ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVII (1986)

wmptm 1897

CLAUDE BREZINSKI (Lille)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Długie dzieje ułamków łańcuchowych i przybliżeń Padégo*

Rozważmy wyrażenie

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{\ddots}}}}. \tag{1}$$

Z oczywistych względów typograficznych zapisujemy je zwykle w postaci

$$b_1+\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\cdots$$

lub w postaci

$$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\frac{a_3|}{|b_3}+\cdots$$

W dalszym ciągu używamy tej ostatniej, gdyż wydaje się bardziej przejrzysta. Wyrażenie (1) nazywamy *ułamkiem łańcuchowym*. Aby nadać właściwy sens temu pojęciu, zacznijmy od kilku definicji. Elementy a_k i b_k nazywamy odpowiednio k-tym *licznikiem częściowym* i k-tym *mianownikiem częściowym*. Iloraz a_k/b_k jest k-tym *ilorazem częściowym*, a wielkość

$$C_n := b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\ldots+\frac{a_n|}{|b_n}$$

---

* *Od autora.* Artykuł jest przekładem tekstu odczytu, zamieszczonego na str. 1–27 sprawozdań z konferencji *Padé approximation and its applications*, Amsterdam 1980. Sprawozdania, przygotowane pod redakcją M. G. de Bruina i H. van Rossuma, stanowią tom 888 serii *Lecture Notes in Mathematics* wydany w 1981 r. przez Springer-Verlag. Dziękuję temu wydawnictwu za zgodę na przekład artykułu, a także tłumaczowi, Stefanowi Paszkowskiemu, który poprawił kilka błędów zauważonych w oryginale.

Od tłumacza. Na prośbę redakcji *Wiadomości Matematycznych* autor poprzedził artykuł przypomnieniem pojęć używanych w teoriach, których historię tu szkicuje. Autor zechciał też zaakceptować drobne uzupełnienia tekstu, mogące ułatwić jego lekturę polskim czytelnikom.

n-tym *reduktem* ułamka łańcuchowego (1). Ta liczba jest oczywiście określona tylko wtedy, gdy żaden z mianowników pojawiających się w kolejnych dzieleniach nie jest równy 0.

Jeśli wszystkie redukty C_n, z wyjątkiem co najwyżej skończenie wielu, są określone i jeśli istnieje granica

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n,$$

to piszemy

$$C = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots$$

Mówimy, że w tym przypadku ułamek łańcuchowy (1) jest *zbieżny* i nazywamy C jego *wartością*. W przeciwnym razie ułamek (1) jest *rozbieżny*.

Niech $\{C_n\}$ będzie ciągiem reduktów ułamka łańcuchowego (1). Mówimy, że ułamek łańcuchowy, którego redukty tworzą pewien podciąg ciągu $\{C_n\}$, powstaje przez *ściągnięcie* ułamka C. Ta operacja daje np. *część parzystą* ułamka (1) (ułamek o reduktach $C_0, C_2, C_4, \dots$) i jego *część nieparzystą* (ułamek o reduktach $C_1, C_3, C_5, \dots$). *Rozszerzenie* ułamka (1) polega — w najprostszym przypadku — na konstrukcji ułamka łańcuchowego, który, dla danej liczby całkowitej nieujemnej k i danej liczby zespolonej lub rzeczywistej g, ma następujący ciąg reduktów: $C_0, \dots, C_{k-1}, g, C_k, C_{k+1}, \dots$

Teoria analityczna ułamków łańcuchowych dotyczy ułamków, których liczniki i mianowniki częściowe są funkcjami (np. wielomianami) zmiennej zespolonej. Ułamek

$$a_0(z) + \frac{a_1(z)|}{|b_1(z)} + \frac{a_2(z)|}{|b_2(z)} + \dots$$

odpowiada szeregowi nieskończonemu

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \tag{2}$$

jeśli każdy redukt $f_n(z)$ tego ułamka jest funkcją meromorficzną w punkcie 0 i jeśli istnieje ciąg nieskończony liczb całkowitych m_n dążący do nieskończoności i taki, że

$$f(z) - f_n(z) = O(z^{m_n}), \qquad z \to 0.$$

Ułamek łańcuchowy

$$1 + \frac{k_1 z|}{|1+l_1 z} - \frac{k_2 z|}{|1+l_2 z} - \frac{k_3 z|}{|1+l_3 z} - \dots, \qquad k_n \neq 0,$$

nazywamy *stowarzyszonym* z szeregiem potęgowym

$$f(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

jeśli dla każdego n redukt $f_n(z)$ tego ułamka rozwija się w szereg potęgowy taki, że

$$f(z)-f_n(z) = O(z^{2n+1}).$$

Dla danego szeregu potęgowego (2) można zbudować (jeśli tylko są spełnione pewne założenia) ciąg podwójny funkcji wymiernych oznaczanych symbolem $[p/q]$, gdzie

$$[p/q] = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i z^i}{\sum_{i=0}^{q} b_i z^i}.$$

Funkcję $[p/q]$ określa żądanie, aby jej rozwinięcie w szereg potęgowy względem z było zgodne z szeregiem (2) aż do składnika zawierającego z^{p+q}. Inaczej mówiąc,

$$f(z)-[p/q] = O(z^{p+q+1}).$$

Funkcję wymierną $[p/q]$ nazywamy *przybliżeniem Padégo* funkcji $f(z)$. Tablica dwuwymiarowa, która na przecięciu p-tego wiersza i q-tej kolumny ($p, q = 0, 1, \ldots$) zawiera przybliżenie $[p/q]$, nosi nazwę *tablicy Padégo*.

*

Ułamki łańcuchowe i przybliżenia Padégo odgrywają bardzo ważną rolę w rozwoju matematyki i jej zastosowań i — o czym świadczy również ta konferencja — są szeroko używane. Sądzę więc, że dla specjalistów w tej dziedzinie będzie interesująca znajomość jej historii. Wynika to nie tylko ze względów kulturowych, ale i stąd, że niektóre dawne prace mogą być punktem wyjścia do nowych poszukiwań.

Historia ułamków łańcuchowych jest już długa: jej początkiem jest algorytm Euklidesa służący do obliczania największego wspólnego dzielnika liczb naturalnych, znaleziony około 300 lat przed Chr. W tej historii uczestniczyło wielu znanych matematyków wszystkich epok. Nie ma tu zatem miejsca na pełny opis dziejów ułamków łańcuchowych (ukaże się on, wraz z bibliografią, później) i ograniczę się do ich krótkiego zarysu.

Z przyjemnością dziękuję Bernardowi Rouxelowi z uniwersytetu w Lille za autorytatywne wskazówki odnoszące się do historii matematyki. Winienem też podziękować Hermanowi van Rossumowi i Marcelowi de Bruinowi za interesujące dyskusje i przyjęcie do druku tego długiego artykułu.

Prehistoria. Jak to często bywa w nauce, ułamków łańcuchowych używano na długo przed ich rzeczywistym odkryciem. Wydaje się, że pierwszym takim zastosowaniem jest algorytm Euklidesa (około 306–283 r.

przed Chr.). Pozwala on obliczyć największy wspólny dzielnik dwóch liczb całkowitych i prowadzi do pewnego skończonego ułamka łańcuchowego. Niech a i b będą liczbami naturalnymi i niech $a > b$. Przyjmujemy $r_0 = a$, $r_1 = b$ i określamy ciąg $\{r_k\}$ za pomocą relacji

$$r_k = r_{k+1}q_k + r_{k+2}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

gdzie $0 \leqslant r_{k+1} < r_k$, a q_k jest liczbą naturalną. Można wykazać istnienie takiego n, że $r_{n+2} = 0$. Wtedy $r_n = r_{n+1}q_n$ i r_{n+1} jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Prócz tego

$$\frac{r_k}{r_{k+1}} = q_k + \frac{1}{r_{k+1}/r_{k+2}}$$

i w rezultacie

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{|q_1} + \ldots + \frac{1}{|q_n}.$$

Oczywiście Euklides nie wyraził swego algorytmu w takiej postaci; posługiwał się on rozumowaniami geometrycznymi, które dotyczyły mierzenia jednego odcinka za pomocą innego.

Algorytm Euklidesa wiąże się z przybliżonym upraszczaniem ułamków praktykowanym przez Archimedesa (287–212 przed Chr.) i Arystarcha z Samos (ok. 310–230 przed Chr.). Inni matematycy, np. Teon z Aleksandrii (około 365), używali niejawnie ułamków łańcuchowych, obliczając bok kwadratu o danym polu. Metoda Teona wyciągania pierwiastka kwadratowego daje w istocie początek ułamka łańcuchowego

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{|2a} + \frac{r}{|2a} + \ldots,$$

gdzie a jest największą liczbą całkowitą taką, że $a^2 \leqslant A$. Archimedes podał też oszacowanie

$$\frac{265}{153} = \frac{1}{3}\left(5 + \frac{1}{|5} + \frac{1}{|10}\right) < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} = \frac{1}{3}\left(5 + \frac{1}{|5} + \frac{1}{|10} + \frac{1}{|5}\right).$$

W następnych wiekach próbowano wielokrotnie znaleźć metody przybliżonego pierwiastkowania. Choć żadna z nich nie wiązała się bezpośrednio z ułamkami łańcuchowymi, to jednak utorowano w ten sposób drogę, którą szli później prawdziwi twórcy ich teorii.

Innym bardzo dawnym zadaniem, które także prowadzi do ułamków łańcuchowych, jest zadanie związane z tzw. równaniami diofantycznymi, nazwanymi tak na cześć Diofantosa (około 250 r.). Znalazł on rozwiązanie wymierne równania

$$ax \pm by = c;$$

a, b i c są tu danymi liczbami naturalnymi. Takie równania powstają w astronomii, a ich rozwiązania odpowiadają pewnym koniunkcjom. Zadanie rozwiązał w pełni matematyk hinduski Āryabhata (475–550). Rozpatrzmy równanie

$$ax+by = c,$$

gdzie liczby naturalne a i b są względnie pierwsze i $a > b$. Wtedy algorytm Euklidesa daje rozwinięcie

$$\frac{a}{b} = q_0+\frac{1}{|q_1}+\ldots+\frac{1}{|q_n}.$$

Oznaczmy

$$\frac{p}{q} = q_0+\frac{1}{|q_1}+\ldots+\frac{1}{|q_{n-1}}.$$

Wtedy $aq-bp = \pm 1$. Jeśli po prawej stronie występuje np. $+1$, to

$$ax+by = c(aq-bp),$$

skąd

$$(cq-x)/b = (y+cp)/a = t$$

i ostatecznie

$$x = cq-bt, \qquad y = at-cp.$$

Nadając parametrowi t wartości całkowite, otrzymuje się tu wszystkie rozwiązania całkowite badanego równania diofantycznego. Taki sam wynik podał też Brahmagupta (około r. 598). W Europie opisaną wyżej metodę znalazł ponownie Claude Gaspard Bachet de Meziriac (1581–1638) w 1612 r. Używali jej również Nicholas Saunderson (1682–1739) i Joseph Louis Lagrange (1736–1813), który w 1767 r. wyraził jawnie iloraz a/b jako ułamek łańcuchowy — stało się to 1300 lat po odkryciu matematyków hinduskich!

Jednym z najznamienitszych matematyków hinduskich był chyba Bhaskara, urodzony w Bidur w 1115 r. i pracujący w Ujjayni. Około 1150 r. napisał on książkę *Līlāvatī*, w której badał równanie $ax-by = c$. Bhaskara wykazał, że jego rozwiązanie można otrzymać za pomocą ułamka łańcuchowego dla a/b. Udowodnił on też, że redukty $C_k = A_k/B_k$ tego ułamka spełniają związki

$$A_k = q_kA_{k-1}+A_{k-2},$$

$$B_k = q_kB_{k-1}+B_{k-2},$$

$$A_kB_{k-1}-A_{k-1}B_k = (-1)^{k-1}.$$

Rozwiązanie równania diofantycznego wyraża się wzorami

$$x = \mp cB_{n-1} + bt, \quad y = \mp cA_{n-1} + at,$$

gdzie znaki zależą od równości $B_{n-1} - bA_{n-1} = \pm 1$.

Uprzedzając tu fakty powiedzmy od razu, że związki rekurencyjne dla reduktów ułamków łańcuchowych odkryto w Europie 500 lat później. Warto dodać, że pierwszy przekład na język angielski książki Bhaskary ukazał się w 1816 r. i że jego dzieło nie było zapewne znane w Europie wcześniej (co najwyżej w jakiejś wersji łacińskiej opartej na tłumaczeniu arabskim).

Uwaga. Symbol

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots$$

wprowadził w 1898 r. Alfred Pringsheim (1850–1941), natomiast symbol

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \; \frac{a_2}{b_2 +} \dots$$

— sir John William Herschel (1792–1871) w 1820 r.

Pierwsze kroki. W Europie miejscem narodzin ułamków łańcuchowych są bez wątpienia północne Włochy. Pierwszą próbę ogólnej definicji ułamków łańcuchowych zawdzięczamy Leonardowi Fibonacciemu (około 1170–1250), zwanemu także Leonardem z Pizy. Był to kupiec wędrujący daleko na Wschód i stykający się z pracami matematyków arabskich. Jego sławny traktat *Liber Abaci* (napisany w 1202 r , przerobiony w 1228 r., ale ogłoszony dopiero w 1857 r.) wprowadza ułamki łańcuchowe „wstępujące", które nie są zbyt ciekawe.

Pierwszym matematykiem, który naprawdę stosował ułamki łańcuchowe nieskończone w obecnym rozumieniu tego pojęcia, był Rafael Bombelli (1526–1572), odkrywca liczb zespolonych. O jego życiu i karierze mało wiadomo. Napisał on książkę *L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri* w Bolonii w 1572 r.; drugie wydanie ukazało się w 1579 r. pod tytułem *L'Algebra Opera*. W tym drugim wydaniu Bombelli podał algorytm rekurencyjnego pierwiastkowania liczby 13 w pełni równoważny konstrukcji ułamka łańcuchowego

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4|}{|6} + \frac{4|}{|6} + \dots$$

Chociaż Bombelli nie wyjaśnił, jak skuteczna jest jego metoda, ani jak ją otrzymał, to jednak jest oczywiste, że trzeba tu użyć wzoru

$$A = a^2 + r,$$

gdzie a jest największą liczbą całkowitą taką, że $a^2 < A$. Inaczej mówiąc,

$$(\sqrt{A}+a)(\sqrt{A}-a) = r,$$

skąd

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{a+\sqrt{A}}.$$

Zastępując w mianowniku po prawej stronie pierwiastek z A podaną wyżej sumą i powtarzając tę zamianę w nieskończoność, otrzymujemy rozwinięcie

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{|2a} + \frac{r}{|2a} + \ldots$$

Bombelli podkreślił, że pierwsza wersja jego książki opiera się na wynikach Alchwarizmiego, wielkiego matematyka muzułmańskiego, który około 830 r. mieszkał w Bagdadzie. Przypuszcza się również, że to Al-Hayyām (około 1048–1131) jest autorem wspomnianej metody.

W następnych latach największy wkład do teorii ułamków łańcuchowych wniósł Pietro Antonio Cataldi (1548–1626); można go uważać za rzeczywistego twórcę tej teorii. W książce *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* ..., ogłoszonej w Bolonii w 1613 r., Cataldi stosuje do obliczania pierwiastków kwadratowych tę samą metodę co Bombelli, ale po raz pierwszy wprowadza specjalne oznaczenia dla ułamków łańcuchowych. Cataldi rozwinął $\sqrt{18}$ w ułamek łańcuchowy aż do piętnastego reduktu oraz udowodnił, że kolejne redukty są na przemian większe i mniejsze od $\sqrt{18}$ i że ich ciąg jest zbieżny do tej liczby.

W tym samym okresie ułamki łańcuchowe (a ściślej, procedurę związaną z nimi) stosowano już do przybliżania i upraszczania ułamków. Trzeba tu wspomnieć o pracach Daniela Schwentera (1585–1636), Fransa von Schootena (1615–1660) i Alberta Girarda (1595–1632).

Początki teorii. Przenieśmy się teraz do Anglii, aby być świadkami następnego ważnego wydarzenia.

W 1655 r. John Wallis (1616–1703) w książce *Arithmetica infinitorum* wyraził $4/\pi$ za pomocą iloczynu nieskończonego:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot \ldots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots}.$$

Wallis napisał tam o lordzie Williamie Brounckerze (1620–1684), jednym z twórców Towarzystwa Królewskiego i jego pierwszym przewodniczącym, że „ten wielce czcigodny mąż, rozważywszy zadanie, umiał doprowadzić tę wielkość właściwą sobie metodą nieskończonych do postaci, którą

można wygodnie wyrazić [stosując obecną symbolikę] tak:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1|}{|2} + \frac{9|}{|2} + \frac{25|}{|2} + \frac{49|}{|2} + \frac{81|}{|2} + \ldots"$$

Wallis ciągnie dalej: „*Nempe si unitati adjungatur fractio, quae denominatorem habeat continue fractum*". Pojawił się tu po raz pierwszy termin przyjęty odtąd w wielu językach, np. angielskim (*continued fraction*) lub francuskim (*fraction continue*).

Najważniejszy wynik Wallisa znajduje się dziesięć stronic dalej; czytamy tam: „*Nos inde hanc colligimis regulam, cojus ope a principio reductionem inchoemur quousq; libet continuandam*

$$\frac{P \quad Q \qquad P \quad Q \qquad Q}{N3 \times \frac{N1}{D1} :+ D3 \times \frac{N2}{D2} := \frac{N3}{D3}}."$$

Jest to związek rekurencyjny spełniony przez liczniki i mianowniki kolejnych reduktów ułamka łańcuchowego. Wallis zrobił też pierwszy krok w kierunku dowodu zbieżności zauważając, że redukty ułamka łańcuchowego Brounckera są na przemian większe i mniejsze od $4/\pi$ i stwierdzając, że proces jest zbieżny: „*ad numerum justum acceditur*".

Trzeba też wspomnieć o holenderskim matematyku i astronomie Christiaanie Huygensie (1629–1695), który w 1682 r. zbudował automatyczne planetarium. Zastosował on przy tym ułamki łańcuchowe; opisał to w książce *Descriptio automati planetarii*, którą wydrukowano już po jego śmierci. Obliczono, że w ciągu roku Saturn przebiega 12°13′34″18‴, a Słońce 359°45′40″31‴. Iloraz tych kątów wynosi 2640858/77708431. Aby znaleźć najmniejsze liczby całkowite, których iloraz jest bliski powyższej wartości (i które dają liczby zębów kół zębatych jego planetarium) Huygens podzielił większą liczbę przez mniejszą, mniejszą przez resztę itd. Otrzymał tą drogą ułamek łańcuchowy

$$\frac{1|}{|29} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|5} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \ldots$$

Huygens zajmował się też równaniem diofantycznym $py - qx = \pm 1$. Rozwinął on p/q w ułamek łańcuchowy i zauważył, że redukty dążą do p/q i że są one na przemian mniejsze i większe od p/q. Rozwiązania x i y są równe odpowiednio licznikowi i mianownikowi przedostatniego reduktu. Wtedy $py - qx$ jest równe $+1$ albo -1 zależnie od tego, czy x/y jest mniejsze czy większe od p/q. Zastosowana tu metoda jest w istocie identyczna z metodą Āryabhaty. Używał jej także Anglik Saunderson do rozwiązania równania $ax - by = c$, gdzie c jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Saunderson udowodnił też m.in., że redukty ułamka łańcuchowego dla a/b są w pewnym sensie optymalne. Tym samym tematem zajmo-

wali się również Roger Cotes (1682–1716), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Robert Simson (1687–1768) i inni.

Kończąc ten paragraf trzeba koniecznie wymienić jeszcze jedno nazwisko: Johann Bernoulli starszy (1667–1748), który używał ułamków łańcuchowych do upraszczania ilorazów wielkich liczb całkowitych i który był nauczycielem Eulera.

Złoty wiek. Osiemnaste stulecie było złotym wiekiem ułamków łańcuchowych. Wywarli na nim swe piętno trzej wielcy matematycy: Euler, Lambert i Lagrange, wszyscy — członkowie Akademii Nauk w Berlinie.

Największe znaczenie mają bez wątpienia wyniki Leonharda Eulera (1707–1783). W swej pierwszej pracy o ułamkach łańcuchowych, pochodzącej z 1737 r., udowodnił on, że każda liczba wymierna da się wyrazić jako ułamek łańcuchowy skończony (o licznikach częściowych równych 1), że liczba niewymierna generuje ułamek nieskończony i że ułamek łańcuchowy *okresowy* (tzn. taki, którego mianowniki częściowe powtarzają się okresowo) jest pierwiastkiem równania kwadratowego. Euler znalazł też ułamki łańcuchowe dla liczb e, $(e+1)/(e-1)$ i $(e-1)/2$ całkując równanie Riccatiego dwiema różnymi metodami. Trzeba tu zauważyć, że — jeśli pominąć brak dowodu zbieżności tych ułamków — Euler wykazał, że liczby e i e^2 są niewymierne.

Euler podał w 1748 r. pierwszy obszerny i systematyczny wykład teorii ułamków łańcuchowych w sławnej książce *Introductio in analysin infinitorum*. Znajduje się tam związek rekurencyjny dla reduktów $C_k = A_k/B_k$ ułamka łańcuchowego

$$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\dots$$

i opis przekształcenia tego ułamka na szereg nieskończony: ponieważ

$$C_n-C_{n-1}=(-1)^{n-1}\frac{a_1\dots a_n}{B_{n-1}B_n},$$

więc

$$C=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1\dots a_n}{|B_{n-1}B_n}.$$

Z drugiej strony, Euler wykazał, że każdy szereg nieskończony można przekształcić na ułamek łańcuchowy:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_n=\frac{C_1|}{|1}+\frac{C_2|}{|C_1-C_2}+\dots+\frac{C_{n-2}C_n|}{|C_{n-1}-C_n}+\dots$$

Po kilku przykładach Euler zbadał przypadek szeregów potęgowych.

Euler doszedł też do kwestii zbieżności pokazując, jak obliczyć wartość ułamka łańcuchowego okresowego

$$C = \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \dots$$

za pomocą związku $C = 1/(2+C)$, z którego wynika, że $C^2+2C = 1$ i $C = \sqrt{2}-1$. Wychodząc z tego przykładu Euler przedstawił metodę Bombelliego rozwinięcia pierwiastka kwadratowego w ułamek łańcuchowy i ogólną metodę rozwiązywania równań kwadratowych. Rozdział kończy się algorytmem Euklidesa i upraszczaniem ułamków oraz przykładami.

Euler ogłosił prace, w których stosuje ułamki łańcuchowe do rozwiązywania równania różniczkowego Riccatiego i obliczania całek. Wykazał też, że pewne ułamki łańcuchowe otrzymane z szeregów potęgowych są zbieżne nawet poza obszarem zbieżności tych szeregów. Tak jest np. dla szeregu

$$x - 1!\,x^2 + 2!\,x^3 - 3!\,x^4 + \dots,$$

rozbieżnego dla wszystkich $x \neq 0$. Euler udowodnił, że ten szereg formalnie spełnia równanie różniczkowe $x^2y' + y = x$ i wyraził jego rozwiązanie w postaci

$$y(x) = \int_0^\infty \frac{x\exp(-t)}{1+xt}\,dt.$$

Daje to pewną metodę sumowania szeregów rozbieżnych. Euler rozwinął następnie wspomniany szereg w ułamek łańcuchowy

$$\frac{x|}{|1} + \frac{x|}{|1} + \frac{x|}{|1} + \frac{2x|}{|1} + \frac{2x|}{|1} + \frac{3x|}{|1} + \frac{3x|}{|1} + \dots$$

i użył tego ostatniego do obliczenia „wartości" szeregu rozbieżnego $1! - 2! + 3! - \dots$ Pomysły Eulera rozwinęli później Laguerre i Stieltjes.

W liście z 1743 r. i artykule z 1762 r. Euler szuka liczb a takich, że a^2+1 dzieli się przez daną liczbę pierwszą postaci $4n+1 = p^2+q^2$. Rozwiązanie wyraża się przez przedostatni redukt ułamka łańcuchowego dla p/q.

W 1765 r. Euler badał równanie Pella $x^2 = Dy^2+1$. W tym celu rozwinął $\sqrt{D}$ w ułamek łańcuchowy

$$\sqrt{D} = v + \frac{1|}{|a} + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \dots$$

Jego kolejne redukty Euler oznaczał symbolami

$$\frac{1}{0}, \frac{(v)}{1}, \frac{(v,a)}{(a)}, \frac{(v,a,b)}{(a,b)}, \frac{(v,a,b,c)}{(a,b,c)}, \dots$$

Znalazłszy pewne tożsamości wykazał on, że

$$(v)^2 - D\cdot 1^2 = -a, \quad (v, a)^2 - D(a)^2 = \beta,$$
$$(v, a, b)^2 - D(a, b)^2 = -\gamma, \quad \ldots,$$

gdzie $a, \beta, \gamma, \ldots$ wyrażają się przez $v, a, b, c, \ldots$

W tym samym czasie Euler badał szczegółowo zależność liczników i mianowników reduktów ułamka łańcuchowego od jego mianowników częściowych i udowodnił m.in., że

$$(a, b, c, d, \ldots) = a(b, c, d, \ldots) + (c, d, \ldots),$$
$$(a, b, c, \ldots, q) = (q, \ldots, c, b, a),$$
$$(a, b)(b, c) - (b)(a, b, c) = 1,$$
$$(a, b, c)(d, e, f) - (a, b, \ldots, f) = -(a, b)(e, f).$$

W 1771 r. Euler zastosował ułamki łańcuchowe do przybliżonego obliczania średniej geometrycznej dwóch liczb, których iloraz jest równy $1/x$. Tą metodą można obliczać przybliżone wartości wyrażenia $x^{p/q}$.

W 1773 r. Euler za pomocą ułamków łańcuchowych obliczył x i y minimalizujące różnicę $mx^2 - ny^2$, a w 1780 r. znalazł f i g takie, że $fr^2 - gs^2 = x$.

W 1783 r. Euler udowodnił, że wartość ułamka łańcuchowego

$$\frac{m+1|}{|2} + \frac{m+2|}{|3} + \ldots$$

jest liczbą wymierną, gdy m jest całkowite i nie mniejsze niż 2.

Euler był zatem pierwszym matematykiem, który nie tylko wyłożył jasno teorię ułamków łańcuchowych, ale i stosował je do rozwiązania różnorodnych zadań. Jego wielki wpływ na rozwój tej teorii jest oczywisty.

W 1775 r. Daniel Bernoulli (1700–1782) pokazał, jak można zbudować ułamek łańcuchowy o danym ciągu reduktów.

Do 1750 r. wyrażono już liczbę π w postaci szeregu nieskończonego, iloczynu nieskończonego i ułamka łańcuchowego nieskończonego, ale nie było jeszcze wiadomo, czy kwadratura koła jest możliwa. Pierwszy krok na drodze do przeczącej odpowiedzi na to pytanie zrobił Johann Heinrich Lambert (1728–1777). Posługując się wynikami Eulera znalazł on w 1766 r. rozwinięcie

$$\operatorname{tg} x = \frac{x|}{|1} - \frac{x^2|}{|3} - \frac{x^2|}{|5} - \ldots$$

i wykazał, że wartość $\operatorname{tg} x$ jest niewymierna, gdy x jest wymierne i różne od 0. Ponieważ $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi = 1$, więc liczby $\frac{1}{4}\pi$ i π są niewymierne. Korzystając z podobieństwa funkcji hiperbolicznych i trygonometrycznych, Lambert znalazł ułamek łańcuchowy dla $e^x + 1$ i wykazał, że e^n dla naturalnego n

jest niewymierne i że logarytm naturalny dowolnej liczby wymiernej jest niewymierny. Lambert udowodnił też zbieżność podanego wyżej ułamka łańcuchowego do $\operatorname{tg} x$ i zakończył swą pracę hipotezą, że „żadnej wielkości przestępnej kołowej lub logarytmicznej, w której nie występuje inna wielkość przestępna, nie można wyrazić przez wielkości niewymierne pierwiastkowe".

Lambert podał kilka przykładów szeregów rozbieżnych, którym odpowiadają ułamki łańcuchowe zbieżne i znalazł ułamki łańcuchowe dla funkcji $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, $\log(1+x)$, $(e^x-1)/(e^x+1)$ i dla liczby π. Jest godne uwagi, że już wtedy Lambert umiał podać całkowicie ścisłe (aczkolwiek nieco skomplikowane) uzasadnienie tych rozwinięć.

Kolejne fundamentalne wyniki w teorii ułamków łańcuchowych uzyskał Joseph Louis Lagrange (1736–1813). W 1766 r. podał on pierwszy dowód, że równanie $x^2 = Dy^2+1$ ma rozwiązanie całkowite, w którym $y \neq 0$, jeśli D jest liczbą całkowitą niekwadratową. W dowodzie korzystał z rozwinięcia na ułamek łańcuchowy dla $\sqrt{D}$.

W 1767 r. Lagrange ogłosił *Mémoire sur la résolution des équations numériques* opisując tam metodę przybliżania pierwiastka rzeczywistego równania za pomocą ułamków łańcuchowych. Rok później w *Addition* do tego *Mémoire* udowodnił wynik odwrotny do wyniku Eulera: „Twierdzę teraz, że ułamek łańcuchowy wyrażający wartość x [pierwiastek rzeczywisty dodatni równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych] jest na pewno okresowy."

Lagrange wykazał, że ułamek łańcuchowy dla $\sqrt{D}$ jest okresowy i że okres może mieć tylko dwie różne postacie, które też podał. Te wyniki Lagrange powiązał z rozwiązywaniem równania $x^2 = Dy^2 \pm 1$. W tej samej pracy uogólnił on metodę Huygensa i Saundersona rozwiązywania równania $py - qx = r$. Lagrange zauważył, że ta metoda jest „w istocie identyczna z metodą Bacheta, a także z wszystkimi metodami zaproponowanymi przez innych matematyków" i że jest ona równoważna zwykłej metodzie przekształcania ilorazu p/q na ułamek łańcuchowy.

W 1772 r. Lagrange studiował interesujące zadanie: rozwiązywanie równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach. Niech $\{c_n\}$ będzie ciągiem nieskończonym liczb. Lagrange pierwszy zdefiniował funkcję tworzącą ciągu $\{c_n\}$ jako szereg

$$f_0(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Wykazał on, że jeśli

$$f_0(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1}}{b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k},$$

to ciąg $\{c_n\}$ spełnia związek rekurencyjny

$$c_n = -\frac{1}{b_0}(b_1 c_{n-1} + \ldots + b_k c_{n-k}), \qquad n \geqslant k.$$

Z drugiej strony, jeśli ciąg $\{c_n\}$ spełnia taki związek, to jego funkcja tworząca jest wymierna. Lagrange interesował się też zadaniem wyznaczania ukrytych okresowości ciągu. Jest to równoważne wykazaniu, że funkcja tworząca f_0 tego ciągu jest wymierna. Lagrange budował ciąg $\{f_k\}$ funkcji takich, że

$$f_{-1}(x) = 1,$$

$$f_{k-1}(x)/f_k(x) = p_k + q_k x + x^2 f_{k+1}(x)/f_k(x).$$

Wtedy

$$f_0(x) = \frac{1}{|p_0 + q_0 x} + \frac{x^2}{|p_1 + q_1 x} + \frac{x^2}{|p_2 + q_2 x} + \ldots$$

Jeśli dla pewnego k jest $f_{k-1}(x) \equiv 0$, to f_0 jest ilorazem wielomianu stopnia $k-1$ przez wielomian stopnia k, a zatem $\{c_n\}$ spełnia równanie różnicowe rzędu k.

W 1774 r., uzupełniając *Algebrę* Eulera, Lagrange udowodnił, że dla danej liczby rzeczywistej dodatniej a istnieją liczby całkowite względnie pierwsze p i q takie, że

$$|p - qa| < |r - sa| \quad \text{dla } r < p \text{ i } s < q;$$

tymi liczbami są odpowiednio licznik i mianownik dowolnego reduktu ułamka łańcuchowego dla a, w którym wszystkie elementy są dodatnie. Lagrange podał też metodę, opartą na ułamkach łańcuchowych, wyznaczania rozwiązań całkowitych równania

$$Ay^2 - 2Byz + Cz^2 = 1$$

i wykazał, że nie można rozwiązać równania Pella używając ułamka łańcuchowego dla $\sqrt{D}$ z dowolnie wybranymi znakami mianowników częściowych.

W 1776 r. Lagrange opublikował pracę o zastosowaniu ułamków łańcuchowych w rachunku całkowym; podana tam ogólna metoda pozwala rozwinąć w ułamek łańcuchowy rozwiązanie równania różniczkowego. W przytoczonych przykładach Lagrange przekształcał redukty otrzymanych ułamków łańcuchowych na zwykłe funkcje wymierne, których rozwinięcie w szereg potęgowy jest zgodne z analogicznym rozwinięciem wyjściowej funkcji „aż do potęgi zmiennej x równej sumie dwóch najwyższych potęg x w liczniku i mianowniku". Jest to prawdziwy akt urodzenia

przybliżeń Padégo! W liście do d'Alemberta Lagrange pisze o tomie zawierającym tę pracę: „Jest tu jak zwykle coś mojego, ale nic, co mogłoby zasługiwać na Pańską uwagę". Zaiste, nie było to zdanie prorocze ...

Kończąc ten paragraf wspomnijmy, że metodę Lagrange'a dotyczącą równań diofantycznych zastosował w 1772 r. Johann Bernoulli młodszy (1710–1790) szukając najmniejszej liczby całkowitej u spełniającej równanie $A = Bt - Cu$, gdzie B i C są względnie pierwsze. Jeśli C jest nieparzyste i $A = \frac{1}{2}(C+1)$, to $u = \frac{1}{2}(B+s-1)$ i $t = \frac{1}{2}(C+r)$, gdzie r/s jest przedostatnim reduktem ułamka łańcuchowego dla C/B.

W osiemnastym wieku ułamki łańcuchowe badali też i stosowali japońscy matematycy w związku z rozwinięciem niewymierności kwadratowej, tj. liczby postaci $(a \pm \sqrt{b})/c$, gdzie a, b i c są całkowite, a b nie jest kwadratem.

Wiek dziewiętnasty. Teoria ułamków łańcuchowych może się już teraz szybko rozwijać i można ją szeroko stosować. Tak też się dzieje w dziewiętnastym stuleciu, kiedy to wielu wybitnych matematyków bada ułamki łańcuchowe lub używa ich w dowodach.

Pierwszym z nich jest Pierre Simon Laplace (1749–1827), który wykazał, że rozwiązanie dowolnego równania różnicowego liniowego rzędu drugiego wyraża się przez ułamek łańcuchowy. Laplace znalazł też ułamek

$$\int_0^x \exp(-t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \cfrac{\exp(-x^2)/2}{x} + \cfrac{1}{2x} + \cfrac{2}{x} + \cfrac{3}{2x} + \cfrac{4}{x} + \dots$$

W 1803 r. Bazilij Wiskowatow (1778–1812) zaproponował metodę przekształcania ilorazu dwóch szeregów potęgowych na ułamek łańcuchowy. W 1818 r. Jean Jacques Bret (1781–1819) otrzymał pewne ułamki łańcuchowe posługując się metodą Lamberta, której ten ostatni użył dla $\operatorname{tg} x$. Te kwestie wiążą się bezpośrednio z przybliżeniami Padégo, gdyż szereg $c_0 + c_1 x + \dots$ można przekształcić na ułamek łańcuchowy

$$b_0 + \cfrac{x}{b_1} + \cfrac{x}{b_2} + \dots$$

Tym zadaniem zajęli się Moritz Abraham Stern (1807–1894), który w 1833 r. znalazł związek rekurencyjny dla liczb b_i, i Heilermann, który w 1846 r. wyraził je jawnie. Heilermann badał też ułamek łańcuchowy

$$b_0 - \cfrac{a_1}{x + b_1} - \cfrac{a_2}{x + b_2} - \dots$$

dla ilorazu dwóch szeregów potęgowych względem x^{-1}. Te dwa rozwinięcia są określone jednoznacznie, a związek między nimi znalazł Heinrich Eduard Heine (1821–1881) w 1878 r.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) znalazł ułamek łańcuchowy dla $\log(1+x)/(1-x)$ i zastosował go w słynnej pracy o kwadraturach (zwanych obecnie kwadraturami Gaussa) przedstawionej w Towarzystwie Getyngeńskim w 1814 r. Gauss podał też pewne inne rozwinięcia w ułamki łańcuchowe, np. dla ilorazu dwóch funkcji hipergeometrycznych.

W 1833 r. Stern badał przekształcenie iloczynu nieskończonego na równoważny mu ułamek łańcuchowy i przekształcenie odwrotne.

Operacje ściągania i rozszerzania wprowadził Philipp Ludwig von Seidel (1821–1896) w 1855 r., choć ich szczególne przypadki można znaleźć już w pracach Lagrange'a z lat 1774 i 1776. Związek ułamków łańcuchowych odpowiadających szeregowi potęgowemu i stowarzyszonych z nim badał w 1860 r. Heilermann. Wyrażenia wyznacznikowe dla współczynników tych ułamków łańcuchowych znaleźli Heilermann w 1845 r., Hermann Hankel (1839–1873) w 1862 r., Gustav Bauer (1820–1906) w 1872 r., Thomas Muir (1844–1934) w 1875 r., Georg Ferdinand Frobenius (1849–1917) w 1886 r. i Thomas Jan Stieltjes (1856–1894) w 1894 r.

Można oczywiście przekształcić ułamek łańcuchowy nieskończony na nieskończenie wiele równoważnych mu innych ułamków łańcuchowych, zachowując przy tym tylko częściowo redukty. W 1855 r. Seidel pokazał, że ułamek łańcuchowy zbieżny można przekształcić na rozbieżny, i odwrotnie. Dobierając umiejętnie przekształcenia równoważne można przyspieszyć zbieżność; wykazał to August Ferdinand Möbius (1790–1868) w 1833 r., a Stern w następnym roku zastosował takie przekształcenia do wyznaczania wartości ułamków łańcuchowych.

Adrien Marie Legendre (1752–1833) stosował szeroko ułamki łańcuchowe w swej książce o teorii liczb. Udowodnił on, modyfikując dowód Lamberta odnoszący się do liczby π, że π^2, e i e^2 są niewymierne.

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) rozwinął znacznie teorię ułamków łańcuchowych; najbardziej znanym jego wynikiem jest wzór wyznacznikowy z 1845 r. dla przybliżeń Padégo. W pracy ogłoszonej w 1868 r. Jacobi wykazał, że niewymierności sześcienne mają pewne własności wspólne z niewymiernościami kwadratowymi, gdyż prowadzą do algorytmów podobnych do tych, które wiążą się z ułamkami łańcuchowymi okresowymi.

W innej pracy, opublikowanej w rok później, Jacobi zaproponował metodę rozwiązywania zadania o równoczesnych aproksymacjach diofantycznych. Zadanie polega na znalezieniu dwóch ciągów liczb wymiernych $\{A_n/C_n\}$ i $\{B_n/C_n\}$ (mianowniki odpowiadających sobie elementów są jednakowe) przybliżających odpowiednio dwie dane liczby rzeczywiste. Jacobi doszedł do równania różnicowego rzędu trzeciego, którego rozwiązaniem są ciągi $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ i $\{C_n\}$. Algorytm, uogólniający algorytm dla ułamków łańcuchowych, był później szczegółowo zbadany przez Perrona i nosi dziś nazwę *algorytmu Jacobiego–Perrona*.

Wzór wyznacznikowy dla liczników i mianowników reduktów ułamka łańcuchowego podali James Joseph Sylvester (1814–1897) w 1853 r. i William Spottiswoode (1825–1883) w 1856 r. dla przypadku, gdy $a_n = \pm 1$. Louis Painvin (1826–1875) w 1858 r. znalazł rozwiązanie związku rekurencyjnego rzędu drugiego spełnionego przez liczniki i mianowniki reduktów; wyniki zastosował po raz pierwszy do ułamków łańcuchowych Siegmund Günther (1848–1922) w 1872 r. Z drugiej strony, każdy związek rekurencyjny rzędu drugiego generuje pewien ułamek łańcuchowy; skorzystali z tego Bauer w 1859 r., Heine w 1860 r. i Wilhelm Scheibner (1826–1908) w 1864 r. dowodząc pewnych twierdzeń o ułamkach łańcuchowych.

Dzięki ułamkom łańcuchowym otrzymano wiele ważnych rezultatów w arytmetyce i teorii liczb. Wspomniano już wyżej niektóre z nich. W 1851 r. Joseph Liouville (1809–1882) udowodnił w ten sposób istnienie liczb przestępnych (tzn. liczb nie spełniających żadnego równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych). Wykazał on, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb i zastosował do ich przybliżania ułamki łańcuchowe. Udowodnił też, że ani e, ani e^2 nie są niewymiernościami kwadratowymi. Adolf Hurwitz (1859–1919) używając pewnych szczególnych ułamków łańcuchowych wykazał w 1896 r., że e nie jest zerem żadnego równania sześciennego o współczynnikach całkowitych.

Ważny wynik z teorii liczb otrzymał Charles Hermite (1822–1901) dowodząc w 1873 r. za pomocą ułamków łańcuchowych, że e jest liczbą przestępną. Podstawowy pomysł Hermite'a jest następujący: niech $n_1, \ldots, n_m$ będą dowolnymi liczbami naturalnymi, $N = n_1 + \ldots + n_m$, i niech $k_1, \ldots, k_m$ oznaczają m różnych liczb rzeczywistych lub zespolonych. Można zbudować wielomiany $p_1, \ldots, p_m$ takie, że stopień p jest równy dokładnie $N - n_i$ i że

$$\exp(k_i x)p_l(x) - \exp(k_l x)p_i(x) = O(x^{N+1}), \qquad i, l = 1, \ldots, m,$$

gdy $x \to 0$. Różnice między wartościami funkcji wykładniczej i jej przybliżeń można wyrazić jako pewne całki oznaczone. Przyjmując, że $x = 1$ i że k_i są całkowite, dowodzi się, że liczba e nie spełnia żadnego równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych, a więc jest przestępna.

Hermite'a ten pomysł bardzo zajął. W liście z 1873 r. rozważył on wielomiany p_i stopni $n_i - 1$ takie, że

$$\sum_{i=1}^{m} \exp(k_i x)p_i(x) = O(x^{N-1}).$$

Zastępując tu funkcje wykładnicze $\exp(k_i x)$ dowolnymi formalnymi szeregami potęgowymi, otrzymuje się typ aproksymacji zwany obecnie *aproksymacją Padégo–Hermite'a*. Wspomnijmy tu, że Hermite był promotorem Padégo i że Padé także pracował w tej dziedzinie po swym doktoracie.

Po rozprawie z 1873 r. poświęconej funkcji wykładniczej Hermite kontynuował badanie ułamków łańcuchowych algebraicznych. Od czasów Gaussa znano rolę, jaką odgrywają wielomiany Legendre'a w rozwinięciu funkcji $\log(1-x)/(1+x)$ w ułamek łańcuchowy. Heine i Elwin Bruno Christoffel (1829–1900) powiązali teorię ułamków łańcuchowych z pewnymi równaniami różniczkowymi liniowymi rzędu drugiego. Hermite uogólnił te wszystkie wyniki pokazując, że pewne równania różniczkowe rzędu $m+1$ są związane z określoną wyżej równoczesną aproksymacją. Zastosował on rezultaty swych rozważań do funkcji $\log(x-x_i)/(x-x_0)$ uogólniając w ten sposób wielomiany Legendre'a.

Metodę użytą przez Hermite'a do liczby e zastosował Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852–1939) podając w 1882 r. pierwszy dowód przestępności liczby π i rozstrzygając w ten sposób negatywnie problem kwadratury koła otwarty przez ponad 2000 lat.

W 1828 r., w wieku siedemnastu lat, Evariste Galois (1811–1832) udowodnił, że jeśli

$$x = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \ldots + \frac{1|}{|a_n} + \frac{1|}{|a_0} + \ldots + \frac{1|}{|a_n} + \frac{1|}{|a_0} + \ldots$$

jest zerem pewnego wielomianu, to liczba

$$y = -\frac{1|}{|a_n} + \frac{1|}{|a_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|a_0} + \frac{1|}{|a_n} + \ldots + \frac{1|}{|a_0} + \frac{1|}{|a_n} + \ldots$$

jest zerem tegoż wielomianu. To twierdzenie jest ukryte we wcześniejszej pracy Lagrange'a i właśnie lektura jego *Mémoire* o równaniach algebraicznych wprowadziła Galois w tę tematykę.

Wracając do wyników Eulera, Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886) badał równanie różniczkowe

$$P(x)y'(x) = Q(x)y(x) + R(x),$$

gdzie P, Q i R są wielomianami względem x. W pewnych szczególnych przypadkach Laguerre rozwinął rozwiązanie y w ułamek łańcuchowy, zbadał też dokładnie rozwinięcie

$$y(x) = \int_0^\infty \frac{xe^{-t}}{1+xt}\,dt = \frac{x|}{|1} + \frac{x|}{|1} + \frac{x|}{|1} + \frac{2x|}{|1} + \frac{2x|}{|1} + \frac{3x|}{|1} + \frac{3x|}{|1} + \ldots$$

otrzymane wcześniej przez Eulera.

W 1881 r. Leopold Kronecker (1823–1891) szukał wielomianów p i q takich, że stopień iloczynu

$$(gq-fp)q$$

(gdzie f, g są wielomianami odpowiednio stopnia n i $n-m$) jest mniejszy od n. W szczególnym przypadku zadanie polega na znalezieniu funkcji wymiernej p/q mającej w danym punkcie wartości pochodnych wspólne z daną funkcją g. Jest to dokładnie zadanie aproksymacji Padégo. Kronecker znalazł dwa sposoby konstrukcji rozwiązania. Pierwszym z nich jest algorytm Euklidesa dzielenia, prowadzący do rozwinięcia ilorazu f/g w ułamek łańcuchowy. Wielomiany $f_0 = f$, $f_1 = g$, $f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots$ definiuje się tak, że

$$f_{k-1} - g_k f_k + f_{k+1} = 0 \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots$$

Wynika stąd, że

$$\frac{g}{f} = \frac{1}{|g_1} - \frac{1}{|g_2} - \frac{1}{|g_3} - \ldots$$

Redukty tego ułamka łańcuchowego są szukanymi funkcjami wymiernymi. Druga metoda Kroneckera polega na rozwiązaniu układu równań liniowych wynikającego z żądania, aby początkowe współczynniki rozwinięcia w szereg funkcji $gq-fp$ były zerami.

W tym samym roku Frobenius podał relacje łączące liczniki lub mianowniki trzech sąsiednich przybliżeń z tablicy Padégo. Niektóre z tych związków, zwane teraz *tożsamościami Frobeniusa*, wiążą się z wzorami wyznacznikowymi Jacobiego. Można ich też użyć do wyrażenia w jawnej postaci współczynników ułamka łańcuchowego

$$a_0 + \frac{x}{|a_1} + \frac{x}{|a_2} + \ldots,$$

którego kolejne redukty leżą w tablicy Padégo na głównej przekątnej i tuż nad nią. Frobenius podał też metodę rekurencyjną obliczania współczynników a_i. On wreszcie pierwszy badał systematycznie przybliżenia Padégo i położył ścisłe podstawy pod ich teorię.

Przybliżenia Padégo studiował też Pafnutij Lwowicz Czebyszew (1821–1894). W 1885 r. przekształcił on szereg

$$\int_a^b \frac{f(x)}{|z-x}\,dx = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \ldots,$$

gdzie

$$A_k = \int_a^b x^k f(x)\,dx,$$

w ułamek łańcuchowy

$$\frac{1}{|a_1 z + \beta_1} - \frac{1}{|a_2 z + \beta_2} - \ldots$$

Jego k-ty redukt jest zgodny z wyjściowym szeregiem aż do składnika z $1/z^{2k}$.

Największy wkład do teorii ułamków łańcuchowych wniósł w XIX wieku niewątpliwie Stieltjes. Jest on w istocie twórcą nowoczesnej teorii analitycznej tych ułamków. Pierwsza praca Stieltjesa z tej dziedziny ukazała się w 1884 r. i dotyczyła kwadratury Gaussa

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

(dokładnej, z definicji, dla dowolnego wielomianu f stopnia $\leqslant 2n-1$) i ułamka łańcuchowego

$$C = \frac{2|}{|x} - \frac{1\cdot 1/1\cdot 3|}{|\ x} - \frac{2\cdot 2/3\cdot 5|}{|\ x} - \frac{3\cdot 3/5\cdot 7|}{|\ x} - \frac{4\cdot 4/7\cdot 9|}{|\ x} \ldots$$

Stieltjes udowodnił, że jeśli P_n/Q_n jest n-tym reduktem tego ułamka, to parametry $x_1, \ldots, x_n$ kwadratury są zerami wielomianu Q_n (jego stopień jest równy n) i że

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

Jeśli $x \notin [-1, 1]$, to ułamek łańcuchowy jest zbieżny do

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{x-t}.$$

Analogiczny wynik dotyczy całki

$$\int_{a}^{b} \frac{f(t)}{x-t}\,dt,$$

jeśli funkcja f jest nieujemna w $[a, b]$. Dodajmy, że w tym samym roku Stieltjes udowodnił zbieżność ciągu kwadratur Gaussa.

Te wyniki Stieltjesa są podstawą teorii wielomianów ortogonalnych, których badanie — historycznie rzecz biorąc — zaczęło się od pewnego typu ułamków łańcuchowych. Stieltjesa zafascynowała analogia między kwadraturami Gaussa i ułamkami łańcuchowymi szczególnego rodzaju. Przez dziesięć lat pracował wytrwale nad tym tematem, zachęcany do tego listami Hermite'a, z którym się zaprzyjaźnił. Zaledwie na kilka miesięcy przed śmiercią Stieltjes ukończył w 1894 r. słynną pracę *Recherches sur les fractions continues*. Punktem wyjścia jest w niej ułamek łańcuchowy

$$\frac{1}{|a_1 x} + \frac{1}{|a_2} + \frac{1}{|a_3 x} + \frac{1}{|a_4} + \ldots,$$

gdzie a_i są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a x — zmienną zespoloną. Stieltjes udowodnił, że jeśli szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

jest rozbieżny, to powyższy ułamek jest zbieżny do funkcji F analitycznej na płaszczyźnie zespolonej rozciętej wzdłuż półosi rzeczywistej ujemnej i że

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{da(t)}{t+x}.$$

Jeśli wspomniany szereg jest zbieżny, to części parzysta i nieparzysta ułamka łańcuchowego są zbieżne do różnych granic F_1 i F_2, gdzie

$$F_1(x) = \int_0^{\infty} \frac{da_1(t)}{t+x}, \qquad F_2(x) = \int_0^{\infty} \frac{da_2(t)}{t+x}.$$

Wiadomo, że poprzedni ułamek łańcuchowy można formalnie rozwinąć w szereg

$$c_0 x^{-1} - c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} - \ldots, \quad \text{gdzie } c_i > 0.$$

Stieltjes pokazał, jak współczynniki c_i zależą od a_i i udowodnił, że ciąg ilorazów c_i/c_{i-1} jest rosnący, jeśli szereg $\sum a_i$ jest rozbieżny. Jeśli ten ciąg ma granicę λ, to szereg jest zbieżny dla $|x| > \lambda$, a jeśli ciąg nie ma granicy, to szereg jest rozbieżny dla każdego x. Tak więc, chociaż ułamek łańcuchowy jest zbieżny, gdy szereg ma tę samą własność, to twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Jeśli szereg jest rozbieżny, to trzeba rozważyć dwa przypadki, w których szereg $\sum a_i$ jest odpowiednio zbieżny albo rozbieżny. W pierwszym przypadku z części parzystej i nieparzystej ułamka łańcuchowego otrzymuje się dwie różne funkcje. Wynik Stieltjesa wskazuje, że szeregi rozbieżne dzielą się na dwie klasy: szeregi powstałe z rozwinięcia jednej funkcji F i szeregi wynikające z rozwinięć co najmniej dwóch różnych funkcji. Ułamek łańcuchowy jest tylko etapem pośrednim między szeregiem i całką.

W tej samej pracy Stieltjes bada zagadnienie momentów. Polega ono na znalezieniu warunków gwarantujących, że dla danych $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots$ i $c_k > 0$ istnieją $m_i > 0$ takie, że

$$c_k = \sum_{i=1}^{\infty} m_i x_i^k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Stieltjes wykazał, że zagadnienie ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy szereg

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i c_i}{x^{i+1}}$$

ma rozwinięcie w ułamek łańcuchowy

$$\frac{1}{|a_1 x} + \frac{1}{|a_2} + \frac{1}{|a_3 x} + \frac{1}{|a_4} + \dots$$

ze wszystkimi współczynnikami a_i dodatnimi.

Trzeba też wspomnieć, iż w 1889 r. Stieltjes pokazał, jak można przekształcić szereg

$$c_0 x^{-1} - c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} - \dots$$

w ułamki łańcuchowe

$$\frac{a_0}{|x + a_1} + \frac{1 + a_2}{|x + a_3} + \dots$$

oraz

$$\frac{a_0}{|x + a_1} - \frac{a_1 a_2}{|x + a_2 + a_3} - \frac{a_3 a_4}{|x + a_4 + a_5} - \dots$$

Jego metoda zawiera w istocie algorytm *qd* Rutishausera, opublikowany w 1957 roku.

Wiemy już, że teoria wielomianów ortogonalnych wywodzi się z pewnego typu ułamków łańcuchowych. Ich szczególne przypadki badało wielu autorów. Tak np. Czebyszew udowodnił, że n-ty wielomian Legendre'a jest mianownikiem n-tego reduktu ułamka łańcuchowego dla funkcji $\frac{1}{2}\log(1+x)/(1-x)$. Związek ułamków łańcuchowych i wielomianów ortogonalnych jest następujący. Niech $\{P_n\}$ będzie rodziną wielomianów ortonormalnych w $[a, b]$ względem $d\alpha$. Spełniają one zwykły wzór rekurencyjny

$$P_n(x) = (A_n x + B_n) P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x).$$

Niech $R_n(x)/S_n(x)$ będzie n-tym reduktem ułamka łańcuchowego

$$\frac{1}{|A_1 x + B_1} - \frac{C_2}{|A_2 x + B_2} - \frac{C_3}{|A_3 x + B_3} - \dots$$

Łatwo sprawdzić, że $S_n(x) = \sqrt{c_0} P_n(x)$, a Andrej Andrejewicz Markow (1856–1922) wykazał w 1896 r., że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n(x)}{S_n(x)} = c_0^{-2}(c_0 c_2 - c_1^2)^{1/2} \int_a^b \frac{d\alpha(t)}{x - t},$$

gdzie

$$c_k = \int_a^b t^k d\alpha(t),$$

a x jest dowolnym punktem płaszczyzny zespolonej rozciętej wzdłuż przedziału $[a, b]$; zbieżność jest jednostajna w każdym zbiorze domkniętym rozłącznym z tym przedziałem.

Związek wielomianów ortogonalnych i ułamków łańcuchowych badał też Christoffel w 1877 r. Wykazał on, że dla każdego wielomianu p stopnia nie większego niż $2n-1$ zachodzi równość

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,d\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\,\frac{Q_n(x_i)}{P_n'(x_i)},$$

gdzie liczby x_i są zerami wielomianu P_n i gdzie

$$Q_n(t) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t}\,d\alpha(x).$$

Udowodnił on również tożsamość zwaną dziś *tożsamością Christoffela–Darboux* i rozwinął w ułamek łańcuchowy funkcję

$$f(t) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(x)}{t-x},$$

związaną ściśle, jak już wiemy, z rodziną $\{P_n\}$ wielomianów ortogonalnych.

Do dziedzin matematyki intensywnie rozwijanych w XIX wieku należy teoria liczb, a ułamki łańcuchowe są w niej ważnym narzędziem. Wspomniano już o pracach Liouville'a, Hermite'a i Lindemanna dotyczących liczb przestępnych. Równania diofantyczne i ich uogólnienia są innym działem teorii liczb, w którym stosowano z pożytkiem ułamki łańcuchowe. Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) rozwiązał z ich pomocą równanie $ax-by=1$, używając przy tym metody Eulera, Anton Pleskot (1866–1935) rozważał w 1893 r. równanie $ax+by+cz=d$, a Wilhelm Franz Meyer (1856–1937) używał ciągów rekurencyjnych otrzymywanych za pomocą uproszczonego i uogólnionego algorytmu Jacobiego rozwiązując równanie

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=a.$$

Innym obiektem badań był rozkład liczb na sumę dwóch, trzech lub czterech kwadratów liczb naturalnych. Zajmowali się nim Christian Friedrich Kausler (1760–1825), Legendre, Friedrich Arndt (1817–1866), Hermite, Joseph Alfred Serret (1819–1885) i inni. Twierdzenie Eulera z 1752 r. (każdy dzielnik sumy kwadratów dwóch liczb względnie

pierwszych jest sam sumą dwóch kwadratów) udowodnili za pomocą ułamków łańcuchowych Vito Eugenio w 1870 r. i François Edouard Anatole Lucas (1842–1891) w 1891 r. Henry John Stephen Smith (1826–1883) udowodnił w podobny sposób w 1881 r. twierdzenie Bacheta z 1575 r. (każda liczba naturalna większa od 1 jest sumą dwóch, trzech lub czterech kwadratów liczb naturalnych). Legendre w 1808 r., Gauss w 1825 r. i Serret w 1848 r. konstruowali liczby a i b takie, że a^2+b^2 jest liczbą pierwszą postaci $4n+1$ (twierdzenie sformułowane przez Fermata i udowodnione przez Eulera).

Bardzo wielu matematyków używało ułamków łańcuchowych w związku z równaniem Pella $ax^2+bx+c=d^2$ lub zagadnieniem binarnych form kwadratowych. Stosowano te ułamki także do kongruencji dwumianowych, tworzenia reduktów za pomocą ciągów Fareya, rozkładu liczb na czynniki i ciągów rekurencyjnych.

Dobrze wiadomo, że każda liczba rzeczywista dodatnia x rozwija się w ułamek łańcuchowy

$$x = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \dots$$

o współczynnikach a_i całkowitych ($a_0 \geqslant 0$, $a_i > 0$ dla $i > 0$). Niech $C_k = P_k/Q_k$ będzie k-tym reduktem tego ułamka. Smith udowodnił, że $|x-C_{k+1}| < |x-C_k|$. Wykazał on też, że ułamek P_k/Q_k z $Q_k > 1$ jest najlepszym przybliżeniem liczby x w tym sensie, że aproksymuje x z mniejszym błędem niż jakikolwiek ułamek o mianowniku nie większym od Q_k. Ten wynik był już znany Huygensowi.

W 1808 r. Legendre znalazł warunek konieczny i dostateczny na to, żeby ułamek p/q ($q > 0$, p i q względnie pierwsze) był reduktem rozwinięcia danej liczby x w ułamek łańcuchowy. Jeśli dla każdego i liczby całkowite a_i, b_i są takie, że $0 < a_i \leqslant b_i$, to ułamek łańcuchowy nieskończony

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots$$

jest zbieżny. Legendre wykazał, że jego wartość jest liczbą niewymierną mniejszą od 1.

W 1895 r. Karl Theodor Vahlen (1869–1945) udowodnił, że z dwóch kolejnych reduktów P_k/Q_k i P_{k+1}/Q_{k+1} ($k > 1$) co najmniej jeden spełnia warunek

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Takie wyniki są bardzo użyteczne w dowodach niewymierności danej liczby x.

Jeśli w ułamku łańcuchowym

$$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\dots$$

współczynniki a_i, b_i są dodatnie dla $i \geqslant 1$, to ciągi $\{P_k\}$ i $\{Q_k\}$ rosną, ciąg $\{C_{2k-1} = P_{2k-1}/Q_{2k-1}\}$ maleje, a ciąg $\{C_{2k} = P_{2k}/Q_{2k}\}$ rośnie. Ponadto

$$C_{2k+1} > C_n > C_{2k+2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant \tfrac{1}{2}n-1.$$

Geometryczną interpretację tych nierówności podali Louis Poinsot (1777–1859) w 1845 r., Johann Lieblein (1834–1881) w 1867 r., Oskar Xavier Schlömilch (1823–1901) w 1873 r., Max Koppe (1853–?) w 1887 r. i Christian Felix Klein (1849–1925) w 1895 r. Koppe w 1887 r., Hurwitz w 1891 r. i Hermann Minkowski (1864–1909) w 1896 r. stosowali te nierówności do szacowania błędu reduktów. Stern w 1833 r. rozważał przypadek $a_1 > 0$, $a_i < 0$ dla $i \geqslant 2$ i $b_i \geqslant |a_i|+1$. Otto Stolz (1842–1905) zbadał w 1884 r. ułamki łańcuchowe okresowe, a Georg Landsberg (1865–1912) w 1892 r. — ułamki z wymiernymi a_i, b_i.

W 1875 r. Christoffel wprowadził pojęcie „charakterystyki" liczby wymiernej x z przedziału $(0, 1)$. Jest to pewnien ciąg skończony zer i jedynek określający jednoznacznie liczbę x. Christoffel podał jawną zależność między charakterystyką i ułamkiem łańcuchowym liczby x, a w 1888 r. rozszerzył te wyniki na liczby niewymierne.

Przed przejściem do następnego tematu warto wspomnieć, że Victor Schlegel (1843–1905) podał w 1877 r. praktyczną regułę obliczania mianownika k-tego reduktu ułamka łańcuchowego

$$b_0+\frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\dots$$

(przypomnijmy, że Euler oznaczał ten mianownik symbolem $(b_1, \dots, b_k)$). Sylvester udowodnił w 1853 r. relację

$$(b_1, \dots, b_{n+m}) = (b_1, \dots, b_m)(b_{m+1}, \dots, b_{n+m}) + (b_1, \dots, b_{m-1})(b_{m+2}, \dots, b_{n+m})$$

uogólniając tym samym pewne tożsamości Eulera.

W XIX wieku znacznie rozwinięto teorię zbieżności ułamków łańcuchowych. Ścisłą definicję zbieżności i rozbieżności takich ułamków podali po raz pierwszy Seidel w 1846 r. i Stern w 1848 r., a udoskonalił ją Alfred Pringsheim (1850–1942) w 1898 r. Seidel i Stern udowodnili też niezależnie od siebie, że rozbieżność szeregu $\sum a_i$ $(a_i > 0)$ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności ułamka łańcuchowego

$$a_0+\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\dots$$

Wykazali oni, że rozbieżność co najmniej jednego z szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_3 \dots a_{2n-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2n}} b_{2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_2 a_4 \dots a_{2n}}{a_1 a_3 \dots a_{2n+1}} b_{2n+1}$$

jest warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności ułamka

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots$$

dla a_i, $b_i > 0$. Stolz uogólnił ten wynik na ułamki o mianownikach b_i dowolnego znaku.

W 1855 r. Seidel udowodnił, że wśród ułamków łańcuchowych

$$-\frac{1|}{|q_1} - \frac{1|}{|q_2} - \dots$$

takich, że $q_n < 2$ i $\lim_{n\to\infty} q_n = 2$ znajdują się zarówno ułamki zbieżne, jak i rozbieżne.

Pringsheim wykazał, że warunek $|b_n| \geqslant |a_n| + 1$ zapewnia zbieżność ułamka

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots$$

i że jego moduł jest nie większy niż 1.

Zakładając, że b_i są dodatnie Stolz udowodnił, że ułamek

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \dots$$

jest zbieżny, jeśli szereg $b_1 b_2 + b_2 b_3 + \dots$ jest rozbieżny. Louis Saalschütz (1835–1913) sprawdził w 1899 r., że ten ułamek łańcuchowy jest zbieżny, jeśli szereg $\sqrt{b_1 b_2} + \sqrt{b_2 b_3} + \dots$ jest rozbieżny. Te warunki są tylko dostateczne.

W rękopisach Georga Friedricha Bernharda Riemanna (1826–1866) znalezionych po jego śmierci znajduje się dowód zbieżności ułamka łańcuchowego Gaussa dla ilorazu dwóch szeregów hipergeometrycznych. Jak stwierdził Padé, jest to pierwszy dowód zbieżności przybliżeń Padégo. Zbieżność tego samego ułamka łańcuchowego badał też Ludwig Wilhelm Thome (1841–1910) w 1866 r.

W 1883 r. Ludwig Henrik Ferdinand Opperman (1817–1883) udowodnił, że rozbieżność iloczynu nieskończonego

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i)$$

jest warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności ułamka

$$a_0+\frac{1}{|a_1}+\frac{1}{|a_2}+\dots$$

Julius Daniel Theodor Worpitzky (1835–1895) w 1865 r. i Jan Sleszyński (1845–1931) w 1889 r. wykazali, że warunek $|c_n| \leqslant \frac{1}{4}$ dla $n = 2, 3, \dots$ zapewnia zbieżność ułamka

$$\frac{c_1}{|1}+\frac{c_2}{|1}+\dots$$

Stieltjes udowodnił w 1894 r., że trzy warunki: $a_i \leqslant 0$, a_{2i+1} nie są wszystkie równe 0, szereg $\sum a_i$ jest rozbieżny, są wystarczające dla zbieżności jednostajnej ułamka

$$\frac{x}{|a_1}+\frac{x}{|a_2}+\dots$$

w dowolnym obszarze skończonym płaszczyzny zespolonej rozciętej wzdłuż półosi rzeczywistej ujemnej.

A. Markow w 1895 r. (korzystając z wcześniejszej pracy Czebyszewa z 1860 r.) po raz pierwszy badał zbieżność ułamków łańcuchowych, otrzymanych z szeregu potęgowego, rozważając całą klasę funkcji, a nie — jak dotychczas — konkretne funkcje, dla których ułamek łańcuchowy jest dany jawnie.

W związku z teorią zbieżności trzeba też wymienić nazwisko Helgego von Kocha (1870–1924), który wykazał, że ułamek

$$\frac{1}{|a_1}+\frac{1}{|a_2}+\dots$$

jest rozbieżny, jeśli szereg $\sum |a_i|$ jest zbieżny.

Można by tu dalej cytować twierdzenia wielu autorów dotyczące ułamków łańcuchowych albo korzystające z nich. Tak np. Georg Cantor (1845–1918) stosował je dowodząc, że zbiory R i R^2 są tej samej mocy, a A. Markow i Czebyszew — w rozważaniach z teorii prawdopodobieństwa.

Ostatnim, ale nie najmniej ważnym, z matematyków, których wyniki chcę tu omówić, jest Henri Eugène Padé (1863–1953). Znana jest jego rozprawa *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fonctions rationnelles* przedstawiona na Sorbonie 21 czerwca 1892 r. przed jury złożonym z Hermite'a (przewodniczącego), Paula Appella (1855–1930) i Emile'a Picarda (1856–1941).

We wstępie Padé pisze: „Do zajęcia się tą kwestią skłoniły mnie słowa p. Hermite'a zawarte w jednym z jego wykładów i pozwalające przewidywać bogactwa, jakie kryją się jeszcze niechybnie w tej teorii".

W swej rozprawie Padé badał systematycznie to, co teraz nazywamy *przybliżeniami Padégo*, uporządkował je w „tablicy Padégo" i rozważył różne rodzaje ułamków łańcuchowych, których redukty tworzą w tablicy Padégo przekątną albo linię schodkową opadającą. Padé przestudiował szczegółowo przypadek funkcji wykładniczej i wykazał, że jej przybliżenia Padégo są identyczne z przybliżeniami wymiernymi, które w 1876 r. otrzymał Gaston Jean Darboux (1842–1917). Wykazał też, że

$$[n+k/m]_f(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i + t^k [n/m]_g(t),$$

gdzie $f(t) = c_0 + c_1 t + \ldots$ i $g(t) = c_k + c_{k+1} t + \ldots$, a także zbadał zależności między dwiema trójkątnymi połowami tablicy Padégo. Padé zanalizował również bardzo starannie tak zwaną — obecnie — *strukturę blokową* tej tablicy.

Pierwsza część dwudziestego stulecia. W pierwszej części XX wieku (do 1938 r.) badania w dziedzinie ułamków łańcuchowych skupiały się na ich teorii analitycznej.

Korzystając z wyniku podanego przez Jacquesa Hadamarda (1865–1963) w jego rozprawie, Robert Fernand Bernard wicehrabia de Montessus de Ballore (1870–1937) udowodnił w 1902 r. słynne twierdzenie o zbieżności ciągu $\{[n/k]_f\}$, gdy $n \to \infty$, jeśli funkcja f ma k biegunów i nie ma innych osobliwości wewnątrz danego okręgu C.

Paul Dienes (1882–1952) uogólnił w 1905 r. wyniki Hadamarda. Dzięki temu Rowland Wilson (1895–?) mógł zbadać w 1927 r. zachowanie się ciągu $\{[n/k]_f\}$ na okręgu C i w biegunach zawartych wewnątrz C.

W 1906 r. Thorvald Nicolai Thiele (1838–1910) udowodnił, że

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{\varrho_1^{(0)} - \varrho_{-1}^{(0)}} + \frac{x - x_1}{\varrho_2^{(0)} - \varrho_0^{(0)}} + \ldots,$$

gdzie liczby $\varrho_k^{(n)}$ są tzw. odwrotnymi ilorazami różnicowymi, definiowanymi za pomocą wzorów

$$\varrho_{-1}^{(n)} = 0, \qquad \varrho_0^{(n)} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

$$\varrho_{k+1}^{(n)} = \varrho_{k-1}^{(n+1)} + \frac{x_{n+k+1} - x_n}{\varrho_k^{(n+1)} - \varrho_k^{(n)}}, \qquad n, k = 0, 1, \ldots$$

Redukt C_{2k+1} tego ułamka łańcuchowego jest ilorazem wielomianu stopnia $k+1$ przez wielomian stopnia k, a C_{2k} jest ilorazem dwóch wielomianów stopnia k. Prócz tego $C_k(x_i) = f(x_i)$ dla $i = 0, \ldots, k$. Jeśli $x_n = t + nh$, $x = t + h$ i jeśli h dąży do 0, to otrzymuje się rozwinięcie Thielego

$$f(t+h) = f(t) + \frac{h}{\varrho_1(t) - \varrho_{-1}(t)} + \frac{h}{\varrho_2(t) - \varrho_0(t)} + \ldots,$$

gdzie

$$\varrho_{-1}(t) = 0, \quad \varrho_0(t) = f(t), \quad \varrho_{k+1}(t) = \varrho_{k-1}(t) + \frac{k+1}{\varrho_k'(t)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Można porównać to rozwinięcie funkcji f w ułamek łańcuchowy z wzorem Taylora dającym rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy. Rozwinięcie Thielego jest skończone, jeśli f jest funkcją wymierną z licznikiem stopnia $k+1$ lub k i mianownikiem stopnia k, natomiast wzór Taylora jest skończony, jeśli f jest wielomianem.

Naszkicujmy teraz rozwój teorii analitycznej ułamków łańcuchowych po badaniach Stieltjesa.

W 1903 r. Edward Burr Van Vleck (1863–1943) zamierzał uogólnić teorię Stieltjesa na ułamki łańcuchowe postaci

$$\frac{1}{|x+b_1} - \frac{a_1}{|x+b_2} - \frac{a_2}{|x+b_3} - \ldots,$$

gdzie liczby a_k są rzeczywiste dodatnie, a b_k — rzeczywiste. Powiązał on w pewnych przypadkach te ułamki łańcuchowe z całkami oznaczonymi Stieltjesa w przedziale $(-\infty, +\infty)$, uogólnił też teorię Stieltjesa na tablicę Padégo.

W 1906 r. David Hilbert (1862–1943) opublikował swą słynną teorię macierzy nieskończonych i form kwadratowych ograniczonych nieskończenie wielu zmiennych. W 1914 r. Ernst Hellinger (1883–1950) i Otto Toeplitz (1881–1940) posługując się teorią Hilberta powiązali całki

$$\int_a^b \frac{da(t)}{x-t} \qquad (a, b \text{ skończone})$$

z ułamkami łańcuchowymi rozważanymi przez Van Vlecka. W tym samym roku Jacob Grommer (1879–1933) uogólnił te wyniki na przypadek całek w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Pełna teoria jest dziełem Hellingera (1922 r.), który posłużył się teorią Hilberta układów liniowych nieskończonych. Ten sam cel osiągnęli prawie jednocześnie, ale różnymi metodami, inni matematycy: Rolf Hermann Nevanlinna (1895–1980) w 1933 r. stosując metody teorii funkcji i szeregi asymptotyczne, Torsten Carleman (1892–1949) w 1923 r. za pomocą równań całkowych oraz Marcel Riesz (1886–1969) w 1921 i 1923 r. metodą kolejnych przybliżeń.

Hubert Stanley Wall (1902–1971) w swej rozprawie z 1927 r. pisanej pod kierunkiem Van Vlecka i opartej na jego wynikach podał pełną analizę zbieżności ciągów przekątniowych z tablicy Padégo zbudowanej dla szeregu Stieltjesa, tj. szeregu o współczynnikach

$$c_i = \int_0^\infty t^i da(t),$$

gdzie funkcja a jest ograniczona i niemalejąca w $[0, +\infty)$. W 1931 i 1932 r. Wall uogólnił te wyniki na przypadek całkowania w $[a, b]$, najpierw dla skończonych a i b, później bez tego założenia.

W tym samym okresie prowadzono badania innego rodzaju. Około 1900 r. Pringsheim i Van Vleck zajmowali się zbieżnością ułamków łańcuchowych

$$\frac{1}{|1} + \frac{c_1}{|1} + \frac{c_2}{|1} + \ldots \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{|b_1} + \frac{1}{|b_2} + \ldots$$

z zespolonymi c_i, b_i. Pringsheim wykazał, że pierwszy z nich jest zbieżny, jeśli $|c_i| \leqslant (1-g_{i-1})g_i$, gdzie $0 < g_i < 1$ $(i = 0, 1, \ldots)$, a Van Vleck uzasadnił tę zbieżność w przypadku, gdy $g_0 = 0$ i szereg

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_1 \cdots g_i}{(1-g_1)\ldots(1-g_i)}$$

jest zbieżny. Oba te wyniki zawierają w sobie twierdzenie Worpitzky'ego.

Stolz udowodnił, że ułamek

$$b_0 + \frac{1}{|b_1} + \frac{1}{|b_2} + \ldots$$

z zespolonymi b_i jest rozbieżny, jeśli szereg $\sum |b_i|$ jest zbieżny. W 1901 r. Van Vleck wykazał, że ten warunek jest także wystarczający, jeśli dla każdego $n > N$ liczby $\mathrm{Re}(b_n)$ mają wspólny znak, a liczby $\mathrm{Im}(b_n)$ są na przemian dodatnie i ujemne. Ten sam warunek jest dostateczny i wtedy, gdy dla każdego $n > N$ liczby $\mathrm{Re}(b_n)$ mają wspólny znak i $|\mathrm{Im}(b_n)/\mathrm{Re}(b_n)| < K$ albo gdy dla każdego $n > N$ liczby $\mathrm{Im}(b_n)$ mają naprzemienne znaki i $|\mathrm{Re}(b_n)/\mathrm{Im}(b_n)| < K$ dla pewnego K. Van Vleck sprawdził też, że jeśli $c_i = a_i x$, $\lim_{i\to\infty} a_i = a$, to pierwszy z powyższych ułamków łańcuchowych jest zbieżny poza pewnymi izolowanymi punktami i poza półprostą od punktu $-1/4a$ do nieskończoności, skierowaną tak jak wektor $(0, -1/4a)$.

W 1905 r. Pringsheim udowodnił, że ułamek łańcuchowy

$$\frac{a_1}{|b_1} + \frac{a_2}{|b_2} + \ldots$$

jest zbieżny, i to nawet po skreśleniu dowolnie wielu początkowych liczników i mianowników częściowych, jeśli dla każdego $n \geqslant 2$

$$\left|\frac{a_n}{b_{n-1}b_n}\right| \leqslant \frac{P_n - 1}{P_{n-1}P_n},$$

gdzie $\{P_n\}$ jest danym ciągiem liczb takich, że $P_n > 1$. Jest to uogólnienie wyników von Kocha z 1895 r. i Van Vlecka. Wyniki Pringsheima stosuje się też do ułamków łańcuchowych zespolonych. Wcześniej Pringsheim

otrzymał wiele innych twierdzeń o zbieżności, które są szczególnymi przypadkami tego rezultatu.

W 1903 r. Josef Anton Gmeiner (1862–1927) uzyskał pewne wyniki dotyczące zbieżności ułamka

$$b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} + \dots$$

i nie będące przypadkami szczególnymi kryterium Pringsheima.

W latach 1912–1916 pewne twierdzenia dotyczące zbieżności ułamka

$$\frac{1|}{|1} + \frac{c_1|}{|1} + \frac{c_2|}{|1} + \dots$$

otrzymał Otto Szasz (1884–1952). Są to uogólnienia wyników Worpitzky'ego, von Kocha i Perrona. W 1915 r. w pracy o ułamkach łańcuchowych typu Stieltjesa–Markowa Szasz rozstrzygnął pewną hipotezę Perrona. Wraz z Felixem Bernsteinem (1878–1956) zbadał w 1915 r. niewymierność pewnych ułamków łańcuchowych.

Nierówność Pringsheima i Van Vlecka żąda, aby współczynniki c_i leżały w pewnym otoczeniu początku układu. Wall (i kilku jego studentów) zastąpił to żądanie innym: c_i powinny leżeć w obszarze ograniczonym parabolami o ogniskach w początku układu. Również Wall opracował teorię ułamków łańcuchowych dodatnio określonych, uogólniając w ten sposób teorię Stieltjesa na ułamki postaci

$$\frac{1}{|d_1+z} - \frac{c_1^2}{|d_2+z} - \frac{c_2^2}{|d_3+z} - \dots$$

w dziedzinie zespolonej. Ta teoria wiąże się ściśle z teorią macierzy trójprzekątniowych. Inne wyniki Walla — to zastosowanie ułamków łańcuchowych do problemów teorii funkcji takich jak charakteryzacja zagadnienia momentów Hausdorffa, uogólnienie i ujednolicenie znacznej części teorii zbieżności, badanie ułamków łańcuchowych ciągłych i macierzy harmonicznych. Wall uważał jednak, że jego największym osiągnięciem było promowanie sześćdziesięciu dwóch doktorów.

W pierwszej części XX w. w dalszym ciągu stosowano szeroko ułamki łańcuchowe w teorii liczb (równania diofantyczne, równanie Pella, rozkład liczb na czynniki, liczby przestępne). Należy tu wymienić tak sławnych matematyków, jak Paul Bachmann (1837–1920), Felix Bernstein, Sergiej Bernstein (1880–1968), Hans Hamburger (1889–1956), Felix Hausdorff (1868–1942), Georg Pólya (1887–), Srinivasa Ramanujan (1887–1920), James Shohat (1886–1944), Wacław Sierpiński (1882–1969), Alfred Tauber (1866–1942?), Herbert Westren Turnbull (1885–1961), Edmund Taylor Whittaker (1873–1956) i inni.

Konkludując, można powiedzieć, że w matematyce tylko jedno jeszcze pojęcie miało tak długie dzieje i tak wielki wpływ: LICZBY!

Od tłumacza. W polskim piśmiennictwie matematycznym jedynie *Teoria liczb* i *Analiza* (*Działania nieskończone* i *Rachunek różniczkowy*) Wacława Sierpińskiego pozwalają zapoznać się z częścią teorii ułamków łańcuchowych i ich zastosowań. Warto więc wiedzieć, że ostatnio wydano za granicą kilka cennych książek z opisywanych wyżej dziedzin. Wymieniam je w kolejności ukazywania się:

Jacek Gilewicz, *Approximations de Padé* (Lecture Notes in Mathematics 667), Springer Verlag, Berlin 1978.

William B. Jones, W. J. Thron, *Continued fractions. Analytic theory and applications* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 11), Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass. 1980.

Claude Brezinski, *Padé-type approximation and general orthogonal polynomials* (International Series of Numerical Mathematics, vol. 50), Birkhäuser Verlag, Basel 1980.

George A. Baker, Jr., Peter Graves-Morris, *Padé approximants. Part I*: *Basic theory. Part II*: *Extensions and applications* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 13, 14), Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass. 1981.

André Draux, *Polynômes orthogonaux formels — applications* (Lecture Notes in Mathematics 974), Springer Verlag, Berlin 1983.

Henri Padé, *Oeuvres* rassemblées et présentées par Claude Brezinski, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris 1984.

Claude Brezinski, *History of continued fractions and Padé approximants* (Springer Series in Computational Mathematics), Springer Verlag, w druku.

Sprostowania do artykułu A. Derkowskiej „Otton Marcin Nikodym (1889–1974)"

(Wiadom. Mat. 25 (1983), 75–88)

1. Pozycja II [5] spisu publikacji: *The mathematical apparatus for quantum-theories, based on the theory of Boolean lattices*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 119, Springer-Verlag, New York 1966, xi + 952 pp. powinna być umieszczona w dziale I (Prace naukowe), a nie w dziale II (Podręczniki).

2. Dr Stanisława Nikodym w liście do redakcji z 23 lutego 1985 zażądała sprostowania informacji (podanej na str. 78) pisząc, że „Mąż mój nigdy nie był w Nowym Sączu, więc na pewno nie brał udziału w wykładanych tam programach dla nauczycieli gimnazjalnych. Wykładał na