ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVII (1987)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

JAN MIKUSIŃSKI (Katowice)

O twierdzeniach Titchmarsha, Foiaşa i o aproksymacji przesunięciami *

1. Uwagi ogólne. Sformułowane poniżej twierdzenia Titchmarsha [20] i Foiaşa [10] są bardzo blisko ze sobą związane i niektórzy nawet uważają, że są równoważne. Z logicznego punktu widzenia nic takiemu poglądowi nie można zarzucić, ponieważ w końcu wszystkie twierdzenia prawdziwe są równoważne. Jednakże w potocznym znaczeniu uważa się za równoważne takie twierdzenia, które łatwo nawzajem z siebie wynikają. W naszym przypadku okazuje się [17], że z twierdzenia Foiaşa łatwo wynika twierdzenie Titchmarsha, natomiast dowód w odwrotną stronę jest trudniejszy, zwłaszcza jeżeli chodzi o dowód efektywny.

Twierdzenie Titchmarsha stanowi podstawę rachunku operatorów, który w formie książkowej był przedstawiony po raz pierwszy [13] w roku 1953. Pierwszy dowód twierdzenia Titchmarsha podał sam jego autor [20] w roku 1926. Wynikło ono jako produkt uboczny przy badaniu zer funkcji analitycznych typu eksponencjalnego. Dowód był trudny i skomplikowany. Prostszy dowód, oparty również na funkcjach analitycznych, podał jego uczeń M. M. Crum [7] w roku 1941. Trzeci dowód podał J. Dufresnoy [8] w roku 1947, nie znając publikacji Titchmarsha ani Cruma. Jego dowód polegał na badaniu wzrostu funkcji analitycznych wzdłuż specjalnie dobranej krzywej. Jednak dowód ten zawiera trudną do uzupełnienia lukę. Z tego powodu ten sam Dufresnoy podał w rok później następny dowód oparty na funkcjach podharmonicznych [9].

W roku 1953, chcąc uniknąć funkcji analitycznych i harmonicznych, podałem [14] nowy (piąty z kolei) dowód twierdzenia Titchmarsha, opierając się na pewnym twierdzeniu o momentach, udowodnionym wspólnie z C.

* Jest to rozszerzony nieco tekst wykładu im. W. Sierpińskiego wygłoszonego dnia 19 kwietnia 1985 r. (*przyp. red.*).

Ryll-Nardzewskim. W roku 1959 polski matematyk, żyjący obecnie w Danii, S. Świerczkowski [18] uprościł dowód Dufresnoya, oparty na funkcjach podharmonicznych. Wynik jego można uważać za szósty z kolei dowód twierdzenia Titchmarsha. W tym samym roku 1959 podałem nowy dowód [15], który do tej pory stanowi najkrótszy dowód oparty na funkcjach rzeczywistych. Dowód ten zmodyfikowali japońscy matematycy K. Yosida i S. Matsuura [21], str. 47, [22] zastępując twierdzenie o momentach twierdzeniem Liouville'a o funkcjach analitycznych całkowitych. Nie jest to jednak ósmy – chronologicznie biorąc – dowód, ponieważ przedtem ukazały się jeszcze inne dowody, jeden Kalischa [11], a jeden mój [14]. W ten sposób istnieje co najmniej 10 dowodów twierdzenia Titchmarsha, co już samo świadczy niewątpliwie o ważności tego twierdzenia.

Twierdzenie Foiaşa [10] zostało udowodnione w roku 1961. Nie wzbudziło ono z początku większego zainteresowania, mimo że jest mocniejsze od twierdzenia Titchmarsha. Dopiero zastosowania podane przez T. K. Boehmego [1], [2], [4] i J. Burzyka [5], [6] zwróciły uwagę na jego przydatność i spowodowały powstanie nowych dowodów. T. K. Boehme podał dwa nowe dowody tego twierdzenia: jeden [3] w roku 1968, a drugi jeszcze nieopublikowany. Trzeci dowód podałem ja [17], a czwarty W. Kierat i K. Skórnik [12].

Poniżej podane jest pewne twierdzenie o zupełności ciągów w przestrzeni $L^2(a, b)$, z którego wynika zarówno twierdzenie Titchmarsha, jak i Foiaşa. Główny jednak sens tego twierdzenia o zupełności leży w tym, że wynikają z niego trudne do udowodnienia twierdzenia o aproksymacji, jakkolwiek niektóre z nich wyglądają tak prosto, że do zrozumienia ich nie jest potrzebne nawet pojęcie całki.

2. Sformułowanie twierdzeń. Twierdzenie Titchmarsha bywa podawane w różnych równoważnych postaciach. Jedną z nich jest:

TWIERDZENIE I (Titchmarsha). *Jeżeli f i g są całkowalne w $(0, T)$, przy czym $\int_0^\varepsilon |f| > 0$ dla każdego $\varepsilon \in (0, T)$, to z równości $f * g = 0$ prawie wszędzie wynika $g = 0$ p.w.*

W twierdzeniu tym symbol $f * g$ oznacza splot

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau. \tag{1}$$

TWIERDZENIE II (Foiaşa). *Jeżeli $f \in L(0, 1)$ i $\int_0^\varepsilon |f| > 0$ dla każdego $\varepsilon \in (0, 1)$, to zbiór funkcyj postaci $f * g$, gdzie $g \in L(0, 1)$, jest gęsty w $L(0, 1)$.*

TWIERDZENIE III (o zupełności). *Niech* $f \in L^2(-\infty, \infty)$ *i niech* $f = 0$ *p.w. w* $(-\infty, 0)$ *oraz* $\int_0^\varepsilon |f| > 0$ *dla każdego* $\varepsilon \in (0, 1)$. *Jeżeli ciąg liczb* $t_1, t_2, \ldots$ *jest gęsty w pewnym przedziale* (a, b), *gdzie* $-\infty \leqslant a < b < \infty$, *to ciąg funkcyj przesuniętych* $f_n(t) = f(t - t_n)$ *jest zupełny w* $L^2(a, b)$.

Zupełność oznacza tu, że jeżeli dla pewnego $g \in L^2(a, b)$ iloczyny skalarne

$$(f_n, g) = \int_a^b f_n(t)\, g(t)\, dt$$

są równe 0 dla każdego naturalnego n, to $g = 0$ p.w.

3. Dowód twierdzenia III. Najpierw udowodnimy kilka lematów.

LEMAT 1. *Dla każdej funkcji* f *całkowalnej z kwadratem w przedziale otwartym* (a, b) (*skończonym lub nieskończonym*) *i dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje funkcja ciągła* g *w* (a, b), *równa zeru poza pewnym przedziałem domkniętym zawartym w* (a, b) *i taka, że*

$$\int_a^b (f-g)^2 < \varepsilon. \tag{2}$$

Dowód. Udowodnimy najpierw, że jeżeli a i b są skończone, to zbiór $C[a, b]$ jest gęsty w $L^2(a, b)$. Istotnie, przez prostą zmianę argumentu można wszystko sprowadzić do przedziału $[-\pi, \pi]$. Sumy częściowe szeregu trygonometrycznego dla dowolnej funkcji $f \in L^2(-\pi, \pi)$ są funkcjami ciągłymi w $[-\pi, \pi]$, a ciąg ich jest zbieżny z kwadratem do f. Transponując to z powrotem do przedziału (a, b), można powiedzieć, że dla każdej funkcji $f \in L^2(a, b)$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $g \in C[a, b]$ taka, że zachodzi (2).

Niech teraz przedział (a, b) będzie dowolny, skończony lub nieskończony, i niech $[a', b']$ będzie przedziałem domkniętym zawartym w (a, b) takim, że

$$\int_a^{a'} f^2 < \varepsilon/9 \quad \text{i} \quad \int_{b'}^b f^2 < \varepsilon/9.$$

Wobec tego udowodniliśmy, iż istnieje funkcja g, ciągła w $[a', b']$ i taka, że $\int_{a'}^{b'} (f-g)^2 < \varepsilon/9$. Niech $a < a'' < a' < b' < b'' < b$. Funkcję g można przedłużyć na cały przedział (a, b) tak, żeby było $g = 0$ w (a, a'') i w (b'', b) oraz aby

$$\int_a^{a'} g^2 < \varepsilon/9 \quad \text{i} \quad \int_{b'}^b g^2 < \varepsilon/9.$$

Wtedy z uwagi na nierówność $(f-g)^2 \leqslant 2f^2+2g^2$ mamy

$$\int_a^b (f-g)^2 = \int_a^{a'} (f-g)^2 + \int_{a'}^{b'} (f-g)^2 + \int_{b'}^{b} (f-g)^2 < \frac{4\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} + \frac{4\varepsilon}{9} = \varepsilon.$$

Funkcja g spełnia więc wszystkie warunki lematu 1.

LEMAT 2. *Jeżeli* $f \in L^2(-\infty, \infty)$, *to* $\int_{-\infty}^{\infty} (f(x+h)-f(x))^2\,dx \to 0$ *przy* $h \to 0$:

Dowód. Niech $f \in L^2(-\infty, \infty)$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone. Na podstawie lematu 1 istnieje funkcja g ciągła w $(-\infty, \infty)$, równa 0 poza pewnym przedziałem skończonym (a', b') i taka, że $\int_{-\infty}^{\infty} (f-g)^2 < \varepsilon^2$. Funkcja g jest jednostajnie ciągła i wobec tego istnieje takie $\eta > 0$, że

$$|g(x+h)-g(x)| < \varepsilon(b'-a'+2)^{-1/2} \quad \text{dla } |h| < \eta.$$

Stąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} (g(x+h)-g(x))^2\,dx = \int_{a'-1}^{b'+1} (g(x+h)-g(x))^2\,dx < \varepsilon^2.$$

Wprowadzając normę $\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2\right)^{1/2}$ oraz funkcję przesuniętą określoną wzorem $f_h(x) = f(x+h)$, możemy napisać

$$\|f_h - f\| \leqslant \|f_h - g_h\| + \|g_h - g\| + \|g - f\| < \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon,$$

a to dowodzi lematu 2.

W poniższym lemacie 3 splot będzie wyjątkowo oznaczał całkę po przedziale $(-\infty, \infty)$, mianowicie

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

Jeżeli funkcje f i g są obie równe 0 w $(-\infty, 0)$, to splot $f * g$ redukuje się do splotu (1) i lemat 3 pozostaje w mocy. W tej formie wystarczyłby on do dalszych rozważań, szkoda jednak byłoby go osłabiać przez dodatkowe, zbędne założenia.

LEMAT 3. *Jeżeli* $f, g \in L^2(-\infty, \infty)$, *to* $f * g$ *jest funkcją ciągłą.*

Dowód. Oznaczmy $\Delta_h = |(f*g)(x+h)-(f*g)(x)|$. Mamy

$$\Delta_h = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h-t)g(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt \right|$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h-t)-f(x-t)| \cdot |g(t)|\,dt.$$

Na podstawie nierówności geometrycznej (podanej kolejno przez Cauchy'ego, Buniakowskiego i Schwarza)

$$\Delta_h \leqslant \Big[\int_{-\infty}^{\infty} (f(x+h-t)-f(x-t))^2\,dx\Big]^{1/2}\cdot\Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2\,dx\Big)^{1/2}$$

$$= M\Big[\int_{-\infty}^{\infty} (f(x+h)-f(x))^2\,dx\Big]^{1/2}.$$

Ale całka w ostatnim wyrażeniu dąży, na podstawie lematu 2, do 0 wraz z h, więc lemat 3 jest dowiedziony.

Opierając się na lemacie 3 i twierdzeniu Titchmarsha udowodnimy teraz twierdzenie III. Ponieważ $f = 0$ p.w. dla $t < 0$, więc dla $g \in L^2(a, b)$ mamy

$$(f_n, g) = \int_a^b f(t-t_n)\,g(t)\,dt = \int_{t_n}^b f(t-t_n)\,g(t)\,dt.$$

Skoro b jest skończone, to przez podstawienie $t = b-\tau$, $g(t) = h(\tau)$ otrzymujemy

$$(f_n, g) = \int_0^{b-t_n} f(b-t_n-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = (f * h)(b-t_n),$$

gdzie splot jest wyrażony przez całkę od 0 do $b-t_n$. Ponieważ liczby t_n leżą gęsto w (a, b), więc liczby $b-t_n$ leżą gęsto w $(0, b-a)$. Jeżeli więc $(f_n, g) = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to z ciągłości splotu $f * h$ (lemat 3) wynika, że $f * h = 0$ w $[0, b-a]$, a stąd na podstawie twierdzenia Titchmarsha wynika, że $h = 0$ p.w. w $[0, b-a]$. A to z kolei pociąga $g = 0$ p.w. w (a, b). Zatem ciąg funkcyj f_n jest zupełny w $L^2(a, b)$.

4. Aproksymacja przez przesunięcia. Stosując do twierdzenia III metody przestrzeni Hilberta, otrzymujemy z niego twierdzenia o aproksymacji kombinacjami liniowymi przesunięć.

TWIERDZENIE IV (o aproksymacji przez przesunięcia). *Załóżmy, że* $f \in L^2(-\infty, \infty)$, $f = 0$ *p.w. w* $(-\infty, 0)$ *i* $\int_0^\varepsilon |f| > 0$ *dla każdego* $\varepsilon > 0$. *Załóżmy ponadto, że* $g \in L^2(a, b)$, *a ciąg punktów* $t_1, t_2, \ldots$ *jest gęsty w* (a, b), *gdzie* $-\infty < a < b \leqslant \infty$. *Wówczas dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje taka kombinacja liniowa*

$$w(t) = \lambda_1 f(t-t_1) + \ldots + \lambda_n f(t-t_n) \quad (\lambda_i \in \boldsymbol{R}), \tag{4}$$

że zachodzi nierówność $\|g-w\| < \varepsilon$, *gdzie* $\|\ \|$ *oznacza normę w* $L^2(a, b)$.

Podobne twierdzenie udowodniła K. Skórnik [19] w roku 1966 dla $L^p(a, b)$, z tym że przedział (a, b) był skończony, a w kombinacjach mogły występować zupełnie dowolne punkty rozważanego przedziału. Dowód K. Skórnik był nieefektywny, bo korzystał z twierdzenia Foiaşa, którego znane wówczas dowody opierały się na metodach pozaskończonych.

Potrzebne nam będą następujące znane z teorii przestrzeni Hilberta fakty.

Ortonormalizacja Schmidta. Jeżeli ciąg f_n jest zupełny w $L^2(a, b)$, to przyjmując

$$w_1 = f_1 \cdot \|f_1\|^{-1}, \qquad w_i = \tilde{f}_i \cdot \|\tilde{f}_i\|^{-1},$$

$$\tilde{f}_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} (f_i, w_j) w_j,$$

otrzymujemy nowy ciąg zupełny w_n, który jest ortonormalny, tzn. $(w_i, w_j) = 0$ dla $i \neq j$, $(w_i, w_i) = 1$.

Rozwijanie w szereg ortonormalny. Jeżeli ciąg funkcyj $w_1, w_2, \ldots$ należących do $L^2(a, b)$ jest ortonormalny i zupełny, to każda funkcja $g \in L^2(a, b)$ rozwija się w szereg

$$g = (g, w_1) w_1 + (g, w_2) w_2 + \ldots$$

zbieżny w $L^2(a, b)$.

Dowód twierdzenia IV. Z twierdzenia III wynika, że ciąg $f(t-t_n)$ jest zupełny. Po ortonormalizacji Schmidta otrzymany ciąg w_n też jest zupełny, a wyrazami jego są, jak widać z konstrukcji, kombinacje liniowe przesunięć funkcji $f(t-t_n)$. Także sumy częściowe rozwinięcia w szereg ortogonalny są kombinacjami przesunięć tych funkcyj, co dowodzi twierdzenia IV.

5. Aproksymacja przez sploty. Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE V. *Niech* $f \in L^2(0, 1)$ *i* $\int_0^\varepsilon |f| > 0$ *dla każdego* $\varepsilon \in (0, 1)$. *Wówczas zbiór funkcyj* $f * g$, *gdzie* $g \in L^2(0, 1)$, *jest gęsty w* $L^2(0, 1)$.

Twierdzenie to tylko tym różni się od twierdzenia II, że zamiast o $L(0, 1)$ jest o nim mowa o $L^2(0, 1)$. Dowód poprzedzimy znowu pewnym lematem.

LEMAT 4. *Niech* $f \in L^2(-\infty, \infty)$ *i niech* δ_n *będzie ciągiem deltowym, tzn. takim, że*:

1° $\delta_n \in C(-\infty, \infty)$;

2° $\delta_n(x) = 0$ *poza przedziałem* $(-\alpha_n, \alpha_n)$ *przy* $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \to 0$;

3° $\delta_n \geqslant 0$ *w* $(-\alpha_n, \alpha_n)$;

4° $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n = 1$.

Wówczas $\|f * \delta_n - f\| \to 0$ *w* $L^2(-\infty, \infty)$.

W tym lemacie nie musimy zakładać, że rozważane funkcje są równe zeru dla ujemnych wartości argumentu. Również splot może być rozważany ogólnie, mianowicie jako całka od $-\infty$ do ∞. Ponieważ jednak funkcje δ_n są równe 0 poza $(-\alpha_n, \alpha_n)$, splot redukuje się do całki od $-\alpha_n$ do α_n.

Dowód lematu 4. Mamy

$$[(f*\delta_n)(x)-f(x)]^2 = \Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,\delta_n(t)\,dt - f(x)\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(t)\,dt\Big]^2$$

$$\leqslant \Big[\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} |f(x-t)-f(x)|\sqrt{\delta_n(t)}\cdot\sqrt{\delta_n(t)}\,dt\Big]^2$$

$$\leqslant \int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} [f(x-t)-f(x)]^2\,\delta_n(t)\,dt\cdot\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n}\delta_n(t)\,dt.$$

Stąd dla dużych n, takich, że $\alpha_n < 1$, wynika, że

$$\int_{-\infty}^{\infty}[(f*\delta_n)(x)-f(x)]^2\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-1}^{1}[f(x-t)-f(x)]^2\,\delta_n(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1}\delta_n(t)\,dt\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-t)-f(x)]^2\,dx.$$

Na podstawie lematu 2 jest

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-t)-f(x)]^2\,dx < \varepsilon_n \quad \text{dla} \quad |t| < \alpha_n,$$

gdzie $\varepsilon_n \to 0$ przy $n \to \infty$. Zatem

$$\|f*\delta_n - f\|^2 \leqslant \int_{-1}^{1}\delta_n(t)\,\varepsilon_n\,dt = \varepsilon_n \to 0.$$

A to dowodzi lematu 4.

Dowód twierdzenia V. Niech f spełnia warunki twierdzenia V. Rozszerzamy f na $(-\infty, \infty)$ zakładając, że $f = 0$ poza przedziałem $(0, 1)$. Wówczas $f \in L^2(-\infty, \infty)$ i dla kombinacji liniowej (4) mamy

$$w*\delta_m = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau-t_i)\,\delta_m(\tau)\,d\tau = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,\delta_m(\tau-t_i)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\delta_m(\tau-t_i)\,d\tau$$

$$= f*\omega_m,$$

gdzie ω_m należą do $C(-\infty, \infty)$ i zarazem do $L^2(-\infty, \infty)$, a gwiazdka $*$ oznacza splot (3). Wobec lematu 4 mamy więc $\|f*\omega_m - w\| \to 0$ w $L^2(-\infty, \infty)$ i tym samym w $L^2(0, 1)$. Jeżeli ciąg $t_1, t_2, \ldots$ jest gęsty w przedziale $(0, 1)$, to na podstawie twierdzenia IV zbiór kombinacyj liniowych (4) jest gęsty w $L^2(0, 1)$, wobec czego zbiór funkcyj $f*\omega_m$ jest gęsty w $L^2(0, 1)$. Możemy dodatkowo założyć, że $\delta_n = 0$ w $(-\infty, 0)$. Wtedy sploty $f*\omega_m$ redukują się w $(0, 1)$ do splotów (1), co dowodzi twierdzenia V.

Twierdzenie V wynika też z udowodnionego w roku 1968 przez T. K. Boehmego [4] twierdzenia, w którym dla dowolnie zadanej funkcji g z $L^2(0, 1)$ podaje on szereg ortogonalny $\sum \varphi_n$ taki, że szereg $\sum g * \varphi_n$ jest zbieżny do g w $L^2(0, 1)$.

Z twierdzenia V możemy łatwo otrzymać twierdzenie II w następujący sposób:

Dowód twierdzenia II. Niech $f \in L(0, 1)$ i $\int_0^\varepsilon |f| > 0$ dla każdego $\varepsilon \in (0, 1)$. Wówczas $\tilde{f} = f * 1 = \int_0^t f$ jest funkcją ciągłą, a więc $\tilde{f} \in L^2(0, 1)$; nadto $\int_0^\varepsilon |\tilde{f}| > 0$ dla każdego $\varepsilon \in (0, 1)$. Na podstawie twierdzenia V, dla każdego $h \in L^2(0, 1)$ istnieje ciąg $g_n \in L^2(0, 1)$ taki, że $\tilde{f} * g_n \to h$ w $L^2(0, 1)$. Ale

$$\tilde{f} * g_n = (f * 1) * g_n = f * (1 * g_n), \quad \text{gdzie} \quad 1 * g_n \in C[0, 1] \subset L^2(0, 1).$$

Ponieważ h może być wybrane dowolnie w $L^2(0, 1)$, wynika stąd, że zbiór splotów $f * g$, gdzie $g \in L^2(0, 1)$, jest gęsty w $L^2(0, 1)$, a ponieważ zbiór $L^2(0, 1)$ jest gęsty w $L(0, 1)$, więc zbiór splotów $f * g$ jest gęsty w $L(0, 1)$ i twierdzenie II jest dowiedzione.

6. Przypadek funkcyj ciągłych. Twierdzenia analogiczne do twierdzeń IV i V są prawdziwe w przestrzeni $C[0, 1]$ funkcyj ciągłych w $[0, 1]$ przy zbieżności jednostajnej. Ponieważ jednak splot (1) funkcyj ciągłych jest równy 0 w zerze, musimy od razu założyć, że rozważane funkcje ciągłe są równe 0 w zerze. Przestrzeń takich funkcyj oznaczymy przez $C_0[0, 1]$. Także przy aproksymacji przesunięciami $f(t - t_i)$, po to, aby funkcja przesunięta $f(t - t_i)$ była ciągła w $[0, 1]$, musimy założyć, że $f(0) = 0$. Tak więc, dla obu tych typów aproksymacji, czy to przez sploty czy przez kombinacje liniowe przesunięć, naturalną klasą jest $C_0[0, 1]$, a nie $C[0, 1]$.

TWIERDZENIE VI. *Jeżeli* $f \in C_0[0, 1]$ *i* $\int_0^\varepsilon |f| > \varepsilon$ *dla każdego* $\varepsilon \in (0, 1)$, *to zbiór splotów* $f * g$, *gdzie* $g \in C_0[0, 1]$, *jest gęsty w* $C_0[0, 1]$ *w sensie zbieżności jednostajnej.*

Dowód. Funkcja f należy także do $L^2(0, 1)$, a więc na podstawie twierdzenia V zbiór splotów $f * g$, gdzie $g \in L^2(0, 1)$, jest gęsty w $L^2(0, 1)$. Napiszmy $\tilde{g} = \int_0^t g = g * 1$. Wtedy $\tilde{g} \in C_0[0, 1]$, a ciągowi $f * g_n \in L^2(0, 1)$ zbieżnemu w $L^2(0, 1)$ do h odpowiada ciąg $f * g_n * 1$ zbieżny do $h * f$ w $C_0[0, 1]$, tzn. zbieżny jednostajnie. Stąd wynika, że zbiór Z splotów $f * \tilde{g}$, gdzie $\tilde{g} \in C_0[0, 1]$, jest gęsty w zbiorze funkcyj postaci $h * f$. Ale zbiór ten jest

gęsty w $C_0[0, 1]$, skąd wynika, że zbiór Z jest gęsty w $C_0[0, 1]$, co należało udowodnić.

TWIERDZENIE VII. *Niech* $f \in C(-\infty, \infty)$, $f = 0$ *w* $(-\infty, 0)$ *i* $f \not\equiv 0$ *w pewnym prawostronnym otoczeniu punktu* 0. *Wtedy zbiór kombinacyj liniowych* (4), *gdzie* $0 < t_1 < \ldots < t_n < 1$, *jest gęsty w* $C_0[0, 1]$ *w sensie zbieżności jednostajnej.*

Uwaga. Obecne założenie o f zastępuje poprzednie o całce $\int_0^{\varepsilon} |f|$.

Dowód. Z twierdzenia VI wynika, że dla każdej funkcji $g_0 \in C_0[0, 1]$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja g taka, że $|f * g(t) - g_0(t)| < \varepsilon/2$ w $[0, 1]$. Jeżeli $t_i = i/n$ $(i = 0, \ldots, n)$, to z twierdzenia o wartości średniej wynika, że

$$f * g(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(t-\tau_i) g(\tau_i)$$

dla odpowiednio dobranych τ_i z przedziału (t_i, t_{i+1}). Stąd dla $t \in [0, 1]$ mamy

$$\left| f * g(t) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(t-t_i) g(t_i) \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(|f(t-\tau_i) - f(t-t_i)| \cdot |g(t_i)| + |f(t-\tau_i)| \cdot |g(\tau_i) - g(t_i)| \right). \tag{5}$$

Ponieważ funkcje f i g są ciągłe, wyrażenie pod znakiem prawej sumy staje się mniejsze od $\varepsilon/2$ dla dość dużych n, powiedzmy dla $n > n_0$. Wobec tego cała prawa strona w (5) staje się mniejsza niż $\varepsilon/2$ dla $n > n_0$, a stąd

$$\left| g_0(t) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(t-t_i) g(t_i) \right| < \varepsilon \quad \text{dla } t \in [0, 1],$$

co dowodzi twierdzenia VII.

7. Uwagi końcowe. Wszystkie twierdzenia podane w tym artykule, z wyjątkiem być może twierdzenia III, są znane w literaturze. Nowością jest to, że dowody tu podane nie tylko nie korzystają z metod pozaskończonych, ale z dowodów tych wynika sposób konstrukcji funkcyj aproksymujących; natomiast dowody znane w literaturze opierają się swymi podstawami na indukcji pozaskończonej, z wyjątkiem jedynego dowodu w pracy T. K. Boehmego [3]. Udowodnił on tam twierdzenie V (wypowiedziane w nieco innej formie) przez podanie kształtu funkcyj aproksymujących. Ale z jego dowodu żadne dalsze konsekwencje nie były wyciągnięte. Zauważmy, że wszystkie te dowody (zarówno efektywne, jak i nieefektywne) opierają się na twierdzeniu Titchmarsha.

Dodano w korekcie: Profesor C. Ryll-Nardzewski wykazał, że twierdzenie III jest prawdziwe także w przypadku $-\infty = a$, $b = \infty$, a fałszywe, gdy $-\infty < a$, $b = \infty$.

Literatura cytowana

[1] T. K. Boehme, *On sequences of continuous functions and convolution*, Studia Math. 25 (1965), str. 333–347.

[2] –, *On Mikusiński operators*, ibidem 33 (1969), str. 127–140.

[3] –, *The convolution integral*, SIAM Reviews 10 (1968), str. 407–415.

[4] –, *The Mikusiński operators as a topological space*, Amer. J. Math. 98 (1974), str. 55–66.

[5] J. Burzyk, *On convergence in the Mikusiński operational calculus*, Studia Math. 75 (1983), str. 313–333.

[6] –, *On type II convergence in the Mikusiński operational calculus*, ibidem 77 (1984), str. 17–27.

[7] M. M. Crum, *On the resultant of two functions*, Quarterly J. Math. Oxford Ser. 12 (1941), str. 108–111.

[8] J. Dufresnoy, *Sur le produit de composition de deux fonctions*, C. R. Acad. Sci. Paris 225 (1947), str. 857–859.

[9] –, *Autour du théorème de Phragmén-Lindelöf*, Bull. Sci. Math. 72 (1984), str. 17–32.

[10] C. Foiaş, *Approximation des opérateurs de J. Mikusiński par des fonctions continues*, Studia Math. 21 (1961), str. 73–74.

[11] C. K. Kalisch, *A functional analysis proof of Titchmarsh's theorem on convolution*, J. Math. Anal. Appl. 5 (1962), str. 176–188.

[12] W. Kierat, K. Skórnik, *A remark on the Foiaş theorem on convolution*, Bull. Acad. Polon. Sci. 34 (1986), str. 15–17.

[13] J. Mikusiński, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1953.

[14] –, *A new proof of Titchmarsh's theorem on convolution*, Studia Math. 13 (1953), str. 56–58.

[15] –, *Une simple démonstration du théorème de Titchmarsh sur la convolution*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), str. 715–717.

[16] –, *Convolution of functions of several variables*, Studia Math. 20 (1961), str. 301–312.

[17] –, *On the Foiaş theorem on convolution*, Bull. Acad. Polon. Sci. 33 (1985), str. 285–288.

[18] J. Mikusiński, S. Świerczkowski, *Twierdzenie Titchmarsha o splocie i teoria Dufresnoy*, Prace Mat. 4 (1960), str. 59–76.

[19] K. Skórnik, *A theorem on approximation in the class L^p*, Bull. Acad. Polon. Sci. 14 (1966), str. 195–196.

[20] E. C. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions*, Proc. London Math. Soc. 25 (1926), str. 283–302.

[21] K. Yosida, *Operational Calculus*, Springer 1984.

[22] K. Yosida, S. Matsuura, *A note on Mikusiński's proof of the Titchmarsh convolution theorem*, Contemporary Mathematics, 26 (1984), str. 423–425.