Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

w większości poprawnie, starannie i bez zbędnych szczegółów.

Recenzowany zbiór, zarówno układem treści jak i doborem zadań, dostosowany jest do napisanego przez Autorów podręcznika *Elementy probabilistyki*, PWN, Warszawa 1979 (rec. *Wiadom. Mat.* 24 (1982), str. 252–254). Z tego też względu zbiór i wspomniany podręcznik stanowią dla studentów politechnik wartościową lekturę, poświęconą elementom rachunku prawdopodobieństwa, statystyki matematycznej i procesów stochastycznych.

Zadania są dobrane i ułożone starannie. Prawie wszystkie mają charakter czysto rachunkowy. Stopień ich trudności jest zróżnicowany. Oprócz prostych zadań służących wyrobieniu techniki wyznaczania prawdopodobieństw różnych zdarzeń losowych i charakterystyk zmiennych losowych, w zbiorze znajdują się również zadania wymagające pomysłowości i pewnego ogólnego zaawansowania matematycznego.

W tym miejscu chcę zaznaczyć, że 197 zadań pochodzi ze zbioru *Zadania z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1982, wyd. VII, napisanego przez tych samych Autorów. W szczególności, na 84 zadania podane w rozdziale I, 57 pochodzi z wyżej wspomnianego zbioru. W dalszych rozdziałach liczby te są następujące: rozdział II — 103 (70); III — 100 (50); IV — 54 (20); V — 42 (0). Zatem ponad 50% zadań podanych w recenzowanym zbiorze jest dobrze znanych czytelnikom z wyżej wymienionego zbioru. Pozostałe zadania są bardziej ambitne nie tylko w swojej treści, ale i pod względem postawionych w nich problemów. Z tego też względu uważam, że zbiór ten powinien być wykorzystywany przez studentów studiów dziennych i zaocznych.

Niestety, Autorzy zbioru nie uniknęli pewnych błędów, nie tylko drukarskich. Oto niektóre z nich:

Str. 16, zadanie 47: powinno być $P(A|B) = P(A|\overline{B})$.

Str. 16, z. 49: powinno być $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{C}$, jest $A \cap \overline{B} \subset \overline{C}$.

Str. 37, z. 160, dowód podany w odpowiedzi jest niewłaściwy, gdyż całki „$\int_0^a g(|X(w)|)P(d\omega)$, $\int_a^\infty g(|X(\omega)|)P(d\omega)$", nie mają sensu. Całki te powinny być zastąpione, odpowiednio, przez

$$\int_{\{\omega:|X(\omega)|\leqslant a\}} g(|X(\omega)|)P(d\omega),$$

$$\int_{\{\omega:|X(\omega)|>a\}} g(|X(\omega)|)P(d\omega).$$

Str. 59, treści zadań 258 i 259 pokrywają się, chociaż odpowiedzi do nich są różne.

Str. 60, z. 265, powinno być $N(0, \sqrt{k})$, jest „$N(0, k)$".

Str. 71, z. 294, w treści brak parametru Θ. Powinno być

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0, \\ \Theta e^{-\Theta x} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Str. 91, z. 354, sądzę, że w tym zadaniu należy założyć niezależność zmiennej losowej A od procesu $Y(t)$, gdyż w przeciwnym razie odpowiedź jest nieprawdziwa (na przykład przyjmijmy $A(\omega) = Y(\omega)$, $Y(t, \omega) = Y(\omega)\varphi(t)$, $\varphi \in C_1$).

Reasumując uważam, że powyższe uwagi, na które Autorzy z pewnością zwrócą uwagę przy następnym wydaniu, nie mają dużego wpływu na moją pozytywną opinię o tym zbiorze zadań.

Zdzisław Rychlik

Witold Lipski, *Kombinatoryka dla programistów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1982, str. 187; cena zł 120.—, nakład 5000 egz., ISBN 83-204-0350-2.

Książka W. Lipskiego w tytule adresowana jest do programistów; w notce redakcyjnej wśród potencjalnych jej użytkowników Autor wymienia także studentów kierunków informatycznych i pracowników nauki zajmujących się

informatyką. Zawartość książki, którą stanowią wybrane zagadnienia kombinatoryki i teorii grafów, podzielona jest na pięć rozdziałów.

Pierwszy rozdział poświęcony jest klasycznym obiektom kombinatorycznym (takim jak permutacje, rodziny podzbiorów, podziały zbiorów i liczb) oraz algorytmom ich generowania. Omówiono tutaj także pokrótce zasadę włączania-wyłączania oraz funkcje tworzące.

Trzy dalsze rozdziały poświęcone są algorytmom teorii grafów. W rozdziale 2 przedstawiono najpierw dwa podstawowe sposoby przeglądania wierzchołków i połączeń grafów, a następnie omówiono algorytmy generowania drzew rozpinających, zbiorów cykli fundamentalnych, składowych 2-spójności, dróg Eulera i cykli Hamiltona. Rozdział 3 poświęcony jest algorytmom wyznaczania najkrótszych dróg w grafach z obciążonymi połączeniami. W rozdziale 4 omówiono problem wyznaczania maksymalnego przepływu w sieciach oraz zagadnienia pokrewne: wyznaczanie najliczniejszych skojarzeń w grafach dwudzielnych, zbiorów różnych reprezentantów oraz rozkładów relacji na łańcuchy.

Ostatni, piąty rozdział książki poświęcony jest matroidom jako teoretycznym podstawom algorytmu zachłannego, którego zastosowanie przedstawione jest na szeregu przykładów z różnych dziedzin. (W § 5.2 Autor przedstawia równoważne określenia matroidu, chociaż w dalszej części rozdziału wykorzystywane są jedynie aksjomaty niezależności (M1–M3). Pozostałe definicje matroidów mogły być więc śmiało pominięte, gdyż bez dodatkowego objaśnienia ich roli i użycia stanowią jedynie element czystej teorii.)

Każdy rozdział kończy zbiór zadań uzupełniających i rozszerzających zasadniczą treść. Bibliografia składa się z 76 pozycji. Wśród nich znajdujemy oryginalne prace z lat 1917–1950, które dały początek wielu kierunkom badań w kombinatoryce i teorii grafów omawianym w książce. I nie byłoby w tym nic dziwnego, gdyby Autor nie odsyłał Czytelnika do tych źródeł, których odszukanie i przeczytanie może sprawić kłopot nawet specjaliście.

Kryteria doboru materiału, którymi kierował się Autor, są określone mało precyzyjnie. Ze wstępu „Od Autora" wyczytać można, że książka miała z góry ograniczoną objętość, co spowodowało, że Autor postanowił przede wszystkim uniknąć dublowania zawartości dwóch innych książek[1]) wydanych przez tę samą oficynę. Tym można uzasadnić brak w książce wielu klasycznych zagadnień kombinatorycznych, takich jak sortowanie i selekcja czy drzewa i ich zastosowania w informatyce.

Zamiar niedublowania innych opracowań jest jednak zdany dzisiaj na niepowodzenie i część materiału (dla przykładu, zawartości rozdziału 2 i 3, a częściowo i rozdziału 1), którego nie ma w dwóch wspomnianych wyżej książkach, znaleźć można w innych opracowaniach wydanych w kraju. Brak jest natomiast w książce co najmniej kilku zagadnień, które — zdaniem niżej podpisanego — powinny być uwzględnione w każdym opracowaniu o kombinatoryce przeznaczonym dla informatyków.

Wśród zagadnień czysto kombinatorycznych brak jest omówienia: (1) zasady gołębnika, która jest prostym narzędziem dowodu wielu zależności i faktów kombinatorycznych, i (2) zależności rekurencyjnych (wraz z metodami ich rozwiązywania), pojawiających się często w analizie złożoności obliczeniowej algorytmów. Można było natomiast zrezygnować w rozdziale 1 z funkcji tworzących (które dopiero wraz z twierdzeniem Pólya ukazują pełnię swoich zastosowań, ale wtedy należałoby przeznaczyć na te zagadnienia cały rozdział).

Spośród zagadnień teoriografowych, prawie całkowicie pominięte zostały

---

[1]) L. Banachowski, A. Kreczmar, *Elementy analizy algorytmów*, WNT, Warszawa 1981.

N. Wirth, *Algorytmy + struktury danych = programy*, WNT, Warszawa 1980.

drzewa i ich zastosowania w informatyce oraz problemy trudne (tj. takie, które nie mają wielomianowych algorytmów rozwiązywania). Drzewa jako grafy, a więc np. drzewa binarne, drzewa przeszukiwań itp., są o tyle integralną częścią kombinatoryki dla informatyków (a nawet i dla programistów), że nie powinno ich zabraknąć w żadnym opracowaniu z tej dziedziny. W tej książce omówiono jedynie drzewa rozpinające grafów, jako dodatkowy rezultat zastosowania do grafu jednej z metod przeglądania, oraz najkrótsze drzewa rozpinające w grafach z obciążonymi połączeniami.

Z całej gamy trudnych problemów kombinatorycznych przedstawiono jedynie pobieżnie wyznaczanie cykli Hamiltona w grafie, ilustrując na tym przykładzie metodę przeszukiwania z powracaniem, którą zastosowano do generowania wszystkich cykli Hamiltona w grafie. Nie omówiono więc ani kolorowania grafów, ani żadnego trudnego problemu z rodziny zagadnień polegających na wyznaczaniu szczególnych podzbiorów wierzchołków lub połączeń w grafach: niezależnych, pokrywających, dominujących itp.

Ten brak może mieć daleko idące konsekwencje. Na podstawie bowiem zawartości książki Czytelnik (zwłaszcza ten nie zaznajomiony ze złożonością obliczeniową) może odnieść wrażenie, że większość problemów kombinatorycznych rozwiązywanych jest algorytmami wielomianowymi. Dodatkowo zwieść go może dyskretność i skończoność przestrzeni rozwiązań. Bardzo niebezpieczny to trop rozumowania, zwłaszcza dla programisty, którego właśnie na gruncie kombinatoryki należy przestrzec, że istnieją problemy (np. w teorii grafów), których dokładne rozwiązanie dla obiektów kilkudziesięcioelementowych jest praktycznie niemożliwe nawet za pomocą najszybszych maszyn cyfrowych. Co więcej, istotnego zwiększenia szybkości i możliwości obliczeń można upatrywać jedynie w bardziej efektywnych metodach rozwiązywania, a nie w doskonaleniu sprzętu obliczeniowego.

Te uszczerbki w doborze zawartości książki w niczym nie umniejszają niewątpliwych jej walorów, z których do najważniejszych zaliczam wybór efektywnych algorytmów rozwiązywania prezentowanych zagadnień oraz staranną ich realizację w Pigin-Pascalu podaną wraz z uzasadnieniem poprawności algorytmów oraz analizą złożoności obliczeniowej. Wiele algorytmów opisanych jest po raz pierwszy w języku polskim. Wymienić tutaj można kilka algorytmów z rozdziału 1 oraz algorytm Trzech Hindusów wyznaczania maksymalnego przepływu w sieciach i algorytm Hopcrofta–Karpa generowania najliczniejszego skojarzenia w grafach dwudzielnych.

Autor nie uniknął kilku nieścisłości merytorycznych, książka zawiera także błędy korektorskie. Wyszczególnię teraz najistotniejsze z pierwszej grupy, a pozostałe wraz z błędami korektorskimi przekazuję Autorowi dla ewentualnego uwzględnienia w dalszych wydaniach.

Las składający się z k drzew zawiera $n-k$ krawędzi, a nie $n-k-1$ (str. 87). Dalej, na tej samej stronicy, to nie zbiór cykli generowany przez drzewo rozpinające grafu nazywamy fundamentalnym, ale każdy z cykli tego zbioru. Mówimy więc o zbiorze cykli fundamentalnych. Określenie „fundamentalny" nie może być łączone z własnością pozwalającą generować za pomocą cykli tego zbioru wszystkie pozostałe cykle grafu, gdyż graf może zawierać zbiór cykli o tej własności (np. niektóre zbiory cykli ścian grafów płaskich), którego nie można otrzymać za pomocą żadnego drzewa rozpinającego grafu.

Twierdzenie Eulera (str. 94) pozostaje prawdziwe także dla grafów, które mają wierzchołki izolowane poza jedyną nietrywialną składową.

Przedstawione algorytmy wyznaczania najkrótszych dróg w sieci z dowolnymi długościami połączeń działają poprawnie przy założeniu, że sieć nie zawiera cykli ujemnej długości. Autor

nie tłumaczy jednak, jak należy sprawdzać czy założenie to jest spełnione, chociaż nie wymaga to żadnego specjalnego algorytmu. Dla przykładu, w algorytmie Warshalla–Floyda (3.7), wystarczy w każdej iteracji sprawdzać znak elementów na głównej przekątnej, które są nieujemne wtedy i tylko wtedy, gdy sieć nie zawiera ujemnego cyklu. Równość (3.12), której realizacją jest algorytm Warshalla–Floyda, jest błędna, powinno być:

$$d_{ij}^{(m)} = \min\{d_{ij}^{(m-1)}, d_{im}^{(m-1)} + d_{mj}^{(m-1)}\}$$

chociaż algorytm (3.7) jest poprawny. Autor nie wspomina, że n-krotne zastosowanie algorytmu Dijkstry (osobno dla każdego wierzchołka) jest jedną z najefektywniejszych metod dla sieci z nieujemnymi wagami. W zadaniu 3.9 ciekawym problemem byłoby polecenie zapisania ostatniej instrukcji **for** przy użyciu tylko dwóch odwołań do zmiennych z dwoma wskaźnikami zamiast do trzech. Jak wykazały obliczenia testowe, to usprawnienie przyśpiesza algorytm aż o 30%.

Ford i Fulkerson udowodnili twierdzenie 4.2 tylko dla całkowitoliczbowych przepustowości, a dopiero Edmonds i Karp oraz Dinic niezależnie wykazali to twierdzenie dla dowolnej, rzeczywistej funkcji przepustowości.

Algorytm zachłanny zastosowany do odwróconego uporządkowania elementów (str. 171) wyznacza podzbiór o najmniejszej wadze, będący jednocześnie maksymalnym (w sensie zawierania) zbiorem niezależnym. Podzbiorem o najmniejszej wadze jest po prostu element o najmniejszej wadze. Opisując algorytm zachłanny wyznaczania minimalnego lasu rozpinającego grafu (str. 175) Autor nie wspomina o algorytmie Dijkstry dla tego problemu, który jest najpopularniejszą wśród użytkowników metodą wyznaczania minimalnych lasów rozpinających. Algorytm Dijkstry jest uproszczeniem algorytmu zachłannego, w którym rozwiązanie częściowe jest przez cały czas obliczeń podgrafem spójnym. Ta modyfikacja algorytmu zachłannego ma o wiele prostszą implementację niż algorytm zachłanny, gdyż nie zachodzi potrzeba stosowania dość skomplikowanego algorytmu tworzenia sumy zbiorów.

Reasumując, książka W. Lipskiego, mimo powyższych uwag krytycznych, jest bardzo pożyteczną i dobrze napisaną pozycją w krajowej literaturze informatycznej i może być śmiało polecana informatykom, studentom, jak i pracownikom. Tajemnicą pozostaje tylko, dlaczego w tytule Autor przeznaczył swoją książkę przede wszystkim dla programistów, z których wielu może nie docenić jego starań, by prezentowane algorytmy podane były wraz z uzasadnieniem poprawności i oszacowaniem złożoności obliczeniowej.

Maciej M. Sysło

Podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki pod redakcją Ireny Gucewicz-Sawickiej, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982, str. 348, cena zł 160.—, nakład 4750 egz., ISBN 83-01-04213-3.

Książka ta, przeznaczona dla studentów matematyki, poruszająca większość tematów programu dydaktyki matematyki jako przedmiotu studiów, jest w istocie podręcznikiem. Autorzy zastrzegli w przedmowie, że nie chcą jej tak traktować, być może dlatego, że wiele – może nawet większość – tematów poruszono bardzo skrótowo, sygnalizując jedynie problematykę i odsyłając czytelnika do literatury. Pewne rozdziały czynią wręcz wrażenie przewodnika po literaturze, inne zaś tematy, niekoniecznie najważniejsze, opracowano dość obszernie (np. rozdział 9. *Problemy algorytmizacji*), kierując się –