ma rozwiązanie), oraz redukcji form kwadratowych dwóch zmiennych.

We wstępie autor wyraża nadzieję, że książka posłuży, przynajmniej niektórym czytelnikom, do wprowadzenia w teorię liczb. Do tego zadania nadaje się ona doskonale. Jest przede wszystkim napisana w sposób jasny i zarazem interesujący — nie znajdujemy tu żadnych trywialności, spotykanych często w elementarnych wstępach do teorii liczb, które skutecznie potrafią odstraszyć co inteligentniejszego czytelnika, a przy tym wykład jest precyzyjny i nie pozostawiający niejasności. Należy jej życzyć wielu czytelników, a czytelnikom więcej takich książek.

*Władysław Narkiewicz*

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Gregory H. Moore, *Zermelo's axiom of choice, its origins, development and influence*, Studies in the history of mathematics and physical sciences 8, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin 1982, str. XIV + 410, cena DM 108.—, ISBN 3-540-90670-3.

Kilka lat temu wydawnictwo Springer zapoczątkowało serię *Studia z historii matematyki i fizyki*. Otworzyła ją *Historia starożytnej astronomii matematycznej* O. Neugebauera, potem było kilka pozycji poświęconych różnym działom matematyki z okresu od XVI do XIX wieku, obecny zaś tom ósmy tej dobrze zapowiadającej się serii opowiada o dziejach i roli aksjomatu wyboru.

Jak autor pisze we wstępie, *książka ta wyrosła z moich zainteresowań tym, co jest wspólne trzem dyscyplinom: matematyce, filozofii i historii*. Pojawienie się tego rodzaju koniunkcji zainteresowań jest szczególnym znakiem naszych czasów, ujawnia bowiem dominującą potrzebę refleksji, przede wszystkim właśnie historycznej i filozoficznej, nad żywiołowo rozwijającą się matematyką. Dociekając historycznych i kulturowych korzeni naszej dyscypliny, spodziewamy się zyskać pełniejszy pogląd na nią samą, a w szczególności liczymy, że dowiemy się, co w matematyce jest ważne i dlaczego, a co mniej, które problemy są istotne i jak ich rozwiązywanie wpływa na rozwój naszej dyscypliny, jakie są kierunki jej rozwoju i jakie rysują się przed nią perspektywy itd.

Omawiana książka dobrze odpowiada takiej potrzebie. Towarzysząc autorowi czytelnik może śledzić przyczyny, które doprowadziły Zermelo do sformułowania aksjomatu wyboru, może obserwować dzieje wywalczania sobie przezeń uznania większości czynnych dziś matematyków, może też wejrzeć w głąb i w znaczenie sporów, jakie się rozwinęły wokół aksjomatu i jego konsekwencji, a następnie wpłynęły w poważnym stopniu na kształt współczesnej matematyki.

Aksjomat wyboru głosi, że dla każdego zbioru $S$ istnieje funkcja $f$, która każdemu niepustemu podzbiorowi $A$ zbioru $S$ przypisuje element $f(A) \in A$. Trochę psychologizując można powiedzieć, że z każdego niepustego podzbioru $A$ zbioru $S$ funkcja $f$ wybiera jeden element $f(A)$.

Jak się szybko okazało, aksjomat ten ma bardzo silne konsekwencje. Mimo to był on jednakże od samego początku namiętnie atakowany, głównym zaś źródłem tych ataków była i pozostaje ta okoliczność, iż w przypadku, gdy zbiór $S$ jest nieskończony, nie istnieje na ogół naturalny sposób dokonywania wyboru elementu ze zbioru. Aksjomat, który tę trudność swoiście przezwycięża, po prostu postulując samo tylko istnienie wyboru, podważa wielowiekową tradycję, bardzo wyraźną już u Greków i uświęconą praktyką, identyfikowania istnienia obiektu mate-

matycznego z jego konstrukcją. Takie postępowanie, zdaniem oponentów, w niedopuszczalny sposób rozszerza ów zakres istnienia.

Bardzo ciekawa jest historia tego aksjomatu i towarzyszących jej polemik, którą — za książką — w wielkim skrócie tu zarysuję. W 1883 r. Cantor zaproponował „prawo myślenia", że każdy zbiór może być dobrze uporządkowany. Prawo to, nazwane później *zasadą dobrego uporządkowania,* nie zostało wszakże powszechnie zaakceptowane i jakieś dziesięć lat później sam Cantor szukał dlań dowodu. I to właśnie tutaj, w tym kręgu poszukiwań, Ernest Zermelo (1871–1953) sformułował w 1904 r. aksjomat wyboru i podał oparty na nim dowód zasady.

Aczkolwiek aksjomat był, co prawda nieświadomie, używany wcześniej (np. w dowodzie z 1872 r. równoważności definicji ciągłości Cauchy'ego i Heinego), to jednak wyraźne jego sformułowanie wywołało od razu ostre dyskusje nad jego poprawnością. Dyskusje te skłoniły Zermelo do opublikowania w 1908 r. namiętnej obrony aksjomatu i zaraz potem do podania swojej aksjomatyzacji teorii mnogości w przekonaniu, że aksjomatyka ta usunie ostatecznie wątpliwości związane z aksjomatem i dowodem zasady. Tak się jednak nie stało i ataki oponentów objęły także aksjomatykę Zermelo.

Raz sformułowany, aksjomat zaczął już jednak żyć własnym życiem i w ciągu następnych lat matematycy niejednokrotnie, acz z oporami i zastrzeżeniami, posługiwali się nim. Istotną zmianę spowodowało dopiero wejście na scenę w 1918 r. W. Sierpińskiego, który z wielką powagą, świadomie i możliwie do końca, badał konsekwencje aksjomatu w różnych działach matematyki. Za jego autorytetem poszła szkoła warszawska, a potem i inni. Powoli zmieniało to atmosferę wokół aksjomatu, a dyskusji nadawało ton bardziej rzeczowy.

W tym też mniej więcej czasie A. Fraenkel podjął badania nad aksjomatyką Zermelo, co z czasem doprowadziło do niemal powszechnie dziś akceptowanej aksjomatyki ZF (ZFC). A kiedy w 1938 r. K. Gödel dowiódł relatywnej niezależności aksjomatu wyboru, pokazując w szczególności, że każdy model zwyczajnej teorii mnogości zawiera podmodel, w którym aksjomat wyboru jest prawdziwy — przekonało to wszystkich, prócz najbardziej radykalnych konstruktywistów, że aksjomat wyboru nie prowadzi do sprzeczności.

Ugruntowało to pozycję aksjomatu, nie przerwało jednak badań nad jego rolą i konsekwencjami. W ciągu ćwierćwiecza po odkryciu Gödla aksjomat wyboru był więc już śmiało i z dużym powodzeniem stosowany w różnych dziedzinach matematyki i coraz bardziej stawało się widoczne, jak spora część matematyki współczesnej zależy od niego, a także jak wiele podstawowych dziś twierdzeń (m.in. lemat Kuratowskiego–Zorna, twierdzenie Löwenheima–Skolema–Tarskiego, twierdzenie Tichonowa o zwartości produktu, trychotomia liczb kardynalnych itp.) jest równoważnych aksjomatowi.

Badano także miejsce aksjomatu w podstawach matematyki i w 1963 r. P. Cohen wynalazł metodę *forcingu,* dzięki której mógł niejako dokończyć dzieła Gödla dowodząc, że aksjomat wyboru jest niezależny w pewnej klasie systemów teorii mnogości, obejmującej system ZF. To twierdzenie o niezależności stanowi apogeum kilkudziesięcioletniego okresu badań nad aksjomatem.

Dwa dziesięciolecia, które od tego odkrycia nastąpiły, przyniosły dużą obfitość dalszych wyników o niezależności i przesunięcie akcentu z teorii mnogości na jej modele. W szczególności formułuje się i bada różne słabsze wersje aksjomatu wyboru, np. aksjomat determinacji Mycielskiego–Steinhausa. Jednakże rozkwit tych badań semantycznych doprowadził jednocześnie do sytuacji niezwykle interesującej filozoficznie: pod ich ciężarem

upadał ideał jednego systemu matematycznego (inaczej: matematyki kategorycznej) i wyłaniał się obraz matematyki jako kolekcji wielu różnych systemów.

Ilustruje to opinia J. Dieudonnégo, którą przytaczam za książką: „*Dowód Gödla i P. Cohena, że aksjomat wyboru i hipoteza continuum są nierozstrzygalne, a także liczne następne prace metamatematyczne, poważnie zmieniły poglądy wielu matematyków.* (...) *Obok analizy klasycznej, opartej na aksjomatach ZF uzupełnionych przeliczalnym aksjomatem wyboru, istnieje dziś nieskończenie wiele matematyk i w chwili obecnej żaden argument nie pozwala nam wybrać jedną z nich kosztem pozostałych*".

Książka dzieli się na cztery duże rozdziały, epilog i dwa uzupełnienia. W rozdziale I, zatytułowanym *Prehistoria aksjomatu wyboru*, śledzimy przypadki nieświadomego posługiwania się funkcją wyboru poczynając od Euklidesa aż po plejadę matematyków z XIX w. takich jak Gauss, Cauchy, Heine, Weierstrass, Dedekind i inni. Autor pokazuje, jak w różnych procesach nieskończonych, tak silnie obecnych w XIX-wiecznej matematyce, trudno się już było bez wyborów obejść. Wyraźne sformułowanie aksjomatu pojawiło się jednak dopiero w ramach cantorowskiej teorii mnogości, nowej dyscypliny matematycznej, jaka się wyłoniła z analizy pod koniec XIX wieku.

Rozdział II, *Zermelo i jego krytycy (1904–1908)*, opowiada historię czterech lat burzliwych dyskusji, zainicjowanych sformułowaniem przez Zermelo aksjomatu wyboru i podaniem opartego na tym aksjomacie dowodu zasady dobrego uporządkowania.

W rozdziale III, *Aksjomat Zermelo i jego aksjomatyka w okresie przejściowym (1908–1918)*, znajdujemy opis aksjomatyki Zermelo teorii mnogości, ambiwalentny do niej stosunek współczesnych mu matematyków oraz różne kontrowersje wokół tej sprawy.

Rozdział IV, *Szkoła Warszawska, wzrost zainteresowań, modele teorii mnogości (1918–1940)*, jest najdłuższy i liczy niemal sto stronic. Wysuwając, z nietajonym podziwem, na plan pierwszy Sierpińskiego i jego rolę, autor opisuje rosnące znaczenie aksjomatu wyboru i równoległy wzrost zaufania do niego, ciągle jednak nie pozbawione pewnego sceptycyzmu.

Każdy z tych czterech rozdziałów kończy się krótkim podsumowaniem, którego angielski tytuł *Retrospect and prospect* najlepiej chyba przełożyć jako *Rzut oka wstecz i w przód*. Są to bardzo wartościowe fragmenty książki, pozwalają bowiem na oddech i ogarnięcie, już jakby z pewnego dystansu, sporej ilości materiału oraz skupienie uwagi na kilku otwartych problemach, które będą traktowane w dalszym jej ciągu.

Po tej zasadniczej części książki są jeszcze dodatki. Epilog nosi tytuł *Po Gödlu* i składa się z dwóch części, *Okresu stabilności (1940–1963)* oraz *Dziedzictwo Cohena*, których tytuły mówą same za siebie.

Po epilogu następuje parostronicowa *Konkluzja*, z której przytoczę najistotniejszy, moim zdaniem, fragment: *W aksjomacie tym skupiają się fundamentalne przemiany, jakie zaszły pod koniec XIX i na początku XX wieku. Powszechne posługiwanie się nieskończonością aktualną, co było ubocznym produktem teorii mnogości, przyniosło świadomość, że istnienie i konstrukcja są z gruntu różnymi pojęciami matematycznymi. Jak zauważyli Lebesgue i Hadamard jeszcze we wczesnym okresie dyskusji nad aksjomatem, wchodzą tu w grę dwa diametralnie przeciwne poglądy na matematykę. Konstruktywistyczne ograniczenie matematyki (może dlatego, że było anomalią) otrzymało własną nazwę, natomiast punkt widzenia propagowany przez Hadamarda i Zermelo, powszechnie dziś zresztą akceptowany, ma tylko to jedno miano: matematyka współczesna.*"

Pierwsze uzupełnienie składa się z pięciu listów o teorii mnogości: Hadamarda do Borela, Borela do Hadamarda, Lebesgue'a do Borela, Hadamarda do

Borela i Borela do Hadamarda. Wszystkie pochodzą z 1905 r. i opisują krytyczne reakcje matematyków francuskich na podany rok wcześniej przez Zermelo dowód zasady dobrego uporządkowania.

Na uzupełnienie drugie składa się 11 bardzo cennych zestawień powiązań aksjomatu wyboru z różnymi zdaniami teorii mnogości.

Książkę zamyka 38-stronicowa bibliografia, skorowidz twierdzeń z podaniem cytowań wewnętrznych oraz skorowidz ogólny (nazwisk i nazw razem).

Śmiało można tę książkę polecić każdemu, kto interesuje się historią i filozofią matematyki. Rzeczowość matematyczna w połączeniu z historycznym i filozoficznym punktem widzenia, nadającym rozpatrywanym zagadnieniom znaczną głębię, a jednocześnie wartki język i potoczysty styl narracji przy dużej dyscyplinie pisarskiej sprawiającej, że nie ma zbędnych słów i niepotrzebnych dygresji — wszystko to sprawia, że lektura tej książki jest także dużą przyjemnością.

Dla polskiego czytelnika przyjemność ta jest tym większa, że w książce roi się od poloników, a stosunek autora do polskich matematyków jest zawsze ciepły, a miejscami wręcz entuzjastyczny. Oprócz Sierpińskiego, którego pozycja w tej książce przyćmiewa innych, cytowani są: Banach, Chwistek, Janiszewski, Kuratowski, Leśniewski, Lindenbaum, Łoś, Marczewski, Mazur, Mazurkiewicz, Mrówka, Mycielski, Pelc, Ryll-Nardzewski, Sobociński, Steinhaus, Szmielew, Tarski i Ulam.

Osobliwością skorowidza są umieszczone tam kraje, a wśród nich Polska, oraz miasta, a wśród nich Warszawa i Wrocław. Polska i Warszawa pojawiają się wiele razy, a zawiera się w tym cały fragment o powstaniu Szkoły Warszawskiej (opis opiera się na artykułach Sierpińskiego i książce Kuzawy), Wrocław zaś jest cytowany dwa razy: raz w związku z artykułem Steinitza z 1910 r. (podówczas profesora na wrocławskim uniwersytecie) o ciałach algebraicznych, a drugi raz w związku z pewnym twierdzeniem Mycielskiego z 1961 r. Jak wiadomo, w tymże mieście i w tym samym czasie, przyszedł na świat aksjomat determinacji, ale autor, choć pisze o rodzicach i fakcie urodzin — miejsca już nie podaje.

Napisanie tej książki wymagało ogromnego nakładu pracy. Trzeba było przeczytać setki prac i dziesiątki książek, grzebać w wielu archiwach w różnych krajach, korespondować z żyjącymi jeszcze uczestnikami i świadkami tej historii (tu ciepłe słowa podziękowania autor kieruje m.in. do J. Mycielskiego), wreszcie wyrobić sobie pewien pogląd i pisać. Pisać. Ta benedyktyńska praca niewątpliwie jednak sprawiała autorowi wielką przyjemność, zalety zaś umysłu i pióra sprawiają, że przyjemność ta udziela się czytelnikowi.

*Roman Duda*

Helmuth Gericke, *Mathematik in Antike und Orient*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1984, str. 292 (w tym 140 rys. i 4 mapy), ISBN 3-540-11647-8.

W przedmowie do swojej książki autor pisze, nie bez widocznego żalu, że na uniwersytetach zachodnioniemieckich historia matematyki „ist ... kein Prüfungsgebiet", co znaczy, że może być wykładana, ale bez egzaminowania. Mimo takiego upośledzenia historii matematyki on sam taki wykład, w wymiarze 2 godzin tygodniowo, wielokrotnie prowadził i książka swoim zakresem odpowiada pierwszemu semestrowi jego wykładu.

Dokładniej o jej zamyśle informuje rzut oka na spis treści. Dzieli się ona