ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVIII (1988)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

# JUBILEUSZ PROFESORA JANA MIKUSIŃSKIEGO

W związku z siedemdziesiątą rocznicą urodzin profesora Jana Mikusińskiego odbyła się 9 kwietnia 1983 r. sesja naukowa zorganizowana przez Oddział IM PAN w Katowicach i Oddział Górnośląski PTM (por. Wiadom. Mat. 26 (1985), str. 241–242).

Pierwszy z przedstawianych artykułów tematycznie obejmuje cztery z pięciu referatów wtedy wygłoszonych. Tekst piątego referatu, autorstwa Władysława Kierata, zamieszczamy poniżej. Cytowane książki i publikacje zwarte Jana Mikusińskiego oznaczone są liczbami rzymskimi, prace opublikowane w czasopismach liczbami arabskimi, a cytowane publikacje innych autorów literami łacińskimi: od [A] do [Q] w pierwszym artykule i od [R] do [W] w następnym.

ANDRZEJ KAMIŃSKI i KRYSTYNA SKÓRNIK (Katowice)

## Fakty z życia i twórczości Profesora Jana Mikusińskiego

**1.** Profesor Jan Mikusiński urodził się 3 kwietnia 1913 roku w Stanisławowie. Kształcił się w Poznaniu. Najpierw uczęszczał do Gimnazjum Humanistycznego im. Paderewskiego, później – gdy ujawniły się jego zdolności matematyczne – do Gimnazjum Matematyczno-Fizycznego im. Bergera. Studia matematyczne, przerwane na trzy lata ciężką chorobą, odbywał w Uniwersytecie Poznańskim. Po ich ukończeniu w 1937 roku pracował tu aż do wybuchu wojny na stanowisku starszego asystenta.

W czasie okupacji przebywał w Zakopanem i Krakowie. Podjął działalność naukową; mimo dwukrotnego aresztowania angażował się mocno w tajne nauczanie. Razem z grupą krakowskich matematyków uczestniczył w tajnych seminariach prowadzonych przez profesora Tadeusza Ważewskiego.

Uczestnicy tych seminariów byli świadkami narodzin teorii znanej dziś pod nazwą: *rachunek operatorów Mikusińskiego*. Nawet jej autor chyba nie przewidywał, że teoria stanie się tak znana, iż jej nazwa wejdzie na listy klasyfikacyjne działów matematyki (w klasyfikacji *Mathematical Reviews* figuruje pod numerem 44A40). Obiekty tej teorii, operatory, stanowią wspólne uogólnienie liczb i funkcji lokalnie całkowalnych na półprostej. Autor nadał im początkowo inną nazwę – hiperliczby – i w książce pod takim właśnie tytułem przedstawił własności i zastosowania tego pojęcia.

Niezwykła jest historia tej książeczki powstałej w dramatycznych czasach



Jan Mohrmann

wojny, kiedy publikowanie dzieł naukowych było niemożliwe, a przekroczenie tej bariery wiązało się ze śmiertelnym niebezpieczeństwem. Prócz odwagi, autor wykazał pomysłowość i zdolności techniczne: *Hiperliczby* ukazały się w 1944 roku w niezwyczajnym nakładzie 7 egzemplarzy sporządzonych własnoręcznie przez autora przy użyciu klisz rentgenowskich. Cały nakład został rozprowadzony pomiędzy uczestników seminarium.

Wybiegając w przyszłość stwierdźmy, że książeczka ta stała się impulsem do intensywnych badań i szybkiego rozwoju nowej teorii, dokumentowanego licznymi publikacjami, długą serią wydań książkowych i rosnącym jej znaczeniem. Sama książeczka czekała jednak na następne wydanie 40 lat. Ukazała się wtedy jednocześnie w dwu różnych częściach świata, w dwu różnych językach: w języku angielskim w Polsce, w tomie 77 *Studia Mathematica* oraz w języku polskim (wraz z angielskim tłumaczeniem) w Santa Barbara w Kalifornii. W obu wypadkach wydawnictwa były dedykowane Profesorowi Janowi Mikusińskiemu z okazji jubileuszu jego 70 urodzin.

Bezpośrednio po zakończeniu wojny Jan Mikusiński podjął pracę naukową i dydaktyczną na Uniwersytecie Jagiellońskim. W lipcu 1945 roku otrzymał tutaj stopień doktora filozofii za rozprawę *Sur un problème d'interpolation pour les intégrales des équations différentielles linéaires*, której promotorem był profesor Ważewski.

Po uzyskaniu doktoratu Jan Mikusiński wrócił do Poznania, gdzie przez rok był adiunktem na Uniwersytecie Poznańskim i jednocześnie profesorem etatowym w Szkole Inżynierskiej w Poznaniu.

W lutym 1946 r. uzyskał habilitację na Uniwersytecie Marii Skłodowskiej-Curie w Lublinie i tam w 1947 r. został powołany na stanowisko profesora nadzwyczajnego.

W latach 1948–1955 jest profesorem Uniwersytetu Wrocławskiego, a od roku 1955 profesorem Uniwersytetu Warszawskiego. Jednocześnie pracuje w Instytucie Matematycznym PAN (noszącym początkowo nazwę: Państwowy Instytut Matematyczny) od momentu jego utworzenia w 1948 r.

W grudniu 1955 r. uzyskuje stopień doktora nauk matematycznych([1]) za zespół prac pod wspólnym tytułem: *Nowe ujęcie rachunku operatorów*.

W 1958 r. zostaje mianowany profesorem zwyczajnym Uniwersytetu Warszawskiego. Niestety, w rok później, z powodu złego stanu zdrowia, zmuszony jest do przerwania pracy na tej uczelni. Zachowuje etat w Instytucie Matematycznym PAN.

W 1960 r. Profesor Mikusiński przenosi się do Katowic. Wkrótce nawiązuje z nim kontakt grupa młodych matematyków z miejscowej Wyższej Szkoły Pedagogicznej. Mimo nadal nie najlepszego stanu zdrowia, Profesor daje się namówić do wygłoszenia cyklu odczytów, który przeradza się w stałe seminarium, prowadzone początkowo w katowickiej WSP, a później w domu

([1]) Zgodnie z ówczesnym ustawodawstwem istniały dwa stopnie naukowe: niższy – kandydat nauk i wyższy – doktor nauk.

Profesora. Uczestnicy seminarium do dziś wspominają niezwykłą atmosferę gorących dyskusji przy tablicy zawieszonej w garażu zastępującym salę seminaryjną.

Te spontaniczne kontakty naukowe Profesora Mikusińskiego ze śląskim środowiskiem matematycznym nabrały bardziej trwałego charakteru z chwilą utworzenia w 1966 r. w Katowicach Pracowni Matematycznej PAN, która (po kilku zmianach organizacyjnych) stanowi obecnie Oddział Instytutu Matematycznego PAN w Katowicach.

Profesorowi Mikusińskiemu placówka ta zawdzięcza uznanie w świecie i stały kontakt z wieloma ośrodkami matematycznymi za granicą. W organizowanych na Śląsku konferencjach międzynarodowych poświęconych funkcjom uogólnionym, a później także teorii zbieżności, uczestniczyła cała plejada znakomitości matematycznych. Dotyczy to szczególnie konferencji w roku 1966 zorganizowanej po Kongresie Moskiewskim. Zapoczątkowała ona długą i owocną serię międzynarodowych konferencji – organizowanych w różnych krajach – które stały się forum wymiany osiągnięć we wspomnianych dziedzinach.

Trudno jest przecenić rolę Profesora Jana Mikusińskiego dla śląskiego środowiska matematycznego. Odnosi się to zwłaszcza do początkowego okresu, kiedy Śląsk pozbawiony był ośrodka uniwersyteckiego, a młodzi matematycy szukali gorączkowo kontaktów z innymi ośrodkami: w Krakowie, Lublinie czy Wrocławiu. Zjawienie się Profesora Mikusińskiego na Śląsku stwarzało dla nich możliwość obcowania z wielką matematyką. Później, po powstaniu Uniwersytetu Śląskiego i przybyciu na Śląsk matematyków z innych ośrodków, autorytet Profesora Mikusińskiego pełnił rolę spoiwa łączącego rozproszone środowisko. Przykładem – inicjatywa Profesora organizowania comiesięcznych dyskusji matematycznych przy herbatce z udziałem przedstawicieli różnych śląskich instytucji matematycznych.

W okresie pobytu na Śląsku Profesor Mikusiński zostaje członkiem Polskiej Akademii Nauk: w 1965 r. członkiem-korespondentem, a w 1971 r. członkiem rzeczywistym.

Profesor pełnił przy tym wiele funkcji organizacyjnych. Był kierownikiem Katedry Analizy Matematycznej Uniwersytetu Wrocławskiego, kierownikiem Działu Analizy Matematycznej w Instytucie Matematycznym PAN oraz kierownikiem Pracowni Matematycznej, a później Oddziału Instytutu Matematycznego PAN w Katowicach. Pełnił obowiązki przewodniczącego Komisji Matematyczno-Fizycznej przy Oddziale PAN w Katowicach oraz rzeczoznawcy Centralnej Komisji Kwalifikacyjnej. Był członkiem Rady Naukowej Instytutu Matematycznego PAN oraz Komitetu Nauk Matematycznych PAN, a także członkiem Rad Naukowych Instytutów Matematyki Uniwersytetu Śląskiego i Politechniki Śląskiej oraz Rady Naukowej Instytutu Fizyki PAN. Był również członkiem komitetów redakcyjnych

*Studia Mathematica* oraz *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.*

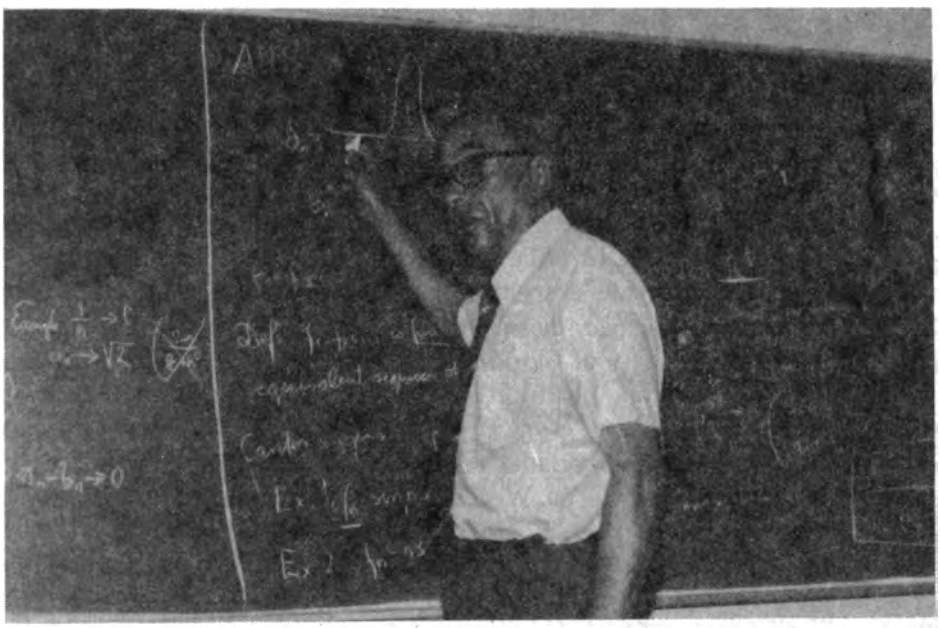
Za swoją aktywną działalność naukową, dydaktyczną i organizacyjną dostał Profesor Mikusiński wiele wyróżnień. Otrzymał nagrodę Polskiego Towarzystwa Matematycznego im. Banacha (w 1950 r.) i nagrodę państwową II stopnia (w 1953 r.), a także doktorat honoris causa Uniwersytetu w Rostocku (w 1970 r.). Został wybrany członkiem zwyczajnym Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego (w 1953 r.), członkiem Serbskiej Akademii Nauki i Sztuki (w 1975 r.) oraz członkiem honorowym Polskiego Towarzystwa Matematycznego (w 1983 r.). W 1985 r. został odznaczony Medalem im. Wacława Sierpińskiego. Odznaczono go Krzyżem Oficerskim oraz Krzyżem Komandorskim z Gwiazdą Orderu Odrodzenia Polski, Medalami 10-lecia, 30-lecia, 35-lecia i 40-lecia Polski Ludowej oraz Złotą Odznaką Zasłużonego dla Województwa Katowickiego.

Dowodem uznania dla osiągnięć naukowych Profesora są zaproszenia, jakie otrzymywał z wielu ośrodków matematycznych w świecie. Przez trzy miesiące był w Argentynie ekspertem UNESCO. Czterokrotnie odwiedzał Stany Zjednoczone pracując, łącznie prawie trzy lata, w takich ośrodkach, jak: Gainesville (University of Florida), Santa Barbara (University of California), Pasadena (California Institute of Technology), Orlando (University of Central Florida). W Japonii wygłosił cykl odczytów w kilku największych ośrodkach akademickich. Wykładał także, z reguły wielokrotnie, w Związku Radzieckim, Czechosłowacji, na Węgrzech, w Bułgarii, Rumunii, Jugosławii, NRD, RFN, Szwajcarii, Francji, Holandii, Turcji, Izraelu i Kanadzie.

Dorobek Profesora jest duży. Opublikował ponad 150 prac naukowych w czasopismach matematycznych w kraju i za granicą, a także sześć książek: *Rachunek operatorów*, *Elementarna teoria dystrybucji* (wspólnie z R. Sikorskim), *Theory of distributions. The sequential approach* (wspólnie z P. Antosikiem i R. Sikorskim), *Teoria miary i całki Lebesgue'a* (wspólnie z S. Hartmanem), *The Bochner integral* oraz *Wstęp do analizy matematycznej.* Książki te miały wiele wydań w różnych językach, a rekordy bije książka *Rachunek operatorów* opublikowana w sześciu językach: polskim, angielskim, rosyjskim, niemieckim, węgierskim i japońskim (łącznie około dwudziestu wydań).

Wielu matematyków w kraju i za granicą może uważać się za uczniów Profesora. Są wśród nich studenci, magistranci i doktoranci Profesora, jak również ci, których wprowadził w świat matematyki, bądź inspirował w badaniach, choć nie korzystali z jego formalnej opieki naukowej. Wymieńmy niektóre nazwiska: P. Antosik, J. Błaż, J. Burzyk, T. Dłotko, G. Grimeisen, A. Kamiński, W. Kierat, C. Kliś, S. Krasińska, S. Lewandowska, J. Ligęza, S. Łojasiewicz, Z. Łuszczki, P. Mikusiński, J. Panz, J. Pochciał, J. Rogut, A. Rybarski, J. Rychlewski, C. Ryll-Nardzewski, Z. Sadlok, K. Skórnik, A. Suliński, Z. Tyc, J. Wloka, K. Urbanik, Z. Zieleźny, K. Zima.

2. Początkowo Jan Mikusiński, nawiązując do badań swojego nauczyciela profesora Mieczysława Biernackiego, zajmował się równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. W pracy [7] rozważał rozwiązania układu $n$ równań liniowych z $n$ niewiadomymi przy założeniu, że rozwiązania przyjmują w kilku różnych punktach zadane wartości, których ogólna liczba nie przekracza $n$. Główne wyniki dotyczą interpolacji rozwiązań i rozkładu ich zer. Łącznie opublikował ponad 20 prac z równań różniczkowych.



Poszukując prostych metod rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych, Profesor Mikusiński stworzył nowe podstawy teoretyczne rachunku operatorów.

Historia rachunku operatorów ma swoje początki w badaniach angielskiego inżyniera Oliviera Heaviside'a, który wykonywał na nich formalne rachunki, znajdujące zastosowanie w elektrotechnice, choć nie mające dostatecznego uzasadnienia matematycznego. Uzasadnienie zostało znalezione później w oparciu o transformatę Laplace'a, ale nałożyło to ograniczenia na wzrost funkcji w nieskończoności. Podejście zaproponowane przez Profesora Mikusińskiego (zob. [Ia–f]) nie tylko uwalnia od tych ograniczeń, ale jest prostsze pojęciowo, nawiązując do pierwotnego rachunku Heaviside'a.

Podstawowym faktem, na którym opiera się rachunek operatorów, jest twierdzenie Titchmarsha dotyczące splotu funkcji ciągłych na półprostej dodatniej.

Niech $C$ będzie zbiorem wszystkich funkcji ciągłych na półprostej $[0, \infty)$. Jeśli $f, g \in C$, to przez *splot* (*iloczyn splotowy*) funkcji $f$ i $g$, oznaczany symbolem zwykłego iloczynu $fg$, rozumiemy funkcję

$$(fg)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Twierdzenie Titchmarsha w jego słabszej, tak zwanej globalnej wersji orzeka, że jeśli $fg = 0$ na $[0, \infty)$, to $f = 0$ lub $g = 0$ na $[0, \infty)$. Oznacza to, że zbiór $C$ ze zwykłym dodawaniem i działaniem splotu jako mnożeniem jest pierścieniem bez dzielników zera, dzięki czemu można rozpatrywać formalne ułamki $f/g$ elementów $f$, $g$ tego pierścienia, gdzie operacja dzielenia jest rozumiana jako operacja odwrotna do splotu.

Zbiór wszystkich formalnych ułamków tworzy ciało zwane *ciałem operatorów Mikusińskiego*. Ciało to zawiera funkcje ciągłe $f$ na $[0, \infty)$, bo mogą być one reprezentowane przez ułamki $fg/g$, gdzie $g$ jest dowolną niezerową funkcją ciągłą na $[0, \infty)$. Zawiera także wszystkie elementy $\alpha$ wyjściowego ciała liczbowego, które można identyfikować z ułamkami postaci $\{\alpha\}/\{1\}$, gdzie $\{f(t)\}$ oznacza funkcję o wartości $f(t)$ w punkcie $t$, a więc $\{\alpha\}$ i $\{1\}$ są funkcjami stałymi równymi odpowiednio $\alpha$ i 1 na $[0, \infty)$.

Funkcja $l = \{1\}$ może być interpretowana jako operator całkowania, ponieważ

$$l\{f(t)\} = \{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\}.$$

Z drugiej strony operator $s = 1/l$ pełni rolę operatora różniczkowania, bowiem dla dowolnej funkcji $x = \{x(t)\}$ o ciągłej pochodnej $x' = \{x'(t)\}$ na $[0, \infty)$ zachodzi

$$sx = x' + x(0).$$

Ostatni wzór łatwo przenosi się na przypadek funkcji $x$ klasy $C^\infty$ na $[0, \infty)$:

$$s^n x = x^{(n)} + x^{(n-1)}(0) + sx^{(n-2)}(0) + \ldots + s^{n-1} x(0). \tag{1}$$

Powyższa zależność umożliwia rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach w oparciu o proste, czysto algebraiczne rachunki. Jeśli bowiem dane jest równanie różniczkowe stopnia $n$:

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = f$$

o stałych współczynnikach $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ $(a_n \neq 0)$ z zadaną funkcją $f$ i warunkami początkowymi

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2, \ldots, x^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

to wzór (1) pozwala zapisać je w postaci

$$a_n s^n x + a_{n-1} s^{n-1} x + \ldots + a_0 x = b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \ldots + b_0 + f,$$

gdzie

$$b_i = a_{i+1} c_0 + a_{i+2} c_1 + \ldots + a_n c_{n-i-1} \quad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Stąd zaś

$$x = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} + \frac{1}{a_n s^n + \ldots + a_0} f.$$

Teraz wystarczy rozłożyć ułamki po prawej stronie ostatniej równości na ułamki proste i wykorzystać odpowiednie reprezentacje funkcyjne operatorów postaci

$$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad \frac{1}{[(s-a)^2+b^2]^k}, \quad \frac{s-a}{[(s-a)^2+b^2]^k} \quad (b \neq 0).$$

Np. w przypadku $k = 1$ mamy

$$\frac{1}{s-a} = \{e^{at}\}, \quad \frac{1}{(s-a)^2+b^2} = \left\{\frac{1}{b} e^{at} \sin bt\right\},$$

$$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} = \{e^{at} \cos bt\}.$$

Równie prosto można sprowadzić rozwiązanie układu równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach do rozwiązania układu równań algebraicznych.

Rachunek operatorów umożliwia także rozwiązywanie niektórych typów równań różniczkowych cząstkowych: równań ciepła, struny i telegrafistów.

Metodą rachunku operatorów znajduje się rozwiązania równań różniczkowych w całej ogólności, podczas gdy przy użyciu transformaty Laplace'a na rozwiązania nałożone są ograniczenia na wzrost funkcji.

Operatory Mikusińskiego znajdują rozliczne zastosowania, niekiedy w dziedzinach bardzo od siebie odległych, takich jak elektrotechnika, statyka belek czy chromatografia. Jednocześnie teoria operatorów dostarcza wielu interesujących problemów w różnych działach matematyki.

Z punktu widzenia algebry interesująca jest struktura ciała operatorów Mikusińskiego, a w szczególności fakt, że ciało to jest formalnie rzeczywiste i można w nim wprowadzić porządek liniowy. Bardzo interesująca jest także tematyka związana z tak zwaną *pochodną algebraiczną*, abstrakcyjnym odpowiednikiem operacji różniczkowania operatorów (zob. artykuł W. Kierata w tym tomie, str. 52–56).

Dla analizy ciekawy jest fakt, że rachunek operatorów stanowi istotne uogólnienie metody transformaty Laplace'a. Dla każdego operatora postaci

$f/g$, gdzie $f, g \in C$ są funkcjami transformowalnymi w sensie Laplace'a, można w naturalny sposób zdefiniować transformatę Laplace'a tego operatora. Istnieją jednak operatory, np. operator reprezentowany przez funkcję $\exp(t^2)$, które nie dają się przedstawić w postaci ilorazu splotowego funkcji transformowalnych w sensie Laplace'a.

Z drugiej strony interesujące jest porównanie operatorów Mikusińskiego i dystrybucji Sobolewa–Schwartza. Oba pojęcia są uogólnieniem funkcji lokalnie całkowalnych: na półprostej w przypadku operatorów, na prostej w przypadku dystrybucji. Okazuje się, że istnieją dystrybucje nie będące operatorami, np. funkcja stała 1 na $(-\infty, \infty)$, ale i odwrotnie, istnieją operatory nie będące dystrybucjami, np. operator $e^{\sqrt{s}}$ (zob. [68]).

Trzeba też wspomnieć o ciekawej problematyce *funkcji operatorowych*, to znaczy odwzorowań przedziału liczbowego w zbiór operatorów. Dla funkcji operatorowych postaci

$$f(\lambda) = q \cdot F(\lambda, t),$$

gdzie $q$ jest operatorem oraz $F(\lambda, \cdot) \in C$ dla każdego $\lambda$, można zdefiniować ciągłość, pochodną i całkę oraz zbudować teorię analogiczną do analizy klasycznej. Szczególnie oryginalny jest fragment tej teorii dotyczący funkcji wykładniczych (zob. [34] oraz [Id], str. 399–416).

Trudniejszy jest ogólny przypadek funkcji operatorowych postaci

$$f(\lambda) = \frac{\{F(\lambda, t)\}}{\{G(\lambda, t)\}},$$

gdzie $F(\lambda, \cdot) \in C$ oraz $G(\lambda, \cdot) \in C$ dla każdego $\lambda$. Za *pochodną funkcji* $f$ przyjmuje się wtedy

$$f'(\lambda) = \frac{\{F_\lambda(\lambda, t)\} \cdot \{G(\lambda, t)\} - \{F(\lambda, t)\} \cdot \{G_\lambda(\lambda, t)\}}{\{G(\lambda, t)\}^2}.$$

Aby móc uprawiać analizę funkcji operatorowych korzystając z powyższej definicji pochodnej, potrzebny jest odpowiednik twierdzenia Lagrange'a: jeśli $f'(\lambda) = 0$ dla wszystkich $\lambda$, to $f(\lambda)$ jest stałą funkcją operatorową. Wynikanie to zachodzi w różnych szczególnych przypadkach. Nadal jednak nie wiadomo, mimo wielu prób rozstrzygnięcia tego zagadnienia, czy implikacja zachodzi w całej ogólności.

Oczywiście dla zdefiniowania ciągłości, pochodnej czy całki funkcji operatorowej konieczne jest określenie zbieżności ciągu operatorów. Możliwe są dwie definicje:

(I) $x_n \to x$, jeśli $x_n = f_n/g$, $x = f/g$ $(f_n, f, g \in C)$ oraz $f_n \to f$ niemal jednostajnie,

(II) $x_n \to x$, jeśli $x_n = f_n/g_n$, $x = f/g$ $(f_n, f, g_n, g \in C)$ oraz $f_n \to f$, $g_n \to g$ niemal jednostajnie.

Zdefiniowane powyżej zbieżności noszą nazwy zbieżności typu I i II. Są one ciekawe z topologicznego punktu widzenia, ponieważ — mimo naturalnych definicji zbieżności — w ciele operatorów nie da się wprowadzić topologii w taki sposób, by zbieżność przez nią generowana była zbieżnością typu I lub II. Wynika to z faktu, że oba typy zbieżności nie spełniają warunku Urysohna, który wraz z pewnymi oczywistymi warunkami charakteryzuje zbieżności topologiczne. Warunek ten formułuje się następująco:

*Jeśli każdy podciąg* $y_n$ *ciągu* $x_n$ *zawiera podciąg* $z_n$, *taki że* $z_n \to x$, *to* $x_n \to x$.

Głębokie twierdzenia dotyczące obu typów zbieżności zostały otrzymane niedawno przez J. Burzyka [F], [G].

Jak wspomnieliśmy, centralną rolę rachunku operatorów gra trudne twierdzenie Titchmarsha. Mocniejsza, tak zwana lokalna, wersja tego twierdzenia może być sformułowana w postaci:

*Jeśli* $f, g \in C[0, T]$ *i* $fg = 0$ *na* $[0, T]$, *to* $f = 0$ *lub* $g = 0$ *na* $[0, \frac{1}{2}T]$.

Profesor Mikusiński podał kilka dowodów tego twierdzenia, z których jeden przedstawiony w pracy [71] (zob. także [Id], wyd. I, str. 464–465, i [XI], str. 207–208) zdobył sobie zasłużoną sławę. W przypadku $f = g$ dowód jest taki sam jak dla globalnego twierdzenia Titchmarsha (zob. [Id], wyd. I, str. 20–22) i opiera się na pomysłowych przekształceniach całkowych oraz jednym z prostszych wariantów twierdzenia o momentach. Dowód przypadku ogólnego, poprzednio oparty na trudnym twierdzeniu o momentach ograniczonych, jest teraz sprowadzony do elementarnych przekształceń algebraicznych. Przypomnijmy tę prawdziwą perełkę matematyczną.

Rozszerzmy najpierw funkcje $f$ i $g$ w sposób ciągły poza przedział $[0, T]$ i wprowadźmy, jedynie na użytek tego dowodu, oznaczenia: $f'(t) = tf(t)$ oraz $f^{(n)}(t) = t^n f(t)$ dla $n \geqslant 1$. Wprost z definicji splotu wynikają własności:

(2) jeśli $f = 0$ na $[0, t_1]$ i $g = 0$ na $[0, t_2]$, to $fg = 0$ na $[0, t_1 + t_2]$ ,

oraz

$$(fg)' = f'g + fg'. \tag{3}$$

Niech $\alpha$ będzie największą liczbą z przedziału $[0, 1]$ taką, że dla dowolnych $f$, $g$ zachodzi implikacja

(4) jeśli $fg = 0$ na $[0, T]$, to $fg' = 0$ na $[0, \alpha T]$.

Nietrudno sprawdzić, że $\alpha$ nie zależy od $T$.

Załóżmy, że $fg = 0$ na $[0, T]$. Wtedy

$$f'g' = 0 \quad \text{na } [0, \alpha^2 T], \tag{5}$$

na mocy implikacji (4) oraz przemienności splotu;

$$fgf'g' = 0 \quad \text{na } [0, T + \alpha^2 T], \tag{6}$$

na mocy (2) i (5); wreszcie

$$fg'(f'g+fg') = 0 \quad \text{na } [0, T+\alpha T]$$

na mocy (2), (3) i (4).

Ponieważ splot jest łączny i przemienny, ostatnią równość można napisać w postaci

$$fgf'g'+(fg')^2 = 0 \quad \text{na } [0, T+\alpha T],$$

co razem z (6) przynosi

$$(fg')^2 = 0 \quad \text{na } [0, T+\alpha^2 T].$$

Wspomniany na początku szczególny przypadek twierdzenia Titchmarsha daje teraz

$$fg' = 0 \quad \text{na } [0, \tfrac{1}{2}(1+\alpha^2) T],$$

ale to w myśl definicji liczby $\alpha$ oznacza, że $\frac{1}{2}(1+\alpha^2) \leqslant \alpha$, czyli $(1-\alpha)^2 \leqslant 0$, a więc musi być $\alpha = 1$. Stąd

$$fg' = 0 \quad \text{na } [0, T]$$

oraz, dla dowolnego $n = 1, 2, \ldots,$

$$fg^{(n)}(t) = \int_0^t \tau^n f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

na mocy indukcji. Ze znanego twierdzenia Lercha o momentach (zob. np. [Id], wyd. I, str. 19) otrzymujemy teraz

$$f(t-\tau) g(\tau) = 0 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T). \tag{7}$$

Gdyby było $f(\tau_0) \neq 0$ i $g(\tau) \neq 0$ dla pewnych $\tau_0$, $\tau \in [0, \frac{1}{2}T]$, to podstawiając $t = \tau_0+\tau \leqslant T$ mielibyśmy

$$f(t-\tau) g(\tau) \neq 0,$$

co przeczy równości (7). Sprzeczność ta kończy dowód.

3. Obok operatorów istnieją inne rodzaje funkcji uogólnionych. Wspominaliśmy już o dystrybucjach, będących uogólnieniem funkcji lokalnie całkowalnych na całej prostej lub, ogólniej, na dowolnym zbiorze otwartym w przestrzeni euklidesowej. Definicję dystrybucji rozumianej jako funkcjonał liniowy ciągły na pewnej przestrzeni funkcji podali w 1936 r. S. L. Sobolew [Q] i w 1945 r. Laurent Schwartz [N], który rozwinął teorię dystrybucji i jej zastosowania w swojej książce [O]. Teoria ta korzysta z pojęć i twierdzeń, niekiedy trudnych i głębokich, analizy funkcjonalnej, wskutek czego jest dostępna jedynie dla wąskich kręgów potencjalnych użytkowników. W następnych latach pojawiło się wiele rozmaitych równoważnych ujęć i uogólnień teorii dystrybucji.

Profesor Mikusiński już w 1948 r., w pracy [11], wskazał prostszą metodę definiowania tego pojęcia. Formalną definicję podał w pracy [49]. Opierając się na tej definicji rozwinął, wspólnie z R. Sikorskim, *ciągową teorię dystrybucji*, przedstawioną w dwuczęściowej rozprawie [63], [86]. Miała ona później kilka obcojęzycznych wydań książkowych, a następnie została rozszerzona, przy współpracy P. Antosika, do monografii [IXa–b] obejmującej bardziej zaawansowane wyniki.

Definicja oparta jest na intuicyjnej idei aproksymacji dystrybucji przez ciąg funkcji ciągłych lub gładkich (tzn. klasy $C^\infty$). Wybierzmy drugą z tych możliwości i dla uproszczenia rozważmy dystrybucje (rzeczywiste) na prostej (choć tę samą definicję można powtórzyć w przypadku dystrybucji na dowolnym podzbiorze przestrzeni euklidesowej).

Mówimy, że ciąg $\varphi_n$ funkcji gładkich jest *podstawowy*, jeżeli dla każdego otwartego skończonego przedziału $I$ istnieją: liczba $k \geqslant 0$ oraz ciąg funkcji gładkich $\Phi_n$, takie że $\Phi_n^{(k)} = \varphi_n$ oraz $\Phi_n$ jest ciągiem jednostajnie zbieżnym na $I$.

Dwa ciągi podstawowe $\varphi_n$ i $\psi_n$ nazywamy *równoważnymi* ($\varphi_n \sim \psi_n$), jeśli ciąg $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \ldots$ jest podstawowy.

Relacja $\sim$ jest relacją równoważności. Odpowiednie klasy równoważności nazywamy *dystrybucjami*. Zapis $f = [\varphi_n]$ oznacza, że dystrybucja $f$ jest klasą równoważności zawierającą ciąg podstawowy $\varphi_n$.

Jak widać, definicja jest całkiem elementarna i zrozumiała dla każdego, kto zna pojęcia pochodnej i zbieżności jednostajnej.

Oczywiście dowolną funkcję gładką $\varphi$ można utożsamić z dystrybucją będącą klasą równoważności ciągu stałego $\varphi, \varphi, \ldots$ Do utożsamienia funkcji ciągłych i, ogólniej, lokalnie całkowalnych z dystrybucjami trzeba wykorzystać aproksymację tych funkcji przez funkcje gładkie, na przykład stosując tak zwane ciągi deltowe. Oto jedna z możliwych definicji takiego ciągu:

Ciąg $\delta_n$ funkcji gładkich nieujemnych nazywamy *deltowym*, jeśli $\int \delta_n = 1$ i $\delta_n(x) = 0$ dla $|x| \geqslant \alpha_n$ dla pewnego ciągu liczb dodatnich $\alpha_n$, dążącego do zera.

Ciągi deltowe są podstawowe i reprezentują tę samą dystrybucję $\delta$, zwaną *deltą Diraka*. Ciąg splotów

$$(f * \delta_n)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\delta_n(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

gdzie $f$ jest funkcją ciągłą (lokalnie całkowalną), jest zbieżny niemal jednostajnie (lokalnie według całki) do $f$, więc funkcję $f$ można utożsamić z dystrybucją wyznaczoną przez ciąg podstawowy $f * \delta_n$.

Jedną z dużych korzyści ciągowego ujęcia dystrybucji jest fakt, że bardzo łatwo i ogólnie można definicje wielu operacji określonych na funkcjach gładkich rozszerzyć na dystrybucje.

Mówimy, że operacja $A$ przyporządkowująca dowolnemu układowi funk-

cji gładkich $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ funkcję gładką $A(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ jest *regularna*, jeśli dla dowolnych ciągów podstawowych $\varphi_{1n}, \ldots, \varphi_{kn}$ ciąg $A(\varphi_{1n}, \ldots, \varphi_{kn})$ jest podstawowy. Jeśli teraz $f_1, \ldots, f_k$ są dowolnymi dystrybucjami, a $\varphi_{1n}, \ldots, \varphi_{kn}$ odpowiadającymi im ciągami podstawowymi, to znaczy $f_1 = [\varphi_{1n}], \ldots$ $\ldots, f_k = [\varphi_{kn}]$, to operację $A$ na $f_1, \ldots, f_k$ określamy oczywiście wzorem

$$A(f_1, \ldots, f_k) = [A(\varphi_{1n}, \ldots, \varphi_{kn})]$$

i definicja nie zależy od wyboru ciągów podstawowych reprezentujących dystrybucje $f_1, \ldots, f_k$. Wszystkie wzory związane z operacjami regularnymi zachodzące dla funkcji gładkich przenoszą się automatycznie na dystrybucje. Jedną z operacji regularnych jest jednoargumentowa operacja brania pochodnej ustalonego rzędu $k$:

$$A(f) = f^{(k)},$$

wykonalna dla dowolnej dystrybucji $f$. Znany i trudny w ujęciu funkcjonałowym fakt, że każda dystrybucja jest lokalnie (tzn. na każdym przedziale otwartym skończonym) pochodną dystrybucyjną skończonego rzędu funkcji ciągłej, jest w ujęciu ciągowym natychmiastową konsekwencją podanych tu definicji i znanych własności zbieżności jednostajnej. Własność ta pozwala w naturalny sposób zdefiniować zbieżność ciągu dystrybucji i w szczególności pokazać, że dla dowolnej dystrybucji $f$ i dowolnego ciagu deltowego $\delta_n$ ciąg $f * \delta_n$ jest podstawowy i zbieżny dystrybucyjnie do $f$.

Choć znaczną część operacji, jakie pojawiają się w praktyce, stanowią operacje regularne, to jednak istnieją operacje, jak np. dwuargumentowe operacje mnożenia i splotu dystrybucji, które nie spełniają podanego wyżej warunku, a więc nie mogą być zdefiniowane dla dowolnych dystrybucji.

W ujęciu funkcjonałowym niewykonalność operacji iloczynu czy splotu dla dowolnych dystrybucji prowadzi do rozważania oddzielnie różnych par przestrzeni, na elementach których dana operacja jest wykonalna.

Zasługą Profesora Mikusińskiego jest wskazanie ogólnej metody definiowania operacji nieregularnych jednocześnie dla wszystkich dystrybucji i operacji (zob. [80], [83], i [IXa], str. 256–257).

Załóżmy, że operacja $A$ jest wykonalna dla dowolnych funkcji gładkich $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ i niech $f_1, \ldots, f_k$ będą dowolnymi dystrybucjami. Mówimy, że wyrażenie $A(f_1, \ldots, f_k)$ istnieje, jeśli dla dowolnego ciągu deltowego $\delta_n$ ciąg $A(f_1 * \delta_n, \ldots, f_k * \delta_n)$ jest podstawowy; wtedy przyjmujemy

$$A(f_1, \ldots, f_k) = [A(f_1 * \delta_n, \ldots, f_k * \delta_n)].$$

Jeśli $A(f_1, \ldots, f_k)$ istnieje, dystrybucja ta nie zależy od wyboru ciągu deltowego $\delta_n$.

Okazuje się, że choć na ogół $A(f_1, \ldots, f_k)$ istnieje nie dla wszystkich dystrybucji, powyższa definicja obejmuje nie tylko znane wcześniej, ale i nowe przypadki. Na przykład w wypadku operacji mnożenia $A(f_1, f_2) =$

$= f_1 \cdot f_2$, definicja, którą można także zapisać w postaci granicy dystrybucyjnej

$$f_1 \cdot f_2 = \lim_{n \to \infty} (f_1 * \delta_n) \cdot (f_2 * \delta_n), \tag{8}$$

jest bardzo ogólna i pozwala rozważać interesujące i ważne iloczyny dystrybucji, nie istniejące w sensie Schwartza. Przykładem jest tu iloczyn $(1/x)\delta(x)$, który pojawia się w fizyce, a jego wynik $-\frac{1}{2}\delta'(x)$ w sensie definicji (8) jest w zgodzie z oczekiwaniami fizyków (zob. [IXa], str. 249).

W literaturze przez *iloczyn Mikusińskiego* zwykle jest rozumiany inny iloczyn, rozważany przez Profesora w pracy [87]:

$$f_1 \cdot f_2 = \lim (f_1 * \delta_{1n}) \cdot (f_2 * \delta_{2n}), \tag{9}$$

przy czym zakłada się, że granica dystrybucyjna istnieje dla dowolnych ciągów deltowych $\delta_{1n}$ i $\delta_{2n}$. R. Shiraishi i M. Itano [P] pokazali, że definicja (9) jest równoważna definicji Y. Hiraty i H. Ogaty [I], sformułowanej także przy użyciu ciągów deltowych. Definicja ta jest jednak mniej ogólna niż (8), ponieważ iloczyn $(1/x)\delta(x)$ nie istnieje w sensie (9) (por. [J] i [K]).

Metoda operacji nieregularnych pozwala także na rozwinięcie ogólnej teorii splotu dystrybucji. Przedstawiona ona została w książce [IXa–b] wraz z wieloma innymi oryginalnymi wynikami, a m. in. teorią rozwinięć Hermite'a dystrybucji temperowanych i rozwinięciu Fouriera dystrybucji periodycznych, teorią transformacji Fouriera i Hilberta dystrybucji, równoważnością dwóch rodzajów zbieżności dystrybucyjnej (tzw. słabej i mocnej zbieżności) i w konsekwencji równoważnością ciągowego i funkcjonałowego ujęcia teorii dystrybucji.

**4.** Kolejnym obszarem zainteresowań Profesora Mikusińskiego jest teoria całki. Od czasu wprowadzenia całki Lebesgue'a i całki względem dowolnej miary, pojawiały się rozmaite ich ujęcia i uogólnienia, ale podanie którejkolwiek z definicji stanowi zazwyczaj długą, wielostopniową procedurę i wymaga zaawansowanych środków.

Definicja Profesora Jana Mikusińskiego uderza prostotą i łatwo ją zinterpretować geometrycznie. Do jej zrozumienia nie jest potrzebne ani pojęcie miary Lebesgue'a, ani nawet zbieżności prawie wszędzie, a jedynie pojęcie zbieżności bezwzględnej szeregu funkcyjnego. Co więcej, definicja może być od razu sformułowana dla funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha (określonych w przestrzeni euklidesowej $R^k$), dzięki czemu otrzymuje się jednolite ujęcie całek Lebesgue'a i Bochnera.

Definicję tę można przedstawić dosłownie w dwóch zdaniach. Funkcję $f$ z $R^k$ w ustaloną przestrzeń Banacha $X$ (w szczególności z $R^1$ w $R^1$) nazywamy *całkowalną w sensie Bochnera* (*Lebesgue'a*), jeśli istnieje ciąg przedziałów

$$I_n = [a_{1n}, b_{1n}) \times \ldots \times [a_{kn}, b_{kn})$$

w $R^k$ oraz ciąg elementów przestrzeni $X$ (liczb) $\lambda_n$ takie, że

1° $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \operatorname{vol}(I_n) < \infty$

oraz

2° $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{I_n}(x)$ dla punktów $x$, w których szereg jest bezwzględnie zbieżny; $\chi_{I_n}$ oznacza tu funkcję charakterystyczną przedziału $I_n$.

Całkę funkcji spełniającej warunki 1° i 2° określamy jako

$$\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \operatorname{vol}(I_n).$$

Powyższa definicja (zob. [94] i [XI], str. 3) jest równoważna klasycznym definicjom całek Bochnera i Lebesgue'a. Podobną, ale nieco bardziej złożoną definicję podał H. M. Mac Neille [M]. W oparciu o zacytowaną wyżej definicję została rozwinięta w książce [XI] teoria całki Bochnera, która z nielicznymi wyjątkami pozwala uzyskać dowody prostsze niż dowody znane w innych ujęciach teorii całki. W szczególności dowodzi się następujących własności przestrzeni $U$ funkcji całkowalnych i własności całki $\int$:

H. Jeśli $f \in U$ i $\lambda \in R^1$, to $\lambda f \in U$ i $\int \lambda f = \lambda \int f$;

A. Jeśli $f, g \in U$, to $f+g \in U$ i $\int (f+g) = \int f + \int g$;

M. Jeśli $f \in U$, to $|f| \in U$ i $\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$;

E. Jeśli $f_n \in U$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$ oraz $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ w punktach $x$ bezwzględnej zbieżności szeregu, to $f \in U$ i $\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$ (jest to uogólnienie własności A).

Z własności E w przypadku funkcji rzeczywistych wynika w szczególności

$E_0$. Jeśli $f_n \in U$, $f_n \geqslant f_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ oraz $f_n \to 0$, to $\int f_n \to 0$.

Własności podane wyżej można przyjąć za aksjomaty nakładane na przestrzeń liniową $U$ funkcji (z $R^k$ w przestrzeń Banacha $X$) oraz na funkcjonał $\int$ na tej przestrzeni. Takie aksjomatyczne ujęcie jest ogólne i pozwala prześledzić wzajemne związki między różnymi znanymi ujęciami całki, jak całka Daniella czy całka względem miary.

Dla danej całki, tzn. pary $(U, \int)$, spełniającej aksjomaty $\mathrm{HAME}_0$ można określić całkę Daniella jako najmniejsze rozszerzenie spełniające aksjomaty HEM (zob. też [121]).

Z drugiej strony okazuje się, że całka względem dowolnej miary jest całką spełniającą HEM i pewne dodatkowe aksjomaty (związane z pojęciem mie-

rzalności funkcji), a więc jest mniej ogólna niż aksjomatyczna całka HEM, której teoria rozwinięta jest w książce [XI].

Z innych interesujących zagadnień przedstawionych w tej książce wymieńmy ciekawe pojęcie pochodnej pełnej (zob. też [115] i [119]) i bardzo ogólne twierdzenie o podstawianiu w całce Lebesgue'a z użyciem tego pojęcia (zob. też [128]), a także teorię splotu.

**5.** Wspomnijmy z kolei o wyniku Profesora, który okazał się bardzo użyteczny w dowodach wielu twierdzeń z analizy funkcjonalnej i teorii miary, np. twierdzenia Banacha o odwzorowaniach jednakowo ciągłych i jednostajnej ograniczoności, twierdzenia Banacha–Steinhausa, twierdzenia Köthego o ograniczoności mocnej i słabej, twierdzenia Orlicza–Pettisa, twierdzenia Nikodyma, czy twierdzenia Vitaliego–Hahna–Saksa. Twierdzenia te z reguły dowodzone były wcześniej przy założeniu zupełności (np. w przestrzeniach Banacha) i przy użyciu twierdzenia Baire'a o kategoriach. Inną znaną techniką była metoda tzw. „ślizgającego się garbu". Tę właśnie metodę wyabstrahował Profesor Mikusiński w formie następującego twierdzenia przekątniowego (zob. [113], [114] i [A]):

*Załóżmy, że $X$ jest przestrzenią Banacha, $x_{ij} \in X$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$, $|x_{ii}| > m$ $(m > 0)$ oraz $\lim_{j \to \infty} x_{ij} = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Wtedy istnieje nieskończony podzbiór liczb naturalnych $I$ i jego podzbiór $J$, takie że*

$$\sum_{j \in J} |x_{ij}| < \infty \quad \text{oraz} \quad \Big|\sum_{j \in J} x_{ij}\Big| > \tfrac{1}{2}m$$

*dla dowolnego $i \in I$.*

Twierdzenie to, uogólnione następnie przez P. Antosika (zob. [B], [C], [D], [E]), pozwoliło nie tylko uprościć dowody wspomnianych twierdzeń, ale znacznie je uogólnić, w szczególności przez zastąpienie założenia zupełności przestrzeni $X$ następującym słabszym warunkiem:

$(K)$ Jeśli $x_n \in X$ i $x_n \to 0$, to istnieje podciąg $x_{n_k}$ ciągu $x_k$, taki że $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} = x \in X$.

Nie jesteśmy w stanie omówić nawet pobieżnie całego dorobku Profesora. Poprzestańmy więc na wymienieniu w telegraficznym skrócie dziedzin matematyki, którymi się zajmował: podstawy matematyki [102], topologia i abstrakcyjna teoria zbieżności [111]–[111a], [123], [127], [131], [133], funkcje analityczne [39], [88], nierówności różniczkowe [1], równania i nierówności funkcyjne [10], [24], [122], [132], teoria liczb [44], [45], [92] i aksjomatyka liczb naturalnych [129], [137], teoria macierzy i wyznaczników [32], [64], geometria elementarna [5], [43].

Wiele z tych prac powstałych w zasadzie na uboczu głównych zaintereso-

wań Profesora Mikusińskiego znalazło kontynuatorów za granicą. Stało się to nawet w przypadku prac napisanych po polsku.

Oddzielnym zagadnieniem jest problematyka zastosowań matematycznych, które zawsze pasjonowały Profesora. Książka *Rachunek operatorów* jest najlepszym przykładem ścisłego związku teorii matematycznej z jej zastosowaniami, w tym wypadku w elektrotechnice. Innym przykładem jest współpraca Profesora Mikusińskiego z fizykami: z profesorem Stefanem Drobotem w badaniach statyki belek [66] i z profesorem Romanem Ingardenem w badaniach ziarnistości płyt fotograficznych [33].

Do spektakularnych osiągnięć Profesora należy jego praca nad rekonstrukcją sklepienia kaplicy w katedrze lubelskiej, zniszczonej w czasie wojny, i przywrócenie jej interesujących efektów akustycznych. Projekt kształtu sklepienia wynikający z obliczeń Profesora Mikusińskiego został zaakceptowany przez specjalistę-akustyka, doc. Kwieka, i wcielony w życie.

Profesor pasjonował się fotografiką oraz teoretycznymi zagadnieniami optyki. Matematyczna teoria układów optycznych, przedstawiona w formie rachunku macierzowego w książeczce [XII] i publikacjach [138], [139], [141], [142], [143] dała wyjaśnienie różnych kwestii, m. in. związanych z wadami soczewek i ich korygowaniem przez układy soczewek o różnej gęstości. Dodajmy, że w teorii tej pojawiło się równanie

$$f(x+y)[f(x+y)-f(x)-f(y)] = 0,$$

nazwane przez specjalistów równań funkcyjnych *równaniem Mikusińskiego* (zob. [H] oraz [L], str. 334–337).

Ale do najbardziej efektownych sukcesów Profesora Mikusińskiego w dziedzinie zastosowań matematyki należy jego teoria skal muzycznych, przedstawiona w artykule [46]. W niezwykle zajmującej formie wyjaśnia w nim autor zasady powstawania, rejestrowania dźwięku, jego struktury i czynników wpływających na subiektywne odczuwanie brzmień przez ucho ludzkie. Przypomina czytelnikowi znany fakt, że stosowane w muzyce interwały wewnątrz oktawy charakteryzują się zaskakującą właściwością matematyczną. Mianowicie stosunki odpowiednich częstotliwości są (po skróceniu) „małymi" ułamkami z przedziału (1, 2), „małymi" w tym sensie, że ich mianowniki nie przekraczają 5: ułamek $\frac{3}{2}$ odpowiada kwincie, $\frac{4}{3}$ – kwarcie, $\frac{5}{3}$ – sekście dużej, $\frac{5}{4}$ – tercji dużej, $\frac{6}{5}$ – tercji małej, $\frac{7}{5}$ – kwarcie powiększonej, $\frac{8}{5}$ – sekście małej, a ułamek $\frac{9}{5}$ – septymie małej. Z kolei zadziwia go prostym wyjaśnieniem tego nieoczekiwanego faktu przez wskazanie roli alikwotów. Wyjaśnia także, dlaczego w muzyce przyjęła się skala dwunastostopniowa, a nawet dlaczego „mały" ułamek $\frac{7}{4}$ nie ma swojego odpowiednika wśród znanych interwałów muzycznych. Nie poprzestając na tym, prowadzi swego czytelnika dalej, wskazując mu inne skale muzyczne o równie dobrych, a nawet lepszych własnościach niż skala dwunastostopniowa. Po wyjaśnieniu, że są to skale otrzymane przez podział oktawy na 19 i 31 równych

części, zdumiewa na koniec prostotą pomysłu układu klawiatur fortepianów, umożliwiających wykonywanie zarówno utworów klasycznych napisanych w tradycyjnej notacji, jak i nowych, jeszcze nie skomponowanych, opartych na skalach złożonych z 19 i 31 stopni. Wydaje się, że artykuł ten jest niedoścignym wzorem popularyzacji połączonej z twórczością.

Warto dodać, że badania nad matematyczną teorią skal muzycznych zainicjowane przez Profesora Mikusińskiego znalazły swoich kontynuatorów za granicą, w szczególności w Japonii.

Muzyka należała zawsze do wielkich pasji Profesora. Innymi były technika i zamiłowanie do majsterkowania, datujące się od wczesnej młodości. Mając 10 lat skonstruował w pudełku od zapałek radio kryształkowe, a później produkował papier fotograficzny wykorzystując opracowaną przez siebie technologię. Miał zawsze mnóstwo pomysłów praktycznych, których mógłby mu pozazdrościć niejeden inżynier. Jednym z nich była kostka – geometryczna łamigłówka, bardzo trudna do ułożenia (wiedzą o tym niektórzy ówcześni studenci Uniwersytetu Wrocławskiego zmagający się z oporną układanką na dwadzieścia lat przed pojawieniem się kostki Rubika).

Inne jeszcze hobby Profesora Mikusińskiego to języki. Znał ich kilka, niektórymi władał biegle. Ale największą troskę przywiązywał zawsze do czystości, poprawności i szeroko rozumianej kultury języka polskiego.

Nigdy nie cieszył się dobrym zdrowiem, ale nawet najcięższe choroby i przeciwności losu nie były w stanie odciągnąć go od matematyki. Potrafił pracować i myśleć o niej w każdych warunkach: w szpitalu, w sanatorium, a nawet w więzieniu (zrodziła się tu jedna z jego prac).

Profesor Mikusiński zawsze był wrażliwy na uroki przyrody i świata. W matematyce jest to również widoczne. Kierując się smakiem estety poszukiwał zawsze rozwiązań prostych i pięknych.

Władysław Kierat (Katowice)

## O algebraicznej teorii Mikusińskiego równań różniczkowych

Chociaż w badaniach równań różniczkowych posługujemy się głównie metodami analitycznymi, to w teorii równań różniczkowych liniowych istotną rolę grają także algebraiczne własności operacji różniczkowania. Zdarzają się nawet przypadki, że twierdzenie uzyskane metodami analitycznymi można udowodnić również na drodze czysto algebraicznej. Wiele tego typu twierdzeń uzyskał Profesor Mikusiński. Celem tego artykułu jest przedstawienie niektórych z nich.

**1.** Niech $D := d/dt$. Rozważmy równanie różniczkowe

$$D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \ldots + a_1 Dx + a_0 x = 0, \tag{1}$$

**1987**

[147] *O twierdzeniu Titchmarsha, Foiaşa i o aproksymacji przesunięciami*, Wiadom. Mat. 27 (1987), 193–202.

**w druku**

[148] *On the logarithm of the differential operator*, Serdica.
[149] *On defining integrals by series*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math.

## Cytowane prace innych autorów


[A] P. Antosik, *On the Mikusiński Diagonal Theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci. 19 (1971), 305–310.
[B] –, *A Generalization of the Diagonal Theorem*, ibidem 20 (1972), 373–377.
[C] –, *Mappings from L-groups into Topological Groups* I–II, ibidem 21 (1973), 145–153, 155–160.
[D] –, *Sur les suites d'applications*, C. R. Acad. Sci., Paris, 287 (1978), 75–77.
[E] – and C. Swartz, *Matrix Methods in Analysis*, Lecture Notes in Math. 1113, Springer-Verlag, 1985.
[F] J. Burzyk, *On convergence in the Mikusiński operational calculus*, Studia Math. 75 (1983), 313–333.
[G] –, *On type* II *convergence in the Mikusiński operdtional calculus*, ibidem 77 (1983), 17–27.
[H] L. Dubikajtis, C. Ferens, R. Ger, M. Kuczma, *On Mikusiński's functional equation*, Ann. Polon. Math. 28 (1973), 39–47.
[I] Y. Hirata, H. Ogata, *On the Exchange Formula for Distributions*, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 22 (1958), 147–152.
[J] M. Itano, *On the Multiplicative Products of Distributions*, ibidem 29 (1965), 51–74.
[K] A. Kamiński, *Remarks on Delta- and Unit-Sequences*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (1978), 25–30.
[L] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*, Uniwersytet Śląski–PWN, Warszawa–Kraków–Katowice 1985.
[M] H. M. MacNeille, *A unified theory of integration*, Proc. of National Acad. of Sci. 27 (1941), 71–76.
[N] L. Schwartz, *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques*, Annales Univ. Grenoble 21 (1945), 57–74.
[O] –, *Théorie des distributions* I–II, Hermann, Paris 1950–1951.
[P] R. Shiraishi, M. Itano, *On the Multiplicative Products of Distributions*, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, 28 (1964), 223–235.
[Q] S. L. Sobolew, *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales*, Mat. Sbornik 1 (1936), 39–71.
[R] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris 1957.
[S] –, *Infinite Abelian Groups*, The University of Michigan Press, 1969.
[T] E. C. Paige, *A generalization of a commutator theorem of Mikusiński*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 1417–1423.
[U] D. Przeworska-Rolewicz and S. Rolewicz, *Equations in linear spaces*, PWN, Warszawa 1968.
[W] R. Sikorski, *On Mikusiński's algebraic theory of differential equations*, Studia Math. 16 (1957), 230–236.
[Y] H. Wielandt, *Über die Unbeschränkheit der Operatoren der Quantenmechanik*, Math. Ann. 121 (1949), 21.