Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

nie tłumaczy jednak, jak należy sprawdzać czy założenie to jest spełnione, chociaż nie wymaga to żadnego specjalnego algorytmu. Dla przykładu, w algorytmie Warshalla–Floyda (3.7), wystarczy w każdej iteracji sprawdzać znak elementów na głównej przekątnej, które są nieujemne wtedy i tylko wtedy, gdy sieć nie zawiera ujemnego cyklu. Równość (3.12), której realizacją jest algorytm Warshalla–Floyda, jest błędna, powinno być:

$$d_{ij}^{(m)} = \min\{d_{ij}^{(m-1)}, d_{im}^{(m-1)} + d_{mj}^{(m-1)}\}$$

chociaż algorytm (3.7) jest poprawny. Autor nie wspomina, że n-krotne zastosowanie algorytmu Dijkstry (osobno dla każdego wierzchołka) jest jedną z najefektywniejszych metod dla sieci z nieujemnymi wagami. W zadaniu 3.9 ciekawym problemem byłoby polecenie zapisania ostatniej instrukcji **for** przy użyciu tylko dwóch odwołań do zmiennych z dwoma wskaźnikami zamiast do trzech. Jak wykazały obliczenia testowe, to usprawnienie przyśpiesza algorytm aż o 30%.

Ford i Fulkerson udowodnili twierdzenie 4.2 tylko dla całkowitoliczbowych przepustowości, a dopiero Edmonds i Karp oraz Dinic niezależnie wykazali to twierdzenie dla dowolnej, rzeczywistej funkcji przepustowości.

Algorytm zachłanny zastosowany do odwróconego uporządkowania elementów (str. 171) wyznacza podzbiór o najmniejszej wadze, będący jednocześnie maksymalnym (w sensie zawierania) zbiorem niezależnym. Podzbiorem o najmniejszej wadze jest po prostu element o najmniejszej wadze. Opisując algorytm zachłanny wyznaczania minimalnego lasu rozpinającego grafu (str. 175) Autor nie wspomina o algorytmie Dijkstry dla tego problemu, który jest najpopularniejszą wśród użytkowników metodą wyznaczania minimalnych lasów rozpinających. Algorytm Dijkstry jest uproszczeniem algorytmu zachłannego, w którym rozwiązanie częściowe jest przez cały czas obliczeń podgrafem spójnym. Ta modyfikacja algorytmu zachłannego ma o wiele prostszą implementację niż algorytm zachłanny, gdyż nie zachodzi potrzeba stosowania dość skomplikowanego algorytmu tworzenia sumy zbiorów.

Reasumując, książka W. Lipskiego, mimo powyższych uwag krytycznych, jest bardzo pożyteczną i dobrze napisaną pozycją w krajowej literaturze informatycznej i może być śmiało polecana informatykom, studentom, jak i pracownikom. Tajemnicą pozostaje tylko, dlaczego w tytule Autor przeznaczył swoją książkę przede wszystkim dla programistów, z których wielu może nie docenić jego starań, by prezentowane algorytmy podane były wraz z uzasadnieniem poprawności i oszacowaniem złożoności obliczeniowej.

Maciej M. Sysło

Podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki pod redakcją Ireny Gucewicz-Sawickiej, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982, str. 348, cena zł 160.—, nakład 4750 egz., ISBN 83-01-04213-3.

Książka ta, przeznaczona dla studentów matematyki, poruszająca większość tematów programu dydaktyki matematyki jako przedmiotu studiów, jest w istocie podręcznikiem. Autorzy zastrzegli w przedmowie, że nie chcą jej tak traktować, być może dlatego, że wiele – może nawet większość – tematów poruszono bardzo skrótowo, sygnalizując jedynie problematykę i odsyłając czytelnika do literatury. Pewne rozdziały czynią wręcz wrażenie przewodnika po literaturze, inne zaś tematy, niekoniecznie najważniejsze, opracowano dość obszernie (np. rozdział 9. *Problemy algorytmizacji*), kierując się –

być może — objętością i zawartością dostępnej literatury tematu.

Byłaby to bardzo dobra koncepcja podręcznika dydaktyki matematyki, gdzie bardzo rozległa i różnorodna tematyka nie może być wyczerpująco opracowana w jednej książce, gdzie niewiele jest niepodważalnych prawd, i więcej znaczy zrozumienie problemów i poznanie różnych — także nieudanych — propozycji ich rozwiązania niż opanowanie określonej wiedzy. I zapewne byłby to bardzo dobry podręcznik, gdyby taka koncepcja była właściwie i konsekwentnie zrealizowana. Niestety, tak nie jest, co pokażę dalej.

Książka jest napisana przez czterech autorów: I. Gucewicz-Sawicką (jednocześnie redaktora całości), T. Ramsa, H. Dudę i M. Klaklę; przy tym około 80% tekstu pochodzi od pierwszych dwu. W dalszym ciągu o autorstwie omawianych fragmentów będę informować podając w nawiasie inicjały.

Niektóre tematy zostały opracowane mniej więcej dobrze i te partie mogą być polecone studentom jako podstawa i przewodnik do samodzielnej pracy. Należą tu np. rozdziały: 1. *Cele nauczania matematyki* (I. G.-S.), 2. *Dobór treści nauczania matematyki* (I. G.-S.), 3. *Procesy psychiczne związane z tworzeniem pojęć i struktur* (M. K.), 9. *Problemy algorytmizacji* (T. R.), 18. *Podstawowe pojęcia analizy matematycznej* (I. G.-S.). Ujęcie innych rozdziałów zawiera jednak poważne wady (niektóre z nich w mniejszym stopniu można odnieść i do tych „dobrych" rozdziałów). Przyjrzyjmy się opracowaniu zagadnienia pojęć i definicji matematycznych w nauczaniu.

Zacznijmy od rozdziału 6. *Formułowanie definicji i twierdzeń* (T. R.), który zawiera większość informacji na ten temat. Zauważywszy ze zdziwieniem, że dwa pierwsze paragrafy zawierają wyłącznie elementarne wiadomości z uniwersyteckiego kursu wstępu do matematyki i logiki ogólnej, przeskoczyłem je (wrócimy do nich niżej), by zagłębić się w lekturze dalszych partii. Są tu więc informacje o wprowadzaniu pojęć na niższych szczeblach nauczania, o podstawowych ogniwach procesu wprowadzania definicji (w dobrym ujęciu J. Koniora), o operatywności pojęć matematycznych i definicjach czynnościowych (nazwanych tu *genetycznymi*), wreszcie o rozumieniu definicji i jego sprawdzaniu u uczniów. Jednocześnie jednak pominięto, lub potraktowano nad wyraz pobieżnie, inne bardzo ważne zagadnienia:

— nie wspomniano o kapitalnym z punktu widzenia nauczania problemie wyboru definicji według kryteriów dydaktycznych,

— bardzo istotne dla kształtowania rozumienia definicji matematycznej ukazywanie uczniom różnych definicji tego samego pojęcia tylko zasygnalizowano, bez odesłania do innego źródła (str. 76),

— pracę ucznia nad definicją w podręczniku pokazano wprawdzie na przykładzie definicji łamanej (str. 77–80), ale nawet bez przytoczenia tej definicji i tylko w terminach ogólnych, znowu bez informacji, gdzie można znaleźć przykłady opracowane w szczegółach,

— o tworzeniu definicji przez ucznia zaledwie wspomniano (str. 75) i to tak, jakby dotyczyło to tylko wczesnego okresu nauczania.

Są w książce dwa inne rozdziały traktujące o pojęciach i definicjach matematycznych, napisane przez dwu innych autorów: 3. *Procesy psychiczne związane z tworzeniem pojęć i struktur* (M. K.) i 8. *Proces uogólniania w nauczaniu matematyki* (I. G.-S.). W żadnym z rozdziałów 3, 6 i 8 nie ma odsyłaczy do pozostałych dwu lub choćby nawiązania do tego, o czym się tam mówi. Np. w rozdziale 3 jest paragraf 3.4 *Jak powinien przebiegać proces wprowadzania pojęcia matematycznego?*, o którym zdaje się nie wiedzieć autor rozdziału 6. W rozdziale 6 brak też odsyłacza do rozdziału 8 tam, gdzie mowa o tworzeniu definicji przez

uczniów, by wskazać na uogólnienie jako jedną z możliwych dróg do definicji.

Przyjrzyjmy się wreszcie bibliografii rozdziału 6. Do literatury podstawowej zaliczono tu trzy książki z zakresu dydaktyki matematyki, dwie prace naukowe z tegoż zakresu i jedną z psychologii, oraz jeden artykuł. Literatura uzupełniająca to dalsze trzy prace z dydaktyki matematyki, dwie książki obcojęzyczne, w tym H. (nie M., jak wydrukowano) Freudenthala *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, i trzy arykuły.

Jak z tej literatury ma korzystać czytelnik-student? Niekiedy w tekście rozdziału są odsyłacze do niej z podaniem stron. Np. na str. 76 czytamy: „Jako przykład może tu posłużyć opisane przez Z. Krygowską ([3, str. 99–101]) postępowanie prowadzące do sformułowania przez ucznia definicji granicy ciągu". Jest to odsyłacz wzorowy. Bynajmniej jednak nie jest tak zawsze. Nie tylko niektóre odsyłacze do książek nie podają stron, ale do większości pozycji, tak literatury podstawowej jak i uzupełniającej, w ogóle brak odsyłaczy. Jak ma z nich student korzystać? Czy czytać całą książkę, czy wertować ją, by znaleźć „coś na temat"? (Dodam, że zalecona jako literatura podstawowa praca D. Gierulanki *O przyswajaniu sobie pojęć geometrycznych* jest wybitnie trudną lekturą z pogranicza psychologii i filozofii, odpowiednią dla badacza, nie dla nowicjusza w dydaktyce matematyki.) A jeżeli już uda mu się dotrzeć do pracy Z. Dyrszlaga (nie Dyrszlaka, jak wydrukowano dwukrotnie) *O poziomach rozumienia pojęć matematycznych* (wydanej w Zeszytach Naukowych WSP w Opolu), i przeczyta ją, to może zauważyć ze zdziwieniem, że omawiane na str. 79–80 recenzowanej książki kryteria i sposoby sprawdzania rozumienia definicji pojęć matematycznych są wzorowane właśnie na kryteriach wprowadzonych przez Dyrszlaga, o czym tu brak wzmianki.

Wszystko to prowadzi do jednoznacznego wniosku: bibliografia została opracowana powierzchownie.

Wróćmy teraz do początkowych paragrafów rozdziału 6, tych z zakresu logiki, i całkiem zbędnych. Błędy i pomieszanie pojęć są wręcz żenujące. Znajdujemy tu najpierw pojęcia wzięte z logiki ogólnej, a nie mające zastosowania w matematyce: „Definicja realna przedmiotu to zdanie podające jednoznaczną charakterystykę tego przedmiotu", „Definicja nominalna określa nowy termin lub symbol z pomocą terminów (lub symboli) traktowanych jako znane." Otóż każda definicja matematyczna realna jest jednocześnie nominalna, zaś wprowadzenie oznaczeń lub skrótów zwykle nie jest uważane za definicję. Tak więc obydwa te pojęcia są w matematyce bezużyteczne.

Takich niepotrzebnych kategorii jest tu więcej. Jest więc pojęcie „definicji kontekstowej", objaśnione na przykładzie definicji wyrażenia „logarytm z liczby dodatniej b przy podstawie dodatniej a różnej od 1"; następnie dowiadujemy się, że definicjami kontekstowymi są — kto by zgadł? — „definicje przez abstrakcję, definicje przez reprezentację, definicje aksjomatyczne, definicje rekurencyjne" (str. 70). Omawiając dalej różne rodzaje definicji, autor, po definicjach kontekstowych, rekurencyjnych, przez abstrakcję i aksjomatycznych, na jednym oddechu wymienia też „definicje operacyjne (inaczej definicje genetyczne)", „definicje sprawozdawcze" i „definicje projektujące", mieszając w ten sposób kategorie matematyczno-logiczne z psychologiczno-dydaktycznymi (str. 72).

W tym samym rozdziale znajdujemy też informację, że kryterium istnienia i jednoznaczności definicji stałej funkcyjnej „gwarantuje istnienie i jedyność definiowanego przedmiotu" (str. 74); nie jest to pomyłka, bo w następnym paragrafie czytamy, że „przed przyjęciem definicji syntetycznej należy przeprowadzić dowód wspomnianego w § 6.2 kryterium istnienia i jednoznaczności

obiektu, który spełnia warunki podane przez definicję" (str. 74). Listę kryteriów poprawnościowych zamyka kryterium ... prawdziwości: „Naczelnym kryterium poprawności definicji realnych jest ich prawdziwość" (str. 74). (Błędów rzeczowych dostrzegłem w książce więcej, nie będę jednak przytaczał innych.)

Tak oto nie najlepiej wygląda opracowanie zagadnień dotyczących pojęć i definicji. Również niezadowalająco, choć inaczej, ujęto szczegółowe zagadnienia nauki o relacjach i funkcjach. Poświęcone im są jedyne dwa rozdziały tej książki autorstwa H. Dudy: 11. *Pojęcie relacji w nauczaniu matematyki* i 12. *Funkcje*. Są one tak bardzo różne od pozostałych rozdziałów, że warto poświęcić im nieco uwagi. W obydwu gros tekstu to jakby fragment elementarnego podręcznika matematyki (11 stronic w rozdziale 11. i 20 stronic w 12.). Reszta to

— szerokie omówienie terminologii i symboliki stosowanej w różnych opracowaniach (aż po takie szczegóły, jak wyrażona w procentach częstość występowania niektórych terminów),

— przewidywane trudności uczniów,

— propozycje i uwagi dydaktyczne.

Teorię relacyj student zna z kursu wstępu do matematyki; z drugiej strony nie była i nie jest ona przedmiotem nauczania u nas w szkole, tym bardziej więc jej przedstawienie w tej książce uznać trzeba za zbędne. „Przewidywane trudności i błędy uczniów" są raczej znanymi trudnościami i błędami studentów pierwszego roku matematyki; tylko nauczyciel klas matematycznych będzie miał okazję spotkać się z nimi w szkole.

Uwagi dydaktyczne o relacjach mają charakter tradycyjnych „uwag o realizacji programu nauczania"; np. „Stopniowo zapoznajemy uczniów z cechami konkretnych relacji, na razie bez nazw i definicji. Dobrymi okazjami do zapoznawania ze zwrotnością i przechodnioścą są m.in. podzielność liczb i zawieranie się zbiorów" (str. 179). Nic to nie mówi nauczycielowi, jak „stopniowe zapoznawanie" (bez nazw i definicji!) przełożyć na działania w klasie.

Przedstawienie elementarnych pojęć z teorii funkcji (odwzorowań) i funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej jest tu o tyle bardziej na miejscu, że większość z nich występuje też w programie szkolnym. Czy jednak student trzeciego roku matematyki ma się z tej książki uczyć, co to jest funkcja rosnąca, a co okresowa?

Sporo miejsca zajmuje tu przedstawienie różnych (także nierównoważnych) definicji funkcji, różnorodnej terminologii i symboliki, oraz często popełnianych przy posługiwaniu się terminologią i symboliką funkcyjną błędów; właśnie przedstawienie, a nie analiza dydaktyczna, np. analiza poszczególnych definicji lub symboli z punktu widzenia dydaktyki. Analizę taką zastępują autorytatywne twierdzenia, jak np.: „W szkolnej nauce o funkcjach na uwagę zasługują definicje 14, 11, 12, 2 oraz 1, wymienione w kolejności od najłatwiejszej do najtrudniejszej. Definicję 13 wykluczamy, gdyż jest zbyt skomplikowana" (str. 197). (Według definicji 12 funkcja f z A w B to odpowiedni podzbiór $A \times B$, definicja 13 zaś jest typu bourbakistowskiego: funkcja to trójka $\langle f, A, B\rangle$.)

Wreszcie — bibliografia. Skumulowana bibliografia tych dwu rozdziałów obejmuje 48 pozycji, w tym 13 monografii i podręczników akademickich z zakresu matematyki i logiki, 10 książek z zakresu dydaktyki matematyki (większość to tzw. pomoce metodyczne), 6 książek popularyzatorskich, 5 zbiorów zadań, program nauczania, podręcznik szkolny (zaliczony do literatury uzupełniającej) i artykuły w czasopismach metodycznych; wszystko ze wskazaniem odpowiednich fragmentów.

Duża część tej literatury znalazła się tu prawdopodobnie tylko po to, by wskazać, skąd wzięto omawiane definicje, terminy i symbole; nie wie tego student, który tę bibliografię potraktuje jako źródło wiedzy o nauczaniu relacyj i funkcyj. A np. książki

Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach W. Marka i J. Onyszkiewicza, *Wstęp do matematyki współczesnej* H. Rasiowej, *Logika i teoria mnogości* J. Słupeckiego i innych — zaliczono do literatury podstawowej; jak mają się do tego odnieść student i jego nauczyciel? Za to brak tu zupełnie literatury obcojęzycznej z zakresu dydaktyki matematyki, którą podano w innych rozdziałach. I tu więc bibliografia sprawia wrażenie nieprzemyślanej kompozycji tytułów, dokonanej bez jasnej koncepcji funkcji, jakie bibliografia ma pełnić.

Krytykując tę książkę, jestem w pełni świadom trudności, jakie towarzyszyły jej napisaniu i zredagowaniu. Wiem dobrze, jak niewdzięczna i kłopotliwa jest funkcja redaktora naukowego, któremu niekiedy w toku pracy wypada żałować, że tej funkcji się podjął. Trudno jednak oprzeć się obiektywnemu stwierdzeniu: ta książka nie miała redaktora naukowego. Brak jasnej koncepcji tekstu i jego funkcji dydaktycznej, na przykład takiej, jaką zaproponowałem na wstępie, a jaka przyszła mi na myśl po pobieżnym przejrzeniu książki, i brak konsekwentnej realizacji tej koncepcji stanowi główną wadę książki. Nie widać też w niej troski o eliminację błędów, które wszak każdemu mogą się zdarzyć. Czyni to z niej jeszcze jedną lekturę, której wybrane fragmenty wykładowca dydaktyki matematyki zaleci studentom (przestrzegając przed czytaniem z dobrą wiarą innych), odbiera natomiast walor podstawowego podręcznika, który by mieć mogła.

Tworzenie prac zbiorowych o charakterze monograficznym w ten sposób, że różni autorzy piszą niezależnie od siebie różne fragmenty, a redaktor te fragmenty „skleja" w jedną całość, przynosi nie najlepsze owoce.

Stefan Turnau

Joseph Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics 92, Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo 1984, str. xi + 261, ISBN 0-387-90859-5.

W ciągu ostatnich dwudziestu lat nastąpił szczególnie intensywny rozwój teorii przestrzeni Banacha. Czytelnik, który chce się z tym zapoznać, ma już do dyspozycji kilka opracowań książkowych. Należy tu przede wszystkim wymienić dwa pierwsze tomy monografii J. Lindenstraussa i L. Tzafririego *Classical Banach spaces*, a także wcześniejsze książki J. Diestela: *Geometry of Banach spaces — Selected topics* i napisaną wspólnie z J. Uhlem *Vector measures*.

Ostatnio doszła do nich jeszcze jedna pozycja — *Sequences and series in Banach spaces*. Duża część zawartego w niej materiału znajduje się co prawda we wspomnianych wyżej książkach, ale w niczym nie umniejsza to jej znaczenia. Te pierwsze wymagają bowiem od czytelnika dużego obycia z teorią przestrzeni Banacha, recenzowana zaś pozycja jest dostępna dla każdego, kto zna podstawowy kurs analizy funkcjonalnej. Dla samodzielnego jej przestudiowania wystarcza znajomość np. pierwszej części podręcznika W. Rudina *Functional analysis*.

Oczywiście, stawianie czytelnikowi tych stosunkowo niewielkich wymagań spowodowało konieczność dokonania starannej selekcji materiału. W tej sytuacji recenzowana książka daleka jest od wyczerpania tematu sformułowanego w tytule. Znalazło się w niej jednak wiele głębokich i ciekawych rezultatów z lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych, które rzuciły nowe światło na strukturę przestrzeni Banacha.