ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVII (1987)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ROMAN MURAWSKI (Poznań)

Giuseppe Peano a rozwój logiki symbolicznej

Gdyby zapytać przeciętnego matematyka, z czym kojarzy mu się nazwisko Giuseppe Peano, odpowiedziałby zapewne, że z aksjomatami dla liczb naturalnych i z krzywą wypełniającą kwadrat oraz może jeszcze z twierdzeniem o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego. W zestawieniu z pełnym dorobkiem i zasługami Peano brzmi to raczej niezadowalająco i świadczy o słabej znajomości roli, jaką odegrał w rozwoju matematyki i logiki. Stan ten wynika być może z faktu, że wiele dokonań i osiągnięć Peano zostało doskonale przyswojonych przez matematykę, weszło do powszechnego użytku, stało się własnością ogółu. W takich sytuacjach zapomina się łatwo o ich twórcy uważając niemalże, że rzeczy te istniały zawsze, że nie trzeba było ich odkrywać czy tworzyć. Z drugiej strony znajomość pewnych faktów dotyczących nawet tych bardziej znanych osiągnięć Peano jest niewystarczająca i powierzchowna. Warto więc może (tym bardziej, że w roku 1982 przypadała 50. rocznica jego śmierci) przyjrzeć się bliżej zarówno osobie, jak i dziełu Peano.

W niniejszym szkicu(1) chciałbym, po przypomnieniu głównych faktow z życia Giuseppe Peano, zająć się jego działalnością naukową. Ponieważ główne dokonania Peano w zakresie matematyki są na ogół trochę lepiej znane, wspomnimy więc tylko o nich, koncentrując się na dokładnym omówieniu jego dorobku w dziedzinie logiki matematycznej i podstaw matematyki.

Giuseppe Peano urodził się 27 sierpnia 1858 r. w miejscowości Spinetta, kilkadziesiąt kilometrów na południe od Turynu, jako piąte dziecko Bartolomea i Rosy Cavallo. Do szkoły podstawowej uczęszczał w latach 1865–1868 w pobliskim Cuneo, do którego też w międzyczasie przeniosła się rodzina Peano. Około roku 1870 Giuseppe, korzystając z zaproszenia wuja, zamiesz-

(1) Ostateczna wersja tej pracy została napisana, gdy jako stypendysta Fundacji im. Aleksandra Humboldta (*Alexander von Humboldt-Stiftung*) przebywałem w Instytucie Matematyki Uniwersytetu w Heidelbergu (RFN), gdzie pracowałem pod kierunkiem prof. dr. Gerta H. Müllera. Chciałbym w tym miejscu podziękować mu za pomoc i inspirację.

kuje w Turynie. Tutaj pobiera z początku lekcje u wuja, duchownego i prawnika, częściowo zaś uczy się sam, a po zdaniu w roku 1873 egzaminów pośrednich zaczyna regularnie uczęszczać do szkoły średniej, którą kończy w roku 1876. Otrzymuje stypendium Collegio delle Provincie i jesienią tego roku rozpoczyna studia matematyczne na uniwersytecie w Turynie. 16 lipca 1880 r. zdaje egzaminy końcowe. Rozpoczyna pracę na uniwersytecie najpierw jako asystent Enrico D'Ovido (1880/81), a od jesieni 1881 r. jako asystent, a później zastępca Angelo Genocchi (aż do śmierci tegoż w roku 1889). 1 grudnia 1890 Peano zostaje mianowany profesorem nadzwyczajnym rachunku infinitezymalnego na Uniwersytecie Turyńskim. Profesorem zwyczajnym zostaje w roku 1895. W latach 1886–1901 wykłada też równolegle na Akademii Wojskowej w Turynie.

G. Peano był członkiem wielu towarzystw naukowych, m. in. Królewskiej Akademii Nauk w Turynie, Królewskiej Akademii „dei Lincei" w Rzymie, Narodowej Rady Badań Naukowych, Królewskiego Instytutu Lombardzkiego Nauk i Sztuk, prezesem Akademii „pro Interlingua", członkiem Meksykańskiego Towarzystwa Naukowego, Narodowego Instytutu w Genewie i Towarzystwa Matematyczno-Fizycznego w Kazaniu. Był też komandorem orderu *Corona d'Italia* i kawalerem orderu *Santi Maurizio e Lazzaro.*

G. Peano zmarł na atak serca 20 kwietnia 1932 r.

Ogłosił ogółem 231 prac naukowych (w tym 15 książek): 193 spośród nich to prace poświęcone matematyce, a 38 to prace filologiczne.

Zainteresowania naukowe G. Peano dotyczyły w zasadzie trzech dziedzin: analizy, logiki i, głównie w ostatnim okresie życia, filologii porównawczej i języka międzynarodowego. Choć Peano jest znany przede wszystkim jako pionier logiki symbolicznej oraz propagator metody aksjomatycznej, to sam jednak za najważniejsze uważał swe prace z zakresu analizy. Gdy w 1915 r. wydrukował listę swych publikacji, dodał do niej uwagę: *Moje prace odnoszą się szczególnie do analizy i okazały się nie całkiem bezużyteczne, skoro, w opinii osób kompetentnych, przyczyniły się do rozwoju tego działu matematyki.* Mówiąc tu o „opinii osób kompetentnych" miał Peano na myśli *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, gdzie A. Pringsheim cytuje dwie książki Peano wśród 19 najważniejszych prac z analizy od czasów Eulera i Cauchy'ego.

Pierwszą pracą Peano z zakresu analizy była opublikowana w 1883 r. praca o całkowalności funkcji (Sulla integrabilità delle funzioni, Atti Accad. sci. Torino 18 (1882–83), 439–446 [37–43])([2]). Znajdujemy w niej, implicite, oryginalne pojęcie całki (podane później explicite w książce *Calcolo differenziale* (1884), o której mówić będziemy jeszcze niżej) oraz dowód istnienia całki korzystający z prostego warunku całkowalności. Pod koniec tej pracy

([2]) W nawiasach kwadratowych podajemy strony, na których znajduje się angielski przekład danej pracy w [6].

wprowadza też Peano pojęcie pola powierzchni, używając pojęć kresu dolnego i górnego.

W 1886 r. udowodnił Peano twierdzenie o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ przy założeniu, że funkcja f jest ciągła (*Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine*, Atti Accad. sci. Torino 21 (1885–86), 677–685 [51–57]). Dowód ten korzystał z twierdzenia Arzeli głoszącego, że z dowolnego ciągu funkcji wspólnie ograniczonych i jednakowo ciągłych w przedziale domkniętym $[a, b]$ można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie.

Wynik o istnieniu całki równania różniczkowego uogólnił Peano w roku 1890 na przypadek układu równań różniczkowych, używając jednak innej metody (*Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires*, Math. Ann. 37 (1890), str. 182–228). Warto też zwrócić uwagę na to, że w tej ostatniej pracy znajdujemy po raz pierwszy wyraźną, choć negatywną, aluzję do aksjomatu wyboru (oczywiście Cantor i inni stosowali aksjomat wyboru przed Peano, ale czynili to bez świadomości używania zasady, której przedtem nie formułowano w matematyce klasycznej ani logice). Otóż doszedłszy w swym dowodzie do miejsca, w którym trzeba było wybrać jeden element z każdego ze zbiorów pewnego ciągu $A_1, A_2, \ldots$ podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$, Peano napisał: *Ponieważ nie można stosować nieskończenie wiele razy dowolnego prawa, za pomocą którego przyporządkowuje się (on fait correspondre) klasie pewne indywiduum z tej klasy, sformułowaliśmy więc tu konkretne prawo pozwalające, przy odpowiednich założeniach, przyporządkować każdej klasie pewnego systemu jakieś indywiduum z tej klasy* (str. 210). To „konkretne prawo" wykorzystywało kresy dolne.

W ten sposób Peano był pierwszym matematykiem, który akceptując wprawdzie klasy nieskończone, zdecydowanie odrzucał stosowanie nieskończenie wielu dowolnych wyborów. Później – po pojawieniu się dowodu Zermelo twierdzenia o dobrym uporządkowaniu (1908 r.), wykorzystującego aksjomat wyboru i będącego mu w istocie równoważnym – Peano krytykował aksjomat wyboru, jak również wszystkie wyniki zależące implicite od niego. Zauważmy, że wielu historyków matematyki i logiki (na przykład H. C. Kennedy, por. [6], str. 7) przypisuje właśnie Peano pierwsze wyraźne sformułowanie aksjomatu wyboru. Nie jest to jednak w pełni prawdą. Zasługą Peano jest niewątpliwie to, że jako pierwszy zwrócił uwagę, iż dowody pewnych twierdzeń wymagają stosowania zasady wyboru. Odrzucił jednak tę zasadę zastępując ją w konkretnym przypadku konkretnym prawem wyboru. Pierwsze wyraźne sformułowanie aksjomatu wyboru przypisać należy E. Zermelo.

Obok wkładu w postaci oryginalnych wyników Peano zrobił też dużo w zakresie analizy poprzez precyzowanie i wyjaśnianie używanych pojęć oraz poprzez burzenie pewnych ogólnych, niczym jednak nieuzasadnionych przekonań za pomocą podawania rozmaitych kontrprzykładów. Wiele takich

kontrprzykładów zawartych jest już w książce napisanej przez G. Peano, opartej na wykładach A. Genocchiego, a wydanej pod tytułem *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, pubblicato con aggiunte dal Dr. Giuseppe Peano*, Bocca, Torino 1884, str. xxxii+338.

Najbardziej znany jest przykład krzywej wypełniającej kwadrat (podany w pracy *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*, Math. Ann. 36 (1890), 157–160 [143–148]). Krzywa ta dana jest za pomocą ciągłych funkcji parametrycznych $x = x(t)$ i $y = y(t)$ i ma tę własność, że przechodzi przez każdy punkt kwadratu jednostkowego $I \times I$, gdy parametr t przebiega przedział jednostkowy I. Przykład ten burzył dotychczasowe wyobrażenia o łuku krzywej danej za pomocą ciągłych funkcji parametrycznych. Peano opublikował swój wynik bez podania wykresu (chcąc uniknąć posądzeń o luki w dowodzie). Jego dowód był czysto analityczny. Pierwszą reprezentację graficzną podał Hilbert (po opublikowaniu oryginalnej pracy Peano). Można jednak przypuszczać, że Peano doszedł do swej krzywej, rozważając odpowiednie diagramy. Zauważmy przy okazji, że przykład Peano funkcji $f\colon I \to I \times I$ jest jedyny w tym sensie, że, jak pokazał S. Mardesić (*Mapping ordered continua onto product spaces*, Glasnik mat.-fiz. astr. drustvo mat. fiz. hrvatske, (2) 15 (1960), 85–89 – str. 889, twierdzenie 4) jedynym niezdegenerowanym kontinuum uporządkowanym C dopuszczającym odwzorowanie $f\colon C \to C \times C$ jest odcinek I.

Peano był bardzo dumny ze swego odkrycia funkcji $f\colon I \to I \times I$, o czym świadczyć może fakt, iż kazał jedną z krzywych przybliżenia ozdobić taras swego domu (por. [6]).

Przejdźmy teraz do dokładniejszego omówienia prac G. Peano z zakresu logiki i podstaw matematyki. Pierwszą jego pracą z tej dziedziny był liczący 20 stron rozdział wstępny do książki *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Bocca, Torino 1888 [fragmenty: 75–100]. Rozdział ten nie ma prawie żadnego związku z dalszym ciągiem książki. Rozważania Peano oparte są tu na pracach G. Boole'a, E. Schrödera, C. S. Peirce'a i innych. Peano zauważa, co później będzie jeszcze w wielu miejscach podkreślał, równoważność rachunku zbiorów i rachunku zdań. Wielu z symboli, które wprowadza w tej pracy, nie będzie już później używał, zastępując je adekwatniejszymi i lepszymi.

Już w tej pracy daje się zauważyć, jak wielką wagę przywiązuje Peano do symboliki matematycznej. Sprawę tę podejmuje w wielu swoich pracach i właśnie propagowanie języka symbolicznego w matematyce, jak i zaproponowanie zgrabnej symboliki jest jedną z głównych jego zasług. To, że z taką łatwością czytamy dziś prace Peano, świadczy m. in. o tym, jak wiele z jego oznaczeń weszło albo bezpośrednio, albo w nieznacznie zmodyfikowanej postaci do języka współczesnej matematyki i logiki.

Warto zwrócić uwagę na związek tej działalności Peano z programem i marzeniami G. Leibniza (Peano znał je oczywiście, czego dowodem liczne

wzmianki w jego pracach o ideach Leibniza; zachęcił też jednego ze swoich uczniów i długoletniego asystenta G. Vacca do dokładnego zbadania rękopisów Leibniza w Hanowerze, co przyniosło ciekawy plon). Otóż Leibniz, już od dzieciństwa obeznany z logiką scholastyczną, oczarowany był ideą metody, która by sprowadzała wszystkie pojęcia ludzkie do pojęć pierwotnych, stanowiąc pewien „alfabet myśli ludzkich" i tworzyła znów ich kombinacje sposobem niejako mechanicznym, w celu otrzymania wszystkich zdań prawdziwych (por. [2], str. 13–14). Marzenia te wykrystalizowały się ostatecznie w projekcie uniwersalnego języka symbolicznego, zwanego *Characteristica universalis*. Miał to być system znaków spełniających następujące warunki (por. [12]):

1. Musi istnieć wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie między znakami systemu (o ile nie są one znakami miejsc pustych) a myślą (w najszerszym tego słowa znaczeniu).

2. Znaki muszą być tak dobrane, aby w przypadku gdy jakaś myśl może zostać rozłożona na części składowe, „obrazy" tych części składowych same były z kolei częściami składowymi odwzorowania danej myśli przez odpowiednie znaki.

3. Należy obmyśleć taki system reguł operowania znakami, aby w przypadku gdy jakaś myśl M_1 znajduje się w stosunku racja-następstwo do myśli M_2, również „obraz" M_2 mógł być interpretowany jako następstwo „obrazu" M_1.

Tego ambitnego programu nie udało się zrealizować Leibnizowi. Częściową realizację znalazł on dopiero w pojęciu języka sformalizowanego (jest to realizacja częściowa, boć przecież odnosi się głównie – choć nie tylko – do języka matematyki, a Leibniz marzył o języku uniwersalnym nadającym się do symbolicznego wyrażania wszelkiej myśli i pozwalającym analizować wszelkie rozumowanie([3])). Historia matematyki i logiki (zwłaszcza wieku XIX i początków XX) pokazuje, jak trudno było ów program zrealizować. Wspomnieć tu trzeba przede wszystkim o pracach G. Boole'a, E. Schrödera, G. Fregego i oczywiście G. Peano.

G. Peano uważał realizację idei Leibniza za jedno z głównych zadań stojących przed naukami matematycznymi. Dawał temu wyraz w licznych swoich pracach. Prawie cała jego działalność na polu logiki i podstaw matematyki szła w tym właśnie kierunku.

Leibnizowska *characteristica universalis* to, jak pokazaliśmy wyżej, przede wszystkim język symboliczny, za pomocą którego należy formułować wypo-

---

([3]) Jako ciekawostkę warto wspomnieć tu fakt, że Leibniz miał nadzieję, iż *characteristica universalis* pozwoli w szczególności rozstrzygać spory filozoficzne. Pisał mianowicie: *A gdy to już nastąpi* (tzn. gdy uda się urzeczywistnić ideę języka uniwersalnego – R. M.), *dwaj filozofowie, ilekroć powstanie spór, nie będą inaczej rozprawiać, aniżeli dwaj rachmistrze. Wystarczy, jeśli wezmą pióra do ręki, zasiądą do tablic i jeśli jeden drugiemu powie: rachujmy!* (por. [12], str. 69).

wiedzi. Przy tym, co Peano wielokrotnie podkreśla, *symbole reprezentują nie słowa, ale idee. Dlatego należy używać tego samego symbolu, gdy tylko pojawia się ta sama idea, nawet jeżeli w języku potocznym używa się różnych wyrażeń dla jej przedstawienia, i używać różnych symboli tam, gdzie mamy do czynienia z różnymi ideami, nawet gdyby były one reprezentowane w języku potocznym przez to samo wyrażenie. W ten sposób ustalamy odpowiedniość jedno-jednoznaczną pomiędzy ideami a symbolami, odpowiedniość, której nie znajdziemy w języku potocznym. Ta ideografia opiera się na twierdzeniach logiki, odkrywanych sukcesywnie począwszy od Leibniza aż do dzisiaj. Kształt symboli może być zmieniony, tzn. można zmienić te kilka znaków reprezentujących podstawowe idee, ale nie może być dwóch istotnie różnych ideografii* (*Studii di logica mathematica*, Atti Accad. sci. Torino 32 (1896–97), 568–583 [190–205]).

Język symboliczny pozwala nie tylko na większą przejrzystość i ścisłość, ale ułatwia też zrozumienie wielu rzeczy, pozwala *uczniom szkoły średniej z łatwością rozwiązywać problemy, które w przeszłości tylko wielkie umysły, takie jak Euklides czy Diofant, były w stanie rozwiązywać* (*Importanza dei simboli in matematica*, Scientia 18 (1915), 165–173 [227–234][4]). Właśnie w tej pracy daje Peano historyczny przegląd wprowadzania symboliki do matematyki, wylicza też wyraźnie rozmaite korzyści, jakie to z sobą niesie. A więc przede wszystkim krótkość zapisów potrzebnych do wyrażenia twierdzeń czy dowodów, mała ilość symboli podstawowych, z których buduje się później wyrażenia bardziej złożone (*słów języka potocznego wyrażających relacje logiczne jest około tysiąca, symboli logiki matematycznej wyrażających te same idee — dziesięć. (...) Profesor Padoa zredukował tę liczbę koniecznych symboli do trzech.*), dalej, symbolika ułatwia prowadzenie rozumowań, pozwala nawet uzyskiwać nowe wyniki. Co więcej, w wielu wypadkach używanie języka symbolicznego jest konieczne ze względu na to, że język potoczny nie ma odpowiednich wyrażeń na określenie pewnych idei czy konstrukcji (z koniecznością taką spotkali się, jak pisze Peano w cytowanej pracy, na przykład A. N. Whitehead i B. Russell przy pisaniu swoich *Principia mathematica* — „największego dzieła napisanego całkowicie przy pomocy symboli").

Realizacja leibnizowskiej idei *characteristica universalis* to jednak nie tylko odpowiednia symbolika, ale też metoda pozwalająca śledzić relacje racji-następstwa, metoda pozwalająca na wyprowadzanie twierdzeń o różnych obiektach matematycznych z pewnych, na początku ustalonych pewników, a więc, mówiąc krótko, metoda aksjomatyczno-dedukcyjna. G. Peano dokonał wiele i na tym polu, zwłaszcza w zakresie aksjomatyzacji arytmetyki i geometrii.

Powiedzieć tu trzeba przede wszystkim o jego słynnej pracy *Arithmetices*

([4]) Por. też *Sui fondamenti dell'Analisi* 'Mathesis' societa italiana di matematica, Bollettino, 2 (1910), str. 31–37 [219–226], gdzie Peano twierdzi, że należy metodę tę szerzej stosować w szkołach, gdyż ułatwia ona „analizowanie pewnych trudnych problemów matematyki."

principia nova methodo exposita (Bocca, Torino 1889, str. xvi+20, [101–134]). Ta mała, o łacińskim tytule (czy raczej prawie łacińskim – słowo bowiem *arithmetices* jest transliteracją odpowiedniego słowa greckiego, po łacinie powinno być poprawnie *arithmeticae*), napisana po łacinie (sic!) książeczka zawiera pierwsze sformułowanie jednego z najbardziej znanych osiągnięć Peano, mianowicie jego postulatów dla liczb naturalnych.

Praca składa się ze wstępu i części właściwej. We wstępie wprowadza się pojęcia i ustala symbolikę. Peano pisze na początku pracy: *Oznaczyłem za pomocą znaków wszystkie idee, które występują w podstawach arytmetyki, tak, że każde zdanie jest wyrażone całkowicie za pomocą tych znaków. Znaki należą albo do logiki, albo do arytmetyki.* (...) *Za pomocą tej notacji każde zdanie zyskuje kształt i precyzję właściwą równaniom w algebrze. Z tak napisanych zdań mogą być dedukowane inne – odbywa się to za pomocą procesu przypominającego rozwiązywanie równań algebraicznych. To właśnie było głównym celem i powodem napisania tej pracy.*

Warto zwrócić uwagę, że właśnie w *Arithmetices principia* znajdujemy po raz pierwszy symbol ε na oznaczenie przynależności elementu do zbioru, symbol $\supset$ na oznaczenie inkluzji ([5]) ($a \supset b$ czytał Peano jako: a zawiera się w b) i uwagę o konieczności ich rozróżniania ([6]). We wstępie znajdują się też rozmaite twierdzenia rachunku zdań, rachunku klas i rachunku kwantyfikatorów. Wprowadzona symbolika jest znacznie lepsza od stosowanej przez G. Boole'a czy E. Schrödera. Peano rozróżnia też rachunek zdań i rachunek klas, traktując je jako dwa różne rachunki, a nie jako dwie interpretacje tego samego rachunku. Wprowadza też nowe i wygodne oznaczenie dla kwantyfikatora uniwersalnego: jeżeli mianowicie a i b są dwiema formułami zawierającymi zmienne wolne ([7]) $x, y, \ldots$, to Peano pisze $a \supset_{x,y,\ldots} b$ w miejsce tego, co dziś napisalibyśmy jako $\forall x \forall y \ldots (a \to b)$.

Po ustaleniu symboli i wstępnych wyjaśnieniach G. Peano rozpoczyna właściwy wykład arytmetyki. Ta część pracy napisana jest całkowicie w języku symbolicznym! Na początku podaje owe słynne aksjomaty dla liczb naturalnych. Arytmetycznymi pojęciami pierwotnymi są pojęcia: *zbiór liczb naturalnych* (N), *jeden* (1), *następnik* ($x+1$) *i równość* ($=$). Formułuje cztery aksjomaty dotyczące równości (dziś zaliczamy je do aksjomatów logicznych)

([5]) Tego samego znaku używa też Peano jako symbolu relacji między zdaniami i w przypadku, gdy a i b oznaczają zdania, to napis „$a \supset b$"znaczy „z a wynika b". Wydaje się, że nie ma jeszcze u niego wyraźnego rozróżnienia między implikacją a wynikaniem.

([6]) Z wyjątkiem klasy 1-elementowej. Rozróżnienie między x a $\{x\}$ pojawi się dopiero w napisanej rok później pracy *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires*, Math. Ann. 37 (1890), str. 192.

([7]) Zauważmy przy okazji, że rozróżnienie między zmiennymi wolnymi i zmiennymi związanymi pochodzi właśnie od Peano – używał on określeń: *zmienna istotna* (*effetivo*) i *zmienna pozorna* (*apparente*) – por. [1]. str. 409. (Dalszy ciąg notki dodany w korekcie – patrz str. 277.)

i pięć aksjomatów ściśle arytmetycznych. W oryginalnej symbolice wyglądają one następująco (z kropkami w roli nawiasów):

$$1 \varepsilon N,$$
$$a \varepsilon N . \supset . a+1 \varepsilon N,$$
$$a, b \varepsilon N . \supset : a = b . = . a+1 = b+1,$$
$$a \varepsilon N . \supset a+1 - = 1,$$
$$k \varepsilon K . \supset . 1 \varepsilon k . \supset . x \varepsilon N . x \varepsilon k : \supset_x . x+1 \varepsilon k : : \supset . N \supset k,$$

gdzie K oznacza rodzinę wszystkich klas. Dziś napisalibyśmy je tak:

$$1 \in N,$$
$$a \in N \rightarrow a+1 \in N,$$
$$a, b \in N \rightarrow (a = b \equiv a+1 = b+1),$$
$$a \in N \rightarrow (a+1 \neq 1),$$
$$[k \in K \,\&\, 1 \in k \,\&\, \forall x (x \in N \,\&\, x \in k \rightarrow x+1 \in k)] \rightarrow N \subset k.$$

Z aksjomatów tych Peano wyprowadza następnie rozmaite twierdzenia arytmetyki, wprowadzając po drodze, za pomocą definicji([8]), różne nowe pojęcia. Nie ogranicza się bynajmniej do arytmetyki liczb naturalnych([9]); rozważa też ułamki, liczby rzeczywiste, nawet pojęcie granicy i pewne definicje z teorii zbiorów.

Zauważmy, że system Peano nie jest dokładnie tym, co dziś nazywa się arytmetyką Peano. Ta ostatnia bowiem jest systemem I rzędu opartym na rachunku predykatów, a oryginalny system Peano nie był systemem I rzędu. Był on wyrażony w języku ze zbiorami, klasami i relacją należenia. Był więc systemem opartym na teorii mnogości.

Na dokładniejszą uwagę zasługuje tu sposób wyprowadzania twierdzeń z przyjętych aksjomatów. Otóż nie była to dedukcja w dzisiejszym jej rozumieniu. Nie ma bowiem w systemie Peano żadnych wyraźnie sformułowanych reguł wnioskowania. Nie może więc być mowy o dowodach sformalizowanych. Mamy po prostu następstwo formuł – takie, jakie spotyka się w zwykłych dowodach stosowanych w praktyce matematycznej. Taki stan rzeczy wynika zapewne z faktu, że G. Peano interesował się logiką tylko o

---

([8]) Warto tu może zwrócić uwagę na to, że stosuje on definicje przez rekursję prostą, choć nie spełniają one warunków, jakie nakłada on na definicje – żąda bowiem, aby definicje miały kształt $x = a$ lub $\alpha \supset x = a$, gdzie α jest pewnym warunkiem, x pojęciem definiowanym, a „a zbiorem znaków o znanym znaczeniu". Nie ma on też twierdzenia podobnego do twierdzenia 126 z pracy R. Dedekinda, *Was sind und was sollen die Zahlen*? (Braunschweig 1888), które stanowiłoby uzasadnienie definicji rekurencyjnych.

([9]) Peano udowodnił niezależność swych aksjomatów dla liczb naturalnych w późniejszej pracy *Sul concetto di numero*, Rivista di matematica 1 (1891), str. 87–102, 256–267.

tyle, o ile była ona pomocna przy porządkowaniu i „uprzejrzystawianiu" matematyki, a nie dla niej samej. Zadowalał się więc, tak jak wszyscy „normalni" matematycy, na poły intuicyjnym wynikaniem formuł, nie sprowadzając wszystkiego do subtelnych i precyzyjnych rozważań metody sformalizowanej, w której każdy krok w dowodzie musi mieć swe uzasadnienie w przyjętych na początku i ściśle określonych regułach wnioskowania.

Jakkolwiek więc prace Peano miały znacznie mniejszą wartość dla samej logiki niż na przykład wnikliwe prace współczesnego mu logika niemieckiego G. Fregego, to były jednak bardzo ważne z innego powodu. Pokazywały one mianowicie, jak wyrażać teorie matematyczne w języku symbolicznym. Peano wierzył, że to z kolei pomoże m. in. w znalezieniu odpowiedzi na pytanie, jak rozpoznawać poprawne dowody matematyczne. W napisanej w tym samym roku co *Arithmetices principia* książce *I principii di geometria logicamente esposti* pisał: (...) *można odpowiedzieć na to pytanie w sposób całkowicie zadowalający. Istotnie, redukując zdania do formuł podobnych do równań algebraicznych, a następnie analizując zwykłe dowody, stwierdzamy, że polegają one w istocie na przekształcaniu zdań i grup zdań wykazującym znaczny stopień podobieństwa do przekształcania równań. Te przekształcenia czy inaczej identyczności logiczne, z których stale korzystamy, mogą być wyraźnie opisane, a następnie badane.*

Przy pisaniu *Arithmetices principia* G. Peano korzystał z osiągnięć swych poprzedników. Wykorzystuje częściowo m. in. symbolikę logiczną Boole'a i Schrödera. W dowodach twierdzeń arytmetyki opierał się, jak sam pisze we wstępie, na książce H. Grassmanna *Lehrbuch der Arithmetik* (Berlin 1861). Na szczególną uwagę jednak zasługują związki z pracą R. Dedekinda *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Braunschweig 1888). Otóż nie jest sprawą całkowicie jasną, czy Peano doszedł do swych aksjomatów dla liczb naturalnych niezależnie od Dedekinda czy też nie. Sam Peano pisze w *Arithmetices principia*, że praca Dedekinda była dla niego „bardzo użyteczna". Zdanie to wraz z innym jeszcze, mianowicie ze zdaniem: „Wymienione wyżej zdania pierwotne pochodzą od Dedekinda" (*Sul concetto di numero*, Rivista di Matematica 1 (1891), str. 87–107) służy niektórym historykom matematyki i logiki jako uzasadnienie tezy, że Peano zapożyczył swe aksjomaty od Dedekinda. Tezę taką głoszą na przykład J. van Heijenoort (który pisze w [5]: *Peano przyznaje, że jego aksjomaty pochodzą od Dedekinda*) i Hao Wang (*Dzięki stwierdzeniu samego Peano wiadomo dobrze, że zapożyczył on swe aksjomaty od Dedekinda* ... [31]).

Z drugiej strony jednak H. C. Kennedy twierdzi, że w przytoczonych wyżej wypowiedziach Peano stwierdza on jedynie pierwszeństwo Dedekinda, jeśli chodzi o opublikowanie aksjomatów (por. [7]). Na poparcie swej tezy przytacza on słowa Peano, który w 1898 r. napisał: *Układ mojej pracy z 1889 r. był całkowicie niezależny od wspomnianej przed chwilą publikacji Dedekinda; zanim moja praca została oddana do druku, byłem wewnętrznie przekonany o*

niezależności zdań pierwotnych, na których oparty był mój system, od definicji Dedekinda. Później udało mi się udowodnić ich niezależność (Sul § 2 del Formulario t. II: *Aritmetica*, Rivista di Matematica 6 (1896–99), str. 75–89). W ten sposób H. C. Kennedy dochodzi do wniosku, że uwaga na temat pracy Dedekinda została dodana do wstępu *Arithmetices principia* tuż przed oddaniem książki do druku i w ten sposób otrzymujemy wyjaśnienie tego, jak praca Dedekinda była „użyteczna" ([7], str. 135).

Problem pierwszeństwa Peano czy Dedekinda musi pozostać nierozstrzygnięty. Wszystko co można w tej sytuacji zrobić, to porównać zbiory aksjomatów podane przez każdego z nich. Aksjomaty Peano przytoczyliśmy wyżej. Dedekind sformułował swe aksjomaty w innym niż Peano języku. Aby je tu przytoczyć, musimy przyjąć najpierw pewne definicje. Niech zbiór K będzie zawarty w zbiorze S (Dedekind używa słowa „system" zamiast słowa „zbiór") i niech φ będzie dowolnym ustalonym odwzorowaniem S w siebie. Mówimy, że K jest *łańcuchem* (*eine Kette*) wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(K) \subseteq K$, gdzie $\varphi(K)$ jest obrazem K wyznaczonym przez funkcję φ. *Łańcuchem elementu* a nazywamy przekrój wszystkich łańcuchów zawierających a. Oznaczamy go przez a_0. Zbiór S nazywamy *nieskończonym* (*unendlich*) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie różnowartościowe φ: $S \to S$ takie, że $\varphi(S)$ jest podzbiorem właściwym S. Zbiór N nazywamy *prosto nieskończonym* (*einfach unendlich*) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie różnowartościowe φ: $N \to N$ takie, że istnieje element $a \in N - \varphi(N)$ o tej własności, iż N jest łańcuchem elementu a. W tym wypadku element a oznaczamy przez 1 i nazywamy *elementem bazowym* (*Grundelement*) zbioru N. Zauważmy, że φ generuje w tym wypadku pewien porządek na N. Można udowodnić, że każdy zbiór nieskończony S zawiera (jako podzbiór) zbiór prosto nieskończony N. Dedekind pisze na str. 17 cytowanej wyżej pracy: *Rozważmy zbiór prosto nieskończony N uporządkowany przez odwzorowanie* φ *abstrahując jednocześnie od konkretnych własności jego elementów i biorąc pod uwagę tylko fakt, że elementy te są odróżnialne między sobą i że są uporządkowane przez* φ; *elementy zbioru N będziemy nazywać liczbami naturalnymi lub liczbami porządkowymi lub po prostu liczbami, a element bazowy* 1 *będziemy nazywali liczbą bazową ciągu N* (*die Grundzahl der Zahlenreihe N*). *Stąd też* (*proces abstrakcji!*) *liczby można nazywać wolnym wytworem ludzkiego ducha* (*freie Schöpfung des menschlichen Geistes*).

Niezależnie od takiej czy innej odpowiedzi na pytanie o pierwszeństwo Peano czy Dedekinda, niezaprzeczalną zasługą Peano pozostaje to, że podał on aksjomaty dla liczb naturalnych w ścisłej, jasnej i przejrzystej formie oraz że – i to jest tu najistotniejsze – pokazał w jaki sposób można z nich wyprowadzać różne twierdzenia arytmetyki([10]).

([10]) Ciekawe oczywiście jest, w jaki sposób Dedekind doszedł do swej charakteryzacji liczb naturalnych. Odpowiedzi dostarcza tu wielce interesujący list R. Dedekinda do H. Kefersteina z 27. II 1890 r. – por. w tej sprawie [3] i [5].

W omawianych *Arithmetices principia* G. Peano napisał na zakończenie wstępu: *Moja książeczka powinna być traktowana jako próbka tej nowej metody. Za pomocą użytych oznaczeń możemy sformułować i udowodnić niezliczenie wiele innych twierdzeń, w szczególności mówiących o liczbach wymiernych i niewymiernych.* Jest on przekonany, że wprowadzone symbole, po dodaniu do nich ewentualnie nowych symboli oznaczających nowe pojęcia, właściwe danej teorii, pozwolą wyrazić w sposób ścisły i przejrzysty twierdzenia każdej nauki.

W kolejnych swych pracach Peano pokazywał, jak metodę tę można i należy stosować do matematyki. Pisze rozmaite prace, ograniczając do minimum używanie języka potocznego. Wspomnieć tu trzeba m. in. o napisanej w tym samym roku co *Arithmetices principia* (1889) książeczce *I principii di geometria logicamente esposti* (Torino 1889, ss. 40). Używa tu symboli logicznych, symboli arytmetycznych i specjalnych dodatkowych symboli geometrycznych. System geometrii opiera na pojęciu punktu i odcinka, zbliżając się w ten sposób do ujęcia Pascha. W ogóle geometria to obok arytmetyki druga dziedzina, w badaniu podstaw których Peano skutecznie stosuje swoją metodę symboliczno-aksjomatyczną. Badając podstawy geometrii, Peano spopularyzował bardzo metodę wektorową Grassmanna i znacznie ją udoskonalił. Dał w ten sposób pewien impuls rozwijającej się włoskiej szkole analizy wektorowej.

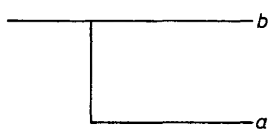
Idea ujęcia matematyki w konsekwentną formę zewnętrzną za pomocą języka sztucznego i wyprowadzania poszczególnych twierdzeń z kilku fundamentalnych postulatów początkowych znalazła swój pełny wyraz w słynnym projekcie *Formulario* ogłoszonych przez Peano w 1892 na łamach założonego przez niego (w roku 1891) pisma *Rivista di matematica* (w tym właśnie piśmie publikowane były główne prace logiczne Peano i jego uczniów). Celem projektu było opublikowanie zbioru wszystkich znanych twierdzeń z wszelkich gałęzi matematyki. Miało się oczywiście używać do tego wprowadzonego przez Peano języka symbolicznego.

Realizacji tego projektu służyło specjalnie stworzone pismo *Formulario Mathematico*([11]). W jego wydawaniu współpracowali z Peano: Vailati, Castellano, Burali-Forti (autor znanego w tym czasie podręcznika *Logica matematica* 1894), Giudice, Vivanti, Betazzi, Fano, Padoa i in. W sumie ukazało się pięć tomów tego pisma: Wstęp 1894, t. I 1895, t. II opublikowany został w trzech częściach odpowiednio w latach 1897, 1898 i 1899, t. III 1901, t. IV 1903, t. V 1908 – tom ten zawierał około 4200 twierdzeń! Peano kupił nawet małą drukarnię (w roku 1898 od Faa di Bruno za 407 lirów) i studiował sztukę drukarską, a rezultatem tego było znaczne uproszczenie symboliki matematycznej.

([11]) Dokładniej trzy pierwsze tomy zostały opublikowane pod tytułem *Formulaire de Mathématiques*, czwarty był zatytułowany *Formulaire Mathématique* (były one napisane po francusku), a piąty (napisany w *latino sine flexione* – por. dalej) *Formulario Mathematico*.

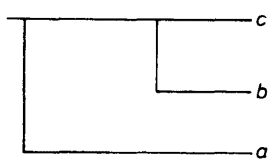
Peano traktował *Formulario* jako realizację idei Leibniza. Pisał: *Po dwóch wiekach to „marzenie" wynalazcy rachunku infinitezymalnego zrealizowało się ... Rozwiązaliśmy bowiem problem postawiony przez Leibniza.* Peano miał nadzieję, że dzieło to będzie szeroko używane przez profesorów i studentów. Sam zaczął od razu stosować je w swojej pracy ze studentami. Oddźwięk jednak, z jakim spotkały się *Formulario* był słaby. Jedną z przyczyn tego faktu było to, że prawie wszystko napisane było w tym dziele za pomocą symboli, inną przyczyną było używanie w wyjaśnieniach i komentarzach *latino sine flexione* zamiast na przykład języka francuskiego.

Na szczególną uwagę zasługuje prostota symboliki Peano. Ta prostota m. in. spowodowała, że została ona przyjęta przez matematyków i stała się powszechną własnością. Przyczynił się do tego niewątpliwie geniusz Peano. Widać to wyraźniej, gdy porówna się ją z symboliką Fregego. Prace Fregego pozostawały przez bardzo długi czas w cieniu głównie (choć nie tylko) z powodu skomplikowanej i „przyciężkawej" symboliki, jakiej używał([12]). Wyższość symboliki Peano ma swe źródło m. in. w tym, że miała ona charakter liniowy, podobnie jak zwykłe pismo i mowa dźwiękowa, podczas gdy według Fregego trzeba było rysować płaskie obrazki. Dla przykładu okres warunkowy „jeżeli a, to b" Peano notował jako $a \supset b$, a Frege jako



W przypadku potrójnego okresu warunkowego „jeżeli a, to jeśli b, to c" wyglądało to w symbolice Peano i Fregego odpowiednio tak:

$a \supset .b \supset c,$



(Kropka zastępuje tu nawias. Peano stosował właśnie cały system kropek jako nawiasy — system ten ma pewne analogie z notacją proponowaną przez Leibniza.)

([12]) Warto zwrócić uwagę na fakt, że Peano był jednym z bardzo nielicznych matematyków i logików, którzy przed 1900 r. potrafili docenić znaczenie prac Fregego. Peano i Frege pozostawali w kontakcie korespondencyjnym, przesyłali sobie nawzajem odbitki swych prac, wymieniali uwagi i komentarze na ich temat. Cele jakie im przyświecały przy tworzeniu języka ideograficznego były różne. Fregego interesowało przede wszystkim badanie podstaw matematyki, podczas gdy Peano postawił sobie jako zadanie stworzenie symboliki, za pomocą której będzie można wyrażać teorie matematyczne. Frege przyznawał, że symbolika Peano jest rzeczywiście prostsza, bardziej zwięzła i wygodniejsza w posługiwaniu się nią, niemniej jednak pisał, że *wygoda ta nie jest najwyższym dobrem i celem.*

Przyznać trzeba jednak, że idea przedstawiania matematyki za pomocą sztucznego języka symbolicznego spotykała się z oporami ze strony wielu matematyków, logików i filozofów. Znane są na przykład szyderstwa wielkiego matematyka francuskiego H. Poincarégo. Pisał on: *Istotnym pierwiastkiem tego języka są pewne znaki algebraiczne, przedstawiające poszczególne łączniki: jeżeli, i, albo, więc. Być może, że znaki te są dogodne; inną jest rzeczą, czy są powołane do odnowienia całej filozofii. Trudno jest przypuścić, że wyraz „jeżeli", skoro go napisać w postaci* $\supset$, *nabiera nowej jakiejś mocy. Ten wynalazek Peano nazywał się dawniej pazygrafią, tj. sztuką napisania traktatu matematycznego bez użycia ani jednego wyrazu z języka potocznego. Nazwa ta określała bardzo wyraźnie jej stosowalność. Później podniesiono ją do wybitniejszej godności, nadając jej tytuł logistyki. Wyrazu tego używają w szkołach wojennych dla oznaczenia sztuki wachmistrzowskiej* (po francusku *maréchal des logis*), *sztuki prowadzenia i rozkładania obozem wojska; jasne jest przecież, że nowa logistyka nie ma z tą nic wspólnego, że nowa ta nazwa zdradza zamiar dokonania przewrotu w logice* ([10], str. 48, w przekładzie polskim str. 118).

Powiedzieliśmy powyżej, że Peano interesował się logiką tylko o tyle, o ile była ona przydatna do badania matematyki i do jej porządkowania według metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Wszystkie więc prawie jego prace z zakresu logiki zawierają w szczególności duże ilości przykładów stosowania metod logicznych w różnych działach matematyki.

Z drugiej strony to ograniczenie się tylko do matematyki spowodowało, że wyniki Peano w zakresie logiki nie są tak głębokie, jak na przykład wspominanego już wielokrotnie G. Fregego. Jednakże wpływ Peano na rozwój logiki matematycznej był duży. W ostatniej dekadzie XIX wieku G. Peano i jego szkoła wiedli w niej prym. Potem centrum przesunęło się do Anglii, gdzie działał B. Russell – jednakże nie bez udziału Peano. Spotkali się oni mianowicie podczas Międzynarodowego Kongresu Filozoficznego w Paryżu w sierpniu 1900 r.

O spotkaniu tym pisał później B. Russell w swej *Autobiografii* tak: *Kongres był punktem zwrotnym w moim życiu umysłowym, bo tam poznałem Peano. Znałem go już z nazwiska i przeglądałem niektóre jego prace, lecz nie zadałem sobie trudu, by opanować jego notację. Podczas dyskusji na kongresie zauważyłem, że był on zawsze bardziej precyzyjny niż ktokolwiek inny i że niezmiennie wygrywał każdy spór, w jaki się wdał. W miarę upływu dni doszedłem do wniosku, że musi to zawdzięczać swojej logice matematycznej. Toteż uprosiłem go, żeby mi dał wszystkie swoje prace i zaraz po zakończeniu kongresu wyjechałem do Fernhurst, aby tam przestudiować w spokoju każde słowo napisane przez niego i jego uczniów. Stało się dla mnie jasne, że jego notacja stanowi takie narzędzie analizy logicznej, jakiego szukałem od lat, i że studiując go przyswajam sobie nową, znakomitą technikę dla pracy, którą od dawna pragnąłem wykonać.* ([11], str. 200–210).

W 1912 r. B. Russell pisał w liście do Joudaina: *Zanim nie poznałem*

Peano i jego prac, nigdy nie przyszło mi do głowy, że logika symboliczna może być użyteczna w podstawach matematyki. Znałem bowiem prace Boole'a na ten temat, ale wydawały mi się one całkowicie nieużyteczne. To peanowskie $\in$ *wraz z odkryciem, że relacje mogą być rozważane w jego systemie, sprawiły, że zacząłem stosować logikę symboliczną.* Zauważmy również, że właśnie dzięki Peano dowiedział się Russell o Fregem i jego pracach. Na bezpośrednie pytanie Petera Nidditcha, Bertrand Russell odpowiedział: *Wiem z całą pewnością, że to właśnie od Peano po raz pierwszy dowiedziałem się o istnieniu Fregego* (por. [8]).

Przy opracowywaniu poszczególnych dyscyplin matematycznych, w szczególności w ramach programu *Formulario*, Peano zwracał baczną uwagę na definicje nowych pojęć za pomocą pojęć pierwotnych. Stąd też duże jego zainteresowanie problemem definicji jako takich. Pomiędzy 1911 a 1915 rokiem Peano napisał sześć prac zawierających słowo „definicja" w tytule. Pochodząca z roku 1921 *Le definizioni in matematica* (Periodico di Matematiche (4), 1 (1921), str. 175–189 [235–246]) zawiera podstawowe poglądy i uznawane przez Peano zasady definiowania pojęć w matematyce. Twierdzi on przede wszystkim, że każda definicja powinna mieć kształt równości lub równoważności (i że zasada ta znajduje się już implicite u Arystotelesa), dalej wszystkie definicje w matematyce powinny być nominalne, nie stosuje się do nich arystotelesowska zasada *per genus proximum et differentiam specificam.* Twierdzi dalej, znów powołując się na Arystotelesa, że to, co definiujemy, niekoniecznie musi istnieć. Formułuje też warunek jednorodności definicji żądający, aby *definiendum* i *definiens* zawierały te same zmienne wolne. Definicje są pożyteczne, aczkolwiek niekonieczne, jako że *definiendum* może być zawsze zastąpione *definiens.* Co więcej, ta procedura eliminacji dostarcza kryterium trafności definicji (pochodzące już od Arystotelesa) – jeżeli mianowicie *poprzez wyeliminowanie symbolu definiowanego otrzymane tak wyrażenie nie jest dłuższe i bardziej skomplikowane niż przed eliminacją, to oznacza to, że nie było potrzeby wprowadzania definicji.*

Mówiąc o porządkowaniu i uściślaniu przez Peano różnych pojęć matematycznych, musimy też wspomnieć o wprowadzonej przez niego definicji funkcji. Otóż w opublikowanej w roku 1911 pracy *Sulla definizione di funzione* (Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. sci. fis. mat. nat., (5) 20-I (1911), 3–5) zdefiniował on funkcję jako relację jednoznaczną. Definicja ta zastąpiła dawne nieprecyzyjne określenie funkcji jako prawa przyporządkowującego jednym obiektom pewne inne obiekty. Był to więc istotny krok naprzód w kierunku matematyki nowoczesnej (dziś posługujemy się powszechnie definicją podaną przez Peano). Przy okazji rodzi się jednak pewne pytanie – jest to znów (podobnie jak w przypadku aksjomatyki liczb naturalnych) pytanie o pierwszeństwo i oryginalność Peano. Otóż rok przed opublikowaniem pracy *Sulla definizione di funzione*, tzn. w roku 1910 ukazał się tom I dzieła A. N. Whiteheada i B. Russella *Principia Mathematica*, w którym rozważali

oni m. in. właśnie relacje jednoznaczne, a więc i funkcje. Czy Peano znał tom I *Principiów* pisząc swój artykuł o definicji funkcji? Nie wiadomo – i pytanie to musi pozostać otwarte.

Pisząc o pracach i badaniach logicznych Peano, trudno nie wspomnieć o jego zainteresowaniach lingwistycznych i projekcie języka międzynarodowego. Pierwsze artykuły z tego zakresu ogłasza w roku 1903, a poczynając od roku 1908, kiedy to zostaje wybrany prezydentem Akademii Volapük, przemianowanej później na Academia pro Interlingua, oddaje się im całkowicie.

Badania G. Peano nad językiem międzynarodowym wyrosły na gruncie jego badań nad symboliką logiczną i matematyczną. Mają one też związek z pewnymi pomysłami Leibniza (także z *characteristica universalis*, o której pisaliśmy wyżej). Stworzony przez siebie język nazwał Peano *latino sine flexione* (łacina bez fleksji)([13]). Zasadniczą jego cechą jest właśnie zredukowanie do minimum reguł gramatycznych. Można by go krótko scharakteryzować w sposób następujący:

1. akceptuje się każde słowo wspólne językom europejskim (postulat ten wydaje się być mało precyzyjny i istotnie sam Peano rozumiał go rozmaicie – raz (1915 r.) przyjmując, że cały słownik nowego języka pochodzić ma z łaciny, a później (1927 r.) twierdząc, że należy zaadoptować słownictwo języków angielskiego, francuskiego, hiszpańskiego, włoskiego, portugalskiego, niemieckiego i rosyjskiego),
2. każde słowo międzynarodowe pochodzące z łaciny ma postać tematu łacińskiego,
3. liczbę mnogą tworzy się za pomocą końcówki -s,
4. język ten używa w zasadzie tematów, nie ma prawie końcówek (z wyjątkiem wspomnianego -s), przypadki tworzy się przez dodawanie przyimków: *de*, *ad*, *pro*, *ab*, *in* itd.; nie ma rodzajów gramatycznych, rodzajników, zgodności w liczbie, przypadku, osobie, rodzaju; nie ma koniugacji – czasy i tryby opisuje się za pomocą *si*, *que*, *ut*, *jam* itd.

W roku 1915 G. Peano ogłosił *Vocabulario commune ad latino-italiano-français-english-deutsch*, będące ważnym i znaczącym etapem tworzenia nowego języka.

G. Peano nie twierdził, że język jego zastąpi języki narodowe. Miał to być tylko język pomocniczy, pomocny przy porozumiewaniu się na terenie międzynarodowym. Sam ogłosił wiele prac matematycznych i lingwistycznych w tym właśnie języku, m. in. prace zamieszczone w *Formulario*. W charakterze próbki tego języka przytoczmy fragment komentarza Peano związanego z podstawami arytmetyki:

Quaesto si nos pote defini N_0 *significa si nos pote scribe aequalitate de forma*

$$N_0 = \textit{expressione compositio per signos noto}, \cup, \cap, -, \ldots, 1,$$

([13]) International Auxiliary Language Association nazwała go później *interlingua*.

quod non es facile. Ergo nos sume tres idea N_0, o, $+$*ut idea primitivo per que nos defini omni symbolo de Arithmetica. Nos determinate valore de symbolo non definito per systema de proposito primitivo sequente*([14]).

Interlingua jednakże nie wytrzymała próby czasu. Brak ścisłego i precyzyjnego rozgraniczenia, jaka część łaciny czy innych języków ma być adoptowana, a jaka odrzucona, spowodowało powstanie licznych „dialektów", niezgodności, a w końcu odrzucenie tego języka nawet przez początkowych entuzjastów. Na przełomie lat czterdziestych i pięćdziesiątych A. Gode, przy wsparciu i pomocy *International Auxiliary Language Association*, przeformułował i ożywił interlinguę i zaczął na nowo propagować ją jako język międzynarodowy, dogodny zwłaszcza dla porozumiewania się między naukowcami. Skutki jednak tej działalności są raczej mierne.

Reasumując, widzimy, że Giuseppe Peano wywarł znaczący wpływ na rozwój matematyki i, jeszcze bardziej, logiki i podstaw matematyki — większy, niż można by sądzić na podstawie tego, ile uwagi poświęca się mu w książkach z zakresu historii logiki i matematyki (por. na przykład [1], [9]). Przewodnią ideą, która towarzyszyła wszystkim jego poczynaniom, była jasność i ścisłość, o które starał się na każdym kroku, zarówno precyzując pojęcia używane w matematyce, jak i wprowadzając język symboliczny i propagując metodę aksjomatyczno-dedukcyjną. Symbolika, jaką zaproponował, okazała się bardzo dobra i użyteczna, wytrzymując próbę czasu. Świadczy o tym najdobitniej fakt, że została ona niemal bez zmian zaadoptowana przez współczesną matematykę. Peano pokazywał na wielu przykładach, jak można wyrazić teorie matematyczne w jego języku symbolicznym i jak można je porządkować za pomocą metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Logika była dla niego narzędziem, które pozwalało uczynić rozumowania matematyczne jaśniejszymi i precyzyjniejszymi. Symbolika miała pomóc dostrzec lepiej związki logiczne pomiędzy poszczególnymi członami wnioskowań i ułatwić analizowanie relacji konsekwencji logicznej.

Warto zauważyć, że Peano nie próbował nigdy oprzeć matematyki na jakiejś innej dyscyplinie jako fundamencie. W konsekwencji odrzucał logicyzm Fregego i Russella, tzn. redukcję matematyki do logiki. Interesowało go tylko zredukowanie teorii matematycznej do minimalnej liczby aksjomatów wyrażonych za pomocą języka zawierającego minimalną liczbę pojęć pierwotnych, z których to aksjomatów można już wydedukować wszystkie twierdzenia teorii. Peano nie był też formalistą w sensie kierunku w filozofii matematyki zapoczątkowanego przez D. Hilberta. Wierzył, że matematyka może i powinna być oparta na doświadczeniu. W pracy *Super theorema de Cantor-Bernstein* (Rend. Circ. mat. Palermo 21 (1906), 360–366) pisał: *Dowód tego, że układ aksjomatów dla arytmetyki czy dla geometrii jest niesprzeczny, wcale nie jest, według mnie, konieczny. Nie formułujemy przecież aksjomatów*

([14]) *Formulario Mathematico*, str. 27.

całkiem dowolnie, ale przyjmujemy jako aksjomaty najprostsze stwierdzenia, które znajdują się, explicite bądź implicite, w każdej książce z arytmetyki lub geometrii. Nasza analiza zasad tych nauk polega na redukowaniu zwykłych stwierdzeń do jak najmniejszej ich ilości, tak jednak, by to, co pozostało, było istotnie potrzebne i jednocześnie wystarczające. System aksjomatów arytmetyki i geometrii jest spełniony przez to pojęcie liczby i punktu, które posiada każdy, kto się tymi dziedzinami zajmuje. Myślimy o liczbie, zatem liczba istnieje. Dowód niesprzeczności systemu aksjomatów może być pożyteczny wtedy, gdy aksjomaty są tylko hipotezami i nie odpowiadają im żadne rzeczywiste fakty. W 1923 r. Peano napisał: *Matematykę należy umieścić pomiędzy logiką a naukami doświadczalnymi.*

Biorąc pod uwagę rozwój logiki matematycznej i podstaw matematyki w wieku XX, możemy śmiało nazwać Giuseppe Peano pionierem i promotorem logiki symbolicznej.

Bibliografia

[1] I. M. Bocheński, *Formale Logik*, Freiburg und München 1962.
[2] N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris 1960; przekład polski: *Elementy historii matematyki*, Warszawa 1980.
[3] Hao Wang, *The axiomatization of arithmetic*, Journal of Symbolic Logic 22 (1957), str. 145–158.
[4] D. A. Gillies, *Frege, Peano and Dedekind on Foundations of Arithmetic*, Van Gorcum.
[5] J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic* 1879–1931, Cambridge, Massachusetts 1967.
[6] H. C. Kennedy (ed.). *Selected Works of Giuseppe Peano*, Toronto and Buffalo 1973.
[7] H. C. Kennedy, *The origins of modern axiomatics: from Pasch to Peano*, Amer. Math. Monthly 79 (1972), str. 133–136.
[8] H. C. Kennedy, *What Russell learned from Peano*, Notre Dame Journal of Formal Logic 14 (1973), str. 367–372.
[9] W. & M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford 1962.
[10] H. Poincaré, *Science et méthode*, Paris 1908; przekład polski: *Nauka i metoda*, Warszawa 1911.
[11] B. Russell, *The Autobiography of Bertrand Russell*: 1872–1914, Little Brown and Company, Boston 1967; przekład polski: *Autobiografia* 1872–1914, Warszawa 1971.
[12] H. Scholz, *Abriss der Geschichte der Logik*, Freiburg und München 1959; przekład polski: *Zarys historii logiki*, Warszawa 1965.
[13] J. Sleszyński, *Teorja dowodu*, tom II, Kraków 1929.

(7) Ciąg dalszy notki ze str. 267. W polskiej literaturze logicznej do roku 1929 również używano określeń *zmienna istotna* i *zmienna pozorna*. W 1929 r. J. Łukaszewicz w swych *Elementach logiki matematycznej* po raz pierwszy w piśmiennictwie polskim użył określeń *zmienna wolna* i *zmienna związana* (wzorując się, co stwierdza w przedmowie, na wydanej w 1928 r. książce D. Hilberta i W. Ackermanna *Grundzüge der Theoretischen Logic*).