Maciej Skwarczyński, *Wybrane zagadnienia analizy matematycznej*, Biblioteczka Matematyczna 39, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1982, str. 208, nakład 7000 egz., cena zł. 100.—, ISBN 83-02-01386-2.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Dla kogo jest przeznaczona ta książeczka? Autor odpowiada: dla młodych ludzi, którzy w przyszłości odważą się na podjęcie samodzielnych studiów matematycznych oraz do ich nauczycieli. Jej celem jest przybliżenie czytelnikowi niektórych pojęć kursu uniwersyteckiego. Rozmiary książeczki zmusiły Autora do rezygnacji z tradycyjnego ujmowania materiału. *Pojęcie granicy zostało przedstawione* — pisze Autor — *jako wtórne w stosunku do pojęcia ciągłości. Dowód podstawowej granicy dla funkcji sinus odbywa się bez pojęcia pola figury.*

Te ostatnie zdania budzą odruch warunkowy. Zaglądamy do „Wykazu ważniejszych terminów". Zgodnie z zapowiedzią, pojęcie ciągłości powinno w nim poprzedzać pojęcie granicy. Pojęcie granicy ciągu znajdujemy na str. 55, pojęcia ciągłości nie znajdujemy wcale. Wnikliwszy przegląd „wykazu" pozwala znaleźć „Cauchy'ego definicję ciągłości" str. 105 i na tej samej stronie „Heinego definicję ciągłości" opartą na pojęciu granicy ciągu. Rezygnacja z tradycji dotyczy nie pojęcia granicy (w szerokim sensie), lecz pojęcia granicy odwzorowań. A czyż ciąg nie jest odwzorowaniem?

Dalej szukamy w „wykazie" terminu *sinus* i nie znajdujemy go, a szkoda, bo przecież książeczka zawiera nietradycyjną definicję funkcji trygonometrycznych. Jeżeli zaś chodzi o „dowód podstawowej granicy", to należy ubolewać, że w tekście przeznaczonym dla młodych ludzi i ich nauczycieli pojawiają się takie kwiatki językowe.

Książeczka zawiera wiele ciekawych pomysłów dydaktycznych, zasługujących na oddzielne omówienie. Całość jednak robi dość przygnębiające wrażenie. Po pierwsze, szata graficzna i liczne błędy zecerskie obniżają standard publikacji. Po drugie, sam Autor nie ustrzegł się pułapek czyhających na burzycieli tradycji. Zwykły, standardowy podręcznik analizy matematycznej bardziej przygotowuje do samodzielnych studiów niż oryginalna, lecz źle zredagowana książka.

Już na pierwszej stronicy Autor obiecuje i nie dotrzymuje słowa. „Mówimy: a należy do A i piszemy $a \in A$", kilka wierszy niżej mamy „odcinek $[a, b]$ łączący punkty $a \in E$ i $b \in E$", co zgodnie z umową należy odczytać: „odcinek $[a, b]$ łączący punkty a należy do E i b należy do E". Na stronicy następnej „mówimy, że figura A jest zawarta w figurze B i piszemy $A \subset B$", a na str. 18 czytamy: „Rozpatrzmy dowolny zbiór $E \subset \boldsymbol{R}$" i nie wiemy, czy zapis $E \subset \boldsymbol{R}$ oznacza, że E jest zawarty w $\boldsymbol{R}$", czy też jest symbolem pewnego zbioru.

Autor zapewne powie nam, że tak się pisze „wszędzie", nawet w pracach naukowych. Ale Autor zapomina o tym, że pomiędzy książkami dla dorosłych a książkami dla dzieci jest ta różnica, że książki dla dzieci należy pisać lepiej. Przyjmując tyle umów, dlaczego Autor nie przyjmuje dodatkowej umowy, że zapisy $a \in A$ i $A \subset B$ są dwuznaczne albo że są skrótami myślowymi, których sens jest zawarty w kontekście.

Pewnego rodzaju curiosum tej książeczki jest to, że pojawiają się w niej „zdania prawdziwe" i „zdania fałszywe". W książkach matematycznych, w dowodach nie wprost zakładamy nieraz, że teza nie jest prawdziwa, że nie zachodzi, a więc przyjmujemy jej negację, ale ani twierdzeń ani tez nie nazywamy zdaniami (którymi na ogół nie są) ani nawet formami zdaniowymi (którymi na ogół są). Na str. 12 czytamy: mówimy, że w zbiorze K została określona relacja mniejszości, jeśli dla każdego $a \in K$ i dla każdego $b \in K$ zdaniu $a < b$ została przyporządkowana wartość logiczna — prawda albo fałsz". Widocznie Autor uważa, że posługi-

wanie się językiem logiki jest bardziej elementarne, bardziej zrozumiałe, niż podejście „tradycyjne", gdy zamiast wartości logicznych zdań formułuje się zasadę trychotomii i podaje się aksjomaty porządku, lub podejście nowoczesne, gdy relację się określa jako pewien podzbiór produktu kartezjańskiego.

Na str. 10 Autor pisze, że formalna definicja liczby rzeczywistej wykracza poza zakres książki. Zamiast „formalnej definicji" woli podać aksjomatykę ciała uporządkowanego i sformułować dwie własności zbioru $\boldsymbol{R}$:

(I) Zbiór $\boldsymbol{R}$ jest ciałem uporządkowanym,

(II) Każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór zbioru $\boldsymbol{R}$ posiada kres górny.

Czyż to nie jest formalna (aksjomatyczna) definicja zbioru $\boldsymbol{R}$? Być może, kierując się względami dydaktycznymi lub przystępnością wykładu, Autor zakłada, że czytelnik doskonale wie, co to jest liczba rzeczywista, na str. 7 nie definiuje zbiorów $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, lecz po prostu pisze

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

$$\boldsymbol{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\},$$

$$\boldsymbol{Q} = \{p/q : p \in \boldsymbol{Z},\ q \in \boldsymbol{N}\}.$$

Nieco później Autor się zorientował, że bez definicji zbioru $\boldsymbol{N}$ nie można udowodnić (tzn. wyprowadzić z aksjomatyki liczb rzeczywistych) żadnej własności tego zbioru, toteż przyjmuje (oczywiście bez dowodu), że znany nam skądinąd zbiór $\boldsymbol{N}$ ma dwie własności:

(1) Jeśli $n \in \boldsymbol{N}$, to $n+1 \in \boldsymbol{N}$ i $1 \in \boldsymbol{N}$,

(2) Zasada indukcji matematycznej.

Po co więc ta ratalna definicja zbioru liczb naturalnych? Pomieszanie intuicji z formalizmem jaskrawo rzuca się w oczy w dowodzie wniosku 2 (str. 22) „Nie istnieje liczba całkowita $z \in \boldsymbol{Z}$ taka, że $0 < z < 1$". Pomińmy już drobiazg, że skoro się napisało „liczba całkowita z", to nie potrzeba tego przypieczętować zapisem $z \in \boldsymbol{Z}$, jednakże dowód podany nie może być poprawny, skoro zbiór $\boldsymbol{Z}$ nie został (formalnie) zdefiniowany.

Rozważania arytmetyczne kończy Autor „przykładami rozumowań indukcyjnych". Chodzi tu o zastosowanie indukcji do definiowania i dowodzenia, nie wiem jednak czy „definiowanie" należy do „rozumowań". Ponieważ 0 nie należy do zbioru $\boldsymbol{N}$, definiuje Autor a^n i $n!$ dla liczb całkowitych dodatnich, i przyjmuje „dodatkowo", że $0! = 1$, natomiast zapomina o zdefiniowaniu a^0. Dopiero przy dowodzie wzoru Newtona dla $(x+y)^n$ Autor pisze: „symbol x^0 podobnie jak symbol y^0 oznacza w tym(!) wzorze liczbę 1".

Na str. 25 i 31 mamy wzory

$$\prod_{j=1}^{n} a = a^n, \qquad \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

Trudno te wzory uznać za poprawne, skoro zmienna związana j występuje w nich tylko jeden raz.

Na str. 25 Autor oznacza ciąg n-elementowy symbolem

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

a „obraz" rozpatrywanego ciągu — symbolem

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Należy więc domyślać się, że „obrazem" ciągu n-elementowego $(a, a, \ldots, a)$ jest $\{a, a, \ldots, a\}$.

Na str. 29 Autor pisze: „zgodnie z wnioskiem liczba c może posiadać najwyżej jeden pierwiastek arytmetyczny". Tymczasem we wniosku, na który Autor się powołuje, pierwiastek arytmetyczny nie występuje, a więc o żadnej „zgodności" nie może być mowy. Należało powiedzieć, że „korzystając z wniosku można wykazać, że liczba c może mieć co najwyżej jeden pierwiastek arytmetyczny stopnia n", przy tym dowód nie jest natychmiastowy. Istnienia pierwiastka arytmetycznego dowodzi Autor w dalszej kolejności, co z psychologicznego punktu widzenia

(mam na myśli młodocianego czytelnika) nie jest wskazane. Po co dowodzić jednoznaczności rozwiązań, jeżeli nie ma pewności, że rozwiązania istnieją?

Do dydaktycznych nowości książki należy wykorzystanie spójności odcinka do dowodu istnienia pierwiastka arytmetycznego. Dowód istotnie jest ładny (str. 34), ale kosztem koszmarnej (z dydaktycznego punktu widzenia) definicji spójności odcinka (dopiero na str. 140 można znaleźć definicję spójności dowolnego zbioru w dowolnej przestrzeni topologicznej, która jest bliższa intuicji) i nie mniej koszmarnego dowodu spójności odcinka. Nb. w wykazie ważniejszych terminów nie ma terminu „spójność", co w zasadzie przekreśla celowość sporządzania takiego wykazu.

Na str. 34 Autor podaje definicję potęgi o podstawie dodatniej c i wymiernym wykładniku $w = p/q$ i oznacza ją symbolem $\sqrt[n]{c^m}$, a na str. 35 twierdzi, że „najprostsze" własności potęg zostały (lepiej — zostaną) omówione w ćwiczeniach, gdy tymczasem w ćwiczeniach zabrakło nie tyle najprostszej, co najważniejszej własności

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

Książeczka liczy 207 stronic, tymczasem powyższe uwagi dotyczą zaledwie pierwszych 37 stron. Rzetelna recenzja pozostałej części staje się bezprzedmiotowa, zgodnie z przysłowiem: im dalej w las, tym więcej drzew. Godny podziwu będzie czytelnik-samouk, który po przeczytaniu tych 37 stron zechce studiować dalej. Na str. 39 znajdzie trudną do zrozumienia dygresję o wektorach, na str. 45 trudną do zrozumienia definicję punktu materialnego, w def. 5 na str. 52 spotka tajemniczy symbol ω, na str. 45 dowie się, że ciąg określa się nie jako funkcję na zbiorze $\boldsymbol{N}$ (jak to się robi nawet w szkole średniej), lecz jako ... regułę, na str. 76 dowiedziałby się, że dwa ciągi spełniające warunek Cauchy'ego nazywają się równoważne, jeżeli ich różnica jest ciągiem ... Cauchy'ego (?).

Szata graficzna książeczki jest niejednolita. Pojawia się kursywa tam gdzie być nie powinna, nowych pojęć nie wyróżnia się ani kursywą ani tłustym drukiem. Na tej samej stronicy (str. 105) słowo „wskazówka" raz jest wybite tłustą czcionką, drugi raz — zwyczajną. Na str. 87 na przekątnej macierzy I_r występują 4 elementy (zamiast r), a mianowicie 1, 1, 0, 0. Na każdej prawie stronicy wadliwa jest interpunkcja. Widoczne niedbalstwo wydawnicze. Odpowiedzialność za to częściowo ponosi Autor, gdyż nie powinien zgodzić się na wypuszczenie książki z tak licznymi usterkami.

Zresztą sam Autor też nie jest bez winy. To nie zecer jest odpowiedzialny za curiosum $\operatorname{sgn} x = \{-1, 0, 1\}$ na str. 17; to Autor na str. 30 we wniosku 2 pewien wzór nazwał nierównością i zamiast go udowodnić, pisze: „Jak łatwo sprawdzić" i ... przytacza po raz drugi ten sam wzór, nie licząc się z oszczędnością papieru.

Aby ubawić czytelnika, Autor zamieszcza na str. 108 stojącego do nas tyłem słonia z $-\infty$ i $+\infty$ na uszach, lecz figurująca na tym rysunku liczba rzeczywista c nie tylko nie znajduje się między uszami, ale jest poza słoniem.

Autor przez wiele lat uczył elementów analizy matematycznej w klasach matematycznych w Liceum im. Gottwalda w Warszawie i nie jest wykluczone, że książeczka jest odbiciem jego lekcji. Skądinąd wiadomo, że uczniowie klas matematycznych są bardzo krytyczni, uczuleni na wszelkie nieścisłości i błędy.

Nie chciałbym, aby zarzuty pod adresem redakcji i pewnych niezręczności Autora były odczytane jako potępienie skądinąd ambitnej pozycji. Dołączenie do niej pełnej erraty, a jeszcze lepiej — drugie poprawione wydanie zwolni czytelników od znajdowania błędów i da im pełną satysfakcję w samodzielnych studiach matematycznych, zgodnie z oczekiwaniami Autora.

Leon Jeśmanowicz