ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVII (1986)

wmptm 1897

JAROSLAV ZEMÁNEK (Warszawa)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Hipoteza Bieberbacha, 1916–1984

Niech $\mathcal{S}$ oznacza klasę wszystkich funkcji f analitycznych w otwartym kole jednostkowym

$$D = \{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$$

i spełniających następujące warunki:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$$

$$z_1, z_2 \in D, \quad z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2).$$

Funkcja taka ma szereg Taylora postaci

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \quad |z| < 1. \tag{1}$$

Nie każdy jednak taki szereg zbieżny w D daje funkcję należącą do $\mathcal{S}$. Warunek wzajemnej jednoznaczności odwzorowania f w D nakłada istotne ograniczenia na współczynniki a_n, $n \geqslant 2$. Badaniom takich odwzorowań, zwanych *jednokrotnymi* lub *jednolistnymi*, poświęcono obszerną literaturę. Bernardi [3] opracował spis tytułów istniejących dotychczas prac, który uwzględnia 1694 pozycje z lat 1907–1965 oraz 1563 pozycje z lat 1966–1975, a więc 3257 prac napisanych do 1975 roku (zob. też [13]). Mimo to nie ma zadowalającej charakteryzacji wszystkich możliwych ciągów współczynników zespolonych $\{a_n\}$, dla których funkcja (1) należy do $\mathcal{S}$. Nawet dużo skromniejsze oszacowanie

$$|a_n| \leqslant n \quad \text{dla } f \in \mathcal{S}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots, \tag{2}$$

znane od 1916 roku jako *hipoteza Bieberbacha*, długo czekało na pełne rozwiązanie. Uzyskał je w 1984 roku matematyk amerykański Louis de Branges, który — jak sam twierdzi [17] — aż siedem lat poświęcił temu problemowi. Ze względu na znaczenie hipotezy Bieberbacha w rozwoju teorii funkcji analitycznych, w niniejszym artykule przeglądowym chcemy przybliżyć naszym Czytelnikom pewne naturalne motywacje, w wyniku których hipoteza ta powstała, oraz te aspekty jej dalszego rozwoju, które

ostatecznie po 68 latach doprowadziły do pozytywnego rozwiązania. Pełniejszą informację można znaleźć w książce [8], która ukazała się kilka miesięcy przed rozwiązaniem problemu.

Każda funkcja analityczna w obszarze spójnym i różna od stałej jest odwzorowaniem otwartym (tzn. obrazem obszaru jest zbiór otwarty w płaszczyźnie zespolonej). Jeżeli ponadto pochodna funkcji w jakimś punkcie jest różna od zera, to odwzorowanie takie jest wzajemnie jednoznaczne w pewnym otoczeniu tego punktu. Mając to na uwadze, można powyższą definicję klasy $\mathcal{S}$ przyjąć za techniczną normalizację jakościowo ogólnej sytuacji zachodzącej lokalnie dla praktycznie każdej funkcji analitycznej (ewentualnie po skończonej ilości różniczkowań).

Przypomnijmy, że w zbiorze $\mathcal{S}$ można wprowadzić naturalną metrykę dającą topologię zbieżności lokalnie jednostajnej:

$$\operatorname{dist}(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_n}{1+\|f-g\|_n}, \qquad f, g \in \mathcal{S},$$

gdzie $\|f-g\|_n$ oznacza $\sup|f(z)-g(z)|$ dla $|z| \leqslant 1-1/n$. W tej topologii zbiór $\mathcal{S}$ staje się zbiorem zwartym [8, str. 9] i wobec tego wartość bezwzględna każdego funkcjonału ciągłego na zbiorze $\mathcal{S}$ osiąga swe maksimum i minimum w jakimś punkcie zbioru $\mathcal{S}$.

Przykładami takich funkcjonałów są wartość funkcji lub jej pochodnej w ustalonym punkcie koła D, oraz n-ty współczynnik $a_n(f)$ w rozwinięciu (1) funkcji f.

Dokładne oszacowanie (czyli maksimum) funkcjonału $|a_2(f)|$ uzyskał Bieberbach [4]. Wynikało ono z nieco wcześniejszego wzoru Gronwalla [14]

$$m(E) = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2\right)$$

wyrażającego miarę Lebesgue'a zbioru $E = \boldsymbol{C} \setminus g(\Delta)$ dla dowolnej funkcji postaci

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots$$

określonej i jednolistnej w zbiorze $\Delta = \{z \in \boldsymbol{C}: |z| > 1\}$.

Funkcje takie pojawiły się w teorii odwzorowań konforemnych, powstałej w drugiej połowie ubiegłego wieku. Ze wzoru Gronwalla oraz z tego, że $m(E) \geqslant 0$, wynika w szczególności nierówność $|b_1| \leqslant 1$. Biorąc teraz dowolną funkcję $f \in \mathcal{S}$ możemy ją przenieść na Δ:

$$g(z) = \{f(z^{-2})\}^{-1/2} = z - \frac{a_2}{2} z^{-1} + \ldots, \qquad |z| > 1;$$

zob. [8, str. 28]. Stąd otrzymujemy $|a_2/2| \leqslant 1$, czyli $|a_2| \leqslant 2$.

Nierówność ta została natychmiast zastosowana dla uzyskania dokładnych oszacowań wzrostu funkcji i jej pochodnej:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}, \qquad \frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{3}$$

dla $|z| = r < 1, f \in \mathcal{S}$; zob. [8, str. 32–34]. Uprzednio znane były jakościowe własności tego typu (np. obrazy $f(D)$ dla $f \in \mathcal{S}$ zawierają wspólne koło o promieniu dodatnim) odkryte przez Koebego około 1907 roku (dziś wiemy, że własności te są konsekwencją zwartości zbioru $\mathcal{S}$). Granice dolne i górne w powyższych oszacowaniach są osiągane przez *funkcję Koebego*

$$k(z) = z(1-z)^{-2} = z+2z^2+3z^3+\ldots+nz^n+\ldots = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}, \quad |z|<1, \tag{4}$$

należącą do $\mathcal{S}$. Ostatnie wyrażenie w (4) pokazuje genezę tej funkcji z odwzorowania konforemnego

$$w = \frac{1+z}{1-z}, \quad |z|<1$$

koła D na prawą półpłaszczyznę $\operatorname{Re} w > 0$. (Można nawet wykazać, że rotacje funkcji Koebego, tj. funkcje $\varepsilon^{-1}k(\varepsilon z)$, $|\varepsilon| = 1$, są jedynymi funkcjami, dla których osiąga się kresy podane w (3)). W tych okolicznościach Bieberbach [4] wyraził przypuszczenie, że również dla problemu wyznaczenia $\sup |a_n(f)|$ funkcją ekstremalną będzie funkcja Koebego, czyli sformułował hipotezę (2). Jak już wspominaliśmy, dla $n = 2$ Bieberbach sam udowodnił tę hipotezę.

Od tego momentu hipoteza przyciągała uwagę wielu matematyków. Dowodzono jej specjalnych przypadków (dla małych n albo też dla specjalnych funkcji z $\mathcal{S}$). Dla $n = 3$ hipotezę udowodnił w 1923 roku Loewner [22]. Metoda parametryzacji odwzorowań konforemnych, którą przy tym rozwinął, okazała się później szczególnie cenna dla rozwiązania ogólnego. W przypadku $n = 4$ na rozwiązanie problemu trzeba było czekać aż do 1955 roku, kiedy skomplikowany dowód podali Garabedian i Schiffer [11] (w pięć lat później Charzyński i Schiffer [6], [7] znaleźli prostsze dowody). Następnie udało się udowodnić przypadek $n = 6$; dokonali tego około 1968 roku Pederson [28] oraz Ozawa [26], [27]. Ale przypadek $n = 5$ nadal pozostawał nie udowodniony! Stosowane metody nadawały się wyłącznie dla konkretnego współczynnika i nie można było ich użyć nawet dla wskaźników mniejszych. Przypadek $n = 5$ został udowodniony dopiero w 1972

roku przez Pedersona (tego od szóstego współczynnika) i Schiffera (tego od czwartego współczynnika) w pracy [29]. Na tym się skończyła teoria dla małych wskaźników.

Dowodzono również oszacowań typu $|a_n| < \text{const} \cdot n$ dla wszystkich $n = 2, 3, 4, \ldots$ Należy wspomnieć o wyniku Littlewooda z 1925 roku ze stałą równą liczbie e, ze względu na metodę dowodu, która uwypuklała rolę średnich całkowych (będzie o nich jeszcze mowa w związku z twierdzeniem asymptotycznym Haymana). W 1972 roku FitzGerald uzyskał stałą $\sqrt{7/6}$, a jego metodę dalej rozwinął Horowitz uzyskując stałą 1,0657. FitzGerald przypuszczał, że jego metodą będzie można w najlepszym przypadku uzyskać stałą $\sqrt[4]{7/6} = 1{,}039\ldots$ Można by się zadowolić takimi oszacowaniami, lecz nie potwierdzają one spodziewanego znaczenia funkcji Koebego.

Oprócz tego formułowano nowe hipotezy, i z perspektywy czasu wydaje się, że poszukiwania te lepiej oświetliły problem niż dowodzenie specjalnych przypadków. Zauważono, że dla funkcji $f \in \mathcal{S}$ transformacja

$$g(z) = \{f(z^2)\}^{1/2} = z\{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots\}^{1/2} = \\ = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots, \quad |z| < 1, \tag{5}$$

znacznie poprawia współczynniki (gałąź pierwiastka funkcji w ostatnim nawiasie istnieje, gdyż funkcja ta nie znika nigdzie w D, zob. [20, str. 96] lub [33, str. 101]). Na przykład, dla funkcji Koebego mamy

$$\{k(z^2)\}^{1/2} = z(1 - z^2)^{-1} = z + z^3 + z^5 + \ldots,$$

współczynniki są tu już ograniczone. Niech $\mathcal{S}^{(2)}$ oznacza klasę wszystkich funkcji postaci (5) dla $f \in \mathcal{S}$. Innymi słowy [8, str. 28], $\mathcal{S}^{(2)}$ to zbiór wszystkich funkcji nieparzystych z $\mathcal{S}$, który też jest zbiorem zwartym. To, że wszystkie współczynniki wszystkich funkcji z $\mathcal{S}^{(2)}$ są wspólnie ograniczone, udowodnili Littlewood i Paley [21] w 1932 roku, ale Fekete i Szegö [9] wykazali w rok później, że supremum wartości bezwzględnych jest nieco większe niż 1, a mianowicie $|c_5|$ może osiągnąć wartość $\frac{1}{2} + e^{-2/3} = 1{,}013\ldots$ dla pewnej funkcji z $\mathcal{S}^{(2)}$. Ostatnio (w 1980 roku) V. I. Milin uzyskał oszacowanie

$$|c_n| \leqslant 1{,}14, \quad n = 3, 5, 7, \ldots,$$

zob. [8, str. 154]. Znaczy to, że wyżej wspomniana transformacja funkcji Koebego nie jest funkcją ekstremalną w klasie $\mathcal{S}^{(2)}$ dla problemu współczynników $|c_n|$, chociaż daje ona ekstremalne wartości dla $|g(z)|$ i $|g'(z)|$ dla $g \in \mathcal{S}^{(2)}$ i ustalonego $z \in D$, zob. [8, str. 64]. Ta rozbieżność wzbudziła pewne wątpliwości co do prawdziwości hipotezy Bieberbacha. Jednakże Robertson [32] zauważył w 1936 roku, że gdyby dla funkcji (5) udało się

udowodnić oszacowanie

$$1+|c_3|^2+\ldots+|c_{2n-1}|^2 \leqslant n, \tag{6}$$

to stąd wynikałaby hipoteza Bieberbacha. Rzeczywiście, porównując współczynniki po obu stronach równości $f(z^2) = g(z)g(z)$, otrzymujemy

$$a_n = c_1c_{2n-1}+c_3c_{2n-3}+\ldots+c_{2n-1}c_1, \qquad c_1 = 1,$$

a stąd, na mocy nierówności Cauchy'ego–Schwarza, wynika, że

$$\begin{aligned}|a_n| &= |c_1c_{2n-1}+\ldots+c_{2n-1}c_1| \leqslant \\ &\leqslant |c_1|^2+|c_3|^2+\ldots+|c_{2n-1}|^2 \leqslant n.\end{aligned}$$

Jak się okaże dalej, to skromne spostrzeżenie istotnie przybliżyło rozwiązanie hipotezy Bieberbacha.

Nowe ożywienie i poparcie dla hipotezy Bieberbacha przyniosły wyniki Haymana [15] z 1953 roku. Udowodnił on, że dla każdej funkcji $f \in \mathcal{S}$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n} = \alpha(f)$$

i jest $\alpha(f) \leqslant 1$, przy czym równość zachodzi tylko dla funkcji Koebego (i jej rotacji). To jeszcze nie dowodzi hipotezy Bieberbacha, ale z drugiej strony daje cenniejszą informację o rozłożeniu współczynników a_n dla dużych n (w zależności od funkcji f). Znane są różne inne interpretacje granicy $\alpha(f)$, np.

$$\begin{aligned}\alpha(f) &= \lim_{r\to 1}(1-r)^2M_\infty(r,f) = \\ &= \lim_{r\to 1}2(1-r)M_1(r,f) = \lim_{r\to 1}\tfrac{1}{2}(1-r)^3M_\infty(r,f'),\end{aligned}$$

gdzie

$$M_\infty(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|, \qquad M_1(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|\,dt.$$

Pierwsze dwa wzory uzyskał Hayman [15], a trzeci Krzyż [18] oraz Bazilevič [2]. Zob. też [8, rozdz. 5]. Granica Haymana $\alpha(f)$ jest przykładem funkcjonału nieciągłego na $\mathcal{S}$, gdyż $\alpha(p) = 0$ dla każdego wielomianu $p \in \mathcal{S}$, a wielomiany należące do $\mathcal{S}$ tworzą tam podzbiór gęsty, zob. [8, str. 25]. Mimo to funkcja Koebego daje maksimum tego funkcjonału.

Hipoteza Robertsona wiąże się z innym naturalnym problemem badanym w połowie lat sześćdziesiątych przez Lebedevà i I. M. Milina [19]. Dla dowolnych funkcji analitycznych związanych relacją

$$\psi(z) = \exp\big(\varphi(z)\big)$$

podali oni elementarne oszacowanie współczynników funkcji ψ przez współczynniki funkcji φ. Mianowicie, niech

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

będzie dowolnym szeregiem o dodatnim promieniu zbieżności, i niech

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k = \exp\big(\varphi(z)\big).$$

Przytoczymy dwie spośród nierówności Lebedeva–Milina:

$$|\beta_n|^2 \leqslant \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(k\,|a_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\}, \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2 \leqslant (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(k\,|a_k|^2 - \frac{1}{k}\right)(n+1-k)\right\} \tag{8}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ Elementarny dowód tych nierówności otrzymuje się przez porównanie współczynników w równości $\psi'(z) = \psi(z)\varphi'(z)$ i stosowanie nierówności Cauchy'ego–Schwarza; jednolistność tych funkcji nie jest w tym problemie istotna. Szczegóły można znaleźć w [8, str. 143–146].

Nierówność (8) wskazuje metodę oszacowania sumy kwadratów współczynników danego szeregu. W tym celu dla każdej funkcji

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots = \{f(z^2)\}^{1/2}, \qquad f \in \mathcal{S},$$

występującej w hipotezie Robertsona, utworzymy najpierw funkcję

$$\psi(z) = 1 + c_3 z + c_5 z^2 + \ldots = \sqrt{f(z)/z}, \qquad |z| < 1,$$

a następnie

$$\varphi(z) = \log\psi(z) = \frac{1}{2}\log\frac{f(z)}{z}, \qquad |z| < 1.$$

Gałąź pierwiastka lub logarytmu funkcji $f(z)/z$ istnieje, gdyż funkcja ta jest różna od zera wszędzie w D, zob. [20, str. 96] lub [33, str. 101].

Niech

$$\log\frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k, \qquad |z| < 1. \tag{9}$$

Wówczas z nierówności (8) otrzymujemy

$$1 + |c_3|^2 + \ldots + |c_{2n+1}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(k\,\frac{|d_k|^2}{4} - \frac{1}{k}\right)(n+1-k)\right\}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ Hipoteza Robertsona (6) będzie spełniona, jeżeli czynnik $\exp\{\ldots\}$ po prawej stronie ostatniej nierówności będzie $\leqslant 1$, czyli $\{\ldots\} \leqslant 0$. Stąd m.in. wzięła się hipoteza Milina [24]: dla każdej funkcji $f \in \mathcal{S}$ oraz dla każdego $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k|d_k|^2 - \frac{4}{k} \right) (n+1-k) \leqslant 0, \tag{10}$$

gdzie d_k są współczynnikami rozwinięcia (9). Jeszcze inne motywacje prowadzące do tej hipotezy można znaleźć w [8, rozdz. 5].

Dowód tej właśnie hipotezy Milina podał w 1984 roku Louis de Branges, i tym samym, poprzez hipotezę Robertsona, udowodniona została również hipoteza Bieberbacha. Początkowy dowód de Brangesa był długi i skomplikowany, zajmował ok. 350 stron maszynopisu. Matematycy amerykańscy sceptycznie odnieśli się do tej pracy, nie wierząc w poprawność podanego dowodu. Pierwsi potrafili go zrozumieć uczestnicy seminarium z geometrycznej teorii funkcji w Leningradzie, m.in. G. V. Kuz'mina, E. G. Emel'ianov, I. M. Milin, A. Ž. Grinšpan, S. V. Hruščev (Chruszczow), do których autor specjalnie przyjechał, by omówić swój dowód, wiosną 1984 roku. W wyniku prowadzonych tam przez trzy miesiące dyskusji powstał preprint [5]. Siergiej Hruščev przedstawił dowód na konferencji z teorii operatorów w Rumunii w czerwcu tegoż roku. Na podstawie preprintu [5] oraz notatek [25] dalsze uproszczenia wnieśli latem 1984 roku FitzGerald i Pommerenke [10]. Główna idea pozostała jednak nie zmieniona. Polega ona na parametryzacji współczynników d_k w (10) metodą Loewnera z 1923 roku [22] oraz na oryginalnym pomyśle de Brangesa parametryzacji współczynników całkowitych $n+1-k$ w (10).

Zauważmy najpierw, że współczynniki $n+1-k$ muszą mieć istotne znaczenie w hipotezie Milina, gdyż np. analogiczna nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k|d_k|^2 - \frac{4}{k} \right) \leqslant 0$$

nie może być na ogół spełniona, ponieważ z (7) wynikałoby, że wartości bezwzględne współczynników funkcji z $\mathcal{S}^{(2)}$ nie przekraczają 1, co, jak wiemy, nie jest prawdą. Poza tym wydaje się, że znajomość samych współczynników d_k nie wystarcza dla sprawdzenia nierówności (10). Trzeba wykorzystać więcej informacji o funkcji f, mianowicie to, w jaki sposób jest ona położona pośród innych funkcji jednolistnych. Opisuje to równanie różniczkowe Loewnera, które znane jest w różnych postaciach [8], [12], [31]. L. de Branges [5] posługiwał się jedną z nich. Zasługą FitzGeralda i Pommerenke [10] jest zauważenie, że wychodząc z innej wersji tego równania, przytoczonej niżej, otrzymuje się znaczne uproszczenia.

Nierówność (10) wystarczy sprawdzić dla funkcji $f \in \mathcal{S}$ takich, że $f(D) = \mathbf{C} \setminus J$, gdzie J oznacza jakąkolwiek krzywą Jordana (bez punktów

wielokrotnych) zmierzającą do nieskończoności. Wiadomo bowiem [8, str. 80], że zbiór $\mathscr{L}$ takich funkcji jest gęsty w $\mathscr{S}$. Są to funkcje „maksymalne", żadnej z nich nie można rozszerzyć analitycznie na większy od D obszar otwarty przy zachowaniu warunku jednolistności (np. funkcja Koebego należy do $\mathscr{L}$). Funkcje klasy $\mathscr{L}$ badał Loewner [22] i na podstawie odpowiedniej parametryzacji krzywej J uzyskał parametryzację odwzorowania f, zob. [8, rozdz. 3] lub [12, rozdz. 3], [31]. Mianowicie, dla każdej funkcji $f \in \mathscr{L}$ istnieje parametryzacja

$$f(z,t) = e^t z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \ldots, \qquad t \geqslant 0,$$
$$f(z,0) = f(z)$$

taka, że dla każdego $t \geqslant 0$ funkcja $f(z,t)$ jest jednolistna w D (więc $e^{-t}f(z,t)$ należy do $\mathscr{S}$), a ponadto pochodna względem t i pochodna względem z są związane równaniem różniczkowym

$$\frac{\partial}{\partial t} f(z,t) = \frac{1+\varkappa(t)z}{1-\varkappa(t)z} z \frac{\partial}{\partial z} f(z,t), \tag{11}$$

gdzie $\varkappa(t)$ jest pewną funkcją ciągłą na półprostej $0 \leqslant t < \infty$ oraz $|\varkappa(t)| \equiv 1$. Ponieważ funkcja $e^{-t}f(z,t)$ należy do $\mathscr{S}$, więc możemy utworzyć funkcję

$$\log \frac{f(z,t)}{e^t z} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) z^k. \tag{12}$$

Louis de Branges zamiast lewej strony w (10) rozpatruje parametryzację

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(k|d_k(t)|^2 - \frac{4}{k} \right) \tau_k(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{13}$$

gdzie funkcje $\tau_k(t)$ są określone jako rozwiązania układu równań różniczkowych

$$\tau_k(t) - \tau_{k+1}(t) = -\frac{\tau_k'(t)}{k} - \frac{\tau_{k+1}'(t)}{k+1}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

z warunkami początkowymi

$$\tau_k(0) = n+1-k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

oraz

$$\tau_{n+1}(t) \equiv 0.$$

Wprowadzenie takich właśnie funkcji τ_k jest główną ideą dowodu de Brangesa. Zauważmy, że zależą one od n, nierówności (10) dowodzi się bowiem przy ustalonym $n = 1, 2, \ldots$

Nierówność (10) można więc zapisać w postaci

$$\varphi(0) \leqslant 0.$$

Żeby udowodnić tę ostatnią nierówność, wystarczy wykazać, że $\varphi(t)$ jest funkcją rosnącą (tj. że $\varphi'(t) \geqslant 0$ dla wszystkich $t \geqslant 0$), oraz że $\lim \varphi(t) = 0$ przy $t \to \infty$.

Drugie z tych stwierdzeń jest prostsze. Z postaci rozwiązań

$$\tau_k(t) = k \sum_{\nu=0}^{n-k} (-1)^\nu \frac{(2k+\nu+1)_\nu (2k+2\nu+2)_{n-k-\nu}}{(k+\nu)\nu!(n-k-\nu)!} e^{-(\nu+k)t}, \tag{15}$$

$k = 1, \ldots, n$, gdzie

$$(a)_\nu = a(a+1)\ldots(a+\nu-1),$$

widać, że $\tau_k(t) \to 0$ przy $t \to \infty$ i każdym $k = 1, \ldots, n$. Funkcje $e^{-t} f(z, t)$ należą do $\mathcal{S}$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. Z oszacowań (3), ze zwartości zbioru $\mathcal{S}$ oraz ze wzoru Cauchy'ego dla k-tego współczynnika funkcji analitycznej wynika, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ funkcja $|d_k(t)|$ jest ograniczona na półprostej $0 \leqslant t < \infty$. Wobec tego $\varphi(t) \to 0$ przy $t \to \infty$.

Pozostaje udowodnić, że

$$\varphi'(t) \geqslant 0 \quad \text{dla wszystkich } t \geqslant 0. \tag{16}$$

Różniczkując (12) względem t i stosując relacje (11) i (14) można w elementarny sposób dojść do wyrażenia

$$\varphi'(t) = -\sum_{k=1}^{n} |b_{k-1}(t) + b_k(t) + 2|^2 \frac{\tau_k'(t)}{k},$$

gdzie $b_0(t) = 0$ oraz

$$b_k(t) = \sum_{j=1}^{k} j d_j(t) \varkappa(t)^{-j}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Dla udowodnienia (16) wystarczy więc wykazać, że

$$\tau_k'(t) \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

czyli że rozwiązania układu (14) są automatycznie funkcjami malejącymi. To wydaje się jedynym nie w pełni elementarnym punktem całego dowodu. Po obliczeniu pochodnych $\tau_k'(t)$ ze wzorów (15) okazuje się, że można je zapisać jako pewne sumy *wielomianów Jacobiego*. Przypomnijmy, że wielomiany te otrzymuje się w wyniku procesu ortogonalizacji wielomianów

$$1, x, x^2, x^3, \ldots$$

na odcinku $(-1, 1)$ względem wagi

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx,$$

gdzie α, β oznaczają ustalone parametry z ograniczeniami $\alpha > -1$, $\beta > -1$ zapewniającymi całkowalność wagi, zob. [34, rozdz. 4] lub [30, rozdz. 6]. Oznaczmy przez $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ wielomian, który powstaje w n-tym kroku tej ortogonalizacji; przy tym wielomiany są normalizowane w ten sposób, że

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \tag{18}$$

zob. [34, str. 58]. Ponieważ waga jest dodatnia, więc wielomiany $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ muszą przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne na odcinku $(-1, 1)$. Przy $\beta = 0$ Askey i Gasper [1, Theorem 3] odkryli ciekawy fakt, że suma pierwszych n wielomianów Jacobiego jest dodatnio określona:

$$\sum_{j=0}^{n} P_j^{(\alpha,0)}(x) \geqslant 0, \qquad -1 < x < 1,$$

dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ Ponadto jedno z wyrażeń uzyskanych w [1, str. 717] dla takiej sumy pokazuje, że

$$\tau_k'(t) = -ke^{-kt} \sum_{j=0}^{n-k} P_j^{(2k,0)}(1-2e^{-t}).$$

Więc dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$ nierówność (17) jest konsekwencją wspomnianego wyniku Askeya i Gaspera (przy $\alpha = 2k$). Z normalizacji (18) wynika, że

$$P_j^{(\alpha,0)}(-1) = (-1)^j,$$

zob. [34, str. 59], i wobec tego

$$\tau_k'(0) = \begin{cases} -k, & \text{jeżeli } n-k \text{ jest parzyste,} \\ 0, & \text{jeżeli } n-k \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Z (14) zatem otrzymujemy

$$\tau_k(0) - \tau_{k+1}(0) = 1$$

i ponieważ $\tau_{n+1}(0) = 0$, więc

$$\tau_k(0) = n+1-k.$$

To kończy dowód hipotezy Bieberbacha. Można też wykazać, że równość w (2) zachodzi tylko dla funkcji Koebego i jej rotacji.

Jak zauważył Robertson [32], z jego hipotezy wynika oszacowanie $|a_n| \leqslant n$ dla każdej funkcji

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

analitycznej w D i podporządkowanej jakiejś funkcji $g \in \mathcal{S}$ w ten sposób, że

$$|f(z)| \leqslant |g(\varphi(z))|, \qquad |\varphi(z)| \leqslant |z|, \qquad z \in D,$$

gdzie φ jest dowolną funkcją analityczną w D; zob. [8, rozdz. 6].

Hipoteza Bieberbacha jest przykładem owocnego problemu, którego znaczenie przekracza stwierdzenie faktu (2). W znacznym stopniu inspirowała ona rozwój teorii funkcji analitycznych w dwudziestym wieku i w związku z próbami jej udowodnienia odkryto dużo innych eleganckich wyników. Pełniejszy obraz daje książka [8]. Rozwiązanie de Brangesa wybiera najprostsze i najbardziej naturalne obserwacje (parametryzacja Loewnera, hipoteza Robertsona, hipoteza Milina). Bardzo cenne jest również dostrzeżenie związku całego problemu z własnością dodatniej określoności sum wielomianów Jacobiego, która została odkryta w zupełnie innym kontekście. Jest to jeszcze jednym przykładem tego, jak naturalność problemu oraz poszukiwanie prostych, a nie zawiłych faktów prowadzą do rzeczywistego postępu nauki. Osiągnięcie de Brangesa ma jeszcze jeden optymistyczny akcent, a mianowicie ten, że wynik tej miary można uzyskać po pięćdziesiątym roku życia.

Pragnąłbym wyrazić podziękowanie Profesorowi S. V. Hruščevowi za szybkie udostępnienie mi informacji o uproszczonej wersji dowodu oraz Profesorowi Z. Semadeniemu za zachętę do napisania tego artykułu.

*

Po przekazaniu niniejszego artykułu do Wydawnictwa ukazały się prace [36], [37], które sugerują, w jaki sposób doszło do odkrycia związku hipotezy Bieberbacha z dodatnią określonością sum wielomianów Jacobiego [1].

Walter Gautschi za pomocą komputera sprawdził nierówności (17) dla $n \leqslant 25$, co dawało wspólną metodę dowodu hipotezy Bieberbacha dla takich n. Zauważył on następnie, że metoda ta daje ogólne rozwiązanie, przytaczając pracę [1].

Bibliografia

[1] R. Askey and G. Gasper, *Positive Jacobi polynomial sums, II*, Amer. J. Math. 98 (1976), str. 709–737.

[2] I. E. Bazilevič, *Asimptotičeskoje svojstvo proizvodnych odnogo klassa reguljarnych v kruge funkcij*, Issled. po sovrem. probl. teorii funkcij kompl. perem., Gos. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moskva 1961, str. 216–219.

[3] S. D. Bernardi, *Bibliography of schlicht functions*, Courant Institute of Math. Sciences, New York Univ., 1966; Part II, ibidem., 1977 (Reprinted by Mariner Publishing Co., Tampa, Florida, 1983; Part III added.)

[4] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 1916, str. 940–955.

[5] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, LOMI Preprints, E-5-84, Leningrad 1984; Acta Math. 154 (1985), str. 137–152.
[6] Z. Charzyński and M. Schiffer, *A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal. 5 (1960), str. 187–193.
[7] —, *A geometric proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, Scripta Math. 25 (1960), str. 173–181.
[8] P. L. Duren, *Univalent functions*, Springer-Verlag, Berlin 1983.
[9] M. Fekete and G. Szegö, *Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen*, J. London Math. Soc. 8 (1933), str. 85–89.
[10] C. H. FitzGerald and Ch. Pommerenke, *The de Branges theorem on univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 290 (1985), str. 683–690.
[11] P. R. Garabedian and M. Schiffer, *A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*, J. Rational Mech. Anal. 4 (1955), str. 427–465.
[12] G. M. Goluzin, *Geometričeskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo*, Nauka, Moskva 1966.
[13] A. W. Goodman, *An invitation to the study of univalent and multivalent functions*, Internat. J. Math. Mech. Sci. 2 (1979), str. 163–186.
[14] T. H. Gronwall, *Some remarks on conformal representation*, Ann. of Math. 16 (1914–1915), str. 72–76.
[15] W. K. Hayman, *La régularité des fonctions univalentes*, C. R. Acad. Sci. Paris 237 (1953), str. 1624–1625.
[16] S. V. Hruščev, list do autora, sierpień 1984.
[17] G. Kolata, *Surprise proof of an old conjecture*, Science 225 (1984), str. 1006–1007.
[18] J. Krzyż, *On the maximum modulus of univalent functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 3 (1955), str. 203–206.
[19] N. A. Lebedev i I. M. Milin, *Ob odnom neravenstve*, Vestnik Leningrad. Univ. 20 (1965), no. 19, vyp. 4, str. 157–158.
[20] F. Leja, *Funkcje zespolone*, wydanie trzecie, PWN, Warszawa 1973.
[21] J. E. Littlewood and R. E. A. C. Paley, *A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients*, J. London Math. Soc. 7 (1932), str. 167–169.
[22] K. Loewner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I*, Math. Ann. 89 (1923), str. 103–121.
[23] I. M. Milin, *O koefficientach odnolistnych funkcij*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 176 (1967), str. 1015–1018.
[24] —, *Odnolistnyje funkcii i ortonormirovannyje sistemy*, Nauka, Moskva 1971.
[25] —, *Dokazatel'stvo L de Branža gipotezy Biberbacha*, notatki z wykładu, 1984.
[26] M. Ozawa, *On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient*, Kōdai Math. Sem. Rep. 21 (1969), str. 97–128.
[27] —, *An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient*, ibid., str. 129–132.
[28] R. N. Pederson, *A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient*, Arch. Rational Mech. Anal. 31 (1968), str. 331–351.
[29] R. Pederson and M. Schiffer, *A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient*, ibid., 45 (1972), str. 161–193.
[30] G. Pólya i G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis II*, Springer-Verlag, Berlin 1964; tłumaczenie na język rosyjski, 1978.
[31] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen 1975.
[32] M. S. Robertson, *A remark on the odd schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), str. 366–370.

[33] S. Saks i A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, wydanie trzecie, PWN, Warszawa 1959.
[34] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 23, New York 1959.
[35] T. Todd, *Math professor solves problem*, The Purdue Exponent, August 23, 1984.
[36] L. de Branges, *Löwner expansions*, J. Math. Anal. Appl. 100 (1984), str. 323–337.
[37] C. H. FitzGerald, *The Bieberbach conjecture: retrospective*, Notices Amer. Math. Soc. 32 (1985), str. 2–6.

Miscellanea

... co przewyższa geometrię, przewyższa i nas.

*

... ten, co opanował geometrię, zawsze góruje nad innymi i wyróżnia się szczególną sprawnością.

*

... definicje są dowolne i nie mogą być przedmiotem zarzutów. Jest bowiem rzeczą najzupełniej dopuszczalną nazwać rzecz, którą określiliśmy w sposób jasny, tak jak się nam podoba.

*

Nie definiuje [geometria] żadnej rzeczy takiej jak przestrzeń, czas, ruch, liczba, równość ani im podobnych, a bardzo licznych, ponieważ nazwy te w sposób tak naturalny określają — dla rozumiejących język — rzeczy, które oznaczają, że wyjaśnienie, jakie chcielibyśmy tu dodać, więcej by zaciemniło niż wyjaśniło.

*

Definicje tworzymy bowiem tylko po to, by oznaczyć rzecz, której dajemy nazwę, a nie po to, by ukazać jej naturę.

*

Może się ktoś dziwić, że geometria nie potrafi zdefiniować żadnej z tych rzeczy, które są jej głównymi przedmiotami, nie potrafi bowiem zdefiniować ani ruchu, ani liczb, ani przestrzeni, a przecież właśnie te trzy rzeczy są przed-