ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVII (1987)

JOLANTA ZAWADZKA (Warszawa)

O izometriach w przestrzeni trójwymiarowej

1. Wstęp. Wiadomo, że dowolną izometrię przestrzeni trójwymiarowej można uzyskać jako złożenie nie więcej niż czterech symetrii płaszczyznowych, przy czym istnieją izometrie (ruch śrubowy), które nie są złożeniem mniej niż czterech symetrii płaszczyznowych. Jest również rzeczą znaną, że dowolna izometria płaszczyzny jest złożeniem nie więcej niż trzech symetrii osiowych, przy czym istnieją izometrie (symetria z poślizgiem), które nie są złożeniem mniej niż trzech symetrii osiowych.

W Wiadomościach Matematycznych 13(1971) ukazała się praca Wiesława Mielniczuka i Jerzego Zabilskiego *Izometrie jako złożenia symetrii o osiach należących do sumy pęku i kierunku*. Opierając się na znanym fakcie, że dowolna izometria płaszczyzny jest złożeniem symetrii o osiach należących do sumy dowolnego pęku i dowolnego kierunku, autorzy dowiedli między innymi, że każda izometria jest złożeniem co najmniej czterech symetrii o osiach z tego zbioru.

W niniejszej pracy(*) dowiodę, że podobny rezultat można uzyskać w przestrzeni trójwymiarowej. Otóż okazuje się, że w tym celu wystarczy rozpatrzyć sumę mnogościową wiązki $[p]$, tzn. wszystkich płaszczyzn przechodzących przez dowolny ustalony punkt p, i kierunku $[P]$, czyli wszystkich płaszczyzn równoległych do dowolnej ustalonej płaszczyzny P. Wówczas każdą izometrię przestrzeni można uzyskać ze złożenia nie więcej niż pięciu symetrii względem płaszczyzn ze zbioru $[p] \cup [P]$. Co więcej, istnieją izometrie, które nie są złożeniem mniej niż pięciu symetrii względem płaszczyzn z tego zbioru.

2. Przypomnienie niektórych własności izometrii. Poniższe własności izometrii w przestrzeni trójwymiarowej są dobrze znane, ale trudno byłoby wskazać książkę, gdzie byłyby systematycznie wyłożone.

(*) Jest to praca studencka wykonana w Instytucie Matematyki UW (*przyp. red.*).

Niech S_P oznacza symetrię względem płaszczyzny P. W dalszej części będę korzystać z następujących faktów:

2.1. Dla dowolnych płaszczyzn A, B, C, jeśli $S_B(A) = C$, to $S_A = S_B S_C S_B$.

2.2. Dla dowolnego punktu p i dowolnych płaszczyzn A, B istnieją płaszczyzny C, D takie, że $S_B S_A = S_D S_C$ oraz $C \in [p]$.

2.3. Złożenie czterech symetrii względem płaszczyzn przecinających się w punkcie a jest obrotem wokół pewnej prostej przechodzącej przez punkt a.

2.4. Jeśli dla płaszczyzn A, B, C jest $A \cap B \cap C = \emptyset$, to $S_C S_B S_A$ jest symetrią z poślizgiem.

3. Twierdzenia o rozkładzie izometrii. Ustalmy pewien kierunek $[P]$ i wiązkę $[p]$.

3.1. LEMAT. *Dla dowolnej płaszczyzny A istnieje płaszczyzna $B \in [p]$ taka, że $S_B(A) \in [P]$.*

Dowód. Rozważmy następujące dwa przypadki:

1° $A \notin [P]$. Wówczas za B można przyjąć płaszczyznę przechodzącą przez punkt p i równoległą do płaszczyzny symetrii kąta jaki tworzą płaszczyzny A i P.

2° $A \in [P]$. Wtedy za B wystarczy przyjąć płaszczyznę równoległą do A i przechodzącą przez punkt p.

3.2. LEMAT. *Dla dowolnej płaszczyzny A istnieją płaszczyzny $B \in [p]$ i $C \in [P]$ takie, że $S_A = S_B S_C S_B$.*

Dowód wynika bezpośrednio z 2.1 i 3.1.

Ponieważ dowolną izometrię można uzyskać ze złożenia symetrii płaszczyznowych, zatem z powyższego lematu wynika, że wystarczy ograniczyć się do rozkładu względem płaszczyzn ze zbioru $[p] \cup [P]$.

3.3. LEMAT. *Dla dowolnych płaszczyzn A, B, C istnieją płaszczyzny D, F, H, I, $K \in [p] \cup [P]$ takie, że*

$$S_C S_B S_A = S_K S_I S_H S_F S_D.$$

Dowód. Wobec 2.2 istnieją takie płaszczyzny D, E, że $S_B S_A = S_E S_D$ i $D \in [p]$, oraz takie płaszczyzny F, G, że $S_C S_E = S_G S_F$ i $F \in [p]$. Wówczas $S_C S_B S_A = S_G S_F S_D$ i F, $D \in [p]$. Na mocy 3.2 istnieją takie płaszczyzny H, I, $K \in [p] \cup [P]$ (gdzie $K = H$), że $S_G = S_K S_I S_H$. Zatem $S_C S_B S_A = S_K S_I S_H S_F S_D$, gdzie D, F, H, I, $K \in [p] \cup [P]$.

3.4. LEMAT. *Dla dowolnych płaszczyzn A, B, C, D istnieją płaszczyzny M, N, P, $R \in [p] \cup [P]$ takie, że*

$$S_D S_C S_B S_A = S_N S_M S_R S_P.$$

Dowód. Na mocy 2.2 istnieją płaszczyzny E, F, G, H, I, K takie, że

$$S_B S_A = S_F S_E, \quad S_C S_F = S_H S_G, \quad S_D S_H = S_K S_I$$

oraz E, G, $I \in [p]$. Wówczas $S_D S_C S_B S_A = S_K S_I S_G S_E$. Z 3.2 wynika, że istnieją płaszczyzny L, M, N takie, że L, $N \in [p]$, $M \in [P]$ oraz $S_K = S_N S_M S_L$ $(L = N)$. Stąd

$$S_D S_C S_B S_A = S_N S_M S_L S_I S_G S_E$$

i E, G, I, L, $N \in [p]$ oraz $M \in [P]$. Z 2.3 wiadomo, że $S_L S_I S_G S_E = S_R S_P$ i R, $P \in [p]$. Zatem $S_D S_C S_B S_A = S_N S_M S_R S_P$ oraz M, N, P, $R \in [p] \cup [P]$.

Wobec faktu, że dowolną izometrię przestrzeni można uzyskać ze złożenia co najmniej czterech symetrii płaszczyznowych, bezpośrednią konsekwencją 3.3 i 3.4 jest

3.5. TWIERDZENIE. *Dowolną izometrię przestrzeni trójwymiarowej można uzyskać ze złożenia nie więcej niż pięciu symetrii względem płaszczyzn ze zbioru* $[p] \cup [P]$.

Oznacza to, że dla dowolnego niezdegenerowanego ruchu śrubowego nie ma znaczenia (ze względu na liczbę symetrii), czy rozkładamy go w zbiorze wszystkich symetrii czy też w zbiorze generowanym przez płaszczyzny pewnego pęku i wiązki.

3.6. TWIERDZENIE. *Istnieje izometria, która nie jest złożeniem mniej niż pięciu symetrii względem płaszczyzn ze zbioru* $[p] \cup [P]$.

Dowód. Niech q będzie punktem takim, że $q \neq p$ i $pq \| P$. Wykażę, że szukanym przekształceniem może być izometria S_q (symetria względem punktu q).

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas, ze względu na nieparzystość S_q, istnieją płaszczyzny A, B, $C \in [p] \cup [P]$ takie, że $S_q = S_C S_B S_A$. Rozważmy następujące dwa przypadki:

1° $A \cap B \cap C = \emptyset$. Wówczas na mocy 2.4 $S_C S_B S_A$ jest symetrią z poślizgiem, zatem $S_C S_B S_A \neq S_q$.

2° $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Ponieważ punkty wspólne tych płaszczyzn muszą być punktami stałymi S_q, zatem $q \in A \cap B \cap C$. Wówczas z wyboru punktu q wynika, że A, B, $C \in [p]$. Stąd $S_q(p) = p$, co daje sprzeczność. Izometria S_q nie daje się więc rozłożyć na mniej niż pięć symetrii.

Łatwo zauważyć, powtarzając to samo rozumowanie, że także dowolna symetria obrotowa, której jedynym punktem stałym jest q, nie da się rozłożyć na mniej niż pięć symetrii względem zbioru $[p] \cup [P]$.