ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVII (1987)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ANTONI ZYGMUND (Chicago)

Aleksander Rajchman (1890–1940)

Aleksander Rajchman odegrał w rozwoju matematyki polskiej poważną, choć niestety niedostatecznie docenianą w kraju rolę. Główne osiągnięcia miał on w teorii szeregów trygonometrycznych (w szczególności szeregów Fouriera), funkcji zmiennej rzeczywistej i statystyki matematycznej. Zwłaszcza szeregi trygonometryczne zawdzięczają mu wiele i nazwisko jego jest znane wszystkim, którzy zajmują się tą dziedziną. On sam zajął się tymi szeregami pod wpływem Hugona Steinhausa, którego poznał w czasie swych studiów w Paryżu. Po powrocie do kraju, Steinhaus we Lwowie, a Rajchman w Warszawie stworzyli szkoły, których osiągnięcia były podstawowe dla dalszego rozwoju analizy matematycznej w Polsce.

Pierwszą część niniejszego artykułu poświęcam faktom z życia Rajchmana. W drugiej części omawiam jego główne wyniki matematyczne, ograniczając się do jego prac z teorii szeregów trygonometrycznych i funkcji zmiennej rzeczywistej. O jego pracach z dziedziny statystyki i ekonometrii nie będę tu pisał, gdyż zasługują one na omówienie przez specjalistów i mam nadzieję, że doczekają się takiego omówienia.

Aleksander Rajchman urodził się 13 listopada 1890 z ojca (również Aleksandra) Rajchmana i matki Melanii Anieli Hirszfeld. Pochodził z zamożnej, inteligenckiej, całkowicie spolszczonej rodziny warszawskiej pochodzenia żydowskiego. Ojciec jego był przez wiele lat dyrektorem Filharmonii Warszawskiej([1]). Starszy brat, Ludwik Rajchman, był przez pewien czas

([1]) W *Encyklopedii Warszawy* (PWN, 1975) znajdujemy następujące informacje:

Rajchman Aleksander, pseud. *Mefisto* (ur. 1855 Warszawa, zm. 1915 tamże) działacz kulturalny, pisarz, publicysta; 1883 założyciel i redaktor tygodnika *Echo Muzyczne, Teatralne i Artystyczne*; 1891–96 kierownik Klasy Dykcji i Deklamacji przy Warszawskim Towarzystwie Muzycznym; 1901 inicjator, współorganizator i pierwszy dyrektor Filharmonii Warszawskiej.

Rajchman Aleksander (ur. 13 XI 1890 Warszawa, zm. ok. 1940 w Sachsenhausen), syn Aleksandra, brat Heleny Radlińskiej, matematyk, działacz ruchu robotniczego, studiował m. in. we Francji i Niemczech; w okresie międzywojennym nauczyciel szkół średnich w Warszawie; od 1926 docent matematyki na UW, prowadził wykłady z teorii prawdopodobieństwa; w latach trzydziestych działacz KPP, 1937 wystąpił z partii, pod koniec 1939 aresztowany przez hitlerowców, więziony m. in. w al. Szucha w Warszawie; zginął w obozie koncentracyjnym (*przyp. red.*).

zatrudniony w Lidze Narodów, w dziale Higieny([2]). Siostra – Helena Radlińska – była znanym pedagogiem, działaczką społeczną i publicystką polityczną (inicjatorką gromadzenia polskiego dorobku w dziedzinie oświaty dla dorosłych).

Matematyk Rajchman (tylko o nim tu piszemy) uczy się najpierw w Warszawie, kończąc tam III gimnazjum (rządowe). Później studiuje w Paryżu na Sorbonie (*licencié ès sciences*, 1910), a po powrocie do kraju zostaje najpierw (1919) młodszym, a po otrzymaniu doktoratu (1921) starszym asystentem przy katedrze matematyki na Uniwersytecie Warszawskim. Stanowisko to zajmuje aż do wybuchu wojny w 1939 r. W międzyczasie (1925) habilituje się na Uniwersytecie Warszawskim oraz zostaje (1922) profesorem na Wolnej Wszechnicy w Warszawie.([3])

Wspomniałem już, że Rajchman miał duży wpływ na rozwój analizy matematycznej w środowisku warszawskim. Jego najbliższymi współpracownikami byli m. in. Stanisław Saks, Zygmunt Zalcwasser (obaj zamordowani przez okupantów hitlerowskich), Halina Grużewska i autor niniejszego artykułu. Pomimo pewnych animozji politycznych([4]), miał też Rajchman bliski

([2]) *Wielka Encyklopedia Powszechna PWN* (t. 9, str. 687) podaje: Rajchman Ludwik, ur. 1881 w Krakowie, zm. 13. VII. 1965 w Chenu (Francja), lekarz bakteriolog i higienista, założyciel i pierwszy dyrektor Państwowego Zakładu Higieny; 1910–13 główny bakteriolog Royal Institute of Public Health w Londynie; 1920–21 brał udział w organizowaniu Komisji Epidemiologicznej Ligi Narodów, a 1921 został dyrektorem Sekcji Zdrowia Ligi Narodów; podczas II wojny światowej pracował naukowo i społecznie w USA, m. in. w UNRRA; dzięki jego działalności Polska otrzymała wyposażenie pierwszej fabryki antybiotyków; współdziałał w utworzeniu Funduszu Narodów Zjednoczonych Pomocy Dzieciom (UNICEF) i był pierwszym prezesem jego Rady Zarządzającej.

Długi wywiad z jego córką opublikowała Kobieta i Życie 7 (1986) (*przyp. red.*).

([3]) *Encyklopedia Warszawy* podaje: Wolna Wszechnica Polska (WWP), prywatna uczelnia akademicka w Warszawie, założona 1919 przez Towarzystwo Kursów Naukowych; miała wydziały: Matematyczno-Przyrodniczy, Humanistyczny, Nauk Politycznych i Społecznych (potem Prawa i Nauk Ekonomiczno-Społecznych) i Pedagogiczny; mieściła się w gmachu TNW przy ul. Śniadeckich; pierwszym rektorem WWP był L. Krzywicki (...) WWP przeznaczona była głównie dla pracujących, wykłady i zajęcia odbywały się w zasadzie po południu; słuchaczy w Warszawie było: 1920 ok. 1100, 1930 ok. 700, 1938 ok. 2500 (...) Podczas okupacji hitlerowskiej niektóre wydziały WWP prowadziły tajne nauczanie; po wyzwoleniu WWP nie podjęła działalności (*przyp. red.*).

([4]) W liście Zygmunta Janiszewskiego z 20 października 1919 (preprint IM PAN, seria C, nr 1 z 1980 r., str. 26) czytamy: m. in.: *Mniej przyjemne chwile czekały mnie wkrótce potym. Spotkałem Mazurkiewicza, zajmującego takąż jak ja katedrę nadzwyczajną matematyki: jest on moim rówieśnikiem (najmłodszym na naszym uniwersytecie), moim kolegą z Getyngi i poniekąd moim uczniem z owego czasu (ode mnie czerpał tematy pierwszych swoich prac), obecnie według mojego zdania najlepszym matematykiem polskim i jednym z najinteligentniejszych ze znanych mi ludzi, z którym przeważnie zgadzam się w poglądach, wyjąwszy politycznych (on jest konserwatysta): po za tym jest to zupełny burżuj. On nawzajem uważa mnie, a przynajmniej uważał, za najlepszego (pewnie: po sobie) matematyka polskiego (tworzymy bractwo wzajemnej adoracji) i nazywał mnie swym przyjacielem: ja, który w przyjaźń kładłem całego siebie i wszystkie siły swego uczucia, nie szafuję tak tym wyrazem: lecz mam też dla niego pewien sentyment. Piszę to, żeby wykazać, zależałoby mi na dobrych z nim stosunkach. Te zaś wobec zajścia, które w chwilę po tym*

kontakt matematyczny z profesorem Sierpińskim([5]) i Mazurkiewiczem oparty na wspólnych zainteresowaniach funkcjami zmiennej rzeczywistej.

Po habilitacji Rajchman prowadził oficjalne wykłady z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej i rachunku prawdopodobieństwa. Przedtem prowadził ćwiczenia, a także nieoficjalny wykład, raczej seminarium, na który przychodziło 2–3 słuchaczy, m. in. Wundheiler i ja.

Rajchman był bardzo ciekawym człowiekiem, ogromnie życzliwym w stosunku do studentów, a także bardzo utalentowanym matematykiem. Nie miał jednak opinii dobrego wykładowcy. Nie mówił płynnie, niezbyt dobrze był zorganizowany.

Rajchman wprowadził mnie w teorię szeregów trygonometrycznych, było to gdzieś w latach 1921–1922. Na niego zaś duży wpływ wywarł wcześniej w Paryżu Hugon Steinhaus. Rajchman wspominał, że rozmawiał z Lebesgue'em i spytał go raz o źródło informacji o szeregach Fouriera. Lebesgue odpowiedział: *consultez un certain monsieur Steinhaus* (w jego wymowie brzmiało to coś jakby „Steno").

Nieco powtarzając się, przytoczę wyjątek z listu (z 26 lutego 1961) prof. Steinhausa do dr Haliny Grużewskiej, w odpowiedzi na jej prośbę o wspomnienia. ... *O ile pamiętam, zapoznałem się z Aleksandrem Rajchmanem w Paryżu w r. 1912, za pośrednictwem Henryka Lauera*([6]). *Obaj studjowali matematykę na Sorbonie. Ojciec Rajchmana był dyrektorem Filharmonji warszawskiej i zamożnym człowiekiem. Starszy brat Aleksandra, Ludwik (zwany popularnie „Lulu") był później zatrudniony w Lidze Narodów i uprawiał samodzielną politykę przy tej okazji... Siostra Aleksandra była żoną Radlińskiego, autora książki „Dzieje jednego Boga"*([7]). *W roku 1912 spacerowałem*

---

miało miejsce, wątpię, aby się dały utrzymać. Za chwilę spotkaliśmy świeżo mianowanego przez nas (nawiasem mówiąc, za moim staraniem) asystenta, mego kolegę z Paryża i przyjaciela politycznego. Mazurkiewicz zaczął z nim prowokującą rozmowę polityczną, która zakończyła się rozejściem ich bez pożegnania. Pewnie jest w tym moja wina, że nie umiałem w czas przerwać tej ich rozmowy. Podczas niej zachowałem się spokojnie, ale wyszedłszy z Mazurkiewiczem i wykazując mu, że sam sprowokował całe zajście, mówiłem już mocno podrażniony. On mówił mi zaś, że nie dopuści do habilitacji na docenta tego asystenta itp. I przy dzisiejszym nastroju opinji będzie mógł to zrobić. Poczułem całą niepewność swojej sytuacji zarazem. Bezpośrednio wprawdzie nic mi na samym uniwersytecie nie może grozić, lecz możliwym jest zajście takiej sytuacji, w której mi nie pozostanie nic innego, jak trzasnąć drzwiami i rzucić uniwersytet.

Prof. Kuratowski wyjaśnił, że owym asystentem był Rajchman (*przyp. red*).

([5]) W przygotowanym do druku artykule A. Derkowskiej o Hermanie Auerbachu czytamy, że Rajchman postawił raz problem dotyczący pochodnych uogólnionych, który częściowo rozwiązał Sierpiński; kontynuował te badania Banach, a jego dowód uprościł Auerbach (*przyp. red.*).

([6]) Por. poniższy artykuł W. Piotrowskiego o Axerze i Lauerze (*przyp. red.*).

([7]) Informacja ta nie jest prawdziwa. Doc. Hanna Szmuszkowicz, która znała osobiście Radlińskich, twierdzi, że mąż Heleny był chirurgiem, profesorem UW, miał klinikę w szpitalu św. Ducha przy ul. Elektoralnej. Tę samą informację podaje *Encyklopedia Warszawy*: Helena Radlińska (1879–1954) była żoną Zygmunta Radlińskiego, chirurga (1874–1941), natomiast autorem *Dziejów jednego Boga* był Ignacy Radliński (1843–1920) (*przyp. red.*).

wiosną z Rajchmanem w ogrodzie Luksemburskim — zapytał mnie „Co to takiego szeregi Fouriera?" — Wiedział, że zajmuję się szeregami trygonometrycznymi, od Lauera ... Wyjaśniłem mu moją problematykę, o ile można było w ciągu spaceru...

Jak wiadomo, później Rajchman uprawiał z powodzeniem teorię szeregów trygonometrycznych. Antoni Zygmund z kolei od niego się jej nauczył. Pierwsze prace Rajchmana, które cytuje Zygmund, mają dość późną datę: podczas pierwszej wojny światowej trudno było publikować.

Jako asystent, później docent Uniwersytetu Warszawskiego, Rajchman zajmował się także rachunkiem prawdopodobieństwa. Zwalczał ograniczenie matematyki do teorii mnogości i funkcyj rzeczywistych oraz topologji, które przybrało niepokojące formy w ówczesnej szkole warszawskiej. Na tym tle, ale także i na tle politycznym, miał ciągłe konflikty, zwłaszcza z profesorem Mazurkiewiczem. Był wojującym komunistą. Miewał dosyć niezwykłe pomysły — np. pewnego razu zażądał od związku docentów, żeby przyłączyli się do strajku organistów i dzwonników kościelnych... Jeden z takich pomysłów naraził go na dochodzenie dyscyplinarne([8]), *ale Rajchman nie uznał kompetencji komisji*

([8]) Doc. Hanna Szmuszkowicz poinformowała Redakcję, że Rajchman został zawieszony za opublikowanie w lewicowym Dzienniku Popularnym listu potępiającego ekscesy antysemickie na wyższych uczelniach i bierność władz w tej sprawie. Bezpośrednim bodźcem do listu było to, że jakaś studentka (nb. nie-Żydówka), która protestowała przeciwko gettu ławkowemu (tzn. specjalnymi miejscami dla studentów-Żydów), została pobita przez studenta Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego. Dziekan, poinformowany przez Rajchmana o incydencie, nie zareagował; co więcej, po kilku dniach ów student dostał od niego stypendium. Gdy Rajchman został zawieszony, grupa matematyków (Kożniewski, Lindenbaum, Lubelski, Poprużenko, Saks, Szmuszkowicz, Waraszkiewicz, Zalcwasser i inni) napisała list protestacyjny.

W swym liście, opublikowanym 19 października 1936, Rajchman pisze m. in.: *Uchwał i deklaracji „potępiających ekscesy" było wiele, jednakże uchwały takie i deklaracje z reguły przemilczały rzecz najważniejszą, a mianowicie kwestię odpowiedzialności za to, że od lat na wyższych uczelniach hulają bezkarnie szajki osobników, których nie toleruje się normalnie nawet na terenie podrzędnych szynków podmiejskich. Dla każdego, kto styka się z życiem szkół wyższych, odpowiedzialność bezpośrednia jest tu zupełnie jasna i bezsporna. Odpowiedzialność tę ponoszą w pierwszej linii władze akademickie. Z władzami akademickimi dzielą tę odpowiedzialność te czynniki, które władze akademickie powołują i które wpływają na ich działalność, a więc personel wykładający szkół wyższych oraz władze nadzorcze, które — zwłaszcza od czasu wprowadzenia w życie obowiązującej obecnie ustawy akademickiej — w sposób decydujący wpływają na skład osobowy i całą działalność władz akademickich.*

Dalej Rajchman opisuje typowy przebieg ekscesów, dzieląc je na trzy etapy: najpierw agitacja pogromowa i szykanowanie przez władze uczelni tych, co się temu przeciwstawiają; potem małe ekscesy („przepychanie" Żydów na ławki z lewej, zrywanie wykładów) i wreszcie, po sparaliżowaniu obrony czynnej przychodzą ekscesy „prawdziwe", z użyciem pałek, noży itp.

Sprawa A. Rajchmana była szczegółowo referowana na łamach Dziennika Popularnego (w numerach z 8, 22 i 23 listopada i 18 grudnia 1936 r. oraz z 15 i 19 stycznia oraz 14 lutego 1937 r.).

W konsekwencji owej publikacji, władze zawiesiły od 4 listopada 1936 r. wykład z rachunku prawdopodobieństwa prowadzony przez Rajchmana, a przeciw niemu wszczęto postępowanie dyscyplinarne za naruszenie ustawy o szkołach akademickich (*przyp. red.*).

dyscyplinarnej, bo według ustawy była ona właściwa tylko dla profesorów([8a]).

Nie znam szczegółów z okresu okupacji 1939–1945 i nie wiem, jak, gdzie i kiedy zginął Rajchman. Może prof. Zygmund uzupełni tę relację.

Aleksander Rajchman zmarł w roku 1940, zamordowany przez okupantów niemieckich w obozie Sachsenhausen-Oranienburg([9]). Zostawił po sobie żonę Wiktorię, z domu Rosińską, którą poznał w czasie swych studiów w Paryżu([10]); po powrocie do kraju była ona nauczycielką matematyki w Łodzi([11]).

2. Przechodzę teraz do omówienia głównych osiągnięć Rajchmana w teorii szeregów trygonometrycznych

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}. \tag{1}$$

Ograniczę się tu do kilku twierdzeń ilustrujących jego wyniki.

Istnieje wiele pierwszorzędnych monografii poświęconych tej teorii, ale najwygodniej nam będzie odsyłać czytelnika, w razie potrzeby, do książki autora: A. Zygmund, *Trigonometric Series* (Cambridge University Press, Cambridge 1977, 2 tomy, str. 383+364), gdzie wyniki Rajchmana są bardziej szczegółowo omawiane. Książkę tę będziemy cytować jako [TS].

([8a]) Nieuznanie przez Rajchmana kompetencji komisji senackiej spowodowało, że w połowie lutego 1937 r. minister Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego podpisał nowe rozporządzenie o postępowaniu dyscyplinarnym w stosunku do docentów państwowych szkół akademickich. Fakt ten wypadł jednak na korzyść Rajchmana, zgodnie z zasadą, że prawo nie działa wstecz. W marcu jego wykłady zostały przywrócone (*przyp. red.*).

([9]) W nekrologu w Fundamenta Mathematicae 33 (1945) podane jest błędnie, że Rajchman zmarł w Dachau (*przyp. red.*).

([10]) Doc. Hanna Szmuszkowicz poinformowała Redakcję, że Rajchman został aresztowany pewnego ranka w kwietniu 1940 r. Gestapo przyszło do jego (przedwojennego) mieszkania przy ul. Zajęczej. Zaraz po aresztowaniu, żona Rajchmana, Wiktoria, przyszła z wiadomością o tym do Hanny Szmuszkowicz i jeszcze tego samego dnia przeniosła się do Urszulanek, gdzie uprzednio znalazła schronienie Helena Radlińska, siostra Aleksandra. Obie przebywały u Urszulanek do Powstania. Po wojnie mieszkały w Łodzi. Z obozu w Oranienburgu przyszła wiadomość o śmierci Rajchmana; prawdopodobnie zmarł on w lipcu lub sierpniu 1940 r. (*przyp. red.*).

([11]) W materiałach do Polskiego Słownika Bibliograficznego znajdujemy następujące dalsze informacje, zebrane przez Jerzego Kubiatowskiego i Waleriana Piotrowskiego:

Aleksander Rajchman propagował stosowanie rachunku prawdopodobieństwa w badaniach statystycznych. Polemizował z teorią koniunktury Michała Kaleckiego (1933). Jego książka [40] została dość mocno skrytykowana przez J. Wiśniewskiego (Kwartalnik Statystyczny 1938, str. 237–241).

W latach 1930–1935 Rajchman redagował dział zadań w czasopiśmie Mathesis Polska, zamieszczając wiele własnych zadań.

Jego żona, Wiktoria z Rosińskich, była po wojnie kierowniczką biblioteki Instytutu Filmowego w Łodzi; zmarła w 1949 r. (*przyp. red.*).

Przez *sumę*, zwykłą lub uogólnioną, szeregu (1) rozumiemy granicę, zwykłą lub uogólnioną, symetrycznych sum cząstkowych

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx},$$

gdy $n \to \infty$. Szereg (1) często piszemy w postaci

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{2}$$

gdzie

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = i(c_k - c_{-k}) \qquad (k > 0), \tag{3}$$

i zazwyczaj wtedy zakładamy, że a_k i b_k są rzeczywiste. Przez x rozumiemy systematycznie zmienną rzeczywistą. Ponieważ wszystkie wyrazy szeregu (1) mają okres 2π, wygodnie jest rozważać ten szereg, jak również różne funkcje i zbiory z nim związane, na obwodzie koła jednostkowego, identyfikując punkty x i y, gdy $x \equiv y \pmod{2\pi}$. Przez *dopełnienie zbioru punktów* rozumiemy dopełnienie do obwodu koła jednostkowego.

Z każdą funkcją $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, okresową, o okresie 2π, całkowalną na okresie, możemy skojarzyć jej szereg Fouriera (1), gdzie

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

to współczynniki Fouriera funkcji f. Tej samej nazwy używamy również w stosunku do liczb

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

(cosinusowe i sinusowe współczynniki Fouriera). Jeżeli funkcja f jest „dobra", to jej szereg Fouriera jest zbieżny, nawet jednostajnie, do f. Jeżeli o funkcji f zakładamy tylko całkowalność (powiedzmy w sensie Lebesgue'a), to jej szereg Fouriera może być rozbieżny wszędzie, ale w każdym razie jest prawie wszędzie, tzn. wszędzie z wyjątkiem zbioru punktów miary 0, sumowalny do $f(x)$ metodą pierwszej średniej arytmetycznej, tj. prawie wszędzie

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1} = s.$$

To są podstawowe fakty *fourierowskiej teorii* szeregów trygonometrycznych (por. [TS], rozdziały II i III).

Obok niej mamy *teorię riemannowską*, która bada własności szeregów trygonometrycznych (1) i (2) ogólnych, niekoniecznie fourierowskich. Pierwsze twierdzenia tu zawdzięczamy Riemannowi, który skoncentrował swą

uwagę na szeregach trygonometrycznych o współczynnikach dążących do 0, gdy wskaźnik dąży do nieskończoności.

Główny pomysł Riemanna to rozważanie obok szeregu (1) funkcji

$$F(x) = \tfrac{1}{2}c_0 x^2 - \sum_{k \neq 0} k^{-2} c_k e^{ikx}, \tag{4}$$

otrzymanej przez formalne dwukrotne przecałkowanie wyraz po wyrazie szeregu (1). Ze względu na założenie $c_k \to 0$, nowy szereg jest zbieżny jednostajnie i jego suma $F(x)$ jest funkcją ciągłą. Mamy tu dwa podstawowe twierdzenia Riemanna:

(A) *Jeżeli szereg* (1), *gdzie* $c_k \to 0$, *jest zbieżny w punkcie* x_0 *do skończonej sumy* s, *to*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)}{h^2} = s. \tag{5}$$

(B) *Dla dowolnego szeregu* (1), *zbieżnego lub nie, ale mającego współczynniki* c_k *dążące do* 0, *zachodzi jednostajnie względem* x

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h} = 0. \tag{6}$$

Granicę (5) nazywa się często *drugą pochodną uogólnioną* funkcji F w punkcie x_0, albo *pochodną Riemanna–Schwarza* i sens twierdzenia (A) jest oczywisty. Warunek (6) staje się bardziej zrozumiały, jeżeli napiszemy go w postaci

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \frac{F(x-h)-F(x)}{-h} \right\} = 0.$$

Wyraża on pewną „gładkość" funkcji F w punkcie x, gdyż mówi, że iloraz różnicowy $[F(x+h)-F(x)]/h$ zachowuje się podobnie niezależnie od tego, czy h dąży do 0 przez wartości dodatnie czy przez ujemne. W szczególności, jeżeli F ma w punkcie x pochodną jednostronną, to ma tam równą jej pochodną dwustronną. Wykres funkcji F nie może więc mieć „punktów kątowych". Z tego powodu warunek (6) nazywa się często *warunkiem gładkości* funkcji F w punkcie x, a funkcje ciągłe spełniające ten warunek w każdym punkcie przedziału otwartego nazywają się *funkcjami gładkimi* w tym przedziale. Tak więc twierdzenie (B) mówi, że podwójnie przecałkowany szereg trygonometryczny o współczynnikach dążących do 0 jest zbieżny do funkcji gładkiej.

Rajchman doszedł do teorii różniczkowalności funkcji poprzez teorię szeregów trygonometrycznych; jemu i jego uczniom zawdzięczamy rozwinięcie teorii funkcji gładkich i uwidocznienie ważnej roli, którą odgrywają one w Analizie.

Pojęcie gładkości występuje implicite już w pracach Riemanna, ale jego rolę w ogólnej teorii funkcji odkryto stosunkowo niedawno i pierwsze tu osiągnięcia zawdzięczamy Rajchmanowi.

Rozważmy teraz jakiś szereg trygonometryczny (1) o współczynnikach dążących do 0 i przypuśćmy, że nasz szereg jest wszędzie zbieżny do 0. W myśl twierdzenia (A) funkcja ciągła F ma drugą pochodną uogólnioną równą zeru wszędzie, a więc na zasadzie elementarnego twierdzenia musi być funkcją liniową. Ponieważ jest jednak funkcją ograniczoną (przypominamy, że $c_k \to 0$), wnioskujemy, że $c_0 = 0$. Ostatni krok: funkcja $\sum_{k \neq 0} c_k k^{-2} e^{ikx}$ jest liniowa i ograniczona, a więc musi być stała. Stąd natychmiast wynika, że $c_k = 0$ również i dla $k \neq 0$, a więc szereg (1) znika identycznie.

Udowodniliśmy więc, że *szereg trygonometryczny wszędzie zbieżny do* 0 *znika identycznie* (twierdzenie Cantora). Naturalnie jest pytanie, co można powiedzieć o szeregu trygonometrycznym zbieżnym do 0 wszędzie, prócz może jednego punktu x_0? Konkluzja jest ta sama, gdyż nasza funkcja F jest ciągła i jest liniowa na prawo i na lewo od punktu x_0, a ponieważ jest gładka w punkcie x_0, musi być liniowa w otoczeniu punktu x_0, a więc liniowa wszędzie.

Zbiór E punktów na kole jednostkowym nazywać będziemy *zbiorem jednoznaczności* albo *zbiorem* U, jeżeli zbieżność szeregu trygonometrycznego do 0 w dopełnieniu zbioru E pociąga za sobą identyczne znikanie szeregu. W przeciwnym razie zbiór E nazywamy *zbiorem wieloznaczności* albo *zbiorem* M. Dotychczas nierozwiązanym jest zagadnienie charakteryzacji strukturalnej zbiorów U i M, ale Rajchmanowi zawdzięczamy tu pewne ważne wyniki.

Udowodniliśmy powyżej, że zbiór E składający się z jednego punktu jest zbiorem U. Ten sam dowód wykazuje, że każdy zbiór skończony jest typu U. Z podobnego rozumowania wynika, że każdy zbiór *przywiedlny*, to jest taki, którego pewna pochodna rzędu skończonego lub pozaskończonego jest pusta, jest typu U. Ale wszystkie takie zbiory są co najwyżej przeliczalne i W. H. Youngowi zawdzięczamy ważny wynik, że każdy zbiór przeliczalny jest zbiorem U.

Jaka jest sprawa ze zbiorami nieprzeliczalnymi? Ograniczając się do zbiorów mierzalnych w sensie Borela (inne nie są tu interesujące), można wykazać, że każdy zbiór miary dodatniej jest zbiorem wieloznaczności. Pozostaje więc badanie zbiorów miary 0, w pierwszym rzędzie domkniętych.

W 1916 r. Mieńszow zbudował szereg trygonometryczny nie znikający tożsamościowo, ale zbieżny do 0 w dopełnieniu pewnego zbioru doskonałego miary 0. Ten zbiór jest więc zbiorem M. W swej pracy [9] Rajchman wykazuje, że *szereg trygonometryczny zbieżny do* 0 *w dopełnieniu zbioru trójkowego Cantora zbudowanego na odcinku* $[0, 2\pi]$ *musi znikać identycznie*. Tak więc zbiór trójkowy Cantora (klasyczny zbiór doskonały miary zero) jest zbiorem jednoznaczności. Stajemy wobec faktu, że wśród zbiorów doskona-

łych miary 0 mamy zarówno typ M, jak i U. Na czym polega różnica w ich budowie? Zagadnienie to nie jest dotychczas całkowicie rozwiązane, ale wspomniany przed chwilą wynik Rajchmana jak i jego uogólnienia (o czym niżej) rzucają pewne światło na sytuację.

Nowe podejście do tej problematyki oparte jest na twierdzeniu Rajchmana o formalnym mnożeniu szeregów trygonometrycznych o współczynnikach dążących do zera. W szczególności można było tą drogą otrzymać wcześniejsze wyniki Riemanna, jak i rozwiązać inne problemy, dla których nie dało się stosować klasycznej metody Riemanna.

Rozważmy dwa szeregi:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}. \tag{7}$$

Szereg $\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ nazywamy *iloczynem formalnym* szeregów (7), jeżeli

$$C_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p \gamma_{n-p} \quad \text{dla } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

i szereg określający C_n jest bezwzględnie zbieżny dla każdego n. To na pewno zachodzi, gdy np. współczynniki c_n są ograniczone oraz $\sum|\gamma_n| < \infty$. Jeżeli $c_n \to 0$ oraz $\sum|\gamma_n| < \infty$, to można łatwo wykazać, że również $C_n \to 0$.

Twierdzenie Rajchmana (por. [TS], rozdział IX). *Załóżmy, że*

$$c_n \to 0 \quad \textit{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |n\gamma_n| < \infty$$

Oznaczmy

$$\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{inx}, \qquad C_n^*(x) = C_n - \lambda(x) c_n.$$

Wówczas $\sum C_n^*(x) e^{inx}$ *jest wszędzie zbieżny do* 0, *jednostajnie względem* x. *W szczególności, jeżeli* $\lambda(x) = 0$ *na jakimś zbiorze* E, *to szereg* $\sum C_n e^{inx}$ *jest zbieżny do zera jednostajnie na* E.

Wynik ten ma wiele ciekawych konsekwencji (por. [TS], rozdział IX). W szczególności (w połączeniu z twierdzeniem o wpływie mnożenia formalnego na zachowanie się tzw. *szeregów sprzężonych* do szeregów trygonometrycznych) daje on następujące twierdzenie: *Dla każdego zbioru domkniętego* E *na okręgu jednostkowym istnieje szereg potęgowy* $\sum \alpha_n z^n$, *o współczynnikach* α_n *dążących do zera, który jest zbieżny w punktach* $z \in E$, *a rozbieżny w pozostałych punktach okręgu jednostkowego.*

Powróćmy do zbiorów jednoznaczności. Przez *część ułamkową* liczby rzeczywistej x rozumiemy liczbę $x-[x]$, gdzie $[x]$ jest częścią całkowitą

liczby x. Niech a i d będą liczbami rzeczywistymi, przy czym $0 < d < 1$. Dla każdej liczby naturalnej n rozważmy zbiór $E_n(a, d)$ wszystkich punktów $x \in \boldsymbol{R}$ takich, że część ułamkowa liczby $n(x-a)/(2\pi)$ jest $\leqslant d$. Zbiór $E_n(a, d)$ składa się z rozłącznych odcinków domkniętych o jednakowej długości $2\pi d/n$, równoodległych w odległościach $2\pi(1-d)/n$.

Przez *zbiór typu H* rozumiemy każdy taki zbiór E liczb rzeczywistych, który można przedstawić jako część wspólną przeliczalnego ciągu zbiorów $E_{n_k}(a_k, d_k)$, gdzie $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ oraz $\sup d_k < 1$. Klasycznym przykładem zbioru typu H jest zbiór, który mod 2π jest zbiorem trójkowym Cantora na odcinku $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Łatwo wykazać, że zbiory typu H są domknięte i miary zero.

Uogólniając wyżej wymienione twierdzenie, że trójkowy zbiór Cantora jest zbiorem jednoznaczności, Rajchman udowodnił, że *każdy zbiór typu H jest zbiorem jednoznaczności.*

Jest to podstawowy wynik, który sygnalizował duże znaczenie teorii liczb dla teorii szeregów trygonometrycznych. Co więcej, Rajchman wykazał, że zbiory typu H mają następującą własność: *jeżeli szereg trygonometryczny jest zbieżny wszędzie poza zbiorem typu H do funkcji skończonej i całkowalnej (na okręgu jednostkowym), to jest on szeregiem Fouriera tej funkcji.*

Przez *zbiór typu* H_σ rozumiemy sumę skończoną lub przeliczalną zbiorów typu H. Jest to więc też zbiór miary zero. Klasyczne twierdzenie Cantora–Lebesgue'a mówi, że *jeżeli* $(a_n^2+b_n^2)^{1/2}$ *nie dąży do zera, to szereg* (2) *może być zbieżny tylko w zbiorze miary zero.* Wzmacniając ten wynik, Rajchman udowodnił, że *zbiór punktów zbieżności szeregu* (2) *jest wtedy typu* H_σ.

Rajchman otrzymał również wiele twierdzeń dotyczących jednoznaczności szeregów trygonometrycznych niekoniecznie zbieżnych, ale sumowalnych jakąś metodą, np. metodą Abela. Metoda ta określa sumę szeregu (2) jako

$$\lim_{r \to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

W tym wypadku nawet zbiór pusty nie jest zbiorem jednoznaczności, jak to pokazuje przykład szeregu $\sum k \sin kx$, który jest wszędzie sumowalny do zera metodą Abela, co widać ze wzoru

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k \sin kx = \frac{r(1-r^2)\sin x}{(1-2r\cos x+r^2)^2},$$

por. [TS], t. I, str. 352. Rajchman wykazał jednak, że jeżeli współczynniki szeregu (2) są rzędu $o(k)$ przy $k \to \infty$ (tzn. $a_k/k \to 0$ i $b_k/k \to 0$) oraz szereg jest sumowalny metodą Abela do funkcji f skończonej i całkowalnej (na okręgu jednostkowym), to (2) jest szeregiem Fouriera tej funkcji. W szczególności, jeżeli $f \equiv 0$, to $a_k = b_k = 0$ dla wszystkich k.

Rajchman zajmował się też teorią tzw. *szeregów Fouriera–Stieltjesa*, tj. szeregów (1), gdzie

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\mu,$$

dla pewnej zespolonej miary borelowskiej μ na okręgu jednostkowym. Szeregi takie odgrywają dużą rolę w teorii jednoznaczności szeregów trygonometrycznych. Współczynniki c_k takiej miary nie muszą dążyć do zera, ale są ograniczone. Rajchman [23] udowodnił, że $c_k \to 0$ przy $k \to -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_k \to 0$ przy $k \to +\infty$. Ten sam wynik uzyskała inną metodą uczennica Rajchmana, dr Halina Grużewska (opublikowała to w Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. w 1928 r.). Do tego twierdzenia Rajchmana–Grużewskiej nawiązują K. de Leeuw i Y. Katznelson w pracy *The two sides of a Fourier–Stieltjes transform and almost idempotent measures*, Israel J. Math. 8 (1970), str. 213–229, oraz H. Helson w książce *Harmonic Analysis*, Addison-Wesley, London 1983, str. 163.

Powyższe twierdzenia to bardzo niekompletny przegląd wyników Rajchmana z teorii szeregów trygonometrycznych. Celem tego artykułu było przede wszystkim pokazanie kierunków, w których szły prace Rajchmana([12]). Prócz tego, jak wspomniałem, zajmował się on statystyką i ekonometrią i napisał kilka prac z tej dziedziny.

Spis prac Aleksandra Rajchmana*

[1] *Eine Erweiterung des de la Vallée–Poissonschen Eindeutigkeitsatzes der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Monatsh. f. Math. u. Physik 26 (1915), str. 263–288.

[2] *O różniczkowalności szeregów Fouriera wyraz za wyrazem*, Prace Mat.-Fiz., 28 (1917), str. 213–220.

[3] *O Riemann'owskiej zasadzie umiejscowienia*, Sprawozdania z Posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydział III nauk matematyczno-fizycznych 11 (1918), str. 115–152.

[4] *O szeregach trygonometrycznych sumowalnych metodą Poissona*, Prace Mat.-Fiz. 30 (1919), str. 19–88.

[5] *Uogólnienie twierdzenia trygonometrycznego G. Cantora*, Wiadom. Mat. 24 (1920), str. 29–49.

[6] *O pewnym twierdzeniu Hardy'ego i Littlewood'a dotyczącem »Uogólnienia twierdzenia trygonometrycznego G. Cantora«*, Wiadom. Mat. 25 (1921), str. 139–140.

[7] *Une remarque sur les fonctions monotones*, Fund. Math. 2 (1921), str. 50–63 (Reconnaissance du droit de l'auteur, Fund. Math. 3 (1922), str. 321).

[8] *Sur la dérivabilité terme à terme de séries des fonctions monotones*, ibidem 3 (1922), str. 113–118.

([12]) Autor dziękuje Jaroslavowi Zemánkowi za pomoc przy przygotowaniu do druku tej części artykułu.

* Bibliografię tę opracowali Walerian Piotrowski i Jaroslav Zemánek (*przyp. red.*).