wmptm 1897

wśród wykładowców byli dawni uczestnicy owych zebrań, profesorowie M. Kac, S. Ulam i A. Zygmund.

Z tej właśnie konferencji pochodzi zawartość pierwszej części recenzowanej książki. Stanowią ją opracowane teksty wspomnianych już trzech wykładów, utrzymanych raczej w gawędziarskim stylu, a także wykładów P. Erdösa i A. Granasa.

Część I jest doskonałym wprowadzeniem do części II, która zawiera lekko poprawiony tekst Ulamowskiego przekładu Księgi wzbogacony współczesnymi komentarzami, jakimi opatrzono większą część problemów.

Autorami komentarzy jest ponad 45 matematyków (problemy do Księgi wpisywało 36), często wybitnych specjalistów z odnośnych, dosyć różnorodnych dziedzin. Świadczy to zarówno o szerokości spektrum zainteresowań szkoły lwowskiej, jak i o dużym oddźwięku tej inicjatywy. Daje też wyobrażenie o wielkim zaangażowaniu i wkładzie w to dzieło jego redaktora. (Podobnie jak J. Mycielski, jest on też autorem ponad 20 komentarzy.)

Musiała tu zadziałać „the magic of the mathematicians and the mathematics involved in its birth".

Niewątpliwy sukces całego przedsięwzięcia wynikł więc z udziału w nim i rzetelnego wysiłku wielu ludzi. Wspomnę, że kilkanaście komentarzy do problemów zawiera szkice nie publikowanych jeszcze, a czasem nie znanych wcześniej rozwiązań.

Na komentarze albo i na rozwiązanie czeka jednak jeszcze kilkadziesiąt problemów. Niestrudzony prof. Mauldin byłby wdzięczny czytelnikom za uwagi i ewentualne uzupełnienia.

Nie jest możliwe ani celowe dokładniejsze omawianie tutaj zagadnień postawionych w *Księdze*, gdyż tematyka ich jest zbyt zróżnicowana, by można było w kilku zdaniach dać pojęcie o całości. Kto nie wie np. o problemie, za którego rozwiązanie prof. S. Mazur obiecał (i dał w 1973 roku) żywą gęś, dowie się o tym chociażby z przemówienia prof. B. Bojarskiego (Wiadom. Mat. 22 (1980), str. 264).

Stopień trudności problemów okazał się bardzo nierówny. Tak chyba musiało być, taka bowiem jest matematyka chwytana „na gorąco", zanim podda się ją surowszej selekcji. Ja sam jestem zdania, że mało ważne jest, iż było kilkanaście problemów bardzo łatwych, jeśli inne nieraz okazały się bardzo głębokie. Ważkość wielu z nich można lepiej ocenić teraz, z perspektywy 40 lat rozwoju matematyki; komentarze ekspertów potrafią wydobyć ich prekursorski charakter.

Całość tworzy, moim zdaniem, niełatwą, ale fascynującą lekturę, do której można wracać wiele razy i ciągle znajdować coś nowego.

Książka pobudza do myślenia, rzuca też światło na przyczyny rozkwitu szkoły lwowskiej. Refleksja nad nimi jest pouczająca, ale wnioski, czego właściwie brak nam obecnie w wielu polskich ośrodkach matematycznych, pozostawiam czytelnikowi.

Chciałbym gorąco polecić każdemu matematykowi bliższe poznanie tej książki, choć zdaję sobie sprawę, że może to nie być proste, dopóki nie ukaże się polskie wydanie. A czy można tego oczekiwać, jeśli przez tyle lat nie wydano u nas chociażby broszury z samym tekstem problemów?

Tadeusz Figiel

Andrzej Schinzel, *Selected topics on polynomials*, The University of Michigan Press, Ann Arbor 1982, str. XXI + 250, ISBN 0-472-08026-1

Książka ta powstała z wykładów, które autor prowadził w semestrze zimowym 1977 roku na Uniwersytecie Stanu Michigan. Jak pisze autor we wstępie, książka zawiera pewne wyniki dotyczące wielomianów, roz-

proszone po literaturze, które wyróżniają się prostotą sformułowań, a mimo to również pewną głębokością. Twierdzenia są podawane w historycznym rozwoju: wersja pierwotna dotycząca zwykle wielomianów o współczynnikach zespolonych była nieraz znana już w ubiegłym stuleciu, a następne uogólnienia na dowolne ciała charakterystyki zero, lub ciała algebraicznie domknięte, lub ciała dowolnej charakterystyki były uzyskiwane znacznie później, nieraz dopiero w ostatnich latach. Pewne zagadnienia nie zostały rozstrzygnięte w pełni do dziś i autor o tym również informuje. Wiele wyników podanych w książce należy do autora, który od ponad 20 lat publikuje prace o wielomianach.

Książka została podzielona na dwie części: algebraiczną i arytmetyczną. Pierwsza dotyczy wielomianów o współczynnikach w dowolnym ciele, a druga — wielomianów o współczynnikach w ciele liczbowym. Dowody są zupełnie elementarne. Do ich zrozumienia wystarczają w zasadzie tylko wiadomości z algebry zawarte w książce van der Waerdena i wiadomości z algebraicznej teorii liczb zawarte w książce H. Manna. Nie są używane metody geometrii algebraicznej, choć istnieją ścisłe związki wielu omawianych w książce tematów z geometrią algebraiczną, o czym autor często wspomina. W zasadzie wszystkie twierdzenia podawane są z dowodami. Nie dowodzi się tylko twierdzeń dobrze znanych, zawartych w odpowiednich podręcznikach, a także kilku twierdzeń podstawowych, lecz trudniejszych, których dowody nie mieściłyby się w tej książce na przykład ze względu na użyte tam metody lub na nadmierną długość. Wszystkie informacje o uzyskanych wynikach są opatrzone odpowiednimi odsyłaczami do literatury.

Książka zredagowana jest bardzo starannie. Przez cały czas czytelnik jest informowany o celu prowadzonych rozważań i jest ostrzegany przed trudniejszymi lub dłuższymi dowodami. Podawane są zwykle najprostsze lub najelementarniejsze ze znanych dowodów. Liczba błędów drukarskich jest znikoma.

Na zakończenie przedstawię zwięzłe informacje o treści poszczególnych paragrafów nie dążąc ani do kompletności, ani do precyzji sformułowań. Dokładne omówienie całej książki nie jest bowiem możliwe w krótkiej recenzji, a wstęp do książki zawiera dobry przegląd jej treści.

§ 2 zawiera twierdzenie Lürotha uogólnione przez Steinitza na przypadek ciał dowolnych, a także konstruktywny dowód tego twierdzenia podany przez Netto. (Jeżeli $k \subset K \subset k(x)$, $k \neq K$, to $K = k(y)$ dla pewnego $y \in k(x)$.)

§ 3 zawiera uogólnienia twierdzenia Lürotha należące do Gordana, Igusy, E. Noether i A. Schinzla. (Jeżeli $k \subset K \subset k(x_1, \ldots, x_n)$, tr. deg. $K/k = 1$, to $K = k(g)$. Jeżeli ponadto do K należy pewien wielomian różny od stałej, to można przyjąć, że g jest wielomianem).

§ 4 zawiera twierdzenie Ritta uogólnione przez Engstroma, Frieda i MacRae. (Jeżeli charakterystyka ciała współczynników nie dzieli stopnia wielomianu F, to w rozkładzie wielomianu F na superpozycję wielomianów nieliniowych i dalej nierozkładalnych ciąg stopni występujących wielomianów jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do porządku.)

§ 5 zawiera inne twierdzenie Ritta, uogólnione przy pewnych ograniczeniach przez H. Leviego, Doreya i Whaplesa, a następnie przez A. Schinzla. (Twierdzenie to opisuje wielomiany jednej zmiennej A, B, G, H spełniające $G \circ A = H \circ B$, $|G| = |B| = m > |H| = |A| = n > 1$, $(m, n) = 1$. Nie zakłada się przy tym, że wielomiany te nie są przedstawialne w postaci superpozycji.)

§ 6 zawiera zastosowanie twierdzenia z poprzedniego paragrafu do badania równania diofantycznego postaci $G(x) = H(y)$, gdzie wielomiany G i H o współczynnikach wymiernych mają

stopnie względnie pierwsze. Dowód jest oparty na twierdzeniu Siegela o równaniach diofantycznych postaci $f(x, y) = 0$ nie udowodnionym w książce.

§ 7 zawiera twierdzenie Kroneckera o rozkładzie na czynniki wielomianów jednej zmiennej o „dowolnych" współczynnikach.

§ 8 zawiera twierdzenie A. Schinza o rozkładalności wielomianów będących superpozycją. (Niech $F_i(x_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ będą wielomianami zależnymi od rozłącznych układów zmiennych x_i i niech co najmniej dwa z tych wielomianów będą różne od stałej. Twierdzenie to orzeka, że wielomian $\Phi(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n))$ jest rozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wielomiany jednej zmiennej G_i, że $\Phi(G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n))$ jest rozkładalny.)

§ 9 zawiera twierdzenia Mertensa i van der Waerdena z teorii eliminacji układów wielomianów jednorodnych dotyczące istnienia rugownika i jego własności.

§ 10 zawiera twierdzenie E. Noether o domkniętości w topologii Zariskiego zbioru wielomianów rozkładalnych danego stopnia.

§ 11 zawiera twierdzenie Bertiniego i jego uogólnienie pochodzące od Krulla. (Twierdzenie to opisuje takie wielomiany $F(x, \lambda)$ zależne od ciągu parametrów λ wchodzących do F liniowo, że $F(x, \lambda)$ jest nierozkładalny, lecz staje się rozkładalnym po podstawieniu na λ dowolnego ciągu wartości z ciała współczynników.)

§ 12 zawiera twierdzenie Mertensa o istnieniu czynnika stopnia m wielomianu jednej zmiennej stopnia n, gdzie $m < n$.

§ 13 zawiera twierdzenie Capellego i jego uogólnienie Rédeia o rozkładalności wielomianu postaci $x^n - a$.

§ 14 zawiera zastosowanie twierdzenia poprzedniego paragrafu do badania nierozkładalności wielomianów wielu zmiennych.

§ 15 zawiera twierdzenie Gourina o rozkładach na czynniki wielomianów o współczynnikach zespolonych postaci $F(x_1^t, \ldots, x_n^t)$, gdzie dany wielomian $F(x_1, \ldots, x_n)$ jest nierozkładalny.

§ 16 zawiera uogólnienie twierdzenia Gourina należące do A. Schinzla na przypadek dowolnego ciała współczynników. Pewna modyfikacja tego twierdzenia podana jest w § 18.

§ 17 zawiera twierdzenie Knesera i uogólnienia twierdzenia Capellego. (Podane są warunki konieczne i dostateczne dla zachodzenia równości $[k(M): k] = [k^* M: k^*]$, gdzie rozszerzenie K/k jest rozdzielcze, a M jest podgrupą w K^* spełniającą $[Mk^*: k^*] < \infty$. Podane są w szczególności warunki równoważne na to, by $[k(\xi_1, \ldots, \xi): k] = n_1 \ldots n_l$, gdzie $\xi_i^{n_i} \in k$.)

Druga część książki, arytmetyczna składa się z §§18–28 i zawiera następujące główne tematy:

1. Problem Lehmera dotyczący położenia zer wielomianu na zewnątrz koła jednostkowego. Dla

$$P(z) = p_0(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_n) \in Q[z]$$

niech

$$M(P) = |p_0| \prod_{j=1}^{n} \max(1, |\alpha_j|).$$

Zagadnienie polega na tym, czy dla wielomianów P z $Q[z]$ nierozkładalnych i niecyklotomicznych liczba $M(P)$ może być dowolnie bliska 1.

W § 19 udowodnione jest twierdzenie Smitha: $M(P) \geqslant 1{,}3247\ldots$ dla dowolnego wielomianu niezwrotnego P.

W § 20 podane jest należące do A. Schinzla oszacowanie liczby $\prod_{\sigma} M(P^{\sigma})$, gdzie P jest wielomianem o współczynnikach w ciele totalnie rzeczywistym lub w ciele totalnie urojonym będącym kwadratowym rozszerzeniem ciała totalnie rzeczywistego, a σ przebiega zanurzenia tego ciała.

W § 21 wyniki poprzednich paragrafów zostają zastosowane do badania rozkładów na czynniki wielomianów wielu zmiennych.

2. Badanie wielomianów zależnych od parametrów: twierdzenie Hilberta

o nieprzywiedlności i twierdzenie Davenporta, Lewisa i Schinzla o parametryzacji.

§ 22 zawiera twierdzenie Hilberta: Jeżeli wielomiany $F_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ są nierozkładalne nad ciałem liczbowym, to w każdym otwartym w topologii Zariskiego zbiorze parametrów $\boldsymbol{t}$ istnieje nieskończenie wiele $\boldsymbol{t}^* \in Z^r$, że wszystkie wielomiany $F_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}^*)$ są rozkładalne. Jak zwykle $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{t}^*$ oznacza odpowiednio układ parametrów, zmiennych i liczb. Autor prostuje przy tym błąd zawarty w oryginalnym dowodzie Hilberta i powtórzony potem przez Langa.

§ 23 zawiera twierdzenie Davenporta, Lewisa i Schinzla: Jeżeli $F(x, t_1, \ldots, t_r)$ jest wielomianem nad ciałem liczbowym K i dla każdego układu r postępów arytmetycznych $P_1, \ldots, P_r$ w $\boldsymbol{Z}$ istnieją $t_i^* \in P_i$, $x^* \in K$, takie, że $F(x^*, t_1^*, \ldots, t_r^*) = 0$, to istnieje taka funkcja wymierna $x(t_1, \ldots, t_r)$, że $F(x(t_1, .., t_r), t_1, \ldots, t_r) = 0$.

Następne paragrafy zawierają uogólnienia i modyfikacje powyższych twierdzeń. Na przykład w § 24 dowodzi się, że jeżeli $A, B \in K[\boldsymbol{t}]$ i dla każdego układu $P_1, \ldots, P_r$ postępów arytmetycznych w $\boldsymbol{Z}$ istnieją $t_i^* \in P_i$ oraz liczby całkowite algebraiczne $x^*, y^*, z^* \in K$, że $A(\boldsymbol{t}^*)x^{*2} + B(\boldsymbol{t}^*)y^{*2} = z^{*2}$, to dla pewnych wielomianów $X, Y, Z \in K[\boldsymbol{t}]$ zachodzi równość

$$AX^2 + BY^2 = Z^2.$$

Bibliografia zawiera 104 pozycje, w tym 40 z lat $\leqslant$ 1930 i 30 z lat $\geqslant$ 1970.

Poniżej załączam wykaz ważniejszych błędów przekazany mi uprzejmie przez autora.

Jerzy Browkin

Str. $5_{9,8,6}$ zamiast a_{ij} ma być a_{ij}, zamiast $j \in N^{n-r} - j \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\})^{n-r}$; 5_7 $a_{ij}y_i$ (tu i dalej nie podajemy tekstu, który należy zastąpić, jeżeli jest to oczywiste); 6^4 $K =$; 6^6 zastąpić „Netto" przez „Ostrowski and Čebotrev; 8_3 Iskovskih; 9^1 Gordan; 10^6 1963b; 11^4 dopisać $r = |R|$, $s = |S|$; 15_1 zamiast $\circ F_1^{(j)}$ ma być $\circ F_r^{(j)}$; 17^3 zamiast G ma być G_r; 18^5 $n < j \leqslant n + m$; 43_7 $0 < |G|$; $50^{5,6}$ x_n, x_i; 50^8 zamiast x_i ma być u_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; 58^5 k; 58^{12} i 62^3 k^n; $84^{1,2}$ zamiast x, X ma być $\boldsymbol{x}$; 145_1 zamiast β ma być β_0; 148^7, 152_2 153^1 zamiast $Q(z)$ ma być $p_0 Q(z)$; $148_{3,2}$ zamiast c_{i-k} ma być d_{i-k}; 149^9 zamiast a ma być a_l; 149_7 zamiast c_{l-k} ma być d_{l-k}; 149_1 zamiast $-d_k$ ma być $-d_l$; 150 macierz powinna być symetryczna, zera należy zastąpić odpowiednimi elementami znad przekątnej; 158_1 $M(P^\sigma)$; 160^6 dopisać: taking $n = \deg K$; 249^4 zamiast C. R. Acad. Sci. France 1981 ma być Publ. Dept. Math. Limoges 1982.

Mathematics tomorrow, Edited by Lynn Arthur Steen, Springer Verlag, New York–Heidelberg–Berlin 1981, str. 250, ISBN 3-540-90564-2

W roku 1978 ten sam redaktor zebrał do druku tom artykułów zatytułowany *Mathematics today*, przyjęty przez czytelników z dużym zainteresowaniem (*). Tytuł obecny zdaje się obiecywać jeszcze więcej — ukazać matematykę dnia jutrzejszego, uchylić tajemnicy przyszłości. Treść tomu jest jednak skromniejsza i ukazuje właściwie tylko kłopoty i trudności matematyki amerykańskiej dnia dzisiejszego. Kłopoty dwojakie: związane z potrzebą zastosowań w różnych naukach oraz z odpowiednią do tego reformą nauczania matematyki.

Na książkę składają się 24 artykuły, a treść jej podzielono na cztery części

*Recenzja jego opublikowana została w *Wiadom. Mat.* 25 (1984). Ukazało się też wydanie polskie, p. str. 132 (*przyp. Red.*)