ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVII (1987)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

HASSLER WHITNEY (Princeton)

Ożywienie w matematyce szkolnej*

W ostatnich 30 latach można było dostrzec w Stanach Zjednoczonych, a także w wielu innych krajach, rosnące wysiłki dla uczynienia „matmy" bliższą dzieci szkolnych; coraz lepiej widzi się też trudności, jakie napotykają one w uczeniu się matematyki. Presja ekonomiczno-polityczna kazała w całym świecie zwrócić większą uwagę na te problemy, ale jednocześnie utrudnia ona szukanie umiarkowanych i zdrowych rozwiązań. Wzrasta również świadomość, że trudności w nauce ciągną się dalej w szkołach średnich, co widać np. przy rachunku różniczkowym. Lokalnie odnotować można sukcesy i czasem udaje się uzyskać większe zaangażowanie dzieci i lepsze zrozumienie materiału, czasem zaś uzyskuje się lepsze wyniki testów, w niewielkim stopniu świadczące o rzeczywistej poprawie. Nie zmienia to jednak całości obrazu. Wzrasta także liczba osób i grup zaangażowanych w poprawianie nauczania na różne sposoby, a w Stanach Zjednoczonych powołano komitety na wysokim szczeblu dla bardziej całościowego zaatakowania problemu.([1]) Można więc mieć nadzieję, że w końcu ujrzymy rzeczywiste zmiany na lepsze.

Tę nadzieję chciałbym wesprzeć. Jednakże problem tak oporny jak ten wymaga poważnego i uporczywego zaangażowania, trudnego do uzyskania w przypadku przedmiotu o niełatwej do uchwycenia złożoności. Powstały jednak prace, które wydobywają prostą w zasadzie, choć subtelną naturę problemu. Wymieńmy trzy, pochodzące z trzeciego świata: D'Ambrosio [1], Nebres [9] i Gerdes [6]. Te działania musimy kontynuować.

Korzenie problemu tkwią w lekcjach matematyki, to tam oczekuje się

---

* Tłumaczenie powielonego maszynopisu *Coming alive in school mathematics and beyond*, dokonane przez Agnieszkę Wojciechowską (*przyp. red.*).

([1]) Po raz pierwszy w historii Stanów Zjednoczonych powołano Mathematics Education Board. Przewodniczącą została prof. Shirley A. Hill (University of Missouri w Kansas City). Pełny skład tej komisji można znaleźć w Notices of the American Mathematical Society z listopada 1985 r. (*przyp. red.*).

postępu ku dojrzałości. Co powinno się składać na taki postęp i jak przeciętna klasa odbiega od tego ideału?

Odpowiedź na pierwsze pytanie zależy od celów uczenia się matematyki. Matematyczny sposób rozumowania staje się coraz ważniejszy w wielu dziedzinach, toteż podstawową potrzebą uczniów jest przyswojenie i rozwój takiego myślenia. Dodatkowo powinni oni umieć kontrolować własną pracę, dostrzegać związki z innymi aspektami przedmiotu, a także sprawnie porozumiewać się z kolegami i innymi osobami w tych sprawach. Dlatego:

(1) Podstawowym celem uczenia się matematyki powinien być rozwój naturalnej umiejętności rozumowania, szczególnie tam, gdzie potrzebna jest precyzja myślenia. Rozwój ten musi obejmować myślenie twórcze i krytyczne, pełną kontrolę nad własną pracą, świadomość związków z pokrewnymi zagadnieniami oraz umiejętność komunikowania się. Mówiąc po prostu, dana osoba musi przyjmować pełną odpowiedzialność za swoją pracę.

W przeciętnej klasie uwaga uczniów skierowana jest jednak gdzie indziej.

(2) Na szkolnych lekcjach matematyki zazwyczaj celem ucznia jest zapamiętanie poszczególnych wzorców myślenia wprawdzie wziętych z rozumowania, ale przy całkowitym pominięciu samego rozumowania. W ten sposób zatraca się istotę rzeczy.

Uczniowie, dosłownie, starają się zazwyczaj zapamiętać ciągi słów, nie zastanawiając się nawet, czy znaczą one cokolwiek. Oczywiście jest to całkowicie bezużyteczne.

Gdy matematycy układają programy nauczania, zakładają oczywiście, iż praca w szkole będzie prowadzona ze zrozumieniem. Dlaczego szkoła tak dalece nie spełnia tego warunku? Czy nie to właśnie jest przyczyną ogólnego niepowodzenia? Czemu nikt tego nie zauważa, nawet najwyższe gremia? Pytania te wymagają pilnej odpowiedzi.

Z kolei, obserwując nauczanie, stwierdzamy, co następuje. Nauczanie podające, czyli prezentowanie materiału, ma silny wpływ negatywny. Zmusza słuchacza do śledzenia słów i myśli nauczyciela, a nie swoich własnych. Tak więc, jeśli słuchacz nie ma czasu i swobody, aby przemyśleć to, co zostało powiedziane, i porównać z dotychczasową swoją wiedzą i doświadczeniem, to zrozumienie szybko zniknie, o ile w ogóle się pojawiło.

Wiemy, jak często studenci bezmyślnie notują wykłady, próbę zrozumienia odkładając na później. W szkole nie jest to możliwe i wobec tego nadmiernie podające nauczanie z pewnością zablokuje wszelkie rozumienie przedmiotu.

Tak ostre opinie dobrze będzie poprzeć dowodami niepowodzeń szkoły. Przytoczę kilka przykładów z krajowych ocen wyników nauczania (NAEP [8]), szerzej dyskutowanych w [11]. Dziewięcio- i trzynastolatkom zadano ćwiczenie

$$\begin{array}{r} 21 \\ +54 \\ \hline \end{array}.$$

Dobry wynik otrzymało odpowiednio 90% i 98%. Przy sformułowaniu: „Jaka jest suma liczb 21 i 54" poprawne wyniki spadły do 69% i 91%.

Nasuwa się tu podstawowe pytanie: Dlaczego ci, którzy nie poradzili sobie z formą słowną, po prostu nie przepisali zadania w formie „słupka" i nie wykonali dodawania? Czy *nie potrafili* tego zrobić, czy też *nie wiedzieli*, że jest to możliwe i dozwolone? Gdyby we wcześniejszej nauce wychodzili oni od sensu, zadanie stałoby się niemal trywialne. Jakakolwiek jest tego przyczyna, doświadczenie szkolne utrudnia uczniom *wykorzystywanie własnych możliwości* do rozwiązywania zadań sformułowanych w nietypowy sposób.

Tylko 17% dziewięciolatków poradziło sobie z poleceniem „Odejmij 298 od 313". Czyżby w tym wieku nie mogły po prostu odliczyć od 298 do 300 i dodać 13? Przy minimalnej wprawie w rachunku pamięciowym jest to trywialne. Znowu winne jest doświadczenie szkolne.

W obecnych czasach nasilają się apele o rozwiązywanie zadań (*problem solving*). Ja postępują dzieci? W odpowiedzi na pytanie „jak długa jest droga wokół prostokątnego klombu długiego na 10, a szerokiego na 6 stóp?" większość dzieci zarówno 9- jak i 13-letnich po prostu albo dodawała, albo mnożyła te dwie liczby. Jest to wymowne świadectwo nastawienia dzieci. W szkole, niezależnie od pytania, po prostu zgaduje się, jakiej operacji użyć (prawdopodobnie z pomocą zewnętrznych poszlak).

Nie ma wątpliwości co do tego, że dzieci te pracują bez zrozumienia. Na lekcjach matematyki marnują tylko czas.

Jaka więc jest ta szkolna matematyka? Poznanie prawdy mogłoby wstrząsnąć matematykami. (Duży procent dorosłych mówi: „nigdy nie umiałem matmy". Na takie wyznanie mógłbym odpowiedzieć, że wyraża ono odczucie słuszne, ale z innego powodu: zostaliście wprowadzeni w błąd sztucznym językiem matematyki i nigdy nie mieliście okazji widzieć ani uprawiać prawdziwej matematyki, która jest łatwa i zabawna.)

Dla matematyka kilka pierwszych lat szkolnej matematyki to nic innego jak nauka czterech operacji na liczbach naturalnych, zazwyczaj ograniczonych do przypadków, gdy wynik jest również liczbą naturalną. Jest to bardzo skromny zakres. Jednak, aby „uczynić go łatwiejszym" (dla tych biednych dzieci, które „nie potrafią myśleć"), materiał we wszystkich podręcznikach jest „pocięty na cienkie plasterki". Tak więc odejmowanie to mnóstwo tematów: liczby mniejsze od dziesięciu, jedna z nich większa od dziesięciu, bez „pożyczania", z „pożyczaniem", to samo z liczbami o więcej niż dwóch cyfrach, ale bez zer w odjemnej itd. W każdym z nich mamy odrębny zbiór reguł (por. [11]). W rezultacie tego rozczłonkowania, wiele dzieci wysyła się na zajęcia wyrównawcze z etykietką „opóźnionych", „powolnych" itp.

Chciałbym zilustrować ten problem przykładem ułamków. Przez kilka lat uczy się tego, powtarza i uczy od nowa, a każdy następny nauczyciel zaczyna ten proces od początku. Wreszcie pojawia się „nowy temat": *liczby mieszane* – i nauczanie zaczyna się od nowa, wlokąc się bez końca. (Co to jest liczba

mieszana? Na przykład $2\frac{3}{4}$.) Wszystko to opiera się na nieporozumieniu, które miesza w głowach uczniom: Ułamek dwie trzecie jest zaciemnioną częścią prostokąta, ale jest on również zaciemnioną częścią ciastka. (Ale czy ciastko jest prostokątem?) W podręcznikach, a więc i w szkole, nigdy nie dopuszcza się zapisu $\frac{2}{3}P$ (P oznacza cały prostokąt), wolno pisać tylko $\frac{2}{3}$.

Szamotaninę z liczbami mieszanymi obserwowałem po raz pierwszy w 1967 roku w klasie piątej, gdzie „wzorowy nauczyciel" uczył, jak wykonać odejmowanie $6\frac{1}{4}-3\frac{2}{4}$. (Oczywiście, $\frac{2}{4}$ podano dla ułatwienia, nie chodziło tu o znaczenie.) Dla porównania zapytałem wieczorem dziewczynkę z czwartej klasy, która nie uczyła się jeszcze ułamków, ile to może być $6\frac{2}{7}-2\frac{4}{7}$. Odpowiedziała od razu: odejmijmy $\frac{2}{7}$, zostaje 6, odejmijmy następne $\frac{2}{7}$ to będzie $5\frac{5}{7}$, trzeba odjąć jeszcze 2 i pozostanie $3\frac{5}{7}$. Gdy myśli się ze zrozumieniem, wszystko jest oczywiste i reguły nie są potrzebne.

W ogóle widać, że matematyka szkolna jest bardzo złożonym przedmiotem. Pełno w niej przypadków i podprzypadków, a każdy z własnym zestawem reguł, które należy wtłoczyć w dzieci. Jest to jak seria szczepień aplikowanych jedno po drugim, z których każde spływa i wysycha, ale pozostawia po sobie odrobinę trucizny (niechęci do matematyki). Wiemy też, że większość ludzi (w każdym wieku) używa w życiu codziennym własnych metod, a nie tych wyuczonych w szkole (por. [3]).

Wygląda to tak, jakbyśmy całkowicie *stracili wiarę* w nasze dzieci. Pomimo ich wspaniałego uczenia się, gdy były całkiem małe, oczekujemy (zwłaszcza u tych „niezdolnych") mozolnego brnięcia przez matmę w początkowych klasach szkoły. Wywieramy więc coraz większy nacisk zarówno na nauczycieli, jak i uczniów, nasilając szamotaninę z regułami, zniechęcającymi ich coraz bardziej.

Sądzę, że obecna sytuacja jest najgorsza w całej historii Stanów Zjednoczonych. Myślenie twórcze wymaga pewnego spokoju umysłu, który jest obecnie trudno dostępny. Problem został zagmatwany przez zmieniające się poglądy na szkołę i na matematykę w ostatnim trzydziestoleciu, które teraz pobieżnie naszkicuję.

Zamierzeniem „nowej matematyki" było doprowadzenie do mocnego i głębokiego zrozumienia matematyki poprzez jej jednolitą strukturę. Udało się to częściowo na poziomie szkoły średniej, ale przy przejściu na poziom podstawowy, zderzenie teorii z praktyką doprowadziło do częściowego chaosu. W tym czasie zaczął dominować behawioryzm i szybko rozprzestrzeniło się żądanie podporządkowania całej szkolnej pracy jego metodom. Dołączył się do tego przemysł komputerowy, próbując wręcz całe nauczanie uczynić „odpornym na nauczyciela" (*teacher-proof*). Z kolei, z początku słabo słyszalne, rozeszło się po całym kraju wołanie o „powrót do podstaw".

Diabelska mikstura, jaka powstała z tych wszystkich poglądów, ma jeszcze wiele lokalnych odmian. Wydaje się, że głównym skutkiem tego wszystkiego jest po prostu to, że rozmaite złożone siły nacierają silniej niż

przedtem na szkoły, nauczycieli, uczniów. Jednak i te naciski mają w Stanach Zjednoczonych drugorzędne znaczenie. Wobec trudności finansowych poszczególne stany zorganizowały systemy oceny wyników mające dostarczyć danych niezbędnych dla uzyskania funduszy z zasobów federalnych. W związku z tym pojawiła się mania porównywania; wynaleziono sposoby takiego rozszerzenia testów, aby było możliwe uszeregowanie (nieważne czy sensowne) wszystkich stanów, a może i szkół. Pilnowanie każdego ucznia i każdego nauczyciela staje się coraz ściślejsze.

Wszystkie te naciski na klasę szkolną są bardzo silne, jednakże musimy się im przeciwstawić najlepiej jak umiemy. Próby zanalizowania ich są bardzo trudne, ale ważne jest, aby zorientować się, jakie są możliwości zmniejszenia ich efektów w aktualnej sytuacji szkoły.

Wielkim ciosem dla bardzo wielu uczniów mających trudności z matematyką było rozpowszechnienie w Stanach Zjednoczonych w 1983 r. raportu „Naród w niebezpieczeństwie" (przygotowanego przez U. S. National Commission on Excellence). Wzywał on do zwiększenia nadzoru nauczycieli nad uczniami i zwiększenia ilości zajęć matematycznych dla wszystkich uczniów, zarówno gorszych, jak i lepszych. Wynikają stąd postulaty przedłużenia dnia i roku szkolnego oraz znacznego zwiększenia pracy domowej. Raport zaowocował podjęciem przez poszczególne stany działań w wyznaczonym kierunku. Bezpośrednim skutkiem dla słabych uczniów, nie rozumiejących, o co chodzi w matematyce, jest — oczywiście — wepchnięcie ich w jeszcze głębszy kryzys.

Chciałbym skupić się na pośrednich tego skutkach dla problemu uczenia się i nauczania. Zilustruje to ośmiosekundowy fragment zwyczajnej (dla nauczycieli) lekcji. „Alfred, co teraz należy zrobić?" (sekunda ciszy). „Edyta?" (znowu sekunda ciszy). „W porządku. Dzieci, oto dwanaście ćwiczeń na jutro."

Co tutaj widzimy? Nauczyciel kontroluje uczniów tak, jak tylko jest to możliwe, zgodnie z obecnymi żądaniami i oczekiwaniami. Dlatego robiona jest najkrótsza możliwa przerwa na odpowiedź ucznia. Wreszcie, aby upewnić się, że uczniowie ciężko pracują (ponieważ uważa się, że taka praca, jeśli trwa dostatecznie długo, prowadzi do nauczenia się), zadaje się uczniom wiele zadań domowych.

A jak to wpływa na dzieci? Efekty są wielorakie. Po pierwsze, dzieci są coraz bardziej napięte i nieszczęśliwe, są u progu rezygnacji. Dalej, próbując odpowiedzieć na pytanie, uczniowie skupiają się na dokładnym powtarzaniu słów nauczyciela, a znaczną część zadań domowych robią zgadując po prostu, co ma być napisane. Ponadto, co gorsze, bardziej rygorystycznie wdrażani są oni do minimalizowania myślenia o wszystkim, co wiąże się z pracą szkolną. To jest *half-think before you speak* (*or write*).

Tak więc naciski te ogólnie, a w matematyce szkolnej w szczególności, przyczyniają się do produkowania pokolenia pół-myślącego. Skoro podstawowym wymaganiem jest trzymanie się myśli nauczyciela, nie swoich włas-

nych, to każdy myśli o tym, czego od niego oczekują, a nie o tym, do czego mógłby dojść.

Tekst wspomnianego raportu zaczyna się od słów: *Nasz naród jest w niebezpieczeństwie. Nasza, niegdyś niepodważalna przewaga w handlu, produkcji przemysłowej, nauce i postępie technicznym jest obecnie przełamywana przez konkurentów na całym świecie.* Głównym skutkiem tego raportu będzie prawdopodobnie dalsze ograniczenie rozwoju uczniów.

Pomysł: *pracuj ciężej, a nauczysz się więcej i nasz naród wzmocni się* jest pierwszorzędnym przykładem pół-myślenia. Jednak postępujemy zgodnie z nim przez większość naszego życia. Sam siebie przyłapuję na tym podczas pisania tego artykułu, jednakże zdarza się to rzadziej niż dawniej.

Poświęciłem zbyt wiele czasu na omówienie negatywnych aspektów nauczania szkolnego. Czemu nie przeskoczyć od razu do dobrej roboty? No dobrze, weźmy „trudny" temat, choćby te ułamki, o których dopiero co była mowa.

Mamy tu batonik (długi, wąski prostokąt), który trzy dziewczynki chcą podzielić między siebie. Jak znajdą one miejsce rozcięcia? Mając swobodę odkrywania, popróbują one wielu sposobów. Bardzo szybko zaczną w tym celu robić znaczki na kawałku papieru przesuwanego wzdłuż batonu. I tak odkryją dla siebie linijkę!

Znalazły pewną długość odrobinę za krótką dla tego batonu, chcąc więc ją rozciągnąć. Zróbcie to z gumki! *Działając*, biorą kawałek gumy i aby zrobić na niej znaczki w równych odstępach, rozciągają ją na liniowanym papierze. Teraz rozciągają ją wzdłuż batonu. Mogłoby się okazać, że gumki nie da się dostatecznie naciągnać, gdyż znaczki są zbyt blisko siebie. Jednak bawiąc się dalej spostrzegają one, że mogą zrobić *sześć* równych przedziałów — każda dziewczynka może mieć dwa! I tak *widzą* one, że $2/6 = 1/3$ (w naszym zapisie). *Rozumieją* one to, co nazywamy „ułamkami równoważnymi", a co jest rzadko naprawdę rozumiane w szkole.

Nadal się bawiąc, dziewczynki chcą znaleźć jedną trzecią z 10 cali. Jest to trochę więcej niż 3 cale. Próbują utrzymać pierwszy znak dokładnie na początku i obserwują dwa następne, przy 2 i 6 calach. Przy rozciąganiu gumki, pierwszy z nich wędruje na 3, drugi na 9. No tak, trzy razy trzy jest dziewięć. Następnie idzie para 4 i 12 — no, ale my chcemy otrzymać 10. Ponieważ 10 leży w jednej trzeciej drogi między 9 a 12, musimy więc drugi znaczek umieścić w odległości jednej trzeciej między 3 i 4. A więc jest to $3\frac{1}{3}$ cala. Jaka radość w grupie, gdy zostało to odkryte!

Stając się ekspertami, zaczynają one dzielić 100 centymetrów na części. Połówki i ćwiartki idą gładko, tak jak dzielenie dolara. Części trzecie są znów zabawne i miłe. Połową 25 jest $12\frac{1}{2}$, mamy więc ósme części.

Ciotka Kasia widzi, jak się bawią, i wypróbowuje: „Pokażcie, gdzie leżą te ułamki: $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$". „One są zbyt łatwe!" mówią dziewczynki, pokazując od razu właściwe miejsca.

Zauważmy, że w badaniu NAEP [8] wszystkie trzy grupy wiekowe poproszono o ustawienie tych ułamków według wielkości. Odpowiednie procenty poprawnych odpowiedzi wynosiły $0^0/_0$, $2^0/_0$ i $12^0/_0$.

Historyjka, którą opowiedziałem, nie jest czystą fantazją, ale mieszaniną sposobów zabawy i poszukiwań, jakie widziałem u wielu dzieci.

„Ale to nigdy nie mogłoby się zdarzyć w normalnej klasie". Tego nie da się udowodnić. Przeciwnie, było wiele klas, w których mając swobodę robiono wiele przyjemnych rzeczy. Wspomnę tylko eksperyment Benezeta, nadinspektora szkół w Manchester (stan New Hampshire) przeprowadzony na przełomie lat dwudziestych i trzydziestych. Zauważył on, że dzieci, i to we wszystkich klasach, zatrzymują się w rozwoju z powodu niepowodzeń w arytmetyce i słabej sprawności językowej. W klasach eksperymentalnych wprowadził on więc swobodne dyskusje dla ćwiczenia języka, a dla arytmetyki – ocenianie długości przed jej zmierzeniem itp. Cała formalna arytmetyka została usunięta aż do 5 klasy. Te eksperymentalne klasy szybko się ożywiły. Co więcej, dzieci (głównie imigrantów) przeskoczyły uczniów zwykłych klas zarówno w rozumowaniach słownych, jak i arytmetycznych. Raport Benezeta [2] jest lekturą piękną i inspirującą. A jak przygotował nauczycieli? Przeprowadził z nimi kilka rozmów – to wszystko.

Widzieliśmy, jakie spustoszenie uczyniło w szkołach podstawowych lekceważenie niedostatecznego doświadczenia dzieci. Pod kierunkiem Benezeta, dzieci nie zaczynały formalnej arytmetyki przed klasą szóstą. Jednakże w tej klasie dogoniły one inne dzieci, pozostając daleko w przodzie w umiejętności rozwiązywania zadań matematycznych.

Obecnie zaczynamy rozpoznawać podobne, choć może mniej rozpowszechnione, trudności w nauczaniu rachunku różniczkowego. Wiemy, że uczenie się tego przedmiotu polega zwykle na przyswajaniu formułek i uważa się, że uczniów trzeba nauczyć, jak z nich korzystać. Co więcej, wiadomo z góry, że jeśli zapytać ich, co to jest pochodna, nieomal na pewno usłyszy się nonsensy. Jednakże tkwi w tym również nieudolność w formułowaniu po angielsku myśli o pewnym stopniu złożoności. Większość uczniów nigdy nie miała okazji wypowiadania w mowie lub piśmie myśli, z wyjątkiem najprostszych. Pół-myśl nigdy nie urosła w ciąg myślowy. Swobodne dyskusje pobudzane przez Benezeta owocowały rozwojem w tym kierunku. Jednym z używanych przez niego sprawdzianów było pytanie o wyjaśnienie (w języku potocznym) związku między wartościami dwóch ułamków o tym samym liczniku. Zachęcam do jego szerokiego wypróbowania.

Zastąpienie wykładu przez poszukiwanie jest jednakowo ważne na każdym poziomie. Przy odejmowaniu 18 od 42, polecenie „pożycz jeden od czwórki" jest dla większości dzieci zaklęciem magicznym, przy różniczkowaniu $\sqrt{x}$ podobnie jest z regułą „pomnoż licznik i mianownik przez $\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}$."

Z drugiej strony, konkretyzacja różnicy 42–18 za pomocą przedmiotów i pozwolenie dzieciom na zbadanie, ile to jest, zabiera wprawdzie znacznie więcej czasu w danym momencie, ale owocuje zrozumieniem nigdy nie osiąganym przez większość dzieci (por. [11]). Szukając odpowiadającego manipulowaniu przedmiotami przykładu dla funkcji $y = \sqrt{x}$, możemy wybrać długość boku i pole kwadratu. Pozwalając uczniom bawić się nimi, umożliwia się im dostrzeżenie sensu symboli Δy i Δx oraz znalezienie związku między nimi. Odkrywanie sensu wyrażeń jest istotą rzeczy.

Chciałbym z kolei powiedzieć coś o wątpliwych praktykach matematyków, stwarzających czasem prawdziwe problemy w nauczaniu. Nie zamierzam przy tym wyliczać błędów, ale wskazać obszary, na których łatwo o nieostrożność.

Gdy do szkół podstawowych wprowadzono nową matematykę, znalazły się w niej podstawowe fakty, takie jak prawo przemienności dodawania. Jednak nikt nie zapytał, jakiego systemu dotyczy to prawo? Matematycy znali dodawanie, jako operację o dwóch argumentach: pierwszym i drugim. Dzieci jednak wiedzą, że zbiory rzeczy można układać dowolnie, bez żadnego ładu. Co więcej, w książkach dla przedszkoli korzystano z tego, pokazując dzieciom zbiory i pary zbiorów w dowolnych położeniach przy rachowaniu. Tak więc dzieci *uczono* prawa przemienności, z którym nie było co począć, po części dlatego, że w ich doświadczeniu zabrakło par uporządkowanych. Jak możemy latami iść naprzód, widząc obojętność dzieci i nawet nie zauważając sprzeczności, przed jakimi je stawiamy?

Znacznie gorzej szło z wyrażeniami w rodzaju $\square - 7 = 4$, których oczywiście dzieci nie mogły rozszyfrować. Nauczyciele byli więc zmuszeni tłumaczyć, że „znak równości oznacza tu...", co dla dzieci było czystym bełkotem. Znak nie oznacza. Dzieci wiedzą, że $3+5$ jest rozkazem zrobienia czegoś, a więc powiedzenie, że jest to nazwa liczby, jest jak stwierdzenie, iż „połóż tę książkę obok tamtej" jest nazwą książki.

Większość matematyków *nie definiowałaby* terminu „zmienna". Z drugiej strony, nie oponują oni, gdy robią to inni i gdy uczy się tego ich dzieci. Jest to więc przyjmowane jako zgoda świata matematycznego na takie postępowanie. Gdyby uczeń zapytał na lekcji algebry: „wiem, jak pomnożyć liczbę przez liczbę, ale jak mnoży się przez literę, która oznacza...", nie można byłoby sensownie odpowiedzieć.

Słowo „równanie" używane jest na wiele sposobów, często nieformalnie, a więc także nie może być zdefiniowane. Za każdym razem, gdy pisze się znak równości, powinno się czytelnikowi wyjaśnić, z czym ma on do czynienia: stwierdzeniem, pytaniem, czymś do popatrzenia, czy czymkolwiek innym (o ile piszący sam wie). Uczniowie mają, i to słusznie, poważne kłopoty ze zrozumieniem, gdy w podręczniku algebry pisze się równania tak, jakby zapis ten znaczył coś sam przez siebie (w co wierzą niektórzy profesjonaliści).

To są główne powody, dla których na algebrze załamuje się wielu

uczniów, co nie jest ich winą. Moim zdaniem, jest to najgorszy pod tym względem przedmiot w szkolnej matematyce.

Dyskusje o programach nauczania i podobnych sprawach są bez sensu, jeśli pomija się ich *stosunek do uczniów*. Błędny, na przykład, jest panujący pogląd, iż „ułamki są zbyt trudne dla dzieci i są teraz mniej ważne dzięki kalkulatorom, trzeba więc wyrzucić sporą ich część ze szkoły". Błędny przez to, iż dzieci nie miały do czynienia z ułamkami, ale z pewnymi zbiorami reguł, które wydają się zmieniać z dnia na dzień. Tak więc komentarze matematyków nie mają tu zastosowania. Jak widzieliśmy wyżej, same ułamki są ważne, i pouczające, i łatwe.

W końcu pytanie „co możemy usunąć, aby uzyskać miejsce na nowy materiał" nie ma sensu, dopóki prawie cały czas spędzany przez dzieci na lekcjach matematyki jest zmarnowany. Można zdobyć tak wiele czasu, ile się chce, usuwając obecne nauczanie. (Przypomnę, że to właśnie zrobił Benezet.)

Wierzę, że powyższe uwagi stosują się też do badań w dydaktyce matematyki. W tym kraju badania te przeprowadzane są głównie w warunkach szkolnych, na przykład polegają one na porównywaniu różnych metod nauczania. Kiedy jednak większość dzieci poszukuje chwilowych reguł gry albo zgaduje, jaką operację wykonać, to trudno jest mówić o nauczaniu w zwykłym sensie tego słowa. Co więcej, dzieci rozwiązują zestawy problemów, jak to widywałem, metodą chybił-trafił, trochę myśląc o niektórych z nich, wcale — o innych. Statystyczne badanie takiego materiału prawie na pewno nie ma sensu.

Studia przypadków, które się obecnie podejmuje, są znacznie sensowniejsze. W tych badaniach, jak sądzę, nie dostrzega się jednak tego, że dla wydobycia ukrytych zdolności ucznia ważne jest, aby kontakt z nim był naprawdę ścisły. Ma on bowiem wyrobione silne nawyki, szczególnie odpowiadania tak, jak sądzi, że się od niego oczekuje. Mogą one być osłabione jedynie wówczas, gdy uczeń czuje rzeczywistą akceptację i wie, że może próbować zachować się inaczej. Aby to osiągnąć, potrzebne jest prawdziwe dwustronne porozumienie. Jeśli na przykład pytania pochodzą jedynie od prowadzącego badanie, to wówczas nie ma mowy o prawdziwym kontakcie. Całodzienne nieformalne sesje dają zazwyczaj wystarczająco wiele czasu do myślenia. Poniższy przykład pokazuje, gdzie mogą powstawać trudności.

Oto tzw. „problem studentów i profesorów" [4]: *Napisz równanie odpowiadające stwierdzeniu: W tym uniwersytecie jest sześć razy więcej studentów niż profesorów. Oznacz przez S liczbę studentów i przez P — liczbę profesorów.* Bezpośrednie żądanie „napisz równanie" zbija z tropu. Tylko niewielu uczniów rzeczywiście czuje, na czym polegają równania i jak się je stosuje. Wspominaliśmy o tym wyżej. W tym wypadku użytek nie jest oczywisty, więc i sens jest trudny do uchwycenia i wydaje się naciągany. Dlatego „napisz równanie" w sposób naturalny redukuje się do „połącz znakiem równości" i pojawia się $6S = P$. Jednak proszę popróbować oznaczeń NS i

NP lub N_S i N_P zamiast S i P, a poprawa wyników może być ogromna.

Czeka na nas ogromne i ważne pole działania: Do czego są zdolni uczniowie, jeśli da im się szansę poszukiwań, badania sytuacji? Bardzo potrzebujemy ukazania tych zdolności. Można im pomóc!

Oto podstawowe pytanie, które chciałbym postawić środowisku matematycznemu. Czy we właściwy sposób podchodzimy nie tylko do uczniów czy studentów, ale i do zawodów – w szczególności do naszej własnej profesji? Nie jesteśmy w pełni doceniani i ma to swoje istotne powody. Możemy zamknąć się, zagłębić się w badaniach naukowych. Jest to dobre, jeśli chce się tam pozostać. Jednakże studenci nie są do tego dość dojrzali, ani nie jest to dla nich bezpieczne, jeśli nie mają się z tym związać na trwałe.

Zarówno w szkole, jak i na uniwersytecie, ponosimy wobec uczniów głęboką odpowiedzialność za ich dojrzewanie i rozwój ich poczucia odpowiedzialności. My sami pracujemy ciężko – czytamy i poprawiamy setki prac kontrolnych. Służąc jednak uczniom, równocześnie oddajemy im i sobie złą przysługę. Naszym przesłaniem jest, iż prawda płynie jedynie od nas, toteż uczniowie nie mogą być pewni swojej wiedzy i czują się całkowicie zależni od naszej oceny. Jednakże istnieje znacznie lepsza metoda nauczania. Stwórzmy im możliwość uważnej pracy. Postępy mogą wynikać z takiej pracy, która nie będzie odbierana jako wymierzona przeciwko uczniom. Solidność wiedzy może być testowana samodzielnie (por. [10] i [11]): jeśli wyniki są dobre, można powiedzieć „to już umiem" i przejść do następnego tematu (cofając się do poprzednich w razie potrzeby). Takie podejście jest korzystne dla wszystkich.

Co można powiedzieć o obecnym procesie nauczania? Czy funkcjonuje on lepiej na uczelni niż w szkole? Oczywiście uważa się, że studenci są już dobrze przygotowani do śledzenia i przyswajania wykładanego im materiału (o ile jest on starannie przedstawiony, z wystarczającymi pauzami i omówieniami). Jednakże naprawdę nieliczni studenci osiągnęli ten stopień dojrzałości, toteż nadal mamy do czynienia z wyłapywaniem z wykładu formułek z pominięciem istoty rzeczy i rozumowań kryjących się za nimi. Znów pracują „siłami nauczyciela", a nie własnymi. Wkuwają regułę różniczkowania $\sqrt{x}$, a niektórzy z nich potrafią odtworzyć jej dowód. Mają jednak mętne poczucie sensu tego wszystkiego, pomimo mowy, jaką wygłosiliśmy na ten temat.

Wykładowcy przedmiotów ścisłych z Ameryki Południowej pytali mnie, co robić, gdy studenci „rozumieją zapis $y = ax+b$, ale nie $x = x_0+vt$". Oczywiście, „rozumieć" znaczy tu tyle, co umieć wykonać pewne rzeczy, np. „znaleźć punkt przecięcia wykresu z osią x-ów". Ależ oni mogą nie umieć nawet tego, gdy uczyli się z m w miejscu a. Naturalna odpowiedź brzmi: „Przecież nie powinni oni wybierać tego wykładu". Moją reakcją jest opowiadanie o Beth, dziewczynie, która niewiele ucząc się matematyki, zachowała do niej głęboką niechęć na resztę życia. W ubiegłym roku powiedziałem do niej „Beth, najmłodsze dzieci w rodzinie chcą rozmawiać o 2, 3, 4

dolarach, następne o 30, 40 dolarach. Połóżmy jedynkę tutaj, a milion tam (na przeciwnym końcu lady). Jakie liczby umieściłabyś pomiędzy tymi tak, aby każda grupa równie wyraźnie wiedziała, o czym mówi?"

Po chwili zabawy ona wskazała miejsca dla liczb 1, 10, 100, ... rozkładając je w równych odstępach. Potem próbowała umieścić 2, 3, ..., 9, skracając odstępy w miarę zbliżania się do 10. Zobaczywszy jednak przed sobą 100, zorientowała się ona, że 11 musi być bardzo blisko 10, więc przysunęła też 9 bliżej 10. (W naszym języku mówiąc, chciała ona mieć ciągłą pierwszą pochodną.) Wkrótce znalazła lepsze miejsce dla 2 w stosunku do 1 i zaraz umieściła 20 w tej samej odległości za 10. W tym momencie wykrzyknąłem, że skonstruowała ona funkcję wykładniczą i znalazła jej pochodną.

Wtedy właśnie uprzytomniłem sobie, że w ciągu dwudziestu lat nauczania analizy, zaledwie u kilku studentów spotkałem *rzeczywiste wyczucie* pojęć, które Beth odkryła dla siebie. Moje nowe (niewielkie) doświadczenie mówi, że większość dorosłych zapytana o to, o co pytałem Beth, niezależnie od posiadanej wiedzy będzie postępowało podobnie do Beth (której zajęło to około 20 minut). Benezet zlikwidował formalne nauczanie matematyki do klasy piątej. Według mnie, można by je równie dobrze zawiesić w całej szkole średniej (choć nie proponuję tego jako rozwiązania naszych problemów).

Prawdopodobnie najistotniejsze jest to, że pozwalając dojść do głosu naturalnym zdolnościom człowieka, wraz ze wszystkimi związkami pomiędzy szeroko rozproszonymi elementami, można dojść do wielkich rzeczy. W pamięci Beth ożyły dziecięce myśli o centach i dziesięciocentówkach i o tym, jak linia, o której myślała, z miedzianej staje się srebrną itd. *W strukturze całości*, rzeczy wiążą się ze sobą, stają się realne i sensowne, i podobne do innych rzeczy. Usuwanie przez nas wszystkich ubocznych wątków z „czystej matematyki" odziera ją ze wszystkiego, co mogłoby być uchwytne dla umysłu nie nawykłego dla abstrakcji.

A oto przykład badania, które byłoby naturalne w dobrym kształcącym środowisku. Kwadrat ma bok s i pole A. Przypuśćmy, że zwiększamy go nieco: bok wzrasta o Δs, a pole o ΔA. Jak porównać te sytuacje? Zabawiając się nimi, można nałożyć oba kwadraty na siebie i zauważyć dodatkowy pasek wzdłuż dwóch boków. Widać, że jego pole równe jest $2s\Delta s+(\Delta s)^2$. Przy małym Δs jest w przybliżeniu $\Delta A = 2s\Delta s$.

Następnym krokiem jest pokazanie tego na różne sposoby, skąd w końcu wypływa pojęcie funkcji i funkcji odwrotnej oraz związek pomiędzy ich pochodnymi. Bardzo ważne jest to, że *zrozumienie sytuacji* jest pierwotne, a jej *własności* dobrze uchwycone. Oznaczenia i język opisu, wraz z obszernymi *omówieniami* ucznia, przychodzą później. Symboliczny opis z kolei interpretuje się odwołując do tego, co wcześniej było zrozumiane, a *uczeń panuje* nad całością. Proszę zauważyć właściwą kolejność nauczania, gdzie symbole i „pojęcia" pojawiają się na końcu zamiast na początku.

Obecny stan matematyki jest bardzo dobry, ale tylko dla nielicznych.

Jako przedmiot powszechnego użytku jest ona moim zdaniem w stanie bardzo kiepskim. Musimy widzieć problemy innych i *porozumiewać się* z nimi na ich temat. Dominacja badań naukowych i odrzucanie odpowiedzialności za nauczanie nie prowadzi to tego. Zresztą nie tylko nasz zawód ma te kłopoty (p. [7]).

Uważam, że kształcenie matematyczne i w dziedzinach pokrewnych wymaga gruntownej odnowy. Dla tego celu najważniejsze jest prawdziwe zaangażowanie coraz większych grup. W ostatnich czasach pożyteczna okazała się budowa *sieci* różnego rodzaju. Jeśli ustalone są szerokie, ważne cele, to wówczas zbliżamy się do nich poprzez realizację bardziej bezpośrednich zadań. Problem polega na zachowaniu priorytetu zasadniczych celów i uczciwym stawieniu czoła wszystkim tym nieprzyjemnym faktom, które sprawiają nam kłopoty.

Zarówno w Stanach Zjednoczonych, jak i w wielu innych krajach obserwuje się rosnące zaangażowanie. Jakim zasadom jest ono podporządkowane? Można budować takie zasady w marszu, wynikają one z prawdziwych celów. Na pewno rozwój, najogólniej rozumiany, jest podstawową potrzebą. Niech porozumienie i współpraca będą podstawową siłą napędową. Główną pomoc w rozszerzaniu ruchu widzę w akceptacji i szacunku dla siebie i innych (grup jak również pojedynczych ludzi).

Kiedy młode pędy wyrastają z ziemi, delikatne podlewanie i pielęgnacja pozwoli im przebić się przez chwasty. Przymuszanie ich do szybszego rozwoju zabija je. Niech, w miarę ich rozpościerania się i wzrostu, wszystkie rośliny spokojnie współżyją ze sobą. Jeśli wyrywa się czy ścina chwasty, spadają one na kwitnące rośliny, również powodując śmierć. Jeśli jednak cała rodzina żyje w spokoju, niektóre pędy kończą swój czas, gdy inne zaczynają kwitnąć i ziemia się ożywia. Również nauczyciele mogą wypróbowywać nowe metody i trwać, jeśli się ich delikatnie zachęci. Miejmy nadzieję, że nasza własna ziemia przetrwa.

Literatura cytowana

[1] Ubiratan D'Ambrosio, *Uniting reality and action: a holistic approach to mathematics education*, w: L. A. Steen, D. J. Albers (editors), *Teaching Teachers, Teaching Students*, Birkhäuser, 1981, str. 32–42.

[2] L. P. Benezet, *The story of an experiment*, Journal of the National Education Association 24 (1935), str. 241–244, and 301–303; 25 (1936), str. 7–8.

[3] Terezinha N. Carraher, David W. Carraher, Analcia D. Schliemann, *Mathematics in the streets and in schools*, British Journal of Developmental Psychology 3 (1985), str. 21–29.

[4] J. Clement, J. Lochhead, G. S. Monk, *Translation difficulties in learning mathematics*, American Mathematical Monthly 88 (1981), str. 286–290.

[5] R. M. Felder, *Does engineering education have anything to do with either?*, Engineering Education 75, num. 2 (1984), str. 95–99.

[6] Paulus Gerdes, *Conditions and strategies for emancipatory mathematics education in undeveloped countries*, For the Learning of Mathematics 5, num. 1 (February 1985), str. 15–20.

[7] Steven G. Krantz, *Letter to the Editor*, American Mathematical Monthly 91 (1984), str. 98.

[8] National Council of Teachers of Mathematics, *Report on the Second National Assessment of the National Assessment of Educational Progress (NAEP)*, Reston, VA, 1980.

[9] Bienvenido F. Nebres, *Major trends from ICME IV: a Southeast Asian perspective*, w: L. A. Steen, D. J. Albers (editors), *Teaching Teachers, Teaching Students*, Birkhäuser, 1981, str. 56–67.

[10] Hassler Whitney, *Letter to the Editor*, Notices of the American Mathematical Society 3 (1984), str. 779–781.

[11] Hassler Whitney, *Taking responsibility in school mathematics education*, Journal of Mathematical Behaviour 4 (1985), str. 219–235.

Miscellanea

Kto nie zna naukowego wykładu, nie potrafi odróżnić błędnych „ułatwień" metodycznych od ułatwień dopuszczalnych i potrzebnych, a co ważniejsza, może się zgubić w różnych sztucznych sposobach, zamiast szukać tych momentów, które, po odpowiednim ich przedstawieniu dzieciom, mają istotną wartość zarówno metodyczną, jak naukową. Jak może jasno przedstawić rzecz ten, kto sam nie odróżnia tego, co zasługuje na większą uwagę, od tego, cb jest tylko podrzędnym szczegółem?

Lucjan Zarzecki[1])

[1]) Z książki: *Nauczanie matematyki początkowej, część 1: Liczba całkowita*, wydanie trzecie uzupełnione i powiększone, Wydawnictwo M. Arcta w Warszawie, Poznań 1919, str. 31.