ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVII (1986)

wmptm 1897

TREVOS J. FLETCHER (Darlington, U.K.)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Ulepszanie programów nauczania matematyki w zmieniających się społeczeństwach *

Wstęp. Tematem artykułu jest doskonalenie treści programów nauczania matematyki w zmieniających się społeczeństwach. Nie zamierzam proponować listy haseł matematycznych, które moim zdaniem powinny być włączone do programu. Jest już wiele takich list. Spróbuję spojrzeć głębiej i rozważyć, jak najlepiej przeprowadzić zmiany programowe i jak uniknąć niektórych błędów, powtarzanych wielokrotnie w ciągu ostatnich lat przy wprowadzaniu takich zmian(1).

Mówiąc na ICME 4 w Berkeley, Hans Freudenthal nawiązał do różnic między problemami w matematyce i problemami w dydaktyce matematyki. W przeciwieństwie do matematyki, dydaktykę matematyki trudno traktować jako kumulującą się wiedzę, w której problemy mają ostateczne rozwiązania raz na zawsze. Referując wyniki z dydaktyki matematyki nie dowodzi się twierdzeń i nawet dyskutowane problemy mogą ulec zapomnieniu w krótkim czasie. Na czym więc polegają wyniki w tej dziedzinie?

---

* Tłumaczenie Agnieszki Wojciechowskiej artykułu *The improvement of the content of the mathematics curriculum in changing societies*, Proceedings of ICMI-JSME Regional Conference on Mathematical Education (10–14 October 1983, Tokyo), edited by T. Kawaguchi, str. 66–78.

Copyright © Japan Society of Mathematical Education 1984.

(1) Używam słowa *syllabus* w sensie obejmującym niewiele więcej niż lista tematów do przerobienia. *Curriculum* obejmuje dalsze składniki, takie jak podejście dydaktyczne, typy działalności, w której uczniowie biorą udział, oraz kontekst, w którym materiał z *syllabus* jest osadzony. *Scheme of work* zazwyczaj obejmuje *syllabus* i pewne wskazania dotyczące metod nauczania, i ewentualnie uwagi dotyczące pożądanego kontekstu, lecz *curriculum* obejmuje więcej niż *scheme of work*, jak wskazuje np. zwrot *the hidden curriculum* (*przyp. autora*).

W wersji polskiej słowo *syllabus* tłumaczone zostało jako „hasła" lub „treści programu", *curriculum* — jako „program nauczania", *scheme of work* — jako plan pracy nauczyciela. *Scheme of work* występuje — w podanym tu sensie — w systemach oświatowych nie mających urzędowych programów, jak np. w Anglii (*przyp. tłumacza*).

Byłoby przyjemnie wierzyć, że dydaktycy matematyki swoją wiedzą, z upływem lat, przyczyniają się do coraz lepszego nauczania matematyki. Nie uważam tego za oczywiste i sformułuję tezę bardziej umiarkowaną. Wystarczającym usprawiedliwieniem dla konferencji dotyczących nauczania matematyki jest to, że badają one wybór. W zmieniającym się społeczeństwie nie jest zadaniem dydaktyka matematyki mówienie po prostu czego i jak uczyć. Jego sprawą jest wyjaśnić tym, którzy podejmują decyzje o nauczaniu matematyki, przed jakimi wyborami stoją i jakie jest nasze doświadczenie w związku z konsekwencjami wyboru konkretnej drogi.

Chciałbym porównać to z moją pracą w Anglii. Jestem rządowym inspektorem(2). Angielski system edukacji narodowej jest administrowany lokalnie. Nie ma państwowych zarządzeń opisujących treści nauczania, ani nawet oficjalnych wytycznych co do zasad. Oczywiście nie ma oficjalnych programów dla poszczególnych przedmiotów. Kiedy rozpatruję moją pracę w ciągu ostatnich 10 lat, myślę, że nic nie było w niej tak ważne, jak określanie wyborów, które były dokonywane, i omawianie dostrzeżonych przeze mnie konsekwencji tych wyborów. Te problemy mogłem omawiać z poszczególnymi nauczycielami, z doradcami ministrów i z wieloma innymi osobami na wszystkich pośrednich szczeblach.

Nie można zakładać, że wszyscy nauczyciele uczą matematyki z tą samą motywacją. Jako młody nauczyciel uważałem za rzecz oczywistą, iż motywy innych nauczycieli matematyki są takie same jak moje, ale przekonałem się, że jest inaczej. Jeśli nauczyciele nie są zgodni między sobą, to możemy być niemal pewni, że wśród szerokiej publiczności panuje jeszcze większa rozmaitość opinii. Pewne uzasadnienia kształcenia matematycznego rozpatrzę później. Tutaj chcę powiedzieć, że skoro nie ma ogólnej zgodności co do racji uczenia matematyki, trzeba w każdej konkretnej sytuacji określać cele kształcenia matematycznego. W demokratycznych społeczeństwach muszą one być określone w sposób umożliwiający właściwą publiczną dyskusję. W społeczeństwach autorytarnych też muszą być one określone, choćby tylko po to, aby administratorzy mogli wiedzieć, czy osiągane są właściwe cele.

Jak mi się wydaje, na całym świecie celom poświęca się zadziwiająco mało uwagi. Co prawda, w wielu krajach o scentralizowanym systemie cele nauczania są wymieniane w początkowych akapitach programów. Podobnie jest z planami pracy, sporządzanymi w moim kraju przez poszczególne szkoły. Jednak siedząc w klasie i obserwując, co się dzieje, w większości wypadków nie jest się pewnym, jak to wynika z deklarowa-

(2) Tytuł oficjalny brzmi: Inspektor Jej Królewskiej Mości (*Her Majesty's Inspector*). Ten tytuł ma długą tradycję i obecnie daje pewną niezależność od rządu.

nych celów; nauczanie w większym stopniu opiera się na zastanej tradycji. Nauczyciel uczy tak, jak uczono jego i jak w jego pojęciu uczą inni. Dzieje się tak w znacznej, być może, mierze na przekór wykształceniu, które nauczyciel otrzymał w uczelni, ale tym, co głównie wpływa na styl jego pracy, jest presja, jaką nauczyciel odczuwa ze strony otoczenia. Piszę „w odczuciu nauczyciela", ponieważ intencje komisji egzaminu kwalifikacyjnego, dyrektora szkoły czy metodyka mogą być odmienne od tego, jak je rozumie nauczyciel. Bez zapewnienia stałej dyskusji nie możemy być pewni, że cele nauczania są rozumiane.

Lata sześćdziesiąte były okresem intensywnych zmian programowych (czy przynajmniej zmian haseł programowych). W moim przekonaniu, głównym powodem niezadowolenia, a nawet rozczarowania, które nastąpiło po okresie zmian, było to, że nie przedyskutowano z szerszą publicznością intencji leżących u podstawy reform, a w pewnych przypadkach — nawet z samymi nauczycielami.

Raport Cockrofta. W wielu krajach, po szerokich zmianach z lat sześćdziesiątych nastąpił okres wątpliwości i kontrowersji w latach siedemdziesiątych. W Anglii doprowadziło to rząd do powołania komisji badawczej, zwanej od nazwiska swego przewodniczącego Komitetem Cockrofta. Komitet, który pracował w latach 1978–1981, badał nauczanie matematyki w szkołach i ogłosił raport (*Mathematics Counts*, Her Majesty's Stationery Office, 1981). Z jego ustaleń mogą, jak sądzę, skorzystać inne kraje.

Przytoczę pokrótce pewne rady dane w raporcie, choć nie one są w tej chwili dla nas najważniejsze. Częścią problemu, który rozważam, jest fakt, że rady słuszne dla jakiegoś kraju przy pewnym układzie warunków mogą przestać być takie, gdy przeniesie się je gdzie indziej i w inne warunki. (Ponownie ilustruje to różnicę między wynikami matematycznymi a uzyskiwanymi w dydaktyce matematyki.) Nie mam zamiaru zachęcać nikogo do studiowania konkluzji, do których doszedł Komitet Cockrofta, ale warto rozważyć metody, które on stosował. W Komitecie było 21 osób z różnych dziedzin oświaty, z administracji i z przemysłu. Komitet obradował łącznie przez 64 dni w ciągu trzech lat i było nadto wiele uzupełniających spotkań. Komitet rozpatrywał wyniki badań specjalnie przeprowadzonych przy użyciu rozmaitych metod; otrzymano pisemne świadectwa z 900 źródeł, instytucji publicznych i prywatnych osób, jak również ustne wypowiedzi od wielu osób o różnych zainteresowaniach, zarówno pochodzących spoza kręgów oświatowych, jak też od ludzi bezpośrednio w nią zaangażowanych.

Nie jest łatwo podsumować raport i nie chciałbym tego tu nawet próbować. Sam Komitet nie streścił wyników i nie wyliczył nawet swoich zaleceń, ponieważ był zdania, że zalecenia te powinny być widziane w kontekście prowadzonych rozważań. Omówiłem ten raport w międzynarodo-

wym czasopiśmie([3]) i proponuję zapoznać się z tym tam, jeżeli kogoś interesuje streszczenie przeznaczone dla czytelników spoza Anglii.

Chciałbym uwypuklić kilka kwestii wynikających z szerokiego studium raportu. Pierwsza rzecz to badania zlecone. Przegląd opracowany przez Bella i innych([4]) daje krytyczną ocenę ostatnich badań w dydaktyce matematyki, która dla wielu powinna mieć bezpośrednie znaczenie.

Fitzgerald([5]) sporządził fascynujący przegląd matematyki rzeczywiście niezbędnej w pracy młodym ludziom, którzy opuszczają szkołę w wieku 16 lat. Przegląd ten nie zajmuje się tymi uczniami, którzy będą potrzebowali w przemyśle bardziej zaawansowanej matematyki, ponieważ uczniowie, którzy opuszczają szkołę w wieku 16 lat nie mają zamiaru pracować na takim poziomie. Badania tu przedstawione dają wiele przykładów, które mogłyby ożywić lekcje szkolne i uczynić je bardziej realistycznymi. Pokazują one jednakże, że w wielu zawodach zakres matematyki tam stosowanej jest skromny, ale potrzebne są metody inne niż te, których uczy się w szkole. Nie wymaga się ołówka, papieru i systematycznych algorytmów ogólnego stosowania przerabianych w szkole; młody pracownik potrzebuje oszacowań, znajdowania wygodnych skrótów postępowania oraz umiejętności inteligentnego interpretowania otrzymanych wyników. Uczniowie opuszczający szkołę w wieku 16 lat potrzebują niewiele z algebry, której ich uczono; wystarcza zazwyczaj umiejętność podstawienia liczb do wzorów wyrażonych raczej słownie niż za pomocą liter. Uczniowie ci mogą również potrzebować użycia tablic matematycznych. W dzisiejszych czasach ważne oczywiście są kalkulatory.

Jako następny fragment badań wymieńmy wywiady przeprowadzone przez Bridgid Sewell z licznymi dorosłymi na temat ich doświadczeń z czasów uczenia się matematyki w szkole i ich stosunku do niej w dorosłym życiu. Z jej badań wyłoniło się zdumiewające, bezustanne napotykanie ludzi niepewnych, z uczuciem nieadekwatności. Wiele osób wykształconych i pod innymi względami cieszących się powodzeniem wyznawało, że matematyka budziła w nich uczucie strachu i niechęci. Wielu wypracowało strategię unikania nawet małych kawałków matematyki, np. proszą o nalanie im benzyny za 10 funtów zamiast określonej ilości litrów, zostawiają współmałżonkom prowadzenie domowych rachunków itd. Skoro tylu dorosłych stosuje strategie unikowe, nie możemy dziwić się, że dzieci robią to samo w szkole.

([3]) Por. T. J. Fletcher, *The Cockcroft report on mathematical education — An assessment of a nations needs*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 82/5.

([4]) *A Review of Research in Mathematical Education*, 3 tomy, NFE-Nelson, England, 1983.

([5]) J. Fitzgerald, *Mathematical in Employment 16–18*, School of Mathematics, University of Bath, England 1982.

Z wielu zaleceń raportu wspomnę dwa, które mają szczególne znaczenie dla programów. Komitet opowiedział się za zróżnicowaniem programów matematycznych w szkołach średnich dla młodzieży w wieku 11–16 lat. Już teraz tak się dzieje, że różnych ilości matematyki uczy się w zależności od wyników uczniów w tym przedmiocie. Komitet był zdania, że pomimo tego zróżnicowania, zbyt wiele usiłuje się robić ze zbyt wieloma dziećmi i w przyszłości powinno się raczej zmniejszyć wymagania. Powinniśmy starać się, by dzieci miały więcej wiary w siebie i więcej sukcesów w pracy, której się podejmują.

Jestem świadomy, że zalecenie zróżnicowania nie jest zgodne z tendencjami w wielu krajach, na przykład ZSRR i Japonii. Czytałem artykuł([6]) Kawaguchiego, w którym pisze on o „popularnej antypatii do zróżnicowanych programów i ... żądaniu równych szans dostępu do wyższych studiów, pomimo znacznych różnic w zdolnościach studentów". To odczucie można z pewnością spotkać w Anglii i znajduje ono odbicie w zmianach programów matematycznych od roku 1945. Z biegiem lat próbowaliśmy nauczyć coraz więcej matematyki coraz większą część szkolnej populacji. Kiedy „nowoczesna matematyka" została wprowadzona w latach sześćdziesiątych, byliśmy pod wpływem pragnienia nie tylko modernizacji, lecz także zmniejszenia zróżnicowania, choć nie było to jasno stwierdzone w tym czasie. Po dwudziestoleciu redukowania zróżnicowania stwierdziliśmy, że posunęliśmy ten proces zbyt daleko.

Ja nie twierdzę, że nasza konkluzja powinna być zastosowana również w innych krajach, choć jest to warte dyskusji. Trzeba pamiętać o kontekście angielskim. W wieku 16 lat uczeń przechodzi u nas przez system egzaminów, który ma ogromne znaczenie społeczne. O ile w wielu krajach zróżnicowanie poprzez egzaminy nie pojawia się przed 18 rokiem życia, w Anglii ma ono miejsce zarówno w szesnastym, jak i w osiemnastym. Jestem przekonany, że wszędzie, gdzie w pewnym momencie uczniowie poddani są rygorystycznemu egzaminowi mającemu podzielić ich na kategorie, albo trzeba zróżnicować nauczanie w poprzedzającym okresie, albo testy okażą się odstraszająco trudne dla większości uczniów.

Wiele społeczeństw musi dokonać wyboru w tej sprawie. Ja nie opowiadam się za żadnym szczególnym wyborem. Po prostu próbuję wyjaśnić, na czym wybór polega i jakie są niektóre z jego konsekwencji. Gdy chce się mieć mniejsze zróżnicowanie osiągnąć szkolnych, wówczas bardzo pomaga uczynienie egzaminów mniej dyskryminującymi. Można na przykład zmniejszyć rolę końcowych egzaminów szkolnych w przyznawaniu miejsc na uczelniach wyższych, które mogą ustanowić własne egzaminy

([6]) T. Kawaguchi, *Secondary school mathematics in Japan*, Studies in Mathematics Education, vol. 1, UNESCO, 1980.

wstępne. Dzieje się tak w wielu krajach. Osłabia to naciski na szkoły, ale prowadzi do problemów innego rodzaju.

Wracając do Raportu Cockrofta wspomnę paragraf, który stał się sławny ponad wszelkie oczekiwania, jakie towarzyszyły jego redagowaniu. Jest to § 243, który zacytuję w dosłownym brzmieniu:

„Nauczanie matematyki na wszystkich poziomach powinno stwarzać okazje do:

— wyjaśnień nauczyciela,

— dyskusji między nauczycielem a uczniami i pomiędzy samymi uczniami,

— odpowiedniej pracy praktycznej,

— utrwalenia i sprawności podstawowych umiejętności i procedur,

— rozwiązywania zadań, włączając w to stosowanie matematyki do codziennych sytuacji,

— prac poszukiwawczych.

Jest to zadziwiająca rzecz! Nikt nie może uznać, że któraś z tych sześciu „możliwości" nie jest ważna, ale jeśli ktoś powie, że na większości lekcji matematyki stosuje się dwa spośród tych sześciu haseł, w umysłach słuchaczy nie ma żadnej wątpliwości, które dwa ma on na myśli. Nauczanie koncentrujące się na podawaniu i ćwiczeniu podstawowych umiejętności kosztem innych elementów wymienionych wyżej będę nazywał „nadmiernie dydaktycznym". Wrócę do jego omówienia dalej.

Pragnąłbym, aby programy matematyczne zachęcały do wykorzystania wszystkich sześciu możliwości. Nie da się tego jednak osiągnąć po prostu przez wymienienie treści, które nauczyciel powinien uwzględnić. Jeśli te elementy mają być rozwijane, wówczas trzeba podjąć decyzje co do całości programu: nie tylko tego, co ma być robione, ale też, jak to ma być robione. Chciałbym skierować to zalecenie Komitetu Cockrofta do każdego, kto zaangażowany jest w prace programowe w swoim kraju.

Argumenty za nauczaniem matematyki. Mówiłem o znaczeniu określenia, w każdym szczególnym układzie warunków, dlaczego uczymy matematyki, ale jak dotąd nie dokonałem przeglądu argumentów. Mają one różne formy, ale zwykle sprowadzają się do następujących haseł:

1. *Matematyka daje możność treningu umysłu.*
2. *Matematyka ma wartość kulturalną bądź estetyczną.*
3. *Matematyka jest użyteczna.*

Mam nadzieję, że matematyki zawsze będzie się uczyć w sposób rozwijający umysł, ale sam ten powód nie wystarcza. Wiele rzeczy kształci umysł. Co więcej, ten argument jest często używany do usprawiedliwienia nauczania, którego treści nie odznaczają się ani estetycznym pięknem, ani użytecznością, ani nawet szczególną logicznością. Nauczanie, które pretenduje do miana kształcenia umysłu, często nie wymaga niczego więcej niż pamięci i odwołania się do jakiejś właściwej techniki. Jest to zbyt mało jak na logiczne myślenie.

Matematyka z pewnością ma kulturową i estetyczną wartość. Wiele przyczyn, dla których naucza się historii, muzyki, czy plastyki, przemawia również za nauczaniem matematyki. Jednakże brak tych właśnie aspektów przedmiotu nauczania mogłem żałośnie odczuć w większości klas, które wizytowałem w ciągu ostatniego dwudziestolecia. Nawet jeśli nauczyciel przedstawia te aspekty w sposób kompetentny, pojawia się pytanie, jak długo powinniśmy uczyć tego przedmiotu uczniów, którzy po prostu nie są wrażliwi na jego artystyczne piękno?

Tak więc pozostaje nam argument użyteczności matematyki. Możemy wyróżnić trzy jego warianty:

3a. *Matematyka jest użyteczna w codziennym życiu przeciętnej osoby.*

3b. *Matematyka jest użyteczna dla zrozumienia nauki, techniki, statystyki, techniki obliczeniowej itd.*

3c. *Matematyka jest użyteczna jako składnik kwalifikacji zawodowych.*

Wariant 3c jest zbliżony do 3b, ale trzeba go podzielić dalej.

3c′. *Pewne specyficzne fragmenty matematyki są niezbędnym wstępnym warunkiem do podejmowania niektórych zajęć. (Jeśli chcesz studiować elektryczność, wówczas potrzebujesz matematyki, by uporać się z prawem Ohma.)*

3c″. *Chcemy zatrudniać raczej ludzi „lepszych" niż „gorszych", a matematyka jest dobrym wskaźnikiem ogólnych zdolności.*

Przy ocenianiu pozycji matematyki w jakimkolwiek społeczeństwie radzę patrzeć uważnie na różnice między 3c′ a 3c″. 3c′ jest słusznym argumentem, który musi być brany pod uwagę przy opracowywaniu programów. Co więcej, matematycy nie mogą sami podejmować decyzji w tym zakresie. Potrzebują oni ciągłych konsultacji z rozmaitymi użytkownikami matematyki. 3c″ jest poglądem łatwo prowadzącym do nadużycia. Taka wizja matematyki stwarza nierozwiązalne napięcia w szkołach: zgodnie z nią matematyka może kwalifikować jednych tylko kosztem odrzucenia innych.

Argument 3c′ prowadzi do sprawdzianów opartych na określonych kryteriach. Argument 3c″ prowadzi do egzaminów opartych na normie; zdanie takiego egzaminu ma wartość tylko dlatego, że inni odpadają. Społeczne i oświatowe konsekwencje tego są bardzo duże. W moim kraju wielu sądzi, że nasze egzaminy są nieuniknioną częścią systemu kształcenia, gdy tymczasem nie są one konieczne. Są kwestią społecznego wyboru. Nalegałbym na każdego, kto jest odpowiedzialny za kształt programów nauczania matematyki, aby rozważył, jak takie wybory działają w jego własnym systemie, i by zastanowił się, czy dokonano najlepszego wyboru.

Mam własny argument na rzecz nauczania matematyki. Niewiele, ale znacząco różni się on od wszystkich wymienionych powyżej. Kilka lat temu napisałem w artykule polemicznym: *jedynym usprawiedliwieniem dla obowiązkowego nauczania matematyki wszystkich uczniów w wieku 5–16*

lat jest jej zdolność objaśniania ([7]). Po ośmiu latach nie widzę powodów do zmiany stanowiska. W pewnych przypadkach (3c') potrzebujemy matematyki, aby przeprowadzić istotne objaśnienia. Jednak badania Cockrofta pokazały, że zakres matematyki istotnej w wielu obszarach zatrudnienia czy używanej w codziennym życiu jest znacznie mniejszy niż często utrzymujemy.

W dzisiejszych czasach używa się matematyki w coraz większych obszarach życia publicznego. Dzieje się tak głównie dzięki temu, że tanieją obliczenia numeryczne. One też umożliwiają uzyskanie numerycznych wniosków ze strukturalnie skomplikowanej teorii. Jednak ten typ matematyki używany jest tylko przez stosunkowo nielicznych ekspertów. Coraz więcej ludzi korzysta z mikroprocesorów, ale bardzo niewielu musi znać matematykę leżącą u podstaw ich projektowania. Co więcej, przemysł używa procesorów, aby redukować kwalifikacje techniczne niezbędne dla większości zatrudnionych. Jakie to ma konsekwencje dla nauczania matematyki w szkołach?

Moim argumentem jest, że matematyka pomaga każdemu lepiej i szybciej rozumieć, na czym polega działanie urządzeń. Dam dwa małe przykłady z własnego doświadczenia. W studio filmowym moja znajomość algebr Boole'a pozwoliła mi na znacznie szybsze użycie procesu odbijania kolorów niż byłbym w stanie to robić innymi sposobami. Moja wiedza z geometrii analitycznej pozwoliła mi zrozumieć, co robi bookmacher, gdy zaprzestaje przyjmowania zakładów, choć moje zainteresowanie było czysto teoretyczne — nie byłem zaangażowany finansowo([8]).

Matematyka umożliwia nam łatwiejsze zrozumienie innych ludzi i ich pracy; to zaspokaja ciekawość. Są to również wartościowe cele oświatowe. Dziecko może powoływać się na swój brak zainteresowania algebrą i możemy to zrozumieć. Jeśli jednak dziecku brakuje zainteresowania innymi ludźmi, to jest to coś, co szkoła powinna zmienić. Nauczyciel jest tam po to, by kultywować zainteresowania, tak właśnie jak lekarz jest tam, by dbać o zdrowie.

Twierdzę, że to tu ujrzeć możemy główne uzasadnienie dla nauczania matematyki. Twierdzę, że społeczne konsekwencje oparcia układania programów na takim celu są znacznie korzystniejsze niż opieranie ich na 3c''.

([7]) *Mathematics, science and modern languages in maintained schools in England*, dokument HMI, Department of Education and Science, 1977.

([8]) Tradycyjna algebra wyjaśnia wiele problemów w naukach przyrodniczych i technicznych. W ostatnich latach w wielu krajach włączono do programów nauczania elementy teorii grup. Można było teorię tę stosować do analizy i klasyfikacji wzorów na ornamentach, które znajdują się na całym świecie, ale niestety tak się nie dzieje. Teoria liczb długo była uważana za sztandarowy przykład teorii matematycznej rozważanej dla niej samej, ale ostatnio wiele jej osiągnięć wykorzystuje się przy planowaniu systemów kodowania dla celów telekomunikacji i informatyki.

Jeśli postanawiamy nauczać matematyki tak, by mogła ona wyjaśniać wielką rozmaitość rzeczy, wówczas mamy coś do zaoferowania wszystkim dzieciom. Dziś główną podstawę stanowi argument, że „matematyka jest składnikiem kwalifikacji człowieka". To prowadzi tylko do sytuacji, w której są zwycięzcy i przegrani. Ja próbuję znaleźć zasadę prowadzącą raczej do kooperacji niż konkurencji.

Są i dalsze argumenty za pójściem w tym kierunku. Przemysł i prowadzenie interesów wymagają coraz mniejszego nakładu pracy. Najwyższy poziom myślenia niezbędny dla rozwoju technologii jest udziałem względnie nielicznych. W zachodnich krajach znajomość matematyki przestała gwarantować zatrudnienie. Wielka liczba młodych ludzi jest bez pracy i bez perspektyw. Ich młodsi bracia i siostry w szkołach mogą spostrzec, że matematyka będzie się liczyć wśród kwalifikacji zawodowych u niektórych z nich, ale nie odegra takiej roli u wielu innych.

Znaczna liczba szkół staje przed problemem kształcenia młodzieży nie do pracy, ale do życia w świecie, w którym niektórzy ludzie będą mieli małą szansę zatrudnienia. Wierzę, że matematyka ma coś do zaoferowania w tych warunkach, ale to musiałoby oznaczać istotne zmiany w sposobie nauczania i egzaminowania.

Byłoby rzeczą fascynującą spróbować wyciągnąć z tych przesłanek szczegółowe wnioski dotyczące programów, ale nie pora tu na to. Zresztą częścią mojej tezy jest to, że szczegóły programów muszą być ustalane zgodnie z lokalnymi okolicznościami. Jednakże pragnąłbym zasugerować, że kursy matematyki mogłyby zawierać znacznie więcej informacji o świecie, z danymi liczbowymi o bieżących wydarzeniach, o historii i geografii. Mogłyby być włączone analizy reguł gier i sportów oraz statystyki rekordów sportowych, jak też strategie w rozmaitych działaniach. Można by włączyć interpretacje technicznych wykresów i diagramów. Punktem wyjścia w większości przypadków byłyby nie podręczniki, ale gazety i popularne magazyny.

Treści programu. Obserwując to, czego aktualnie uczy się w różnych częściach świata — biorąc pod uwagę to, co powiedziałem — bardziej uderzony jestem podobieństwem programów niż różnicami między nimi. Nauczanie matematyki w szkołach podstawowych różnych krajów jest bardziej chyba zróżnicowane niż kształcenie na wyższych szczeblach. Jedna z przyczyn tkwi w języku. W wielu przypadkach podstawowego kursu matematyki uczy się w języku lokalnym, a nauczanie na średnim i wyższym poziomie prowadzone jest w języku szerszej grupy ludzi. Jakiekolwiek są tego przyczyny, faktem jest, że gdy uczniowie przechodzą do starszych klas, programy okazują się podobniejsze.

Mam podręcznik zawierający kurs pierwszego roku matematyki na chińskim uniwersytecie. Nie znam chińskiego, ale gdyby pozwolono mi

wykładać po angielsku, mógłbym z powodzeniem wyłożyć to, co jest w tej książce. Matematyka jest międzynarodowym językiem w godnym uwagi zakresie. Materiał w owym podręczniku jest bardzo podobny do większości tego, czego uczyłem się jako student. Jest to tym bardziej zadziwiające, gdy pamięta się o ogromnych przemianach społecznych, które zaszły w Chinach w ostatnim trzydziestoleciu. Dowodzi to tego, że programy nauczania matematyki są w jakiś sposób bardzo odporne na działanie zewnętrznych sił społecznych. Uczniowie z socjalistycznych i zachodnich państw współzawodniczą przyjacielsko w olimpiadach matematycznych. O ile wiem, nie ma czegoś takiego w innych przedmiotach szkolnych. Jest to dalszy dowód na to, że idee matematyczne mają pewną niezależność od społecznych struktur, w ramach których są nauczane.

Nauczyciele bardzo często wierzą w swoją bezsilność w sprawach zmian programów. Często jest to prawdą, gdy myśli się o krótkim okresie, jednak programy zmieniły się znacznie w większości krajów w ciągu ostatniego dwudziestolecia. Twórcy programów w różnych krajach mogą się wiele nauczyć z równoległych zmian ewolucyjnych, które nastąpiły w różnych miejscach w tym czasie. Są one dokumentowane bardzo dokładnie w wielu opracowaniach(9).

Jednakże jednolitość treści nie pociąga za sobą jednolitości metod. Bardzo często praktyką w krajach o bardzo różnych wzorcach administracji oświatowej jest wyraźne stwierdzenie, że nie określa się metod nauczania. Widać to na przykład w wykazach wymagań rad egzaminacyjnych (*examination boards*) w Anglii. Wykazy te determinują, czego uczona jest większość uczniów powyżej 14 roku życia (a czasem i wcześniej), ale nie dają one wskazówek co do metod nauczania. Przyjmuję, że sytuacja jest bardzo podobna w szkołach japońskich. Pierwsze słowa rozdziału 1 („Ogólne ustalenia") programów dla podstawowych i średnich szkół w Japonii brzmią: *„Każda szkoła powinna sformułować właściwy program zgodnie z ustaleniami odpowiednich praw i przepisów ..."*.

Podobną praktykę spotyka się na całym świecie. Ugruntowana jest ona na mocnych przesłankach, ale wątpię, czy przynosi spodziewane wyniki. Czy możemy pozostawić decyzję o metodach nauczycielom bez dalszego pokierowania nimi? Można argumentować, że nie powinniśmy próbować

---

(9) Por. H. G. Steiner (ed.), *Comparative studies of mathematics curricula — Change and stability 1960–1980*, IDM, Bielefeld 1980 (jest to obszerne 729-stronicowe studium, będące wynikiem konferencji zorganizowanej wspólnie przez Instytut Dydaktyki Matematyki Uniwersytetu w Bielefeld wraz z *International Mathematics Committee of the Second International Mathematics Study of the International Achievement* (IEA)). Raporty pochodzące z bieżących przeglądów IEA dostarczają dalszych porównawczych informacji o programach nauczania w różnych krajach. Patrz także: *New Trends in Mathematics Teaching*, vol. 4, UNESCO, 1979, oraz drukowane materiały z kongresów dydaktyki matematyki (ICME) od 1 do 4.

określania metod, gdyż to, co nauczyciel robi podczas naszej nieobecności w klasie, jest poza naszą kontrolą. Jeśli poleci się nauczycielom stosowanie metod, w które nie wierzą, sprowadzą je oni do absurdu.

Praktyka wielu krajów uznaje, że można narzucać treści programu, ale nie metody. Jeśli jednak cele programowe mają być osiągnięte, wówczas metodom należy poświęcić tyle samo uwagi co treściom, a metody można opracowywać jedynie ściśle konsultując się z zainteresowanymi nauczycielami.

Na ICME 4 w Berkeley byłem zaproszony do wygłoszenia referatu o matematycznym kształceniu nauczycieli szkół średnich. Początkowo patrzyłem na zagadnienia od strony treści: jaka matematyka powinna znaleźć się w kształtowaniu przyszłych nauczycieli. Napisałem do wielu osób zaangażowanych w kształcenie nauczycieli. Ich odpowiedzi stwierdzały niemożliwość oddzielania treści od metod; uważali oni zmiany stosowanych metod za ważniejsze od zmian programów.

W literaturze światowej często zachęca się do bardziej zróżnicowanych stylów nauczania, lepiej uwzględniających sposoby myślenia ucznia i szerzej korzystających z metod heurystycznych. Na ICME 2 zapoznano uczestników z wypowiedziami Piageta i Pólyi przysłanymi na prośbę organizatorów. Na tym samym kongresie H. Philp stwierdził w swoim odczycie: „*Myślę, że są już wystarczające dowody sugerujące, że przynajmniej w niezachodnich społeczeństwach, a szczególnie na obszarach z dużym analfabetyzmem, nauczanie powinno być zorientowane na matematykę jako proces, a metody powinny poważnie opierać się na uczeniu przez odkrycie* ..."[10].

Tę samą rekomendację dałbym również zachodnim, piśmiennym społeczeństwom, choć nie jestem pewien, jak dalece wynika ona z niepodważalnych świadectw. Mamy dokonać wyboru, i ja wybieram w ten sposób.

Jednak jakiekolwiek będzie stanowisko dydaktyki matematyki, jasne jest, że na ogół nauczanie jest inne. W moim kraju raporty wizytatorów od wielu lat krytykują nauczanie (matematyki na równi z innymi przedmiotami) za nadmierny dydaktyzm, a raport Cockrofta skierował uwagę na to, co przepada przy takim nauczaniu matematyki. Potwierdzenie tego znalazłem w światowej literaturze pochodzącej z rozmaitych źródeł, a chyba jeszcze silniejsze w rozmowach z matematykami z wielu krajów.

Tak więc stwierdzamy:

1° zadziwiający stopień zgodności co do treści matematycznego kształcenia, przynajmniej na poziomie średnim i wyższym;

2° powszechną zgodę, że treści nie mogą być pozostawione nauczycielom;

3° z powodu dziwnej perwersji nauczyciele wybierają „złe" metody.

---

[10] H. Philp, *Mathematical education in developing countries — some problems of teaching and learning*, Developments in Mathematical Education (ed. A. G. Howson), Cambridge University Press, 1973.

Mój kolega inspektor (który przypadkiem uczył mnie matematyki, gdy byłem chłopcem) zwykł mawiać na zakończenie inspekcji: „znowu mamy szkołę, w której złe metody okazują się irytująco skuteczne!" „Złe" metody są rzeczywiście bardzo skuteczne, jeśli mierzyć skuteczność zgodnie z powszechnymi oczekiwaniami wobec szkoły. To jest właśnie brakujący czynnik. Nauczyciele wcale nie wybierają złych metod. Oni robią to, czego społeczeństwo od nich oczekuje, i robią to ze znacznym powodzeniem.

Ludzie, którzy sami nigdy nie uczyli, uważają zazwyczaj, że nauczanie jest łatwiejsze niż jest w istocie. Rozumieją oni pewne rzeczy z punktu widzenia dorosłych i zapomnieli o procesach, dzięki którym osiągnęli to zrozumienie. Wszyscy rodzice chcą, żeby ich dzieciom szło dobrze — nawet za cenę innych dzieci, którym idzie gorzej — i większość rodziców uważa, że najszybszą drogą osiągnięcia wiedzy przez dzieci jest, żeby nauczyciel powiedział im, co one powinny wiedzieć.

Prowadzi to do nadmiernie dydaktycznego stylu uczenia. Poszczególni nauczyciele czują, że na nich ciąży odpowiedzialność za bieżące efekty nauki i za to, co oni mogą zrobić w ciągu kilku najbliższych miesięcy. Naciski na pojedynczego nauczyciela odpowiadają skali czasowej, która rzadko wybiega poza okres dwuletni. Wynikiem tego jest przyswojenie stylu nauczania, który jest dobrze dostosowany do celów krótkoterminowych. Osiąganie celów długoterminowych jest zupełnie inną sprawą.

W naszym gronie powinniśmy rozpatrywać nie tylko oddziaływanie

$$\text{treści} \leftrightarrow \text{metody},$$

ale także bardziej złożone oddziaływanie

$$\begin{array}{ccc} \text{treści} & \leftrightarrow & \text{metody} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \multicolumn{3}{c}{\text{oczekiwania społeczne.}} \end{array}$$

Wiele problemów wyłania się, gdy chce się zmienić treści programów i jednocześnie zwracać należną uwagę na oczekiwania społeczne. Społeczne reakcje na „nową matematykę" były bardzo podobne w krajach o bardzo różnych systemach edukacyjnych (Francja, RFN, USA, ZSRR). Jeśli chce się skutecznie zmienić program matematyki, trzeba znaleźć sposoby mówienia o tym ludziom. Nie wystarczy pozostawić decyzje ekspertom.

Jakkolwiek trudno jest zaaranżować pożyteczną publiczną dyskusję o treściach programów matematycznych, zorganizowanie dyskusji o metodach nauczania jest jeszcze trudniejsze. Przede wszystkim trudno jest publiczności poznać fakty dotyczące tego, co się dzieje, a nawet jeśli ludzie wiedzą, o co chodzi, porównanie różnych metod nauczania wymaga dużej wiedzy i doświadczenia.

Warto zwrócić uwagę na stopień zgodności między dydaktykami matematyki w sprawie najlepszych metod nauczania, ale nie wystarczy przekonać nauczycieli do wartości tych metod. Musimy znaleźć sposoby przedstawienia tych metod również i społeczeństwu. W przeciwnym wypadku opinia publiczna będzie nadal wpływać na nauczycieli, aby stosowali metody obiecujące krótkoterminowe sukcesy. Odwołując się do mojego trójkątnego diagramu, radziłbym dydaktykom matematyki, by — chcąc pomóc nauczycielom w doskonalaniu treści — zwracali uwagę na trudniejszy problem przeciwległego boku trójkąta: wpływu opinii publicznej na metody nauczania.

W związku z tym chciałbym podkreślić, jak interesująca była dla mnie lektura badania opinii publicznej na temat kształcenia, które ostatnio przeprowadzono w Japonii([11]). Pokazuje to, że potrzeba konsultacji jest rozeznawana w tym kraju i ukazuje jedną z dróg jej prowadzenia.

Zmiany treści nauczania w szkołach średnich. Możecie stwierdzić, że zbyt długo mówiłem o zewnętrznych uwarunkowaniach programów, w wyniku czego bardzo mało powiedziałem o treściach, które powinny znaleźć się w programach. Aby zadowolić tych, którzy spodziewali się odczytu na ten temat, krótko i bez dodatkowych argumentów przedstawię mój własny pogląd na pewne zmiany, które według mnie powinny być wprowadzone do programów w najbliższej przyszłości.

Chciałbym włączyć pewien nowy materiał, więc muszę zacząć od powiedzenia, co jestem gotów usunąć. Postępując zgodnie z zaleceniami komitetu Cockrofta, zredukowałbym dla większości uczniów zakres tradycyjnej algebry. Jestem świadom tego, że uczniowie, którzy będą kontynuować kształcenie, potrzebują tradycyjnej algebry i jeśli otrzymają jej mniej w wieku 11–16 lat, powstaną trudności. Ale nie jest ich rozwiązaniem narzucenie wszystkim takiej ilości algebry, jaka ani nie będzie im potrzebna w przyszłości, ani nie przyniesie im obecnie doraźnych korzyści edukacyjnych([12]).

Chciałbym, aby bez względu na to, jakiej matematyki uczymy, była ona szeroko ilustrowana zastosowaniami z rozmaitych dziedzin. Istnieje staromodna metoda przerobienia małego kawałka teorii i szybkiego przechodzenia do ukazania zastosowania poznanych idei do praktycznych problemów. Byłbym usatysfakcjonowany czymś takim, gdyby tylko było tego dostatecznie wiele. Wolę podejście, w którym zaczyna się od prak-

([11]) *Public Opinion Survey on Education*, Foreign Press Center, Tokyo 1983.

([12]) Ta ocena może się wydać nieuzasadniona z punktu widzenia innych krajów, ale trzeba pamiętać, że w Anglii na lekcjach matematyki można ćwiczyć manipulacje algebraiczne w znacznie większym zakresie niż gdziekolwiek, ponieważ uczniowie w wieku 16 lat są testowani w pisemnych egzaminach, gdzie sprawność techniczna jest wysoko oceniana.

tycznych problemów i stopniowo abstrahuje teorię, ale dla wielu nauczycieli jest to trudniejsze. Obecnie niektórzy autorzy doradzają pewne formy „rozwiązywania rzeczywistych problemów", co idzie znacznie dalej. Jest to jeszcze trudniejsze do przeprowadzenia i nie byłoby możliwe zachęcić większość nauczycieli do próbowania tego. Jednakże zachęcałbym ludzi mających takie skłonności do eksperymentów w tym kierunku.

W wielu krajach istnieje tendencja, by uczyć więcej statystyki i rachunku prawdopodobieństwa. To również popieram. Kalkulatory i komputery czynią te obszary matematyki stosowanej łatwiej dostępnymi, jednak wielu nauczycieli nie jest zdolnych do użycia tych rzeczy w sposób dający świeży wgląd w idee rachunku prawdopodobieństwa i rozkładów statystycznych. Jeśli te możliwości mają być rozwinięte, trzeba nauczycielom udzielić pomocy poprzez np. dostarczenie dobrych materiałów źródłowych, a także dokształcanie ich zarówno w kwestii celów i zasad, jak też dania im pojęcia o treściach.

Od kiedy zostałem nauczycielem, śledziłem dyskusje o nauczaniu geometrii. Wydaje mi się, że jesteśmy dalej niż kiedykolwiek od jakichś uzgodnionych rozwiązań i uczymy coraz mniej geometrii. Nie chodzi mi o zachowanie wyblakłej euklidesowej tradycji, ale wysiłki usystematyzowania transformacyjnej geometrii nie były bardzo zachęcające. Mogę tylko zaproponować wybranie kilku reprezentowanych tematów ilustrujących różne aspekty geometrii i uczenie ich w sposób oddający ducha, jak również wiodący do wyników.

Mówiłem o podobieństwach programów matematyki w różnych krajach. Geometria wydaje mi się tą gałęzią matematyki, w której jest wyjątkowo dużo miejsca dla lokalnego stylu, dla dania wyrazu lokalnej kulturze. Oto tylko jeden przykład. Odwiedziłem szkoły silnie związane z islamem. Sztuka muzułmańska jest jednym z najwyższych osiągnięć geometrii w świecie, ale nie dowiedziałem się o tym w tych szkołach. Lepsze przykłady powtarzających się mauretańskich wzorów znalazłbym na półkach własnej biblioteki.

Prawdopodobnie powinniśmy uczynić specjalny wysiłek dla rozwinięcia geometrii uprawianej za pomocą komputera. Współczesne możliwości graficzne mikrokomputerów bardzo zmieniają zakres geometrii, której można próbować nauczać w szkołach.

Mikrokomputery. To prowadzi mnie do końcowego punktu, któremu poświęcę tylko niewiele czasu, choć chcę mu dać możliwie najsilniejszy wyraz. Mikrokomputery nie tylko zmieniają geometrię, zmieniają też większość dziedzin matematyki. W ostatnich latach wizytowałem szkoły specjalnie po to, aby zobaczyć zmiany spowodowane przez mikrokomputery w matematyce i sąsiednich obszarach nauczania. To, co zobaczyłem, jest niepodobne do niczego, co widziałem przedtem. To nie nauczanie

ani materiał zmieniły się najbardziej. Godna uwagi jest zmiana w zachowaniu uczniów. W niektórych szkołach nauczyciele udostępnili uczniom komputery i we właściwy sposób ich zachęcili; uczniowie długie godziny pracują nad problemami, które sami sobie wybrali. Opinie, czy niektóre z tych problemów można nazwać matematycznymi, są podzielone, jednak wierzę, że wiele z nich można. Trzeba rozszerzyć naszą definicję matematyki, aby włączyć w nią wiele z tej świeżej aktywności. Nastrój uczniów jest zdumiewający i powinniśmy natychmiast przebudować nauczanie, aby poprzeć te zmiany.

Napisałem artykuł([13]), który ostatnio rozesłano do wszystkich szkół Anglii; muszę odesłać do niego po szczegóły tego, co mam do powiedzenia. Jednakże jest to główny punkt zwrotny w nauczaniu matematyki i przyszłe pokolenia — patrząc wstecz na wiek dwudziesty — uznają obecnie zachodzące zmiany za jedne z największych w historii kultury ludzkości. Jeśli ktoś ma własny komputer, to dysponuje on zaproszeniem do myślenia na całkiem nowym poziomie złożoności. Nie jest to sentymentalna przesada. Obserwowałem zachowanie dzieci szkolnych, jakiego nie widziałem nigdy przedtem.

Istotne dla nauczania matematyki jest wykorzystanie mikrokomputerów w pełni, nie tyle z powodu tego, co społeczeństwo może robić przy użyciu komputerów, ani dla możliwości, jakie one dają nauczycielowi (choć obie te rzeczy są cudowne). Jest tak z powodu tego, co dzieci będą robić z komputerami z własnej inicjatywy, jeśli da się im szansę.

Będą z tym problemy w krajach, gdzie ta nowa technologia nie jest jeszcze tak łatwo dostępna. Jednakże mikrokomputery nie kosztują więcej niż rowery, i nadal tanieją. Nie ma namiastek. Jeśli twoi uczniowie nie mają mikrokomputerów, to nie ma sposobu, aby pracując więcej na papierze nadrobili ten niedostatek.

Mikrokomputer osobisty zmienia priorytety w matematyce, zmienia względną wartość różnych jej części. Dwoma obszarami o szczególnym znaczeniu są algorytmy i kreślarstwo. Wybitną pracę o algorytmach napisał Engel([14]). Fascynujące rzeczy w tym przedmiocie można robić z najprostszymi modelami.

Graficzne zdolności mikrokomputerów bardzo się różnią w różnych modelach, w wyniku tego niewiele prac dydaktycznych o grafice komputerowej ma wartość ogólną. To może wyjść na dobre, ponieważ jestem pewien, że nauczyciele i uczniowie mogą uczyć się najlepiej przez samodzielne badanie zdolności graficznych mikrokomputerów.

([13]) T. J. Fletcher, *Microcomputers and mathematics in schools*, HMI discussion paper, HMSO, England, 1983.

([14]) A. Engel, *Elementare Mathematik von algoritmischen Standpunkt*, Klett. Por. także rozdział 13 w *New Trends in Mathematics Teaching* 4, UNESCO, 1979.

Od dawna przyzwyczailiśmy się do komputerów uprawiających arytmetykę, ale obecnie dostępne są programy przekształceń algebraicznych dla komputerów domowych. Program przekształceń algebraicznych dla mojego własnego komputera ma swe słabe strony, ale może on wykonywać wiele szkolnej algebry, a zaawansowane programy dostępne są dla większych maszyn. Dla mnie zadziwiające jest nie to, że takie programy istnieją, ale że nie wiem, co ja mogę robić z tym, którym dysponuję. Możliwości wybiegają poza moje myślenie. Te osiągnięcia są na tyle nowe, że jeszcze nie widziałem artykułu o użyciu przekształceń algebraicznych na poziomie szkolnym, ani nie widziałem użycia takiego programu w szkole.

Jeśli rozwijacie programy nauczania we własnych krajach, minikomputer jest najważniejszym pojedynczym czynnikiem, który trzeba wziąć pod uwagę. Jestem pewnien, że ICME 5 w 1984 r. w Adelaidzie da możliwość porównania doświadczeń i szczegółowego omówienia tego, co się dzieje. Mam nadzieję zobaczyć was tam!

ICMI i Kongres Nauczania Matematyki w Adelaide

W dniach 24–30 sierpnia 1984 w Adelaide (Płd. Australia) odbył się V Międzynarodowy Kongres Nauczania Matematyki (ICME 5) zorganizowany pod patronatem ICMI(1).

ICME 1 odbył się w Lyonie w 1969 r., następne kongresy odbywały się co 4 lata w przerwach między kongresami matematyków: ICME 2 w Exeter w 1972 r, ICME 3 w Karlsruhe w 1976 r., ICME 4 w Berkeley w 1980 r.

Już w 1976 r. Australijczycy zaczęli rozważać możliwość organizowania u siebie ICME 5, a do Berkeley przyjechali mając wiele spraw załatwionych, z wydrukowanymi folderami o kongresie w 6 językach. Komitet Wykonawczy ICMI podjął w Berkeley decyzję, by przyjąć zaproszenie Australijczyków, mimo oczywistych obaw, że z uwagi na ogromną odległość niemal wszystkich krajów od Australii (i na ogólne trudności finansowe) liczba uczestników może nie odpowiadać randze Kongresu. Okazało się, że do Adelaide przyjechało tylko o 20 osób mniej niż do Berkeley; było mianowicie 1786 uczestników (543 kobiety, 1243 mężczyzn) z 69 krajów; ponadto było 198 osób towarzyszących, razem osób 1984!

Wiele osób wyraziło opinię, że był to najbardziej udany z dotychczasowych kongresów. Przyczyniły się do tego — oprócz doświadczeń poprzed-

(1) Skróty nazw *International Congress on Mathematical Education* i *International Commission on Mathematical Instruction* brzmią bardzo podobnie, zwłaszcza po angielsku, i bywają mylone.