ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVII (1986)

JERZY BROWKIN (Warszawa)

O wyznaczniku raz jeszcze

0. Wstęp. W poprzednim artykule na temat wyznacznika (*Wiadomości Matematyczne* 22 (1979), str. 115–123) zostały przedstawione zalety pewnej definicji tego pojęcia. Mianowicie, dla macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała K wyznacznik został określony jako funkcja $F\colon K_n^n \to K$ spełniająca warunki:

(1) F jest funkcją liniową względem każdej kolumny macierzy,

(2) F znika, jeżeli dwie kolumny macierzy są równe,

(3) $F(I) = 1$, gdzie I jest macierzą jednostkową.

Wykazaliśmy, że istnieje dokładnie jedna funkcja F spełniająca warunki (1), (2), (3). Z definicji tej stosunkowo łatwo można wyprowadzić podstawowe własności wyznacznika, z wyjątkiem wzoru na wyznacznik iloczynu tensorowego macierzy.

Okazuje się jednak, że inne podejście do pojęcia wyznacznika, które powstało pod wpływem algebraicznej K-teorii, oddaje lepiej istotę rzeczy. Pozwala w szczególności uzyskać naturalny dowód wzoru na wyznacznik iloczynu tensorowego macierzy.

Mianowicie, dla dowolnego pierścienia A przemiennego z jedynką rozpatrzmy grupę $\mathrm{GL}(n, A)$ macierzy odwracalnych stopnia n o elementach z A. Aby się uniezależnić od stopnia macierzy, traktujemy grupę $\mathrm{GL}(n, A)$ jako podgrupę grupy $\mathrm{GL}(n+1, A)$ za pomocą zanurzenia

$$M \to \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dla } M \in \mathrm{GL}(n, A)$$

i określamy $\mathrm{GL}(A) = \varinjlim \mathrm{GL}(n, A)$.

W grupie $\mathrm{GL}(A)$ rozważamy podgrupę $\mathrm{SL}(A)$ macierzy o wyznaczniku 1, a w niej podgrupę $\mathrm{E}(A)$ macierzy elementarnych, tzn. będących iloczynami macierzy postaci $I + e_{ij}(a)$, $i \neq j$, $a \in A$, gdzie $e_{ij}(a)$ jest macierzą, która w miejscu (i, j) ma element a, a poza tym zera.

Wiadomo[1], że grupa $\mathrm{E}(A)$ jest komutantem grupy $\mathrm{SL}(A)$ (lemat Whiteheada), a jeżeli A jest ciałem, pierścieniem lokalnym, pierścieniem

[1] Patrz np. H. Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, New York, Amsterdam 1968, rozdział V.

euklidesowym lub pierścieniem liczb całkowitych ciała liczbowego, to $\mathrm{SL}(A) = \mathrm{E}(A)$.

Wiadomo też, że mnożeniu pewnej macierzy przez macierz elementarną $I + e_{ij}(a)$ odpowiada dodawanie do j-tej kolumny tej macierzy kolumny i-tej pomnożonej przez stałą a. Ponadto każdą macierz z $\mathrm{GL}(A)$ można przedstawić jednoznacznie w postaci iloczynu macierzy z $\mathrm{SL}(A)$ i macierzy diagonalnej

$$\mathrm{diag}(a, 1, \ldots, 1) = \begin{bmatrix} a & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie a jest elementem odwracalnym pierścienia A, tzn. $a \in A^*$. Inaczej mówiąc, mamy rozkład na sumę półprostą $\mathrm{GL}(A) = A^* \overline{\oplus} \mathrm{SL}(A)$.

Tak więc z powyższego wynika, że przy określaniu wyznacznika macierzy o elementach w ciele naturalne jest żądanie, by

1) wyznacznik nie uległ zmianie przy dodawaniu do kolumny wielokrotności innej kolumny,

2) jeżeli jedna z kolumn jest zerowa, to wyznacznik jest równy zero,

3) wyznacznik macierzy $\mathrm{diag}(a, 1, 1, \ldots)$, gdzie $a \in A^*$, jest równy a.

Warunek 2) łącznie z 1) zapewnia znikanie wyznacznika na macierzach o liniowo zależnych kolumnach.

Widać stąd, że w ten sposób otrzymamy jednoznacznie określoną funkcję na macierzach kwadratowych o elementach w ciele. W dalszym ciągu tego artykułu rozwinięta jest teoria wyznaczników oparta na takiej aksjomatyce.

Dla pierścieni przemiennych A z jedynką, grupy $\mathrm{E}(A)$ i $\mathrm{SL}(A)$ mogą być różne. W algebraicznej K-teorii rozpatruje się właśnie grupę ilorazową $\mathrm{SL}(A)/\mathrm{E}(A)$, oznaczaną przez $\mathrm{SK}_1(A)$; jest ona abelowa na mocy lematu Whiteheada. W tym przypadku przy określaniu wyznacznika należy jeszcze żądać, by był on równy 1 na reprezentantach warstw $\mathrm{SL}(A)/\mathrm{E}(A)$.

1. Definicja wyznacznika. Niech K_n^n będzie zbiorem wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n o elementach należących do ciała K. Będziemy rozpatrywali funkcje $F\colon K_n^n \to K$ oraz następujące warunki:

1) Jeżeli jedna z kolumn macierzy A jest zerowa, to $F(A) = 0$.

2) Jeżeli macierz A' powstaje z macierzy A przez dodanie do jednej z kolumn macierzy A innej jej kolumny pomnożonej przez stałą, to $F(A') = F(A)$.

3) Jeżeli $A = \mathrm{diag}(a, 1, \ldots, 1)$ jest macierzą diagonalną, to $F(A) = a$.

LEMAT 1. *Jeżeli funkcja F spełnia warunki* 1) *i* 2), *a kolumny macierzy A są liniowo zależne, to $F(A) = 0$.*

Dowód. Z założenia jedna z kolumn macierzy A jest równa pewnej kombinacji liniowej kolumn pozostałych. Dodając więc do tej kolumny pozostałe kolumny pomnożone przez odpowiednie współczynniki otrzymamy macierz A', w której jedna z kolumn jest zerowa. Z warunku 2) otrzymujemy, że $F(A) = F(A')$, a z warunku 1) — że $F(A') = 0$. Zatem $F(A) = 0$. ■

Z lematu 1 wynika w szczególności, że jeżeli funkcja F spełnia warunki 1) i 2), a dwie kolumny macierzy A są równe, to $F(A) = 0$.

Jeżeli $k_1, k_2, \ldots, k_n$ są kolejnymi kolumnami macierzy A, to będziemy pisali $A = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$ oraz $F(A) = F(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

LEMAT 2. *Jeżeli funkcja F spełnia warunek 2), a macierz A' powstaje z macierzy A przez przestawienie pewnych dwóch kolumn macierzy A i pomnożenie jednej z tych kolumn przez $-c$, a drugiej przez c^{-1}, gdzie $c \in K$, $c \neq 0$, to $F(A') = F(A)$.*

Dowód. Dla uproszczenia zapisu rozpatrzmy przypadek, gdy macierz A' powstaje z macierzy A przez przestawienie pierwszych dwóch kolumn k_1 i k_2 macierzy A oraz pomnożenie k_2 przez $-c$, a k_1 przez c^{-1}. W przypadku ogólnym dowód przebiega podobnie. Mamy więc

$$A' = [-ck_2, c^{-1}k_1, k_3, \ldots, k_n] \quad \text{oraz} \quad A = [k_1, k_2, \ldots, k_n].$$

Wykonujemy kolejno następujące czynności: W macierzy A' do pierwszej kolumny dodajemy drugą pomnożoną przez c, w otrzymanej macierzy do drugiej kolumny dodajemy pierwszą pomnożoną przez $-c^{-1}$, wreszcie do pierwszej kolumny dodajemy drugą pomnożoną przez c. Na mocy warunku 2) otrzymamy kolejno:

$$F(A') = F(-ck_2, c^{-1}k_1, \ldots) = F(k_1 - ck_2, c^{-1}k_1, \ldots) =$$
$$= F(k_1 - ck_2, k_2, \ldots) = F(k_1, k_2, \ldots) = F(A). \blacksquare$$

Z lematu tego wynika w szczególności, że jeżeli funkcja F spełnia warunek 2), a macierz A' powstaje z macierzy A przez przestawienie dwóch kolumn i zmianę znaku jednej z przestawianych kolumn, to $F(A) = F(A')$. Wystarczy mianowicie w lemacie 2 przyjąć $c = 1$ lub $c = -1$.

WNIOSEK 1. *Jeżeli funkcja F spełnia warunek 2), a macierz A' powstaje z macierzy A przez pomnożenie jednej z jej kolumn przez a, a innej — przez a^{-1}, gdzie $a \in K$, $a \neq 0$, to $F(A) = F(A')$.*

Dowód. Znów dla uproszczenia zapisu ograniczymy się do przypadku, gdy pierwszą kolumnę k_1 macierzy A mnożymy przez a, a drugą k_2 — przez a^{-1}. Przyjmując w lemacie 2 kolejno $c = 1$ i $c = -a$ otrzymamy

$$F(A) = F(k_1, k_2, \ldots) = F(-k_2, k_1, \ldots) = F(ak_1, a^{-1}k_2, \ldots) =$$
$$= F(A'). \blacksquare$$

WNIOSEK 2. *Jeżeli funkcja F spełnia warunek* 2), *a elementy* $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$ *są różne od zera, to*

$$F(\operatorname{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n)) = F(\operatorname{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n, 1, \ldots, 1)).$$

Dowód. Dla $i = 2, \ldots, n$ mnożymy i-tą kolumnę macierzy $\operatorname{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ przez c_i^{-1}, a pierwszą kolumnę — przez c_i. Na mocy wniosku 1 otrzymujemy tezę. ■

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli* $\varphi : K \to K$ *jest dowolnym odwzorowaniem, to istnieje co najwyżej jedna funkcja F spełniająca warunki* 1), 2) *oraz*

3_φ) $F(\operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1)) = \varphi(a)$.

Dowód. Przypuśćmy, że funkcje F i G spełniają warunki 1), 2) i 3_φ). Funkcje te mają więc własności podane w lematach 1 i 2 oraz we wnioskach 1 i 2.

Niech A_0 będzie macierzą stopnia n. Jeżeli jej pierwsza kolumna jest zerowa, to na mocy warunku 1) mamy $F(A_0) = 0 = G(A_0)$. Jeżeli zaś w pierwszej kolumnie macierzy A_0 istnieje element niezerowy, powiedzmy c_1, to z jego pomocą uzyskujemy zera w tym wierszu, w którym znajduje się wspomniany element (dodając odpowiednie wielokrotności pierwszej kolumny do pozostałych kolumn). Otrzymujemy w ten sposób macierz A_1, w której jeden z wierszy ma postać $(c_1, 0, \ldots, 0)$. Na mocy własności 2) mamy

$$F(A_0) = F(A_1) \quad \text{oraz} \quad G(A_0) = G(A_1). \tag{1}$$

Postępujemy analogicznie z drugą kolumną macierzy A_1. Jeżeli kolumna ta jest zerowa, to na mocy warunku 1) mamy $F(A_1) = 0 = G(A_1)$. Zatem z (1) wynika, że $F(A_0) = G(A_0)$. Jeżeli zaś w drugiej kolumnie macierzy A_1 istnieje element niezerowy, powiedzmy c_2, to dodając odpowiednie wielokrotności drugiej kolumny macierzy A_1 do pozostałych jej kolumn otrzymujemy macierz A_2, w której pewne dwa wiersze są równe $(c_1, 0, \ldots, 0)$ oraz $(0, c_2, 0, \ldots, 0)$. Ponadto na mocy warunku 2) mamy $F(A_2) = F(A_1)$ i $G(A_2) = G(A_1)$. Postępujemy analogicznie z trzecią kolumną macierzy A_2 itd. Otrzymujemy w ten sposób ciąg macierzy $A_0, A_1, A_2, \ldots$ taki, że $F(A_0) = F(A_1) = F(A_2) = \ldots$ i $G(A_0) = G(A_1) = G(A_2) = \ldots$ Jeżeli dla pewnej liczby naturlnej i w macierzy A_{i-1} i-ta kolumna jest zerowa, to na mocy warunku 1) mamy $F(A_{i-1}) = G(A_{i-1}) = 0$ i wobec tego $F(A_0) = G(A_0)$.

Jeżeli zaś dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ i-ta kolumna macierzy A_{i-1} zawiera pewien element niezerowy c_i, to w wyniku opisanego wyżej postępowania otrzymujemy taką macierz A_n, że $F(A_0) = F(A_n)$, $G(A_0) = G(A_n)$ oraz w każdej kolumnie macierzy A_n jest dokładnie jeden element różny od zera (elementy te oznaczyliśmy przez $c_1, c_2, \ldots, c_n$). Z podanej konstrukcji wynika też, że elementy te należą do różnych wierszy

macierzy A_n. Wobec tego dokonując pewnej liczby odpowiednich przestawień dwóch kolumn macierzy A_n i zmieniając za każdym razem znak jednej z przestawianych kolumn dochodzimy do macierzy diagonalnej A, w której na przekątnej stoją w pewnym porządku elementy $\varepsilon_1 c_1, \varepsilon_2 c_2, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_n c_n$, gdzie $\varepsilon_i = 1$ lub $\varepsilon_i = -1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Na mocy lematu 2 mamy $F(A_n) = F(A)$ i $G(A_n) = G(A)$. Wreszcie korzystając z wniosku 2 z lematu 2 oraz z warunku 3_φ) otrzymujemy

$$F(A) = F\big(\operatorname{diag}(\varepsilon_1 c_1, \varepsilon_2 c_2, \ldots, \varepsilon_n c_n, 1, \ldots, 1)\big) = \\ = \varphi(\varepsilon_1 c_1, \varepsilon_2 c_2, \ldots, \varepsilon_n c_n)$$

i podobnie

$$G(A) = \varphi(\varepsilon_1 c_1, \varepsilon_2 c_2, \ldots, \varepsilon_n c_n).$$

Wobec tego $F(A) = G(A)$, a więc i $F(A_0) = G(A_0)$. Zatem funkcje F i G są równe. ■

Ponieważ warunek 3) jest szczególnym przypadkiem warunku 3_φ) (przy $\varphi(a) = a$), więc z udowodnionego twierdzenia wynika, że istnieje co najwyżej jedna funkcja F spełniająca warunki 1), 2) i 3).

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli funkcja F spełnia warunki* 1), 2) *i* 3), *to jest ona liniowa względem każdej kolumny macierzy. To znaczy*

a) *Jeżeli macierz A' powstaje z macierzy A przez pomnożenie jednej z jej kolumn przez element $c \in K$, to $F(A') = cF(A)$.*

b) *Jeżeli k' i k'' są pewnymi kolumnami, a macierze A', A'', A''' powstają z macierzy A przez zastąpienie jednej z jej kolumn odpowiednio przez k', k'' oraz $k' + k''$, to*

$$F(A') + F(A'') = F(A'''). \tag{2}$$

Dowód. a) Przyjmijmy na przykład, że macierz A' powstaje z macierzy A przez pomnożenie jej drugiej kolumny przez element $c \in K$. Jeżeli $c = 0$, to teza wynika z warunku 1). Jeżeli $c \neq 0$, to rozpatrzmy funkcję F' określoną wzorem

$$F'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = c^{-1} F(k_1, ck_2, \ldots, k_n), \tag{3}$$

gdzie $A = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$ jest dowolną macierzą. Ponieważ funkcja F spełnia warunki 1) i 2), więc ze wzoru (3) łatwo wynika, że również funkcja F' spełnia te warunki.

Ponadto na mocy wniosku 2 z lematu 2 otrzymujemy

$$F'\big(\operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1)\big) = c^{-1} F\big(\operatorname{diag}(a, c, 1, \ldots, 1)\big) = \\ = c^{-1} F\big(\operatorname{diag}(ac, 1, \ldots, 1)\big) = c^{-1} ac = a,$$

ponieważ funkcja F spełnia warunek 3). Wykazaliśmy więc, że funkcja F' również spełnia warunek 3).

Wobec tego z twierdzenia 1 otrzymujemy, że $F = F'$, czyli $F(A') = cF(A)$ na mocy (3).

b) Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że zastępujemy pierwszą kolumnę macierzy A. Niech więc

$$A' = [k', k_2, \ldots, k_n], \quad A'' = [k'', k_2, \ldots, k_n],$$
$$A''' = [k'+k'', k_2, \ldots, k_n].$$

Jeżeli kolumny $k_2, \ldots, k_n$ są liniowo zależne, to na mocy lematu 1 mamy $F(A') = F(A'') = F(A''') = 0$ i wzór (2) oczywiście zachodzi.

Jeżeli kolumny $k_2, \ldots, k_n$ są liniowo niezależne, to istnieje taka kolumna k_1, że układ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jest bazą przestrzeni K^n. Przedstawiamy wektory k' i k'' w postaci kombinacji liniowych wektorów tej bazy:

$$k' = a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n,$$
$$k'' = b_1k_1 + b_2k_2 + \ldots + b_nk_n.$$

Wtedy

$$k'+k'' = (a_1+b_1)k_1 + (a_2+b_2)k_2 + \ldots + (a_n+b_n)k_n.$$

Wobec tego, dodając w macierzach A', A'', A''' do pierwszej kolumny pozostałe kolumny pomnożone przez odpowiednie stałe, otrzymamy macierze

$$(4) \qquad \begin{aligned} A_1' &= [a_1k_1, k_2, \ldots, k_n], \quad A_1'' = [b_1k_1, k_2, \ldots, k_n], \\ A_1''' &= [(a_1+b_1)k_1, k_2, \ldots, k_n]. \end{aligned}$$

Z warunku 2) wynika, że

$$(5) \qquad F(A') = F(A_1'), \quad F(A'') = F(A_1''), \quad F(A''') = F(A_1''').$$

Przyjmując $B = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$ z (4) i z pierwszej części twierdzenia otrzymujemy

$$F(A_1') = a_1F(B), \quad F(A_1'') = b_1F(B), \quad F(A_1''') = (a_1+b_1)F(B).$$

Stąd i z (5) wynika wzór (2). ■

TWIERDZENIE 3. *Istnieje funkcja F spełniająca warunki* 1), 2) *i* 3).

Dowód. Zastosujemy indukcję względem stopnia macierzy, który oznaczymy przez n.

Dla $n = 1$ wystarczy jako F przyjąć funkcję, która macierzy $[a]$ stopnia 1 przyporządkowuje element a. Funkcja ta spełnia oczywiście warunki 1), 2) i 3).

Z kolei niech n będzie liczbą naturalną większą niż 1. Załóżmy, że istnieje funkcja $\overline{F}$ określona na macierzach stopnia $n-1$ i spełniająca warunki 1), 2) i 3)

Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ rozpatrzmy funkcję F_i określoną wzorem:

$$F_i(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{F}(A_{ij}), \tag{6}$$

gdzie $A = [a_{ij}]$ jest macierzą stopnia n, a macierz A_{ij} powstaje z macierzy A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny. Udowodnimy, że każda z funkcji F_i spełnia warunki 1), 2) i 3).

Niech k-ta kolumna macierzy A będzie zerowa. Wtedy w każdej z macierzy A_{ij} dla $j \neq k$ jedna z kolumn jest zerowa. Wobec tego z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że $\overline{F}(A_{ij}) = 0$ dla $j \neq k$. Ponadto mamy $a_{ik} = 0$, ponieważ element a_{ik} należy do k-tej kolumny macierzy A. Wobec tego wszystkie składniki po prawej stronie wzoru (6) są równe zeru. Zatem $F_i(A) = 0$. Funkcja F_i spełnia więc warunek 1).

Niech macierz A' powstaje z macierzy A przez dodanie do k-tej kolumny macierzy A m-tej kolumny tej macierzy pomnożonej przez c, gdzie $c \in K$ i $m \neq k$.

Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że $k = 1$ i $m = 2$. W przypadku ogólnym rozumowanie przebiega podobnie. Wtedy dla $j \geqslant 3$ macierz A'_{ij} powstaje z macierzy A_{ij} przez dodanie do pierwszej kolumny macierzy A_{ij} kolumny drugiej pomnożonej przez c. Wobec tego z założenia indukcyjnego wynika, że

$$\overline{F}(A_{ij}) = \overline{F}(A'_{ij}) \quad \text{dla } j \geqslant 3. \tag{7}$$

Ze wzoru (6) i z określenia macierzy A' otrzymujemy, że

$$F_i(A') = (-1)^{i+1}(a_{i1} + ca_{i2})\overline{F}(A'_{i1}) + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{F}(A'_{ij}). \tag{8}$$

Wobec tego na mocy (7) dla dowodu równości $F_i(A) = F_i(A')$ wystarczy porównać sumy pierwszych dwóch składników po prawych stronach wzorów (6) i (8), tzn. dowieść, że

$$(-1)^{i+1} a_{i1} \overline{F}(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \overline{F}(A_{i2}) = \\ = (-1)^{i+1}(a_{i1} + ca_{i2})\overline{F}(A'_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \overline{F}(A'_{i2}). \tag{9}$$

Niech $k_1, k_2, \ldots, k_n$ będą kolejnymi kolumnami macierzy powstającej z macierzy A przez wykreślenie i-tego wiersza. Wtedy

$$A_{i1} = A'_{i1} = [k_2, k_3, \ldots, k_n], \quad A_{i2} = [k_1, k_3, \ldots, k_n],$$
$$A'_{i2} = [k_1 + ck_2, k_3, \ldots, k_n].$$

Wobec tego na mocy założenia indukcyjnego i twierdzenia 2 otrzymujemy

$$\begin{aligned}\overline{F}(A'_{i2}) &= \overline{F}(k_1 + ck_2, k_3, \ldots, k_n) = \\ &= \overline{F}(k_1, k_3, \ldots, k_n) + c\overline{F}(k_2, k_3, \ldots, k_n) = \\ &= \overline{F}(A_{i2}) + c\overline{F}(A_{i1}).\end{aligned}$$

Wynika stąd wzór (9). Zatem funkcja F spełnia warunek 2).

Wreszcie, jeżeli $A = \operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1)$, to przy $j \neq i$ pewna kolumna macierzy A_{ij} jest zerowa. Wobec tego z założenia indukcyjnego wynika, że $\overline{F}(A_{ij}) = 0$ dla $j \neq i$. Zatem w tym przypadku wzór (6) przybiera postać

$$F_i(A) = a_{ii}\overline{F}(A_{ii}). \tag{10}$$

Jeżeli $i = 1$, to $a_{ii} = a$ oraz $A_{ii} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$. Zatem $\overline{F}(A_{ii}) = 1$. Jeżeli $i > 1$, to $a_{ii} = 1$ oraz $A_{ii} = \operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1)$. Zatem $\overline{F}(A_{ii}) = a$. W obu przypadkach otrzymujemy więc na mocy (10), że $F_i(A) = a$. Funkcja F_i spełnia więc warunek 3). ■

Z twierdzeń 1 i 3 wynika, że istnieje dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki 1), 2) i 3). Nazywamy ją *wyznacznikiem* i oznaczamy przez det. W dowodzie twierdzenia 3 wykazaliśmy ponadto, że dla $i = 1, 2, \ldots, n$ funkcja F_i określona wzorem (6) też spełnia warunki 1), 2) i 3). Wobec tego na mocy twierdzenia 1 mamy $F_i = \det$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, tzn.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Wzór (11) nazywamy *wzorem Laplace'a* na rozwijanie wyznacznika względem i-tego wiersza.

Wniosek 3. *Wyznacznik jest funkcją liniową względem każdego wiersza macierzy.*

Dowód. Elementy a_{ij} należące do i-tego wiersza macierzy A nie należą do żadnej macierzy A_{ik} dla $k = 1, \ldots, n$. Teza wniosku wynika więc ze wzoru (11). ■

Twierdzenie 4. *Dla dowolnego odwzorowania $\varphi : K \to K$ takiego, że $\varphi(0) = 0$ istnieje dokładnie jedna funkcja F spełniająca warunki 1), 2) i 3_φ). Jest ona określona wzorem*

$$F(A) = \varphi(\det A). \tag{12}$$

Dowód. Z określenia wyznacznika wynika, że funkcja F dana wzorem (12) spełnia warunki 1), 2) i 3_φ). Na mocy twierdzenia 1 istnieje co najwyżej jedna funkcja spełniająca te warunki. ■

Funkcję F określoną wzorem (12) będziemy oznaczali przez $\det_\varphi$. W szczególności więc $\det_{\mathrm{id}} = \det$.

2. Własności wyznacznika.

TWIERDZENIE 5. *Wyznacznik ma następujące własności:*

a) *Jeżeli pewien wiersz macierzy A jest zerowy, to* $\det A = 0$.

b) *Jeżeli macierz A' powstaje z macierzy A przez dodanie do pewnego wiersza innego wiersza pomnożonego przez stałą, to* $\det A' = \det A$.

Dowód. a) Teza wynika z wniosku 3.

b) Jeżeli A jest macierzą stopnia 2,

$$A = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$$

i macierz A' powstaje z macierzy A przez dodanie do pierwszego wiersza drugiego pomnożonego przez c, to na mocy wniosku 3 mamy

$$\det A' = \det \begin{bmatrix} r+ct & s+cu \\ t & u \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} t & u \\ t & u \end{bmatrix} = \det A.$$

Wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} t & u \\ t & u \end{bmatrix}$ jest bowiem równy zeru na mocy lematu 1.

Z kolei niech A będzie macierzą stopnia n większego niż 2 i załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla macierzy stopnia $n-1$. Niech macierz A' powstaje z macierzy A przez dodanie do k-tego wiersza macierzy A jej m-tego wiersza pomnożonego przez element $c \in K$, gdzie $k \neq m$.

Rozwijając $\det A'$ względem i-tego wiersza, gdzie i jest różne od k i m, otrzymujemy

$$\det A' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij}. \tag{13}$$

Przy tym macierz A'_{ij} powstaje z macierzy A_{ij} przez dodanie do pewnego wiersza macierzy A_{ij} innego jej wiersza pomnożonego przez c. Wobec tego z założenia indukcyjnego otrzymujemy $\det A'_{ij} = \det A_{ij}$ i stąd na mocy (6) i (13) mamy $\det A' = \det A$. ■

TWIERDZENIE 6. *Jeżeli A^T jest macierzą transportowaną do macierzy A, to* $\det A^T = \det A$.

Dowód. Rozpatrzmy funkcję F określoną wzorem $F(A) = \det A^T$. Ponieważ kolumny macierzy A są wierszami macierzy A^T, więc z twierdzenia 5 i określenia wyznacznika wynika, że funkcja F spełnia warunki 1) i 2). Spełnia też ona oczywiście warunek 3). Wobec tego z twierdzenia 1 wynika, że funkcja F jest wyznacznikiem, tzn. $F(A) = \det A$. ■

W i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy A^T stoi element a_{ji}. Jeżeli w macierzy A^T wykreślimy i-ty wiersz i j-tą kolumnę, to otrzymamy macierz równą macierzy powstającej z macierzy A przez wykreślenie j-tego wiersza i i-tej kolumny oraz dokonanie transpozycji, tzn. $[A^T]_{ij} = [A_{ji}]^T$.

Wobec tego wstawiając do wzoru (6) na miejsce macierzy A macierz A^T otrzymamy

$$\det A^T = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det (A_{ji})^T$$

i stąd na mocy twierdzenia 6:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det A_{ji} \tag{14}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wzory (14) nazywamy *wzorami Laplace'a* dla rozwijania wyznacznika macierzy A względem i-tej kolumny.

TWIERDZENIE 7 (A. Cauchy). $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Dowód. Jeżeli $w_1, w_2, \ldots, w_n$ są kolejnymi wierszami macierzy A, a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — kolejnymi kolumnami macierzy B, to

$$AB = \begin{bmatrix} w_1k_1 & w_1k_2 & \ldots & w_1k_n \\ w_2k_1 & w_2k_2 & \ldots & w_2k_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_nk_1 & w_nk_2 & \ldots & w_nk_n \end{bmatrix}, \tag{15}$$

gdzie w_ik_j jest iloczynem skalarnym wektorów w_i oraz k_j.

Dla ustalonej macierzy A rozpatrzmy funkcję F określoną wzorem

$$F(B) = \det AB. \tag{16}$$

Udowodnimy, że funkcja F spełnia warunki 1), 2) oraz 3_φ) dla $\varphi(a) = a \cdot \det A$.

Istotnie, jeżeli j-ta kolumna k_j macierzy B jest zerowa, to z (15) wynika, że j-ta kolumna macierzy AB jest zerowa. Zatem z (16) otrzymujemy, że $F(B) = 0$. Funkcja F spełnia więc warunek 1).

Jeżeli macierz B' powstaje z macierzy B przez dodanie do j-tej kolumny macierzy B jej m-tej kolumny pomnożonej przez element $c \in K$, gdzie $m \neq j$, to ze wzoru (15) wynika, że macierz AB' powstaje z macierzy AB przez dodanie do j-tej kolumny macierzy AB jej m-tej kolumny pomnożonej przez c. Mamy bowiem

$$w_i(k_j + ck_m) = w_ik_j + cw_ik_m \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Zatem $\det AB' = \det AB$ i z (16) otrzymujemy, że $F(B') = F(B)$. Funkcja F spełnia więc warunek 2).

Wreszcie, jeżeli $B = \operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1)$ i $w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{ik})$, to we wzorze (15) otrzymujemy

$$w_ik_j = \begin{cases} aw_{i1} & \text{dla } j = 1, \\ w_{ij} & \text{dla } j > 1. \end{cases}$$

Wobec tego macierz AB powstaje z macierzy A przez pomnożenie jej pierwszej kolumny przez a. Zatem z twierdzenia 2 a) otrzymujemy $\det AB = a \cdot \det A$ i stąd na mocy (16)

$$F(\operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1)) = F(B) = a \det A = \varphi(a).$$

Funkcja F spełnia więc warunek 3_φ).

Wobec tego z twierdzenia 4 otrzymujemy, że

$$F(B) = \varphi(\det B),$$

czyli $\det AB = \det A \cdot \det B$ na mocy (16) i określenia funkcji φ. ■

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi stopni odpowiednio m i n, i jeżeli*

$$C = \begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}, \tag{17}$$

gdzie D jest dowolną macierzą o m wierszach i n kolumnach, to

$$\det C = \det A \cdot \det B.$$

Dowód. Dla ustalonych macierzy B i D rozpatrzmy funkcję F określoną wzorem

$$F(A) = \det \begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Sprawdzamy bez trudu, że funkcja F spełnia warunki 1) i 2). Udowodnimy, że spełnia ona warunek 3_φ) dla $\varphi(a) = a \cdot \det B$.

Istotnie, przyjmując $A = \operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1)$ i rozwijając wyznacznik macierzy C określonej wzorem (17) kolejno względem każdej z pierwszych m kolumn na mocy (18) otrzymamy

$$F(\operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1)) = F(A) = \det \begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix} = a \cdot \det B = \varphi(a).$$

Funkcja F spełnia więc warunek 3_φ).

Wobec tego, na mocy twierdzenia 5, dla dowolnej macierzy A i macierzy C określonej wzorem (17) otrzymujemy

$$\det C = F(A) = \varphi(\det A) = \det A \cdot \det B. \quad ■$$

WNIOSEK 4. *Jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są macierzami kwadratowymi pewnych stopni oraz*

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{bmatrix},$$

gdzie na miejscach oznaczonych $*$ *stoją dowolne elementy, to*

$$\det C = \det A_1 \cdot \det A_2 \ldots \det A_k.$$

Dowód. Teza wniosku wynika z twierdzenia 8 przez indukcję względem k. ■

TWIERDZENIE 9. *Jeżeli* A *i* B *są macierzami kwadratowymi stopni* m *i* n *odpowiednio, to* $\det A \otimes B = (\det A)^n \cdot (\det B)^m$.

Dowód. *Iloczynem tensorowym macierzy* A *i* B jest następująca macierz stopnia $m \cdot n$:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2m}B \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \ldots & a_{mm}B \end{bmatrix}, \tag{19}$$

gdzie $A = [a_{ij}]$.

Dla ustalonej macierzy B rozpatrzmy funkcję F określoną wzorem

$$F(A) = \det(A \otimes B). \tag{20}$$

Udowodnimy, że funkcja F spełnia warunki 1), 2) oraz 3_φ) dla $\varphi(a) = a^n \cdot (\det B)^m$.

Jeżeli pewna kolumna macierzy A jest zerowa, to ze wzoru (19) wynika, że pewna kolumna macierzy $A \otimes B$ jest zerowa. Zatem $\det(A \otimes B) = 0$ i na mocy (20) $F(A) = 0$. Funkcja F spełnia więc warunek 1).

Niech macierz A' powstaje z macierzy A przez dodanie do j-tej kolumny macierzy A jej g-tej kolumny pomnożonej przez element $c \in K$, gdzie $g \neq j$. Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że $j = 1$, $g = 2$. Wtedy ze wzoru (19) wynika, że macierz $A' \otimes B$ powstaje z macierzy $A \otimes B$ przez dodanie do r-tej kolumny macierzy $A \otimes B$ jej $(r+n)$-tej kolumny pomnożonej przez c dla $r = 1, 2, \ldots, m$. Wobec tego $\det(A' \otimes B) = \det(A \otimes B)$ i z (20) otrzymujemy, że $F(A') = F(A)$. Funkcja F spełnia więc warunek 2).

Z kolei niech $A = \operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1)$. Wtedy z (19) otrzymujemy

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} aB & & & \\ & B & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & B \end{bmatrix}.$$

Wobec tego na mocy wniosku 4 mamy

$$F(\operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1)) = \det(A \otimes B) = \det(aB) \cdot (\det B)^{m-1} =$$
$$= a^n (\det B)^m = \varphi(a).$$

Funkcja F spełnia więc warunek 3_φ).

Z twierdzenia 4 otrzymujemy zatem dla dowolnej macierzy A

$$F(A) = \varphi(\det A) = (\det A)^n (\det B)^m.$$

Z (20) wynika więc teza. ■