ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVI (1984)

wmptm 1897

# Rozwiązania zadań

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, nowe zadania itp.) należy kierować pod adresem: Michał Krych, Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego, 00–901 Warszawa, PKiN.

**263.** Niech $F\colon \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$, gdzie $\boldsymbol{R}_+$ oznacza zbiór wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych, będzie działaniem spełniającym następujące warunki:

1° $F\big(a, F(b, c)\big) = F\big(F(a, b), c\big)$,

2° $F(a, b) = F(b, a)$,

3° $F(a, 0) = a$, $F(0, b) = b$,

4° funkcja $F$ jest ciągła i niemalejąca ze względu na każdą ze zmiennych.

Niech $k\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ będzie taką funkcją, że $k(u) > 0$ dla każdej dodatniej liczby $u$. Mówimy, że funkcja $k$ jest *$F$-superaddywna*, gdy $F\big(k(a), k(b)\big) \leqslant k(a+b)$ dla dowolnych $a, b \in \boldsymbol{R}_+$. Czy dla każdego działania $F$ istnieje funkcja $F$-superaddytywna? Jeśli tak nie jest, to scharakteryzować zbiór tych $F$, dla których istnieją funkcje $F$-superaddytywne.

*J. Musielak* (Poznań), *J. Peetre* (Lund)

**264.** Niech $\mathscr{F}$ oznacza zbiór działań określony w zadaniu 263. Mówimy, że $F \in \mathscr{F}$ i $G \in \mathscr{F}$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homeomorfizm $h\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ taki, że $G(a, b) = h^{-1}\big(F\big(h(a), h(b)\big)\big)$ dla dowolnych $a, b \in \boldsymbol{R}_+$. Czy istnieje działanie $F$, które nie jest równoważne ani działaniu max, ani działaniu dodawania?

*L. Maligranda* (Szczecinek)

Aby rozwiązać powyższe dwa zadania, wykażemy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE. *Funkcja $F\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ należy do zbioru $\mathscr{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rodzina $\mathfrak{T}$ parami rozłącznych przedziałów otwartych w $\boldsymbol{R}_+$ oraz rodzina $(h_P)_{P\in\mathfrak{T}}$, gdzie $h_P$ jest rosnącym homeomorfizmem przedziału $(0, \infty)$ na przedział $P$ takim, że*

$$F(x, y) = \begin{cases} h_P\big(h_P^{-1}(x) + h_P^{-1}(y)\big), & \text{jeśli istnieje } P \in \mathfrak{T} \text{ takie, że } x, y \in P, \\ \max(x, y) & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{1}$$

Dowód. Pominiemy łatwe sprawdzenie, że funkcja (1) spełnia warunki 1°–4°.

Załóżmy, że $F \in \mathscr{F}$. W dalszym ciągu będziemy milcząco korzystali zarówno z własności 1°, 3° i 4°, jak i z faktu, że $F$, będąc monotoniczną i ciągłą względem każ-

dej ze zmiennych, jest ciągła na $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+$. Będziemy pisali $a*b$ zamiast $F(a, b)$; oczywiste skojarzenia arytmetyczne pozwolą wtedy pominąć komentarz do rachunków. Niech

$$Z = \{z \in \boldsymbol{R}_+ : z*z = z\}.$$

Oznaczmy przez $T$ rodzinę składowych spójnych zbioru otwartego $\boldsymbol{R}_+ - Z$.

LEMAT 1. *Jeśli* $0 \leqslant a \leqslant z \leqslant b$, $z \in Z$, *to* $a*b = b = b*a$.

Dowód. Mamy $b \leqslant a*b \leqslant z*b \leqslant b$, bo gdyby $z*b > b$, mielibyśmy $z*z*b = z*b > z*b$, co daje sprzeczność. Podobnie $b \leqslant b*a \leqslant b*z \leqslant b$.

Teraz rozpatrujemy ustalony przedział otwarty $P \in \mathfrak{T}$.

LEMAT 2. *Jeśli* $a, b \in P$, *to* $a*b \in P$.

Dowód. Niech $a, b \in P$, $a \leqslant b$. Gdyby teza była fałszywa, istniałaby liczba $z \in Z$ taka, że $a \leqslant b < z \leqslant a*b$, skąd na mocy lematu 1 mielibyśmy sprzeczność: $a*b < a*z = z$. Rozumowanie w przypadku $b \leqslant a$ jest analogiczne.

Dla $x \in \boldsymbol{R}_+$ zdefiniujmy indukcyjnie: $1 \circ x = x$, $(n+1) \circ x = (n \circ x)*x$. Oczywiście dla każdego naturalnego $n$

(2) funkcja $x \to n \circ x$ jest ciągła i rosnąca w $\boldsymbol{R}_+$.

Wybierzmy dowolny punkt $e$ przedziału $P$. Z lematu 2 łatwo wynika, że

(3) ciąg $(ne)$ jest rosnący.

Dla $n$, $m$ naturalnych kładziemy

$$h_P(n/m) = x \quad \text{takie, że} \quad m \circ x = n \circ e$$

($x$ istnieje i jest jedyne na mocy (2)).

Łatwo widzieć, że funkcja $h_P$ jest dobrze określona na zbiorze $Q$ liczb wymiernych dodatnich (jej wartości nie zależą od reprezentacji liczby wymiernej w postaci ułamka) i jest rosnąca, co wynika z (2) i (3). Stosując lemat 2 łatwo wykazać, że $h_P(Q) \subset P$. Wreszcie mamy oczywistą tożsamość

(4) $$h_P(x+y) = h_P(x)*h_P(y).$$

LEMAT 3. $\lim h_P(n) = \sup P \in Z \cup \{\infty\}$, $\lim h_P(1/n) \in \inf P \in Z$.

Dowód. Niech $b = \lim h_P(n)$. Jeśli $b < \infty$, to $b*b = \lim h_P(2n) = b$, skąd $b \in Z$. Podobnie liczba $a = \lim h_P(1/n)$ ma własność $a*a = \lim h_P(2/n) = a \in Z$.

LEMAT 4. *Jeśli* $(x_n)$ *jest niemalejącym ciągiem liczb wymiernych takim, że ciąg* $(x_n + 10^{-n})$ *jest nierosnący,* $x_n > 0$, *to* $\lim h_P(x_n) = \lim h_P(x_n + 10^{-n})$.

Dowód. Niech $a = \lim h_P(1/n) = \lim h_P(10^{-n})$. Na mocy lematów 1 i 3, $x*a = x$ dla każdego $x \geqslant a$. Stąd na mocy wzoru (4)

$$\lim h_P(x_n + 10^{-n}) = \lim h_P(x_n)*a = \lim h_P(x_n).$$

Teraz możemy dokończyć dowód twierdzenia. Ponieważ funkcja $h_P: Q \to P$ jest rosnąca, z lematu 4 wynika, że jednoznacznie przedłuża się ona do funkcji ciągłej rosnącej $h_P: (0, \infty) \to P$. Z lematu 3 wynika, że odwzorowuje ona homeomorficznie $(0, \infty)$ na całe $P$. Oczywiście tożsamość (4) pozostaje słuszna dla $x, y \in (0, \infty)$, skąd górna równość we wzorze (1). Dolna równość wynika bezpośrednio z lematu 1.

Uwaga 1. Jak wynika z podanego dowodu, twierdzenie o postaci działania $*$ pozostaje słuszne bez założenia jego przemienności (warunku 2°).

Rozwiązanie (pozytywne) zadania 263. Jeśli rodzina $\mathfrak{T}$ jest pusta, to $F(a, b) = \max(a, b)$ i wystarczy przyjąć $k(x) = x$ dla $x \in \boldsymbol{R}_+$. Jeśli $P$ jest jakimkolwiek prze-

działem rodziny $\mathfrak{T}$, to kładąc $k(x) = h_P(x)$, mamy na mocy (4), $F(k(x), k(y)) = k(x+y)$.

(*Od Redakcji*: Częściowe rozwiązanie zadania 263 zostało zamieszczone w *Wiadom. Mat.* 24 (1982), str. 241–242.)

Rozwiązanie zadania 264. Postacie działania $F$ opisane w sformułowaniu zadania odpowiadają tylko przypadkom $Z = 0$ i $Z = \boldsymbol{R}_+$ (tzn. gdy $\mathfrak{T}$ składa się jedynie z półprostej dodatniej lub jest puste).

Uwaga 2. Jeśli o działaniu $*$ dodatkowo założyć, że jest ono rozdzielne względem mnożenia przez liczby nieujemne, to z wzoru (1) łatwo wynika, że jest ono albo postaci $\max(a, b)$, albo postaci $(a^p+b^p)^{1/p}$ $(p > 0)$. Fakt ten jest równoważny twierdzeniu Bohnenblusta. Jeśli ponadto zachodzi „nierówność trójkąta" $a*b \leqslant a+b$, to $p \geqslant 1$. Ten ostatni fakt jest równoważny charakteryzacji metrycznej przestrzeni $L_p$ podanej przez H. F. Bohnenblusta: *An axiomatic characterization of $L_p$ spaces*, Duke Math. J. 61 (1940), 627–640, i wiąże się też z twierdzeniem Zippina o bazach doskonale jednorodnych, por. Ivan Singer: *Bases in Banach spaces*, Springer Verlag, 1970, str. 29.

*Cz. Bessaga* (Warszawa)

**267.** Niech $\Gamma$ będzie obrazem homeomorficznym okręgu na płaszczyźnie. Pokazać, że dla każdego punktu $a$ leżącego wewnątrz $\Gamma$ istnieją punkty $x, y \in \Gamma$ takie, że $a = \frac{1}{2}(x+y)$.

*Zadanie z Konkursu Putnama*

Dla każdego punktu $x \in \Gamma$ niech $x'$ będzie takim punktem, że $a = \frac{1}{2}(x+x')$. Niech $\Gamma' = \{x' : x \in \Gamma\}$. $\Gamma'$ jest homeomorficznym obrazem okręgu. Wystarczy pokazać, że $\Gamma \cap \Gamma' \neq \emptyset$. W tym celu, wobec twierdzenia Jordana, wystarczy zauważyć, że jeżeli punkt $x$ krzywej $\Gamma$ leży wewnątrz (zewnątrz) krzywej $\Gamma'$, to odpowiadający mu punkt $x'$ krzywej $\Gamma'$ leży wewnątrz (zewnątrz) krzywej $\Gamma$.

*A. Mysior* (Gdańsk)

**268.** Czy istnieje nieprzeliczalna rodzina $\mathscr{U}$ podzbiorów prostej spełniająca warunki:

(i) jeżeli $A, B \in \mathscr{U}$, to $A \subset B$ lub $B \subset A$,

(ii) jeżeli $A, B \in \mathscr{U}$ i $A \subset B$, to zbiór $B-A$ zawiera odcinek długości 1.

*T. Iwaniec* (Warszawa)

Niech $f$ będzie dowolną różnowartościową funkcją odwzorowującą zbiór liczb wymiernych $\boldsymbol{Q}$ w zbiór liczb parzystych. Dla każdej liczby rzeczywistej $x$ niech

$$A_x = \bigcup_q \{(f(q)-1, f(q)+1) : q \in \boldsymbol{Q} \text{ i } q < x\}.$$

Rodzina $\{A_x: x \in \boldsymbol{R}\}$ ma moc nieprzeliczalną i spełnia żądane warunki:

(i) jeżeli $x < y$, to $A_x \subset A_y$,

(ii) jeżeli $x < y$ i $q \in (x, y) \cap \boldsymbol{Q}$, to $(f(q)-1, f(q)+1) \subset A_y - A_x$.

*A. Mysior* (Gdańsk)

**272*.** Ostrosłupy są wielościanami wypukłymi, nie mającymi żadnej przekątnej. Znaleźć wszystkie typy wielościanów wypukłych o tej własności.

*W. Mnich* (Opole)

Niech $T$ będzie rodziną wielościanów wypukłych $W$ takich, że każdy odcinek łączący dwa wierzchołki $W$ leży na brzegu $W$.

TWIERDZENIE. *Trójwymiarowy wielościan należy do $T$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ostrosłupem wypukłym lub należy do klasy $T_0$ pięciościanów mających dwie nieprzyległe ściany trójkątne i trzy czworokątne.*

Szkic dowodu. Pisząc $W = a \dots p$ będziemy rozumieli, że $W$ jest wielościanem wypukłym o wierzchołkach $a, \dots, p$. Wielościan wypukły $W = p_1 \dots p_n ab$ taki, że $V = p_1 \dots p_n a$ jest ostrosłupem o podstawie $p_1 \dots p_n$ nazwiemy *klinem*, jeśli $b$ leży ponad płaszczyzną podstawy ostrosłupa $V$, i nazwiemy *podwójną piramidą*, jeśli $b$ leży pod tą płaszczyzną. Dalej pisząc „klin $p_1 \dots p_n ab$" lub „podwójna piramida $p_1 \dots p_n ab$" będziemy automatycznie zakładali, że $p_1, \dots, p_n$ leżą w jednej płaszczyźnie i są ponumerowane kolejno zgodnie z jednym z dwóch obiegów obwodu wielokąta, $a$ i $b$ leżą poza tą płaszczyzną. Działania na wskaźnikach $1, \dots, n$ są rozumiane modulo $n$.

LEMAT 1. *Jeśli $W = p_1 \dots p_n ab \in T$ jest podwójną piramidą, to $n = 3$ i $W$ jest równocześnie ostrosłupem o podstawie czworokątnej $abp_ip_{i+1}$.*

Dowód. Jeśli podwójna piramida $W = p_1p_2p_3ab$ nie jest ostrosłupem, to $ab$ jest jej przekątną. Jeśli $W = p_1 \dots p_n ab$, $n > 3$, to każda przekątna wieloboku $p_1 \dots p_n$ jest równocześnie przekątną podwójnej piramidy $W$.

LEMAT 2. *Jeśli klin $W = p_1p_2p_3ab \in T$, to tylko jeden z odcinków $ap_i$ jest jego krawędzią i $W$ jest równocześnie ostrosłupem o podstawie $abp_jp_k$.*

Dowód. Rozpatrzmy ostrosłup $V = p_1p_2p_3a$. Załóżmy, że $b$ nie leży na żadnej z płaszczyzn ścian bocznych tego ostrosłupa (i oczywiście nie leży wewnątrz), wybierzmy tę ze ścian $p_ip_{i+1}a$, która oddziela $b$ od $V$. Wówczas z wypukłości $W$ wynika, że $bp_{i+2}$ jest przekątną $W$, tzn. $W \notin T$. Jeśli $b$ leży na jednej z płaszczyzn ścian bocznych, to oczywiście zachodzi teza lematu.

LEMAT 3. *Jeśli $W = p_1 \dots p_n ab \in T$ jest klinem, to albo $n = 3$ i zachodzi teza lematu 2, albo $n = 4$ i $W \in T_0$.*

Dowód. Niech $n \geqslant 4$. Zauważmy, że jeśli trójkąt $ap_ip_{i+1}$ jest ścianą wielościanu $W$, to z lematu 2 zastosowanego do klina $V = p_ip_{i+1}p_{i+2}\,ab \in T$ wynika, że $ap_{i+2}$ nie jest krawędzią klina $V$, a więc nie jest też krawędzią $W$. Zatem $abp_{i+1}p_{i+2}$ jest ścianą wielościanu $W$. Podobnie $abp_{i-1}p_i$ jest ścianą. Ponieważ ścian o wspólnej krawędzi $ab$ jest tylko dwie, więc trójkąt $ap_{i+3}p_{i+4}$ jest ścianą $W$, a następna czworokątna ściana $abp_{i+3}p_{i+4}$ jest identyczna z $abp_{i-1}p_i$, tzn. $n = 4$ i $W \in T_0$.

LEMAT 4. *Jeśli $W = p_1 \dots p_4 abc$, przy czym klin $V = p_1 \dots p_4 ab \in T_0$, to $W \notin T$.*

Dowód. Na mocy lematów 1 i 3 wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy punkty $a$, $b$, $c$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $p_1 \dots p_4$. Gdyby $W \in T$, to każdy z klinów $p_1 \dots p_4 ab$, $p_1 \dots p_4 bc$, $p_1 \dots p_4 ca$ należałby do $T$, a zatem na mocy lematu 3,

pewne dwa spośród odcinków $ab$, $bc$, $ca$ byłyby współpłaszczyznowe z tą samą parą przeciwległych boków czworokąta $p_1 \dots p_4$, tzn. (po ewentualnej zmianie oznaczeń wierzchołków) czworokąty $abp_1p_2$, $abp_3p_4$, $bcp_1p_2$, $bcp_3p_4$ byłyby płaskie, a zatem punkty $a$, $b$, $c$ leżałyby na krawędzi przecięcia płaszczyzn $bp_1p_2$ i $bp_3p_4$. To jest niemożliwe, bo trzy różne wierzchołki wielościanu wypukłego nie mogą leżeć na jednej prostej.

Teraz możemy przystąpić do dowodu twierdzenia. Niech $W = b_1 \dots b_n \in T$ i załóżmy, że $W$ nie jest ostrosłupem. Oczywiście każdy niepłaski podwielościan $W_j = b_1 \dots b_j$ $(j \leqslant n)$ należy do $T$. Niech $k = \max j$ takich, że $W_j$ jest ostrosłupem. Z lematów 1 i 3 wynika, że $k = 4$ i $W_5 \in T_0$, ale na podstawie lematu 4 wnioskujemy, że $n = 5$. Koniec dowodu.

PROBLEM. *Opisać wielościany wyższych wymiarów o własności T.*

*Cz. Bessaga* (Warszawa)

(*Od Redakcji*: *dodane w korekcie*): Inne rozwiązanie tego zadania nadesłał A. Gajda. Zamieścimy je w tomie 27.

**281.** Skonstruować nieokresową funkcję rzeczywistą, określoną na całej prostej, która jest granicą jednostajną ciągu funkcji okresowych.

*T. Iwaniec* (Warszawa)

Weźmy pod uwagę funkcję

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}.$$

Szereg jest jednostajnie zbieżny na całej osi rzeczywistej i $f(x)$ jest oczywiście granicą jednostajną ciągu sum częściowych tego szeregu oraz $n$-ta suma częściowa jest funkcją okresową o okresie $2^{n+1}\pi$.

Udowodnimy, że $f$ nie jest funkcją okresową.

Załóżmy, że $f$ jest okresowa oraz jej okres wynosi $a$. Mamy stąd dla każdego $x$

$$0 = f(x+a) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \sin \frac{x+a}{2^n} - \sin \frac{x}{2^n} \right) = \tag{1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2\cos \left( \frac{x}{2^n} + \frac{a}{2^{n+1}} \right) \sin \frac{a}{2^{n+1}} = 0.$$

Gdyby suma szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{a}{2^{n+1}} \tag{2}$$

była różna od zera, to podstawiając w (1) $x = -\frac{1}{2}a$ otrzymujemy sprzeczność, a zatem suma (2) równa jest 0, a co za tym idzie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sin \frac{a}{2^{n+1}} = 0. \tag{3}$$

Z drugiej strony, $f(0) = 0$, a więc i $f(a) = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{a}{2^n} = 0. \tag{4}$$

Odejmując (3) od (4) mamy $\sin \frac{1}{2} a = 0$, stąd $a = 2k\pi$, $k \in Z$. Jeśli $k \neq 0$, to $k = 2^i \cdot k_0$, gdzie $k_0$ — nieparzyste, $i$ — naturalne lub zero. W sumie (4), ponieważ $a = 2^{i+1} k_0 \pi$, $i+1$ pierwszych wyrazów równa się zeru. Opuszczając te wyrazy i zmieniając wskaźnik sumowania, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{2^{i+1} k_0 \pi}{2^n} = \frac{1}{2^{i+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{k_0 \pi}{2^n}. \tag{5}$$

Udowodnimy, że suma występująca po prawej stronie (5) jest różna od zera

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{k_0 \pi}{2^n} = \tfrac{1}{2} \sin \frac{k_0 \pi}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{k_0 \pi}{2^n}.$$

Ponieważ $k_0$ — nieparzysta, więc

$$\left|\sin (k_0 \pi/2)\right| = 1$$

oraz $|\sin (k_0 \pi / 2^n)| < 1$ dla $n \geqslant 2$.

Otrzymujemy stąd:

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{k_0 \pi}{2^n} \right| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \sin \frac{k_0 \pi}{2^n} \right| < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \tfrac{1}{2}.$$

Ponieważ pierwszy wyraz sumy $S$ jest co do wartości bezwzględnej równy $\frac{1}{2}$, więc wynika stąd, że $S \neq 0$, a więc $k = 0$ i $a = 0$.

Funkcja $f$ nie jest więc funkcją okresową.

*Grzegorz Rządkowski* (Warszawa)

---

## Krótkie informacje

Nagrody Polskiego Towarzystwa Matematycznego za rok 1982 otrzymali Lech Maligranda (nagroda im. S. Banacha), Roman Pol (nagroda im. S. Mazurkiewicza), Tadeusz Pytlik (nagroda im. S. Zaremby), Marek Kordos (nagroda im. S. Dicksteina).

Nagrody dla młodych matematyków otrzymali Aleksander Całka, Janina Kotus, Jerzy Weyman.

*

Rada Państwa nadała w dniu 6 października 1982 r. tytuł profesora nadzwyczajnego nauk humanistycznych Mieczysławowi Lubańskiemu, który po studiach matematycznych na Uniwersytecie Warszawskim dokto-