbol{Q}}$, do której można już zastosować teorię miary Haara i w ten sposób nadać nową postać klasycznym wynikom Minkowskiego i Siegela z arytmetycznej teorii form kwadratowych, a także uzyskać uogólnienia tej teorii na wszystkie grupy półproste.

Grupy arytmetyczne Γ mają tę własność, że przestrzeń jednorodna G/Γ ma skończoną miarę niezmienniczą i od dawna podejrzewano, że poza paroma dobrze znanymi wyjątkami (jak $G = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{R})$) wszystkie podgrupy z tą własnością są arytmetyczne. Udowodnił to w końcu Mar-

gulis w 1974 r. za pomocą bardzo trudnego i skomplikowanego rozumowania używającego, między innymi, teorii ergodycznej (B 482).

Wśród podgrup arytmetycznych grupy $\mathrm{SL}(n, \boldsymbol{Z})$ niektóre składają się z macierzy o elementach całkowitych o tej własności, że wszystkie elementy macierzy $X-I$ dzielą się przez ustaloną liczbę całkowitą m. Grupy współmierne z nimi nazywa się „podgrupami kongruencyjnymi" i podobne podgrupy arytmetyczne można określić także dla innych rodzajów grup półprostych. Powstałe teraz naturalne pytanie, czy w ten sposób otrzyma się wszystkie podgrupy arytmetyczne, zostało niedawno całkowicie rozwiązane przy użyciu metod teorii ciał klas i rozwiązanie okazało się mieć bliskie związki z K-teorią zastosowaną do ciał liczbowych. Doprowadziło to do bardzo aktywnych badań w tej teorii związanych, z drugiej strony, z pięknymi wcześniejszymi wynikami Iwasawy o liczbie klas ideałów ciała cyklotomicznego p^n-tych pierwiastków z jedności (B 394).

Obraz jest jasny i mówi sam za siebie: bez najmniejszej przesady można powiedzieć, że widzieliśmy więcej utalentowanych matematyków, więcej nowych metod i idei, i więcej rozwiązanych ważnych problemów od 1940 r. niż od czasów Talesa do 1940 r. Można też niemal co roku oczekiwać, że gdzieś na świecie pojawi się młody geniusz matematyczny, który skieruje jakąś dyscyplinę matematyczną na nieoczekiwane drogi rozwoju. Nie ma zatem żadnego powodu, by wątpić w stały postęp matematyki, dopóki warunki materialne, w których matematycy żyją i pracują, są porównywalne z istniejącymi obecnie w krajach rozwiniętych.

Prace cytowane

Poniższa lista ogranicza się do kilku tylko książek i prac, obszerną natomiast bibliografię czytelnik znajdzie we wspomnianej we wstępie książce.

Litera B oznacza *exposé* Seminarium Bourbakiego. Numery 1–346 wyszły w wydawnictwie Benjamin, a od numeru 347 poczynając ukazują się w Lecture Notes 179, 180, 244, 317, 383, 431, 514 i 567 Springera, oznaczonych literami LN.

[1] A. Baker, *Transcendental number theory*, Cambridge Univ. Press, London–New York 1975.

[2] R. Bott, *Some aspects of invariant theory in differential geometry*, w książce: *Differential operators on manifolds*, C. I. M. E. III Ciclo 1975, 49–145, Cremonese–Roma 1975.

[3] *Dynamical systems*, Proc. Symp. at Bahia 1971 (red. M. Peixoto), Academic Press, London–New York 1973.

[4] P. Erdös, *The art of counting; selected writings*, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1973.

[5] —, *Some recent advances and current problems in Number theory*, w książce: *Lectures on modern mathematics* (red. T. Saaty), tom III, 196–244, Wiley, New York 1965.

[6] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, curvature and cohomology*, tom III, Academic Press, New York–San Francisco–London 1976.

[7] T. Heath, *Diophantus of Alexandria*, Dover, New York 1964.

[8] J. Shalika, *Some conjectures in class field theory*, w książce: *1969 Number Theory Institute*, Proc. Symp. in Pure Math., tom XX, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1971.

[9] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747–817.

[10] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. Math. I. H. E. S., 47 (1977), 269–332.

[11] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple groups*, 2 tomy, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1972.