ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVIII (1988)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ANDRZEJ WIECZOREK (Warszawa)

Zastosowania twierdzeń o punkcie stałym w teorii gier i ekonomii matematycznej *

1. Bardzo często spotykałem się z zainteresowaniem ze strony kolegów matematyków tematem zawartym w tytule. Moi rozmówcy na ogół wiedzieli o tym, że teoria punktu stałego jest jednym z podstawowych narzędzi ekonomii matematycznej, ale chcieli dowiedzieć się jeszcze czegoś konkretnego, poznać jakiś przykład zastosowania twierdzeń o punkcie stałym.

Niniejszy artykuł stanowi próbę podjęcia tego tematu. Ze względu na jego obszerność, ograniczę się do jednego, możliwie prostego przykładu. Przykład ten będzie zawierał elementy typowe dla różnych modeli, a metoda dowodu istnienia równowagi, którą pokrótce przedstawię (jej zręby pochodzą jeszcze od Arrowa i Debreu [1954]), jest bardzo charakterystyczna i jej różne fragmenty pojawiają się często w dowodach do dziś. Przykład wybrałem w ten sposób, aby obejmował zarówno pewnego typu gry, jak i proste modele ekonomiczne.

Czytelnikowi zainteresowanemu bliżej tematem, a który nie może sobie pozwolić na głębsze studia w tym zakresie, bardzo polecam przejrzenie informatora *Handbook of Mathematical Economics* pod redakcją Arrowa i Intrilligatora [1981], a w szczególności rozdziałów napisanych przez Debreu, Scarfa i Dierkera (niestety, książka ta jest trudno dostępna w Polsce).

2. Spośród twierdzeń o punkcie stałym w teorii gier i matematycznej ekonomii najczęściej stosuje się twierdzenie Kakutaniego [1941]. Czasem wystarcza klasyczne twierdzenie Brouwera [1912]; czasem, kiedy model jest bardziej ogólny, używa się twierdzenia Ky Fana [1952] i Glicksberga [1952]; inne twierdzenia o punkcie stałym są używane rzadziej, chociaż często stosuje się różne algorytmy dochodzenia do punktu stałego.

Przypomnę teraz sformułowanie pierwszego z tych twierdzeń, z którego będę dalej korzystał:

---

* Artykuł oparty na wykładzie habilitacyjnym autora, wygłoszonym 19 czerwca 1985.

TWIERDZENIE KAKUTANIEGO. *Jeśli X jest niepustym zwartym wypukłym podzbiorem przestrzeni euklidesowej, a relacja $R \subseteq X^2$ jest domknięta i ma niepuste wypukłe przekroje $R(x) := \{y|\ xRy\}$, to dla pewnego x_0 jest $x_0 R x_0$ (czyli $x_0 \in R(x_0)$).*

3. Zacznę od bardzo prostego przypadku, którego nie można jeszcze nazwać ani grą, ani modelem ekonomicznym. Jednak już tutaj da się wprowadzić nietrywialne pojęcie równowagi.

Przez *układ* będę rozumiał trójkę: zbiór X i dwie relacje Φ, $\Psi \subseteq X^2$; o Ψ zakładam, że jest przeciwzwrotna, tzn. żaden element nie jest w relacji sam ze sobą. Układ interpretujemy w następujący sposób: elementy zbioru X to *stany* układu; wyobrażamy sobie, że ktoś steruje układem zgodnie z relacją Φ; $x\Phi y$ oznacza, że układ może przejść ze stanu x do stanu y, a więc $\Phi(x)$ to zbiór tych stanów, do których można przeprowadzić układ ze stanu x. Z kolei $x\Psi y$ oznacza, że stan y jest bardziej pożądany od stanu x (dla tego kogoś, kto steruje układem).

4. Niemal zawsze równowagę w grze lub modelu ekonomicznym rozumie się jako stan, który spełnia dwa warunki: dopuszczalności i stabilności. Tłumacząc te warunki na język naszego układu otrzymamy następującą definicję:

Równowagą układu (X, Φ, Ψ) jest taki stan x_0, że $x_0 \in \Phi(x_0)$ oraz

$$\Phi(x_0) \cap \Psi(x_0) = \emptyset.$$

Pierwszy warunek definicji odpowiada dopuszczalności, a drugi — stabilności; można krótko powiedzieć, że jeśli jakiś stan jest osiągalny ze stanu równowagi x_0, to nie jest od niego lepszy. A więc, jeśli układ jest w stanie równowagi x_0, to nasz hipotetyczny gracz nie będzie tego stanu zmieniał; po pierwsze, nie jest do tego zmuszany przez Φ, a po drugie — i tak nie może poprawić swojej sytuacji.

5. Przy pewnych założeniach, w tak określonym układzie istnieje równowaga. Ograniczę się do przypadku, kiedy zbiór stanów jest zawarty w przestrzeni euklidesowej. Założenie to można znacznie osłabić kosztem pewnych komplikacji w dowodzie, ale teraz nie zależy mi na zwiększaniu ogólności.

TWIERDZENIE 1. *Jeśli* (a) *X jest niepustym zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni euklidesowej,* (b) *relacja Φ jest domknięta i dolnie półciągła, a wszystkie przekroje $\Phi(x)$ są niepuste i wypukłe, i* (c) *relacja Ψ jest otwarta i ma wypukłe przekroje $\Psi(x)$, to układ (X, Φ, Ψ) ma równowagę.*

Przez *dolną półciągłość* relacji Φ rozumiem, jak zwykle, że zbiór

$$\{x|\ x\Phi y \text{ dla pewnego } y \in G\}$$

jest otwarty dla każdego zbioru otwartego $G \subseteq X$.

Podam teraz dowód tego twierdzenia, oczywiście skorzystam przy tym z twierdzenia Kakutaniego.

Zauważmy, że istnieje ciągła funkcja $f\colon X^2 \to \boldsymbol{R}_+$, której nośnikiem jest Ψ i która jest quasi-wklęsła w drugiej współrzędnej, tzn. taka, że dla dowolnych $x \in X$ i $r \in \boldsymbol{R}$ zbiór

$$\{y \mid f(x, y) \geqslant r\}$$

jest wypukły. Taką funkcją jest na przykład

$$f(x, y) := \operatorname{dist}\big((x, y), \boldsymbol{R}^2 \setminus \Psi\big).$$

Bierzemy pod uwagę relację $F \subseteq X^2$ określoną wzorem:

$$(x, y) \in F \Leftrightarrow y \text{ maksymalizuje wartość } f(x, y) \text{ na zbiorze } \Phi(x).$$

Ze znanego twierdzenia, które można znaleźć na przykład w książce Berge'a [1959], wynika że F jest relacją domkniętą. Ze zwartości poszczególnych $\Phi(x)$ i ciągłości f wynika, że przekroje $F(x)$ są niepuste, a z quasi-wklęsłości $f(x, \cdot)$ – że są wypukłe.

Zreasumujmy: relacja F jest domknięta i ma niepuste wypukłe przekroje, a X jest niepustym zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni euklidesowej. Są więc spełnione założenia twierdzenia Kakutaniego; wnosimy stąd, że istnieje x_0 takie, że $x_0 \in F(x_0)$.

Udowodnię, że x_0 jest równowagą układu. Z definicji, $x_0 \in \Phi(x_0)$. Przypuśćmy, że pewne y należy do $\Phi(x_0) \cap \Psi(x_0)$. Ponieważ Ψ jest nośnikiem f, więc $f(x_0, y) > 0$. Ponieważ $x_0 \in F(x_0)$, czyli x_0 maksymalizuje wartość funkcji $f(x_0, \cdot)$ na zbiorze $\Phi(x_0)$, więc $f(x_0, x_0) \geqslant f(x_0, y)$, skąd wynika, że $f(x_0, x_0) > 0$. Ponieważ Ψ jest nośnikiem f, więc $x_0 \in \Psi(x_0)$, co jest sprzeczne z warunkiem przeciwzwrotności Ψ. A więc $\Phi(x_0) \cap \Psi(x_0) = \emptyset$, co kończy dowód.

6. Poprzednio rozpatrywany układ, chociaż nietrywialny, jest o tyle mało ciekawy z punktu widzenia zastosowań, że opisuje możliwości i preferencje tylko jednej osoby. Teraz chciałbym się zająć przypadkiem ogólnym, w którym występuje n takich osób.

Przeniesienia poprzednich definicji nie można jednak dokonać w sposób mechaniczny, tzn. przyjąć, że w zbiorze stanów X operują gracze $i = 1, \ldots, n$ opisani w ten sposób co poprzednio relacjami Φ_i i Ψ_i. Co prawda, przy analogicznych, jak poprzednio, założeniach, dla każdego gracza i będzie w tej sytuacji istniała indywidualna równowaga x_0^i, jednak trudno znaleźć warunki, które gwarantowałyby istnienie stanu będącego równowagą jednocześnie ze względu na wszystkich graczy.

Postąpmy więc inaczej i załóżmy, że każdy gracz i ma swój zbiór X_i, którego elementy będą nazywane jego *strategiami*; elementy produktu $X_1 \times \ldots \times X_n$ są *stanami* gry, a relacje Φ_i i Ψ_i będą respektować produktową strukturę zbioru stanów.

7. Formalnie, *n-osobowa gra z ograniczeniami* to układ składający się ze zbiorów $X_1, \ldots, X_n$ i relacji

$$\Phi_1, \Psi_1 \subseteq X \times X_1, \ldots, \Phi_n, \Psi_n \subseteq X \times X_n, \quad \text{gdzie } X = X_1 \times \ldots \times X_n;$$

zakładamy, że $x_i \notin \Psi_i(x)$ dla wszystkich $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, $i = 1, \ldots, n$.

Relacje Φ_i i Ψ_i są, odpowiednio, *relacją ograniczającą* i *relacją preferencji* gracza i.

Jeśli $\xi \in \Phi_i(x)$, to oznacza to, że gracz i może zmienić stan gry $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ na stan $(x_1, \ldots, \xi, \ldots, x_n)$; jeśli $\xi \in \Psi_i(x)$, to rozumiemy, że gracz i woli stan $(x_1, \ldots, \xi, \ldots, x_n)$ od stanu $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Jak więc widać, każdy gracz może operować tylko na swojej współrzędnej, natomiast obserwację preferencji gracza i ogranicza się do sytuacji, kiedy porównywane stany różnią się tylko na współrzędnej i.

Zauważmy, że gra jednoosobowa to dokładnie to samo co układ zdefiniowany poprzednio w punkcie 3.

8. *Równowagą* gry $(X_i, \Phi_i, \Psi_i \mid i = 1, \ldots, n)$ nazywamy taki stan $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in X$, że dla wszystkich i spełnione są warunki

$$x_{0i} \in \Phi_i(x_0) \quad \text{oraz} \quad \Phi_i(x_0) \cap \Psi_i(x_0) = \emptyset.$$

Interpretacja pojęcia równowagi jest taka sama, jak w przypadku równowagi układu: jest to więc taki stan, którego żaden gracz nie musi, ani nie chce zmieniać.

9. Twierdzenie 1 przenosi się na przypadek gier n-osobowych w następujący sposób:

TWIERDZENIE 2. *Jeśli, dla* $i = 1, \ldots, n$, (a) X_i *jest niepustym zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni euklidesowej,* (b) *relacja* Φ_i *jest domknięta i dolnie półciągła, a wszystkie przekroje* $\Phi_i(x)$ *są niepuste i wypukłe, i* (c) *relacja* Ψ_i *jest otwarta i ma wypukłe przekroje* $\Psi_i(x)$, *to gra n-osobowa* $(X_i, \Phi_i, \Psi_i \mid i = 1, \ldots, n)$ *ma równowagę.*

W dowodzie twierdzenia 2 postępuje się podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1 z tą różnicą, że odrębnie zajmuje się każdym graczem. Dla gracza i konstruuje się, w ten sam sposób co poprzednio, relację $F_i \subseteq X_i \times X_i$. Bierze się potem pod uwagę relację produktową $F \subseteq X \times X$ taką, że dla każdego $x \in X$,

$$F(x) = F_1(x) \times \ldots \times F_n(x).$$

Z twierdzenia Kakutaniego wnioskuje się o istnieniu $x_0 \in X$ takiego, że $x_0 \in F(x_0)$, a następnie dowodzi się, że x_0 jest równowagą rozpatrywanej gry. Czytelnik, jeśli zechce, bez trudu odtworzy szczegóły dowodu.

10. Teraz przejdę już do przedstawienia pewnego prostego modelu ekonomicznego. Modele tego typu nazywają się modelami *czystej wymiany towarowej*. Zacznę od wprowadzenia pewnej terminologii: liczby $1, \ldots, k$ będą numerami rozpatrywanych *towarów*, w związku z tym elementy R^k_+ będziemy interpretować jako *wiązki towarowe*: $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ to wiązka składająca się z ξ_1 jednostek pierwszego towaru, ξ_2 jednostek drugiego towaru itd. *Układy cen* to elementy sympleksu standardowego $\Delta \subset R^k_+$; przy $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k) \in \Delta$, p_1 interpretujemy jako cenę jednostki pierwszego towaru, p_2 to cena jednostki drugiego towaru itd. Warunek $\sum_j p_j = 1$ bardzo upraszcza dowody; można go wprowadzić ze względu na jednorodność (ze względu na p) wszystkich rozpatrywanych nierówności. *Wartość* wiązki towarowej ξ mierzona w cenach p to oczywiście iloczyn skalarny $p \cdot \xi$.

W wymianie biorą udział osoby oznaczone liczbami $1, \ldots, n$. Przez *alokację* rozumie się funkcję x przyporządkowującą każdej osobie i pewną wiązkę towarową x^i.

Pełny opis *gospodarki wymiennej* otrzymujemy specyfikując, dla $i = 1, \ldots, n$, zbiór $C_i \subset R^k_+$, przeciwzwrotną relację $\prec_i \subset C_i \times C_i$ oraz wektor $\omega^i \in C_i$; nazywamy je, odpowiednio, *zbiorem konsumpcyjnym*, *relacją preferencji* i *zapasem początkowym* Pana i.

Funkcjonowanie gospodarki wyobrażamy sobie w następujący sposób. Pan i przychodzi na rynek z wiązką towarową ω^i. Jeżeli na rynku obowiązują ceny p, to w drodze sprzedaży może on uzyskać $p \cdot \omega^i$ jednostek pieniędzy. Za tę kwotę może kupić inną wiązkę towarową należącą do jego zbioru konsumpcyjnego C_i. Będzie się przy tym starał o wiązkę jak najlepszą w sensie relacji $\prec_i$.

11. *Równowaga* (rynkowa) w gospodarce wymiennej $(C_i, \prec_i, \omega^i \mid i \leqslant n)$ jest to para: układ cen p_0 i alokacja x_0 takie, że:

(a) $$\sum_i x_0^i \leqslant \sum_i \omega^i$$

(nierówność ma zachodzić na wszystkich współrzędnych),

(b) $x_0^i \in C_i$ oraz $p_0 \cdot x_0^i \leqslant p_0 \cdot \omega^i$ dla wszystkich i,

(c) nie istnieje j ani $\xi \in C_j$ takie, że $p_0 \cdot \xi \leqslant p_0 \cdot \omega^j$ oraz $x_0^j \prec_j \xi$.

Równowaga jest więc stanem gospodarki o następującej własności: każdy zachowuje się racjonalnie, biorąc pod uwagę tylko swoje własne preferencje i możliwości budżetowe, a jednak okazuje się potem, że dla wszystkich wystarcza towarów.

Gdyby w definicji równowagi założyć więcej:

(a′) $$\sum_i x_0^i = \sum_i \omega^i$$

zamiast (a) (tak się często przyjmuje; przy pewnych słabych założeniach obie definicje są równoważne), to w równowadze każdy znalazłby nabywców na wszystkie swoje towary.

12. Twierdzenie 3, które sformułuję niżej, ma wyraźny sens ekonomiczny; w szczególności dotyczy to poszczególnych założeń. Domkniętość, ograniczoność i wypukłość zbioru konsumpcyjnego, otwartość relacji preferencji, wypukłość jej przekrojów – to warunki znane, dyskutowane i czasem kwestionowane w literaturze ekonomicznej. Warunek (c) budzi zawsze opory ze strony ekonomistów. Można go uniknąć, wprowadzając inne założenia i uzupełniając dowód nowymi elementami, ale tym pobocznym (dla matematyka) zagadnieniem nie warto się chyba zajmować w tym miejscu.

TWIERDZENIE 3. *Jeśli, dla* $i = 1, \ldots, n$, (a) *zbiór konsumpcyjny* C_i *jest zwarty i wypukły*, (b) *relacja preferencji* $\prec_i$ *jest otwarta i ma wypukłe przekroje* $P_x := \{y \mid x \prec_i y\}$ *oraz* (c) $\omega^i \in \operatorname{Int} C_i$, *to gospodarka wymienna* $(C_i, \prec_i, \omega^i \mid i = 1, \ldots, n)$ *ma równowagę.*

Dla dowodu twierdzenia 3 konstruuje się pomocniczą grę $(n+1)$-osobową

$$(\Delta, C_1, \ldots, C_n; \Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n; \Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n),$$

w której, dla wszystkich $(p, x) \in \Delta \times C_1 \times \ldots \times C_n$,

$$\Phi_0(p, x) := \Delta,$$

$$\Phi_i(p, x) := \{\xi \in C_i \mid p \cdot \xi \leqslant p \cdot \omega^i\} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n,$$

$$\Psi_0(p, x) := \{q \in \Delta \mid q \cdot \sum_i (x^i - \omega^i) > p \cdot \sum_i (x^i - \omega^i)\},$$

$$\Psi_i(p, x) := \{\xi \in C_i \mid x^i \prec_i \xi\} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n.$$

W grze pomocniczej występują więc jako gracze wszystkie osoby biorące udział w wymianie towarowej, a dodatkowo – jeszcze jeden gracz, który reprezentuje mechanizm rynkowy. Zbiorem strategii tego gracza jest zbiór wszystkich cen; może je on dowolnie zmieniać, przy tym preferuje takie ceny, które oceniają wyżej wartość nadwyżki popytu nad podażą. Pozostali gracze mogą poruszać się w zakresie swoich zbiorów konsumpcyjnych przy zachowaniu ograniczeń budżetowych $p \cdot \xi \leqslant p \cdot \omega^i$; ich relacje preferencji w pomocniczej grze są odbiciem relacji preferencji w wyjściowym modelu.

Dowodzi się, zresztą bardzo pracowicie, że przy założeniach twierdzenia 3 pomocnicza gra $(n+1)$-osobowa spełnia założenia twierdzenia 2. Tę część dowodu, jako mało ciekawą, pominę, uznając istnienie równowagi (p_0, x_0) pomocniczej gry za udowodnione.

Na koniec udowodnię, że (p_0, x_0) jest również równowagą rynkową wyjściowej gospodarki wymiennej. Z konstrukcji wynika natychmiast, że spełnione są warunki (b) i (c) równowagi rynkowej. Dla dowodu warunku (a)

zsumujemy nierówności

$$p_0 \cdot x_0^i \leqslant p_0 \cdot \omega^i$$

stronami po i. Otrzymamy w ten sposób nierówność

$$p_0 \cdot \sum_i (x_0^i - \omega^i) \leqslant 0.$$

Z definicji równowagi wynika, że dla wszystkich $q \in \Delta$

$$q \cdot \sum_i (x_0^i - \omega^i) \leqslant p_0 \sum_i (x_0^i - \omega^i),$$

a więc w konsekwencji, dla wszystkich $q \in \Delta$, $q \cdot \sum_i (x_0^i - \omega^i) \leqslant 0$. Wynika stąd, że $\sum_i (x_0^i - \omega^i) \leqslant 0$ (na wszystkich współrzędnych), a więc $\sum_i x_0^i \leqslant \sum_i \omega^i$, co dowodzi warunku (a).

12. Czytelnikowi należy się teraz parę uwag bibliograficznych. Sam pomysł sprowadzenia modelu ekonomicznego do gry n-osobowej i przeniesienia równowagi w grze na równowagę rynkową pochodzi, jak już wspomniałem, od Arrowa i Debreu [1954].

Twierdzenie 1 jest oczywiście szczególnym przypadkiem twierdzenia 2; sądzę, że przedstawienie najpierw przypadku szczególnego pozwoliło na lepsze wyeksponowanie miejsca, w którym stosuje się twierdzenie o punkcie stałym.

Pojęcie gry n-osobowej i istnienie równowagi w sensie punktu 8 wiąże się z nazwiskiem Nasha [1950]. Przypadek z ograniczeniami pierwszy zbadał Debreu [1952]. Przytoczone tu dowody twierdzeń 1 i 2 pochodzą z pracy Shafera i Sonnenscheina [1975]; ich zasługa polegała na zastąpieniu wcześniej używanych funkcji użyteczności relacjami preferencji.

Model wymiany przedstawiony w punkcie 10 to uogólnienie szczególnego przypadku modelu Arrowa i Debreu [1954], którzy zajmowali się łącznym schematem wymiany i produkcji. Ze względu na swą relatywną prostotę i dydaktyczną użyteczność, model czystej wymiany jest od lat sześćdziesiątych (McKenzie [1959]) szczególnie często przytaczany, opisywany i badany. Jego obszerną analizę można znaleźć w podręczniku Rosenmüllera [1981].

13. Chciałbym zakończyć ten artykuł kilkoma uwagami merytorycznymi, a więc dotyczącymi samego stosowania twierdzeń o punkcie stałym i innych środków dowodowych w badaniach gier i modeli ekonomicznych.

Pierwszą matematycznie ścisłą definicję równowagi ekonomicznej podał Leon Walras [1874]; jego rozważaniom nie towarzyszył jednak formalny dowód istnienia. Pierwszy dowód istnienia równowagi w zmodyfikowanym modelu Walrasa podał Abraham Wald [1935], który posłużył się twierdzeniem Brouwera. Dowód ten uprościli po wojnie m. in. Kuhn [1956] i

Dorfman, Samuelson i Solow [1958], ale mając już do dyspozycji twierdzenie Kakutaniego i teorię dualności w programowaniu liniowym.

Wcześniej, bo już w 1928 r., von Neumann podał definicję gier dwuosobowych o sumie zerowej i udowodnił istnienie równowagi (pary strategii mieszanych w równowadze). Jego dowód był bardzo skomplikowany i opierał się na twierdzeniu Brouwera. Znacznie prostszy dowód podał później Ville [1938], któremu wystarczyły same tylko twierdzenia o oddzielaniu.

W 1937 r. von Neumann skonstruował model rozwijającej się gospodarki, zwany dzisiaj *modelem von Neumanna*, i udowodnił, że ma on równowagę ekonomiczną. W tym dowodzie posłużył się znalezionym przez siebie uogólnieniem twierdzenia Brouwera (mowa o tym nawet w tytule jego pracy [1937]), które brzmi następująco:

TWIERDZENIE VON NEUMANNA. *Jeśli X i Y są niepustymi zwartymi i wypukłymi podzbiorami przestrzeni euklidesowych, a relacje $F, G \subseteq X \times Y$ są domknięte i mają, dla wszystkich $x \in X$ i $y \in Y$, niepuste i wypukłe przekroje $F(x)$ i $G^{-1}(y)$, to $F \cap G \neq \emptyset$.*

Twierdzenie von Neumanna jest równoważne cztery lata późniejszemu twierdzeniu Kakutaniego w tym sensie, że każde z nich wynika natychmiast z drugiego.

Po wojnie dowody istnienia równowagi w modelu von Neumanna znacznie uproszczono, np. Łoś podał w 1971 r. dowód, w którym korzysta się tylko z twierdzenia o oddzielaniu.

Twierdzenie Kakutaniego z 1941 roku zostało w 1952 roku uogólnione niezależnie przez Ky Fana i Glicksberga na przypadek zwartych wypukłych podzbiorów przestrzeni lokalnie wypukłych, zresztą w związku z potrzebą uogólnienia twierdzeń o istnieniu równowag w grach n-osobowych.

W latach czterdziestych powstały też inne silne środki dowodowe: teoria programowania liniowego (Kantorowicz, Koopmans, Dantzig) oraz teoria gier, która teraz stała się samodzielną dyscypliną (klasyczna dziś monografia von Neumanna i Morgensterna [1944]).

W latach pięćdziesiątych powstały pierwsze modele ekonomiczne tzw. *ogólnej równowagi*, czyli modele tego typu, co model opisany w 11, na ogół wzbogacone jeszcze o inne elementy, np. produkcję towarów. Po dowodach istnienia równowagi rynkowej powielających pomysł Arrowa i Debreu [1954], takich jak dowód podany w 12, pojawiło się jeszcze wiele innych. Najciekawszy i najczęściej potem powtarzany pomysł to zastosowanie lematu Gale'a [1955] i Nikaido [1965]:

LEMAT GALE'A–NIKAIDO. *Jeśli S jest niepustym zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni euklidesowej, a relacja $F \subseteq \Delta \times S$ (Δ oznacza sympleks standardowy w tej przestrzeni) jest domknięta, ma niepuste wypukłe przekroje $F(p)$ i spełnia warunek* (nazywany przez ekonomistów *Prawem Walrasa*)

$$p \cdot z \leqslant 0 \quad \text{dla wszystkich } p \in \Delta \text{ i } z \in F(p),$$

to dla pewnego $p_0 \in \Delta$ *istnieje* $z_0 \in F(p_0)$ *o wszystkich współrzędnych niedodatnich.*

Lematu Gale'a–Nikaido dowodzi się również za pomocą twierdzenia Kakutaniego. Takie dowody można znaleźć np. w książkach Debreu [1959] czy Nikaido [1968].

Aby udowodnić twierdzenie 3 za pomocą lematu Gale'a–Nikaido, konstruuje się tzw. *funkcję nadwyżki popytu* (nad podażą). Jest to właściwie relacja $F \subseteq \Delta \times \boldsymbol{R}^k_+$, taka że dla każdego $p \in \Delta$, $F(p)$ składa się z wszystkich wektorów postaci $y^1 + \ldots + y^n$, gdzie y^i, dla $i = 1, \ldots, n$, jest optymalną wiązką towarową (w sensie relacji $\prec_i$) w zbiorze

$$\{\xi \in C_i \mid p_0 \cdot \xi \leqslant p_0 \cdot \omega^i\}.$$

Dowód twierdzenia 3 sprowadza się teraz do udowodnienia, że relacja F spełnia założenia lematu Gale'a–Nikaido (oczywiście trzeba najpierw określić $S \subset \boldsymbol{R}^k_+$).

W ciągu ostatniego ćwierćwiecza powstało mnóstwo nowych modeli ekonomicznych, w tym i modeli ogólnej równowagi. Nowe modele powstają zwykle przez wprowadzenie nowego czynnika, np. edukacji, siły roboczej, płac, sztucznego ograniczania cen, racjonowania konsumpcji itd. Najważniejszą innowacją było, przynajmniej z technicznego punktu widzenia, wprowadzenie niezależnie przez Aumanna [1964] i Vinda [1964], modeli z continuum uczestników (obszerny opis takich modeli można znaleźć w książce Hildenbranda [1974]). Do dzisiaj jednak obie metody dowodu istnienia równowag: metoda pochodząca od Arrowa i Debreu [1954] oraz ta, która odwołuje się do lematu Gale'a–Nikaido, są stosowane bardzo często.

14. A oto angielskie wersje kilku używanych przeze mnie terminów:
funkcja nadwyżki popytu := *excess demand function*,
gospodarka wymienna := *exchange economy*,
ogólna równowaga := *general equilibrium*,
Prawo Walrasa := *Walras Law*,
równowaga rynkowa := *competitive equilibrium*,
równowaga (w grze n-osobowej) := *Nash equilibrium*,
uczestnik gospodarki, wymiany := *agent*, *trader*,
wiązka towarowa := *commodity bundle*,
zapas początkowy := *initial endowment*.

Na koniec podam jeszcze dane bibliograficzne cytowanych przeze mnie artykułów i książek.

Literatura

K. J. Arrow i G. Debreu [1954], *Existence of an equilibrium for a competitive economy*, Econometrica 22, 265–290.

K. J. Arrow i M. D. Intrilligator (redaktorzy) [1981], *Handbook of mathematical economics*, North-Holland, Amsterdam.

R. Aumann [1964], *Markets with a continuum of traders*, Econometrica 32, 39–50.
C. Berge [1959], *Espaces topologiques. Fonctions multivoques*, Dunod, Paryż.
L. E. J. Brouwer [1912], *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen 71, 97–115.
G. Debreu [1952], *A social equilibrium existence theorem*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 38, 886–893.
– [1959], *Theory of value*, Wiley, Nowy Jork.
R. Dorfman, P. A. Samuelson i R. M. Solow [1958], *Linear programming and economic analysis*, McGraw-Hill, Nowy Jork.
Ky Fan [1952], *Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 38, 121–126.
D. Gale [1955], *The Law of Supply and Demand*, Mathematica Scandinavica 3, 155–169.
I. L. Glicksberg [1952], *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points*, Proceedings of the American Mathematical Society 3, 170–174.
W. Hildenbrand [1974], *Core and equilibria of a large economy*, Princeton University Press.
S. Kakutani [1941], *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Mathematical Journal 8, 457–459.
H. W. Kuhn [1956], *On a theorem of Wald*, w: H. W. Kuhn i A. W. Tucker, Annals of Mathematical Studies 38, Princeton University Press, 265–273.
J. Łoś [1971], *A simple proof of the existence of equilibrium in a von Neumann model and some of its consequences*, Bul. Acad. Polon. Sci. (Seria Matematyczna) 19, 971–979.
L. McKenzie [1959], *On the existence of general equilibrium for a competitive market*, Econometrica 27, 54–71.
J. F. Nash [1950], *Equilibrium points in N-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 36, 48–49.
H. Nikaido [1956], *On the classical multilateral exchange problem*, Metroeconomica 8, 135–145.
– [1968], *Convex structures and economic theory*, Academic Press, Nowy Jork,
J. Rosenmüller [1981], *The theory of games and markets*, North-Holland, Amsterdam.
W. J. Shafer i H. F. Sonnenschein [1975], *Equilibrium in abstract economies without ordered preferences*, Journal of Mathematical Economics 2, 345–348.
J. Ville [1938], *Sur la théorie générale des jeux*, w pracy E. Borela, *Traité du calcul des probabilités*, Paryż, 105–113.
K. Vind [1964], *Edgeworth-allocations in an exchange economy with many traders*, International Economic Review 5, 165–177.
J. von Neumann [1928], *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen 100, 295–320.
– [1937], *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 8, 73–83.
– i O. Morgenstern [1944], *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press.
A. Wald [1935], *Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 7, 1–6.
L. Walras [1874], *Éléments d'économie politique pure*, Corbaz, Lozanna.