szej książce wybrana została ta druga droga. Procesy stochastyczne zostały wyłożone nie w języku zmiennych losowych, ale w języku rodziny rozkładów. Trudno tu zauważyć choćby cień podobieństwa do wykładu procesów stochastycznych z książki Fisza.

Podane wyżej uwagi krytyczne odnoszą się nie tylko do książki Fisza, ale także do wielu innych, także autorów zagranicznych. Dotyczy to np. książki znanych probabilistów radzieckich I. I. Gichmana, A. W. Skorochoda i M. I. Jadrenki, *Teoria wierojatnostiej i matiematiczeskaja statistika*, Kijów 1979. W książce tej nie ma ani jednego przykładu (zgodnego z wprowadzonymi definicjami) niezależnych zmiennych losowych, łańcucha Markowa, procesu stochastycznego.

2. Wśród nielicznych konkretnych zarzutów co do naszej książki jest zarzut, że definicja zdarzenia losowego (jako dowolnego podzbioru przestrzeni Ω) ze str. 22 jest nieprecyzyjna, gdyż dotyczy jedynie dyskretnych przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Dziwny zarzut. Wydaje mi się rzeczą naturalną nazwać *zdarzeniem* każdy podzbiór przestrzeni Ω, a elementy odpowiedniego σ-ciała M podzbiorów przestrzeni Ω nazwać zdarzeniami *probabilizowalnymi* (rozdz. IV, § 1). Co w tym złego? Mamy wtedy analogię do zbiorów i zbiorów mierzalnych. Zresztą nie ja jeden zdarzeniem nazywam każdy podzbiór przestrzeni Ω. Przede mną robili to np. J. W. Prochorow i J. A. Rozanow na str. 123 książki *Rachunek prawdopodobieństwa*, Warszawa 1972.

3. Trzeba stwierdzić, że Recenzent w ogóle nie bierze pod uwagę potrzeb empiryka, który chciałby poznać rachunek prawdopodobieństwa nie tylko jako teorię matematyczną, ale także jako narzędzie badań empirycznych. Recenzent np. zarzuca książce brak wszystkich dowodów (czy rzeczywiście są one wszystkie niezbędne do probabilistycznego wykształcenia nie-matematyka?), czy brak definicji zbieżności stochastycznej ciągu zmiennych losowych do zmiennej losowej (a nie tylko do stałej), natomiast rażą Go komentarze dotyczące budowy modelu probabilistycznego doświadczenia losowego, co jest sprawą kluczową dla zastosowań i o czym nie ma mowy w książce Fisza.

4. Ze względu na wyjątkowy charakter recenzji D. Szynala pozwolę sobie przytoczyć fragment recenzji Roberta Bartoszyńskiego (do wglądu w Redakcji Matematyki PWN), na podstawie której PWN przyjęło maszynopis naszej książki: *Materiał książki obejmuje podstawowy wykład rachunku prawdopodobieństwa i statystyki, przy czym szczególny nacisk położony jest na konstrukcje pojęciowe i przejście od sytuacji rzeczywistej do modelu. Staranność przedstawienia tych właśnie aspektów — związku między rzeczywistością, modelem i teorią — stanowi o głównej wartości książki. Książka jest cennym uzupełnieniem polskiej literatury probabilistycznej i w pełni zasługuje na wydanie. Przyniesie ona pożytek studentom, zwłaszcza kierunków niematematycznych (kierunki techniczne, biologia, nauki społeczne itp.), jak również tym wszystkim, którzy z takich czy innych powodów muszą uzupełnić swoje wiadomości w zakresie podstaw prawdopodobieństwa i statystyki.*

Lech T. Kubik

André Weil, *Number Theory, An approach through history. From Hammurabi to Legendre*, Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart 1983, str. 375; cena DM 74.—, ISBN 3-7643-3141-0.

Powstawanie współczesnej teorii liczb wiąże się zazwyczaj z ukazaniem się *Disquisitiones Arithmeticae* Gaussa w 1801 roku, a badania w tej dziedzinie w poprzednich epokach traktuje się często z lekceważeniem, wytykając Eu-

lerowi niekompletność dowodów, a Fermatowi badanie niezmierzonej ilości nie związanych z sobą równań diofantycznych. Pogląd taki jest spadkiem po poprzednim, bourbakistowskim okresie rozwoju matematyki, gdzie tworzenie abstrakcyjnych, choć często pustych teorii uważano za zajęcie szacowne, a zajmowanie się konkretnymi „przypadkami szczególnymi" za działalność na marginesie nauki.

W swej ostatniej książce profesor Weil postawił sobie za cel ukazanie czytelnikowi w nowym świetle badań i rezultatów przedgaussowskich arytmetyków, wysuwając na plan pierwszy te ich metody, które zawierają elementy matematyki współczesnej. Znajdujemy więc tu elementy rozumowań teorio-grupowych, fragmenty teorii funkcji i krzywych eliptycznych oraz — co szczególnie jest przez autora eksponowane — zalążki nowoczesnej teorii form kwadratowych.

Książka rozpoczyna się krótkim rozdziałem poświęconym poprzednikom Fermata, a nazwanym *Protohistory*. Autor omawia tu wyniki średniowiecznych matematyków hinduskich dotyczące równania Pella

$$x^2 - ay^2 = \pm 1$$

i wspomina pobieżnie o innych prekursorach tuluzańskiego prawnika. Dzieło Diofantosa (w którego wydaniu z 1670 roku margines okazał się zbyt wąski dla dowodu wielkiego twierdzenia Fermata) jest tu zaledwie wspomniane, gdyż jest ono szerzej omówione w następnym rozdziale.

Rozdział ten, tworzący centralną część książki, dotyczy działalności Fermata. Autor bardzo dokładnie analizuje listy Fermata oraz jego komentarze do Diofantosa. Przytoczone są duże fragmenty dowodów wielu wyników, głównie związanych z równaniami kwadratowymi o kilku niewiadomych. Rozumowania te są na ogół szkicowe i ich zrozumienie może być trudne dla czytelnika, który nigdy przedtem nie zetknął się z teorią liczb. Warto jednakże włożyć tu nieco wysiłku, gdyż wówczas, krok po kroku, odsłania się tajemnica jednego z najciekawszych i najobfitszych w proste (przynajmniej w sformułowaniu) zagadnienia działu matematyki.

Rozdział poświęcony Fermatowi uzupełnia pięć dodatków, gdzie w krótki a prosty sposób autor omawia kolejno ciała kwadratowe, krzywe rodzaju 1, przecięcia kwadryk, twierdzenie Mordella o skończonej generowalności grupy punktów wymiernych na krzywej eliptycznej i wreszcie, jako zastosowanie, znajdujemy krótkie studium równania $y^2 = x^3 - 2x$.

Rozdział trzeci zajmuje się arytmetycznymi badaniami Leonharda Eulera. Jak pisze autor, „zasadniczą część arytmetycznej działalności Eulera stanowiło znajdowanie dowodów do twierdzeń sformułowanych przez Fermata". Analizując te i inne rozumowania Eulera autor ukazuje wiele przykładów czysto teorio-grupowego podejścia, m.in. do zagadnienia reszt kwadratowych czy też pierwiastków pierwotnych. Można się też doszukać fragmentów teorii ciał skończonych (różnych od ciała reszt $(\mathrm{mod}\, p)$). I tutaj także znajdujemy trzy uzupełnienia, traktujące kolejno o prawie wzajemności reszt kwadratowych, o przedstawialności liczb naturalnych w postaci sumy trzech kwadratów i o twierdzeniu o dodawaniu dla funkcji eliptycznych.

Ostatni rozdział książki mówi o działalności Lagrange'a i Legendre'a, ograniczając się do zbudowanej przez nich teorii form kwadratowych. Uzupełnienia do tego rozdziału dotyczą zasady Hassego dla ternarnych (trójkowych) form kwadratowych (jeśli f jest taką formą o wymiernych współczynnikach, to równanie $f = 0$ ma nietrywialne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego p i każdego $n \geqslant 1$ kongruencja

$$f \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^n)$$

ma rozwiązanie), oraz redukcji form kwadratowych dwóch zmiennych.

We wstępie autor wyraża nadzieję, że książka posłuży, przynajmniej niektórym czytelnikom, do wprowadzenia w teorię liczb. Do tego zadania nadaje się ona doskonale. Jest przede wszystkim napisana w sposób jasny i zarazem interesujący — nie znajdujemy tu żadnych trywialności, spotykanych często w elementarnych wstępach do teorii liczb, które skutecznie potrafią odstraszyć co inteligentniejszego czytelnika, a przy tym wykład jest precyzyjny i nie pozostawiający niejasności. Należy jej życzyć wielu czytelników, a czytelnikom więcej takich książek.

Władysław Narkiewicz

Gregory H. Moore, *Zermelo's axiom of choice, its origins, development and influence*, Studies in the history of mathematics and physical sciences 8, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin 1982, str. XIV + 410, cena DM 108.—, ISBN 3-540-90670-3.

Kilka lat temu wydawnictwo Springer zapoczątkowało serię *Studia z historii matematyki i fizyki*. Otworzyła ją *Historia starożytnej astronomii matematycznej* O. Neugebauera, potem było kilka pozycji poświęconych różnym działom matematyki z okresu od XVI do XIX wieku, obecny zaś tom ósmy tej dobrze zapowiadającej się serii opowiada o dziejach i roli aksjomatu wyboru.

Jak autor pisze we wstępie, *książka ta wyrosła z moich zainteresowań tym, co jest wspólne trzem dyscyplinom: matematyce, filozofii i historii*. Pojawienie się tego rodzaju koniunkcji zainteresowań jest szczególnym znakiem naszych czasów, ujawnia bowiem dominującą potrzebę refleksji, przede wszystkim właśnie historycznej i filozoficznej, nad żywiołowo rozwijającą się matematyką. Dociekając historycznych i kulturowych korzeni naszej dyscypliny, spodziewamy się zyskać pełniejszy pogląd na nią samą, a w szczególności liczymy, że dowiemy się, co w matematyce jest ważne i dlaczego, a co mniej, które problemy są istotne i jak ich rozwiązywanie wpływa na rozwój naszej dyscypliny, jakie są kierunki jej rozwoju i jakie rysują się przed nią perspektywy itd.

Omawiana książka dobrze odpowiada takiej potrzebie. Towarzysząc autorowi czytelnik może śledzić przyczyny, które doprowadziły Zermelo do sformułowania aksjomatu wyboru, może obserwować dzieje wywalczania sobie przezeń uznania większości czynnych dziś matematyków, może też wejrzeć w głąb i w znaczenie sporów, jakie się rozwinęły wokół aksjomatu i jego konsekwencji, a następnie wpłynęły w poważnym stopniu na kształt współczesnej matematyki.

Aksjomat wyboru głosi, że dla każdego zbioru S istnieje funkcja f, która każdemu niepustemu podzbiorowi A zbioru S przypisuje element $f(A) \in A$. Trochę psychologizując można powiedzieć, że z każdego niepustego podzbioru A zbioru S funkcja f wybiera jeden element $f(A)$.

Jak się szybko okazało, aksjomat ten ma bardzo silne konsekwencje. Mimo to był on jednakże od samego początku namiętnie atakowany, głównym zaś źródłem tych ataków była i pozostaje ta okoliczność, iż w przypadku, gdy zbiór S jest nieskończony, nie istnieje na ogół naturalny sposób dokonywania wyboru elementu ze zbioru. Aksjomat, który tę trudność swoiście przezwycięża, po prostu postulując samo tylko istnienie wyboru, podważa wielowiekową tradycję, bardzo wyraźną już u Greków i uświęconą praktyką, identyfikowania istnienia obiektu mate-