ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVII (1987)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

# Recenzje

Marek Kordos, *Podstawy geometrii rzutowej i rzutowo-metrycznej*, Biblioteka Matematyczna tom 57, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1984, str. 152, nakład 7750+250 egz., cena zł 120.–, ISBN 83-01-04926-X.

Wydaje się, że zamiarem autora było zapełnienie pewnej istotnej luki w polskim piśmiennictwie matematycznym, poświęconym geometrii rzutowej. Ponadto chodziło zapewne o zaznajomienie polskiego czytelnika z teorią płaszczyzn rzutowo-metrycznych i pewną oryginalną jej aksjomatyką.

M. Kordos posługuje się jednak dość wyrafinowanym formalizmem, który może bardzo ograniczyć krąg odbiorców recenzowanej książki. Już na pierwszej stronie wstępu razić mogą dywagacje na temat wyższości formalizacji dwusortowej nad jednosortową, czytelnik znuży się prędko potrzebą ciągłego rozszyfrowywania starannie sformalizowanego tekstu, nietypową terminologią i symboliką (przy braku wykazu symboli), bardzo ograniczonym kontaktem z żywym słowem autora.

Książki poświęcone podstawom geometrii rzutowej można na ogół czytać od środka, po pobieżnym przewertowaniu partii początkowych. Ta książka – z wymienionych wyżej względów – jest znacznie trudniejsza w czytaniu.

Pierwsza część książki, poświęcona podstawom geometrii rzutowej zawiera materiał na ogół dobrze znany. Autor ma ambicję, aby teoriom uzyskiwanym przez kolejne dołączanie aksjomatów geometrii rzutowej nadawać odrębne nazwy, w związku z czym pojawiają się kolejno: teoria konfiguracji, teoria konfiguracji rzutowych i potem dopiero geometria rzutowa (rozdz. 1–3). Niektóre propozycje terminologiczne (np. druga z wymienionych wyżej) są dość kontrowersyjne, jednakże można się z nimi pogodzić.

Szkoda, że autor przechodząc w rozdziałach 4 i 5 do postulatu Desargues'a nie uwzględnił z równą skrupulatnością słabszych jego wersji, co byłoby okazją do poinformowania czytelnika o stale aktualnej klasyfikacji Lenza–Barlottiego.

Wprowadzając pokrewne tej problematyce kolineacje centralne (które nazywa perspektywicznymi) zakłada a priori, że kolineacja posiada zarówno oś, jak i ośrodek. Szkoda, że pomija elementarny dowód faktu, iż z istnienia osi wynika istnienie ośrodka (i odwrotnie), gdyż czytelnik może tego w ogóle nie dostrzec. No i tu właśnie nasuwałaby się wzmianka o związku między istnieniem kolineacji centralnej a lokalną realizowalnością postulatu Desargues'a.

M. Kordos nazywa sztucznymi wszystkie znane metody sprawdzania, że analityczna płaszczyzna rzutowa (nad ciałem) jest desarguesowa i stwierdza, że w tym punkcie podstaw geometrii rzutowej jest chyba luka. Luka występuje co najwyżej w cytowanej przez niego bibliografii, gdyż gdyby oparł się np. na książce A. Heytinga, *Axiomatic projective geometry*, Amsterdam 1963, miałby do dyspozycji prosty i naturalny dowód tego faktu. Niezupełnie się to zgadza z jego zapewnieniem z przedmowy, że starał się

wykorzystać wszystko co najlepsze w dotychczasowej literaturze na ten temat. Cytowana przez niego literatura jest zbyt uboga, zawiera przede wszystkim pozycje z lat pięćdziesiątych.

Wykładowi podstaw geometrii rzutowej poświęca autor siedem rozdziałów książki. W rozdziałach 6 i 7 omawia płaszczyzny fano-pappusowe i pappusowe, słusznie opierając się na dobrym opracowaniu R. Hartshorne'a.

Pewne usterki w wykładzie podstaw geometrii rzutowej są w znacznej mierze zrekompensowane przez zręczne i autentycznie nowatorskie rozwinięcie teorii tzw. czworokątnych szóstek punktów. (Takie szóstki wycinane są przez dowolną prostą na sześciu bokach czworoboku zupełnego, w pewnych sytuacjach redukują się one do czwórek harmonicznych.) Konsekwentnie rozwijana teoria czworokątowych szóstek punktów okazuje się bardzo przydatna do jednolitego opisu działań w ciele, wprowadzenia współrzędnych i rozstrzygnięcia problemu reprezentacji.

Materiał ten został w pomysłowy sposób wykorzystany w drugiej części książki, dotyczącej geometrii rzutowo-metrycznych (rozdz. 8 i 9).

Zanim przejdę do omówienia tej drugiej części, poświęcę nieco więcej uwagi samemu przedmiotowi geometrii rzutowo-metrycznej, gdyż jego opis podany we wstępie przez autora wydaje mi się raczej dyskusyjny.

Niektórzy matematycy uważają, że przedmiot ten obejmuje tylko takie płaszczyzny metryczne, które można skonstruować z pewnego zbioru punktów płaszczyzny rzutowej z zachowaniem jego struktury liniowej, a więc tak jak rozwiązuje się czwarty problem Hilberta. Wymogom tym odpowiadają w szczególności płaszczyzny klasyczne: euklidesowa, hiperboliczna i eliptyczna.

F. Bachmann proponuje nieco inne ujęcie, oparte na liniowych przestrzeniach ortogonalnych z dwuliniowym funkcjonałem symetrycznym. Znane jest przejście od 3-wymiarowej przestrzeni liniowej do płaszczyzny rzutowej przyporządkowujące 1-wymiarowym podprzestrzeniom proste rzutowe, a 2-wymiarowym podprzestrzeniom punkty rzutowe. Gdy punktem wyjścia jest przestrzeń liniowa ortogonalna, ustalony funkcjonał indukuje prostopadłość prostych rzutowych i wyróżnia rodzinę prostych izotropowych (być może pustą).

Płaszczyzna rzutowo-metryczna w sensie Bachmanna to płaszczyzna rzutowa z ortogonalnością indukowaną w ten sposób przez dowolnie zadany funkcjonał.

I tak np. w przypadku geometrii hiperbolicznej i ciała liczb rzeczywistych, kiedy to funkcjonałowi można przyporządkować formę

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2$$

zbiór prostych izotropowych tworzy obwiednię pewnej stożkowej właściwej, a zbiór tych punktów, przez które nie przechodzi żadna prosta izotropowa, jest wnętrzem tej stożkowej. To właśnie wnętrze wraz z odpowiednio „poobcinanymi" prostymi i prostopadłością tworzy płaszczyznę metryczną (hiperboliczną) ze względu na metrykę, którą w tym przypadku można określić. Podobnie można uczynić z płaszczyznami eliptyczną i euklidesową, dobierając formy kwadratowe rzutowo równoważne formom

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \quad \text{lub} \quad x_1^2+x_2^2.$$

Jeżeli usuniemy punkty incydentne z prostymi izotropowymi, uzyskamy dobrze znane płaszczyzny metryczne.

Nieco inaczej zachowuje się płaszczyzna Minkowskiego, badana w podobny sposób przez H. Wolffa i związana z formą

$$x_1^2-x_2^2.$$

W tym przypadku przez dowolny punkt płaszczyzny rzutowej przechodzi co najmniej jedna prosta izotropowa. Trudno tu więc mówić o możliwości lokalnego choćby wprowadzenia metryki i trudno żądać, aby uzyskana na tej drodze płaszczyzna metryczna odpowiadała znanej skądinąd rzeczywistej płaszczyźnie Minkowskiego. Chyba że się rozważa „metrykę formalną", indukowaną przez funkcjonał niekoniecznie dodatnio określony, która jest jednak dość odległa od czwartego problemu Hilberta.

M. Kordos po bardzo lakonicznej wzmiance o czwartym problemie Hilberta i nie-

ciu Bachmanna, dochodzi w niezrozumiały dla mnie sposób do wniosku, że na każdej z czterech rozważanych płaszczyzn (trzech klasycznych i Minkowskiego) prostopadłość pozwala na zdefiniowanie metryki. (Tak przynajmniej należy chyba rozumieć jego bardzo niejasną wypowiedź.) Jego kilkunastowierszowy opis płaszczyzn rzutowo-metrycznych świadczy o tym, że potraktował czytelnika dość niefrasobliwie.

Mimo niezbyt fortunnego przedstawienia genezy problematyki, sama teoria płaszczyzn rzutowo-metrycznych rozwijana jest w drugiej części książki z prawdziwą wirtuozerią (rozdz. 8 i 9). Sam pomysł konstruowania tej teorii na gruncie aksjomatyki geometrii rzutowej jest nowatorski, a oparte na nim rozwiązanie bardzo zręczne.

Poszukując wspólnej aksjomatyki dla czterech geometrii rzutowo-metrycznych, autor obiera bardzo naturalny układ pojęć pierwotnych, złożony ze zbioru punktów, zbioru prostych, relacji incydencji i prostopadłości.

Interesują go nie tyle same płaszczyzny „metryczne" (euklidesowa, hiperboliczna itd.), co ich rzutowe rozszerzenia. I tak np. do zbioru punktów „modelu Kleina", odpowiadającego wnętrzu stożkowej dołącza punkty z brzegu stożkowej oraz punkty zewnętrzne, stosownie przedłużając prostopadłość. W ten sposób otrzymuje tzw. pełną płaszczyznę hiperboliczną, której zbiór punktów pokrywa się ze zbiorem punktów całej płaszczyzny rzutowej. Podobnie postępuje z pozostałymi trzema płaszczyznami.

Dzięki takiemu podejściu za zasadniczą część aksjomatyki, skonstruowanej przez siebie „pełnej geometrii czteroabsolutnej", może przyjąć, zanalizowaną w pierwszej części książki, aksjomatykę incydencyjnej geometrii rzutowej.

Po rozstrzygnięciu problemu reprezentacji analitycznej dla samej płaszczyzny rzutowej, wprowadza dodatkowo pojęcie prostopadłości i dołącza nowe aksjomaty, wspólne dla czterech geometrii. Następnie pokazuje, jak za pomocą kilku dodatkowych aksjomatów można scharakteryzować każdą z tych geometrii z osobna. Czyni to korzystając z dwóch tylko warunków oraz ich negacji. Dla uzyskanych geometrii rzutowo-metrycznych przedstawia pełną charakteryzację ich algebraicznych modeli.

Wykorzystując czworokątowe szóstki punktów, autor w pomysłowy sposób połączył przypadek ogólny, odpowiadający geometrii eliptycznej i hiperbolicznej, kiedy prostopadłość zadawana jest poprzez korelacje biegunowe względem stożkowej, z przypadkiem szczególnym, odpowiadającym geometrii euklidesowej i Minkowskiego, kiedy prostopadłość zadawana jest poprzez automorfizm inwolucyjny pewnej prostej.

Jest to z pewnością pierwsza wspólna aksjomatyka rzutowych rozszerzeń czterech ważnych geometrii, zbudowana w prosty i elegancki sposób na bazie znanej aksjomatyki rzutowej.

Godne uznania są również dodatki poświęcone geometrii eliptycznej, zmierzające do przedstawienia tej geometrii jako pewnej algebry.

Jak już wspomniałam na początku recenzji, pewne opory budzi strona formalna książki ze względu na udziwnioną terminologię i symbolikę.

I tak np. razi konsekwentne używanie terminu „dezargowa" (przez z) zamiast „desarguesowa" lub „desarguesowska", co nie wydaje się zgodne z duchem języka polskiego.

Niecelowe jest również zastępowanie nowymi symbolami pewnych symboli mających długoletnią tradycję i ugruntowanych w literaturze przedmiotu. (Dotyczy to w szczególności wprowadzonego przez autora dziwnego symbolu, opartego na motywie podwójnej kreski lub całki podwójnej, użytego do oznaczania przekształceń perspektywicznych i rzutowych (por. str. 37)).

W całej książce (a zwłaszcza w części pierwszej) odczuwa się brak poglądowych komentarzy, które mogłyby ułatwić wczytywanie się w trudny formalizm. (Komentarze takie okazały się bardzo pomocne w podobnie sformalizowanej, lecz znacznie łatwiejszej w czytaniu, cytowanej przez autora książce W. Szmielew.) Autor bardzo oszczędnie używa tekstu niesformalizowanego, chociaż — jak mi skądinąd wiadomo — potrafi znakomicie operować żywym słowem i konkretnym argumentem.

Czy recenzowana książka wypełnia więc istotną lukę w polskiej literaturze naukowej, poświęconej geometrii rzutowej i rzutowo-metrycznej?

W znacznej mierze tak, mimo wyrafinowanego formalizmu, który nie sprzyja popularyzacji geometrii i stwarza sztuczne bariery językowe. (Stwarzanie tego rodzaju formalnych barier wydaje się niewłaściwe, zwłaszcza w obecnym okresie, gdy geometria przeżywa swój renesans i to przede wszystkim dzięki odkrywaniu jej głębokich powiązań z innymi dziedzinami matematyki, od algebry po kombinatorykę.)

Po uściśleniu kilku nie najszczęśliwszych sformułowań i ewentualnym włączeniu poglądowych komentarzy byłaby to jednak dobra, a może nawet bardzo dobra książka, gdyż atrakcyjność problematyki i oryginalne propozycje rozwiązań w znacznym stopniu rekompensują uciążliwy formalizm.

*Hanna Makowiecka*

Laurent Schwartz, *Metody matematyczne w fizyce*, z jęz. francuskiego tłumaczył Tadeusz Trajdos, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1984, str. 337, nakład 2800+200 egz. cena zł 220.—, ISBN 83-01-04361-X.

Omawiana książka L. Schwartza zasługuje niewątpliwie na miano klasycznej. Wydana w roku 1961 (recenzowane tłumaczenie oparte jest na drugim, nie różniącym się istotnie od pierwszego, wydaniu) była pierwszą książką zawierającą elementarny wykład teorii dystrybucji adresowany do fizyków. Przez dłuższy czas książka Schwartza była, między innymi ze względu na dostępność tłumaczenia rosyjskiego, podstawą edukacji studentów fizyki w zakresie teorii dystrybucji. Gdyby więc tłumaczenie jej ukazało się 20 lat temu, powitano by je z entuzjazmem i prawdopodobnie bez słowa krytyki.

W międzyczasie pojawiły się konkurencyjne pozycje, w tym dostępne również na naszym rynku (np. *Analiza* Maurina, rosyjskie *Równania fizyki matematycznej* Władimirowa). Powstaje więc pytanie, czy, mając na uwadze bardzo ograniczone możliwości PWN, dokonano właściwego wyboru. Mam tutaj duże wątpliwości. Moim zdaniem pozycją o podobnej zawartości i objętości, a znacznie bardziej odpowiadającą współczesnym wymaganiom jest wspomniana książka Władimirowa. Co więcej, wydany przez PWN *Zbiór zadań z fizyki matematycznej* (tłumaczenie z rosyjskiego) był opracowany jako jej uzupełnienie!

Wróćmy jednak do książki Schwartza. Jak już wspomniałem, jest to pozycja klasyczna, wielce zasłużona, więc na specjalnych prawach. Jej krytyka z perspektywy prawie 25 lat byłaby nietaktem. Z obowiązku recenzenta omówię zawartość książki jedynie z drobnymi uwagami.

Połowa objętości książki (pięć rozdziałów) poświęcona jest wykładowi teorii dystrybucji. Po wprowadzeniu w rozdziale drugim podstawowych pojęć teorii (brakuje tu szerszego omówienia zbieżności w sensie dystrybucji, zwłaszcza bardzo ważnych dla fizyka wzorów Sochockiego) omawiany jest splot (rozdział trzeci).

Dwa następne rozdziały poświęcone są szeregom i przekształceniom Fouriera. Autor reprezentuje tu punkt widzenia, że dla fizyka bardziej naturalna jest transformata Fouriera na $S^1$ niż na $R^n$. Dla zwartości wykładu i z punktu widzenia teorii dystrybucji właściwsza wydaje się kolejność odwrotna.

W rozdziale szóstym omówione jest przekształcenie Laplace'a z zastosowaniem do rachunku symbolicznego. Rozdział siódmy zawiera klasyczny (tzn. taki, jaki można znaleźć w książkach Couranta, Johna itp.) wykład teorii równania falowego i równania przewodnictwa cieplnego. Wypracowany w poprzednich rozdziałach aparat wykorzystywany jest w sposób minimalny. Wielka szkoda. Dwa krótkie, ostatnie rozdziały poświęcone są funkcjom Eulera i Bessela.

Rozdział pierwszy jest skróconym wykładem teorii szeregów i całki Lebesgue'a,