ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVII (1986)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

MICHAŁ WOJCIECHOWSKI (Warszawa)

O pewnym rozkładzie figur środkowo symetrycznych *

W *Wiadomościach Matematycznych* 23 (1980), str. 93, zamieszczone zostało zadanie 273 następującej treści: *Udowodnić, że jeśli F jest figurą ograniczoną, zawartą w płaszczyźnie, mającą środek symetrii należący do tej figury, to F nie można rozłożyć na dwie rozłączne figury przystające*, z adnotacją, iż rozwiązanie nie jest znane redakcji.

W pracy tej zostały podane przykłady figur nie spełniających implikacji z powyższego zadania. Pokazano też, jak należałoby w sposób naturalny wzmocnić warunki, aby rozkład nie był już możliwy. Wiąże się to z pytaniem o istnienie rozkładu figury na dwie figury środkowo symetryczne.

Rozkład na figury przystające. Łatwo wykazać, że jeśli figurę F zawartą w płaszczyźnie, ograniczoną i zawierającą swój środek symetrii o można rozłożyć na dwie rozłączne figury F_1 i F_2, to izometria F_1 i F_2 musi być obrotem o środku różnym od o. Z tego względu poniższa konstrukcja figury F i jej rozkładu F_1, F_2 jest „jedyną możliwą".

W kąt o wierzchołku p i rozwartości φ niewspółmiernej z π wpiszmy okrąg O_1. Niech O_2 będzie obrazem O_1 w symetrii środkowej S_0 względem o — jednego z punktów styczności O_1 i kąta. Konstruowana figura F będzie zawarta w $O_1 \cup O_2$, a punkt o będzie jej środkiem symetrii.

Zauważmy, że można tak obrać orientację kąta φ, by obrót względem p o kąt $\vec{\varphi}$ przekształcał O_1 na O_2. Oznaczmy ten obrót przez R. Definiujemy dwa ciągi punktów

$$a_1 = o, \quad a_{n+1} = S_o R(a_n), \quad b_n = R(a_n).$$

Mamy $F_1 = \{a_n\} \subset O_1$, $F_2 = \{b_n\} \subset O_2$,

$$F = F_1 \cup F_2 = \{a_n\} \cup \{b_n\} \subset O_1 \cup O_2.$$

---

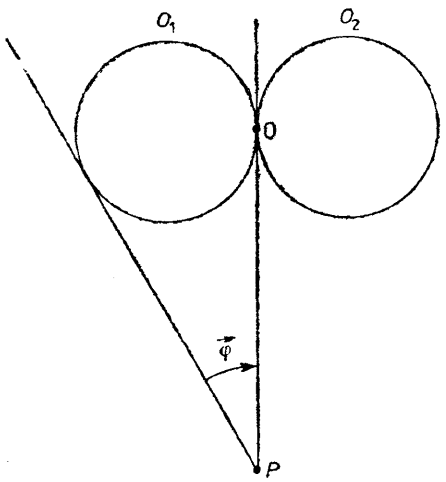
* Praca ucznia klasy matematycznej liceum im. K. Gottwalda w Warszawie, nagrodzona złotym medalem na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki zorganizowanym przez PTM i redakcję „Delty" w roku 1984 (*przyp. Red.*).

Ponieważ $S_0(a_1) = S_0(o) = o = a_1$ oraz

$$S_0(a_{n+1}) = S_0 S_0 R(a_n) = R(a_n) = b_n \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots,$$

więc o jest środkiem symetrii F. Ponadto $R(F_1) = F_2$.

Pozostała do wykazania rozłączność F_1 i F_2. Na początek zauważmy, że jeżeli $i \neq j$, to $a_i \neq a_j$. Istotnie, a_i otrzymujemy z a_j przez $(i-j)$-krotną



Rys. 1

iterację $S_0 R$, a więc obrót a względem środka okręgu O_1 o kąt niewspółmierny z π. Jedynym wspólnym punktem F_1 i F_2 mógłby być o. Ale gdyby dla pewnego i było $b_i = o$, to mielibyśmy

$$a_{i+1} = S_0(b_i) = S_0(o) = o = a_1.$$

W skonstruowanym przykładzie figura F jest przeliczalnym zbiorem punktów. Można jednak łatwo podać analogiczny przykład, w którym F, F_1 i F_2 są figurami spójnymi. Wystarczy mianowicie dołączyć do F_1 koło otwarte ograniczone przez O_1, a do F_2 — koło otwarte ograniczone przez O_2.

Podobnie łatwo zmodyfikować podany przykład tak, by otrzymać figurę zawartą w płaszczyźnie, ograniczoną i zawierającą swój środek symetrii, którą można rozłożyć na dowolną (skończoną) ustaloną liczbę n rozłączonych zbiorów przystających. Przykład dla n nieparzystego jest oczywisty. Dla $n = 2k$ należy obrać $k-1$ okręgów $O_3, O_5, \ldots, O_{2k-1}$ przystających do O_1 w taki sposób, by (oznaczając $O_{2i} = S_0(O_{2i-1})$) okręgi $O_1, O_2, \ldots, O_{2k}$ były, poza parą O_1, O_2, parami rozłączne. Wpisując dowolnie w każdy z okręgów o numerach nieparzystych figurę przystającą do F_1 otrzymujemy figury F_{2i-1} dla $i = 2, 3, \ldots, k$. Niech $F_{2i} = S_0(F_{2i-1})$.

Figura $\bigcup_{i=1}^{2k} F_i$ jest zawartá w płaszczyźnie, ograniczona, zawiera swój środek symetrii i rozkłada się na $2k$ figur przystających i rozłącznych, mianowicie F_i.

Rozkład na figury środkowo symetryczne. Przykład figury zawartej w płaszczyźnie, ograniczonej i zawierającej swój środek symetrii oraz dającej się rozłożyć na dwie figury rozłączne środkowo symetryczne o różnych środkach symetrii, można skonstruować już na prostej. Opiszemy go analitycznie (zauważmy przy tym, że gdyby pominąć warunek, iż środki symetrii mają być różne, figurą taką mogłoby być koło).

Niech α będzie dodatnią liczbą wymierną, β — ujemną niewymierną, i niech $-\beta < \alpha$. Określamy ciąg x_n rekurencyjnie:

$$x_1 = 0, \quad x_{2k} = \begin{cases} 2\alpha - x_{2k-1}, & \text{gdy } x_{2k-1} \geqslant 0, \\ 2\beta - x_{2k-1}, & \text{gdy } x_{2k-1} < 0, \end{cases} \quad x_{2k+1} = -x_{2k}.$$

Z trzeciej równości wynika, że ciąg x_n jest symetryczny względem 0. Jest on także ograniczony. Mianowicie $\{x_n\} \subset (-2\alpha, 2\alpha)$. Istotnie, gdy $x_{2k-1} \in (-2\alpha, 0)$, mamy

$$x_{2k} = (2\beta - x_{2k-1}) \in (2\beta, 2(\beta+2)) \subset (-2\alpha, 2\alpha),$$

a gdy $x_{2k-1} \in (0, 2\alpha)$, mamy

$$x_{2k} = (2\alpha - x_{2k-1}) \in (0, 2\alpha);$$

gdy $|x_{2k}| \leqslant 2\alpha$ mamy również $|x_{2k+1}| \leqslant 2\alpha$. Odpowiednim rozkładem zbioru $\{x_n\}$ jest podzielenie go na zbiór $\{x_n: x_n \geqslant 0\}$, który jest symetryczny względem α, i na zbiór $\{x_n: x_n < 0\}$, który jest symetryczny względem β.

Zauważmy, że otrzymany rozkład składa się z figur nie przystających. Nie jest to przypadek, co wykażemy niżej.

Twierdzenie o nierozkładalności. Podane na początku zadanie miałoby pozytywne rozwiązanie, gdyby uzupełnić je na końcu słowami „i środkowo symetryczne".

Dowód tego poprzedzimy dwoma lematami. Dla uproszczenia zapisu środek symetrii figury środkowo symetrycznej F będzie oznaczony przez $o(F)$.

LEMAT 1. *Jeżeli $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ oraz figury F_1, F_2, $F_1 \cup F_2$ są ograniczone i środkowo symetryczne, to $o(F_1)$, $o(F_2)$, $o(F_1 \cup F_2)$ są punktami współliniowymi.*

Dowód. Przypuśćmy, że $o(F_1)$, $o(F_2)$ i $o(F_1 \cup F_2)$ są niewspółliniowe. Określamy ciąg (x_n) następująco: x_1 — dowolny punkt F_1,

$$x_{2k} = S_{o(F_1 \cup F_2)}(x_{2k-1}), \quad x_{2k+1} = S_{o(F_i)}(x_{2k}), \quad \text{gdy } x_{2k} \in F_i, \ i = 1, 2.$$

Oznaczmy $\vec{v_i} = [\overrightarrow{o(F_1 \cup F_2), o(F_i)}]$. Wówczas

$$[\overrightarrow{x_{2k-1}, x_{2k+1}}] = [\overrightarrow{x_{2k-1}, S_{o(F_i)} S_{o(F_1 \cup F_2)}(x_{2k-1})}] = 2\vec{v_i},$$

gdzie $x_{2k-1} \in F_i$. Zatem

$$\vec{w} = [\overrightarrow{x_1, x_{2k+1}}] = 2l\vec{v_1} + 2m\vec{v_2},$$

gdzie l, m są pewnymi liczbami całkowitymi nieujemnymi i takimi, że $l+m = k$. Wobec liniowej niezależności $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$, wraz z nieograniczonym wzrostem k rośnie nieograniczenie $|\vec{w}|$, co przeczy założeniu, że $F_1 \cup F_2$ jest figurą ograniczoną, gdyż ciąg (x_n) jest zawarty w $F_1 \cup F_2$.

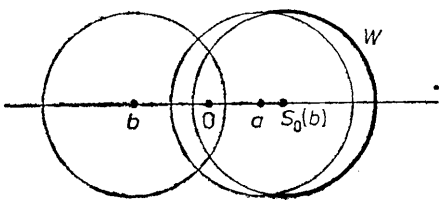
LEMAT 2. *Jeżeli* $F_1 \equiv F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ *oraz figury* $F_1, F_2, F_1 \cup F_2$ *są ograniczone i środkowo symetryczne, to* $o(F_1 \cup F_2)$ *jest środkiem odcinka* $o(F_1)o(F_2)$.

Dowód. Ponieważ $F_1 \equiv F_2$, więc średnice F_1 i F_2 są równe, co więcej,

$$\sup_{x \in F_1} |\overrightarrow{o(F_1), x}| = \sup_{x \in F_2} |\overrightarrow{o(F_2), x}| =: a.$$

Oznaczmy $a = o(F_1)$, $b = o(F_2)$ i $o = o(F_1 \cup F_2)$. Ponieważ w przypadku $a = b$ otrzymujemy $a = b = o$ (gdyż figura ograniczona może mieć co najwyżej jeden środek symetrii), więc na mocy lematu 1 wystarczy udowodnić, że $|o, a| = |o, b|$. Przypuśćmy zatem, że tak nie jest — niech będzie np. $|o, b| > |o, a|$.

Oznaczmy koła o promieniu a i środkach a, b odpowiednio przez K_1 i K_2, a ograniczające je okręgi przez O_1 i O_2. Figura $F_1 \cup F_2$ jest zawarta w $K_1 \cup K_2$. Zauważmy, że pewien większy od półokręgu łuk W okręgu $S_0(O_2)$ nie zawiera się w $K_1 \cup K_2$. Z definicji liczby a wynika, iż na okręgu



Rys. 2

O_2 istnieje punkt x bądź należący do F_2, bądź będący granicą ciągu punktów zbioru F_2. Tę samą własność ma punkt $y = S_b(x)$. Tymczasem, wbrew określeniu punktu o, co najmniej jeden z tych punktów musi należeć do W, a więc wraz z pewnym otoczeniem nie leży w $K_1 \cup K_2$, co wskazuje na istnienie punktów $F_1 \cup F_2$ nie należących do $K_1 \cup K_2$, czyli sprzeczność.

TWIERDZENIE. *Figura ograniczona, zawarta w płaszczyźnie i zawierająca swój środek symetrii, nie może być przedstawiona jako suma dwóch rozłącznych figur przystających i środkowo symetrycznych.*

Dowód. Przypuśćmy, że figura F spełnia założenia i daje się rozłożyć na dwie rozłączne, przystające i środkowo symetryczne figury F_1 i F_2. Oznaczmy $a = o(F_1)$, $b = o(F_2)$, $o = o(F_1 \cup F_2)$ i niech φ będzie izometrią przeprowadzającą F_1 na F_2. Zauważmy, że izometria S_0 nie ma własności $S_0(F_1) = F_2$, w przeciwnym bowiem razie z uwagi na równoważność warunków $o \in F_1$ i $o \in F_2$ i na założenie $o \in F_1 \cup F_2$ mielibyśmy $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

Udowodnimy, że $a \neq b$. Przypuśćmy, że $a = b$. Wówczas $a = o$, a więc $a \in F_1 \cup F_2$. Gdyby $a \in F_1$, to punkt $\varphi(a)$ należałby do F_2 i jako obraz środka symetrii zbioru F_1 byłby środkiem symetrii zbioru F_2. Ponieważ figura F_2 jest ograniczona, więc mielibyśmy $\varphi(a) = b = a$ i $a \in F_1 \cap F_2$, wbrew założeniu rozłączności. Podobnie eliminujemy możliwość $a \in F_2$. Wykazaliśmy, że $a \neq b$.

Wobec $S_0(F_1) \neq F_2$ istnieje punkt $p \in F_1$ taki, że $S_0(p)$ też należy do F_1. Skonstruujemy nieograniczony podzbiór $\{p_n\}$ zbioru F_1 i tym samym uzyskamy sprzeczność z założeniem ograniczoności zbioru $F_1 \cup F_2$. Zauważmy, że na mocy lematu 2 mamy $o \neq a$ i $S_0 S_a S_0 = S_b$. Określamy ciąg (p_n) następująco:

$$p_1 = p, \quad p_{2k} = S_0(p_{2k-1}), \quad p_{2k+1} = S_a(p_{2k}).$$

Ponieważ

$$p_{2k+4} = S_0(p_{2k+3}) = S_0 S_a(p_{2k+2}) = S_0 S_a S_0(p_{2k+1}) = S_b(p_{2k+1}),$$

więc $\{p_n\} \subset F_1$. Podciąg $\{p_{2n}\}$ spełnia jednak zależność

$$p_{2\,n+1)} = S_0 S_a(p_{2n}),$$

a zatem wraz z każdym punktem zawiera również punkt przesunięty o wektor $2 \cdot \overrightarrow{[o, a]}$, a więc jest nieograniczony, co kończy dowód.

Uwaga. W analogiczny sposób można udowodnić twierdzenie nieco ogólniejsze: *Jeżeli figura środkowo symetryczna o środku o rozkłada się na dwa przystające zbiory środkowo symetryczne F_1 i F_2, to albo $S_0(F_1) = F_2$ albo F_1 i F_2 mają wspólny środek symetrii.*

Jeszcze jeden przykład. Pytaniem podobnym do rozważanego powyżej jest następujące: czy istnieje figura F ograniczona, osiowo symetryczna i taka, że do jej osi symetrii L należy dokładnie jeden punkt $o \in F$ oraz dająca się rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych figur przystających?

Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Skonstruujemy taką figurę. Niech $p \in L$ i $p \neq o$. Niech R będzie obrotem wokół punktu p o kąt φ

niewspółmierny z π. Określamy

$$a_n = R^n(o), \qquad b_n = R^{-n+1}(o) \qquad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Wobec niewspółmierności φ i π, figury $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ są rozłączne. Wobec $b_{i+1} = S_L(a_i)$ prosta L jest osią symetrii ich sumy. Są też przystające: izometrią realizującą to przystawanie jest symetria osiowa względem symetralnej odcinka b_1a_1. Zauważmy jeszcze, że $S_p(o) \notin \{a_i\} \cup \{b_i\}$.