części, zdumiewa na koniec prostotą pomysłu układu klawiatur fortepianów, umożliwiających wykonywanie zarówno utworów klasycznych napisanych w tradycyjnej notacji, jak i nowych, jeszcze nie skomponowanych, opartych na skalach złożonych z 19 i 31 stopni. Wydaje się, że artykuł ten jest niedoścignym wzorem popularyzacji połączonej z twórczością.

Warto dodać, że badania nad matematyczną teorią skal muzycznych zainicjowane przez Profesora Mikusińskiego znalazły swoich kontynuatorów za granicą, w szczególności w Japonii.

Muzyka należała zawsze do wielkich pasji Profesora. Innymi były technika i zamiłowanie do majsterkowania, datujące się od wczesnej młodości. Mając 10 lat skonstruował w pudełku od zapałek radio kryształkowe, a później produkował papier fotograficzny wykorzystując opracowaną przez siebie technologię. Miał zawsze mnóstwo pomysłów praktycznych, których mógłby mu pozazdrościć niejeden inżynier. Jednym z nich była kostka – geometryczna łamigłówka, bardzo trudna do ułożenia (wiedzą o tym niektórzy ówcześni studenci Uniwersytetu Wrocławskiego zmagający się z oporną układanką na dwadzieścia lat przed pojawieniem się kostki Rubika).

Inne jeszcze hobby Profesora Mikusińskiego to języki. Znał ich kilka, niektórymi władał biegle. Ale największą troskę przywiązywał zawsze do czystości, poprawności i szeroko rozumianej kultury języka polskiego.

Nigdy nie cieszył się dobrym zdrowiem, ale nawet najcięższe choroby i przeciwności losu nie były w stanie odciągnąć go od matematyki. Potrafił pracować i myśleć o niej w każdych warunkach: w szpitalu, w sanatorium, a nawet w więzieniu (zrodziła się tu jedna z jego prac).

Profesor Mikusiński zawsze był wrażliwy na uroki przyrody i świata. W matematyce jest to również widoczne. Kierując się smakiem estety poszukiwał zawsze rozwiązań prostych i pięknych.

Władysław Kierat (Katowice)

O algebraicznej teorii Mikusińskiego równań różniczkowych

Chociaż w badaniach równań różniczkowych posługujemy się głównie metodami analitycznymi, to w teorii równań różniczkowych liniowych istotną rolę grają także algebraiczne własności operacji różniczkowania. Zdarzają się nawet przypadki, że twierdzenie uzyskane metodami analitycznymi można udowodnić również na drodze czysto algebraicznej. Wiele tego typu twierdzeń uzyskał Profesor Mikusiński. Celem tego artykułu jest przedstawienie niektórych z nich.

1. Niech $D := d/dt$. Rozważmy równanie różniczkowe

$$D^n x + a_{n-1} D^{n-1} x + \ldots + a_1 Dx + a_0 x = 0, \tag{1}$$

gdzie a_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ są funkcjami rzeczywistymi ciągłymi określonymi na przedziale (α, β). Z klasycznej teorii równań różniczkowych wiemy, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie x równania (1) spełniające warunki początkowe

$$x(t_0) = x_0, \quad Dx(t_0) = x_1, \quad \ldots, \quad D^{n-1}x(t_0) = x_{n-1}. \tag{2}$$

Stąd łatwo można wywnioskować, że wszystkie rozwiązania równania (1) tworzą n-wymiarową rzeczywistą przestrzeń liniową. W szczególnym przypadku, gdy współczynniki a_i są funkcjami stałymi, można efektywnie wyznaczyć bazę tej przestrzeni.

Równania różniczkowe cząstkowe dwóch zmiennych o stałych współczynnikach rozważane w półpłaszczyźnie można sprowadzić do równań różniczkowych o stałych współczynnikach z ciała operatorów Mikusińskiego ([Id], str. 291).

Klasyczne twierdzenie o jednoznacznym rozwiązaniu problemu Cauchy'ego dla równania (1) nie jest prawdziwe, gdy współczynnikami są operatory Mikusińskiego. Na przykład, równanie $Dx = s^{\alpha}x$, gdzie s oznacza operator różniczkowy, ma tylko trywialne rozwiązanie w klasie funkcji operatorowych dla $\alpha > 1$ ([Id], s. 410). Ale w tym przypadku prawdziwa jest część tezy dotycząca jednoznaczności ([3], str. 272).

2. Profesor Mikusiński zauważył, że analogiczne twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych jest prawdziwe, gdy funkcje rzeczywiste zastąpimy funkcjami o wartościach z pierścienia całkowitego i odpowiednio określimy operację różniczkowania tych funkcji. Przedstawimy teraz szczególny przypadek tego twierdzenia.

Niech $\mathscr{R}$ będzie pierścieniem całkowitym. Zbiór $\mathscr{A}^*$ wszystkich funkcji $x\colon \boldsymbol{R} \to \mathscr{R}$ ze względu na zwykłe działania dodawania i mnożenia funkcji jest pierścieniem przemiennym. Dla każdego $\mu \in \boldsymbol{R}$ określamy operację τ_μ na funkcjach $x \in \mathscr{A}^*$ przyjmując

$$(\tau_\mu x)(\lambda) = x(\mu - \lambda).$$

Niech $\mathscr{A}$ będzie pewnym podpierścieniem pierścienia $\mathscr{A}^*$ niezmienniczym ze względu na operacje τ_μ, $\mu \in \boldsymbol{R}$. Na pierścieniu $\mathscr{A}$ określamy operację $D\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ mającą następujące własności:

1° $D(x+y) = Dx + Dy$, $D(xy) = Dx \cdot y + x \cdot Dy$,
2° $D\tau_\mu x = -\tau_\mu Dx$, $\mu \in \boldsymbol{R}$,
3° $Dx = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest funkcją stałą.

TWIERDZENIE 1 [23]. *Jeśli operacja D ma własności* 1°–3°, *to równanie* (1), *gdzie $a_i \in \mathscr{R}$, ma w algebrze $\mathscr{A}$ co najwyżej jedno rozwiązanie x spełniające warunki początkowe* (2).

W algebrze różniczkowej [R] rozważa się pierścienie całkowite $\mathscr{R}$ z operacją różniczkowania D spełniającą warunek 1°. Elementy c takie, że $Dc = 0$, nazywają się *stałymi*. Zbiór stałych tworzy podpierścień $\mathscr{R}_0$ pierścienia $\mathscr{R}$. W tej ogólności warunki (2) mogą nie mieć sensu. Natomiast jak wcześniej stwierdziliśmy, istnienie dokładnie jednego rozwiązania równania (1) spełniającego warunki (2) implikuje, że zbiór wszystkich rozwiązań tego równania jest n-wymiarową przestrzenią liniową. Nasuwa się pytanie, jakie dodatkowe warunki powinna spełniać operacja D, aby zbiór rozwiązań równania (1) o współczynnikach z $\mathscr{R}$ był skończenie wymiarowym modułem nad podpierścieniem $\mathscr{R}_0$. Częściową odpowiedź daje nam następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 2 [41]. *Jeśli $\mathscr{R}$ jest pierścieniem całkowitym i D jest operacją różniczkowania tego pierścienia spełniającą warunek* 1° *i warunek*

$$Dx \cdot y - x \cdot Dy = 0 \Rightarrow x, y \quad \text{są liniowo zależne nad } \mathscr{R}_0,$$

to równanie (1) *o współczynnikach z $\mathscr{R}$ ma co najwyżej n rozwiązań liniowo niezależnych nad $\mathscr{R}_0$.*

3. Gdy rozważamy równania różniczkowe o stałych współczynnikach, to wtedy istotne są jedynie liniowe własności operacji różniczkowania. W tej sytuacji wystarczy tylko żądać, aby operacja różniczkowania była endomorfizmem pewnej przestrzeni liniowej i miała istotne własności zwykłej operacji różniczkowania funkcji.

Niech E będzie przestrzenią liniową nad ciałem przemiennym K o charakterystyce zero i niech D będzie endomorfizmem tej przestrzeni. Dla dowolnego wielomianu $p \in K[x]$ stopnia n rozważmy równanie

$$p(D)x = 0. \tag{3}$$

Rozważmy następujące dwa naturalne warunki:

(I) $$\dim \ker p(D) \leqslant n,$$

(II) jeżeli $\dim \ker p_1(D) = k_1$ i $\dim \ker p_2(D) = k_2$, to

$$\dim \ker p_1(D)p_2(D) = k_1 + k_2.$$

Załóżmy, że spełniony jest warunek (I) i że ponadto w przestrzeni E istnieje drugi endomorfizm T: $A \to A$ taki, że

$$DT - TD = I, \tag{4}$$

gdzie I oznacza identyczność. W pracy [59] pokazane jest, że wówczas musi być też spełniony warunek (II).

PRZYKŁAD. Jeśli za D weźmiemy zwykłą operację różniczkowania funkcji, to wtedy za T należy przyjąć operację mnożenia przez argument.

Powstaje naturalne pytanie, czy własności (I) i (II) zapewniają istnienie endomorfizmu T spełniającego równość (4). Wydaje się, że bez dodatkowych założeń o przestrzeni E nie będzie można skonstruować endomorfizmu T. Ponieważ intencją naszych rozważań jest używanie wyłącznie pojęć i metod algebraicznych, więc naturalne będzie założenie, że każdy element tej przestrzeni jest rozwiązaniem pewnego równania jednorodnego:

(III) dla każdego elementu $x \in E$ istnieje wielomian $p \in K[x]$ taki, że $p \neq 0$ i $p(D)x = 0$.

Jeśli warunek (III) jest spełniony, to mówimy, że D jest endomorfizmem lokalnie algebraicznym przestrzeni E.

TWIERDZENIE 3 [61]. *Jeśli endomorfizm D przestrzeni E spełnia warunki* (I), (II), *i* (III), *to istnieje endomorfizm T przestrzeni E spełniający równość* (4).

Inny niż w [61] dowód tego twierdzenia podał R. Sikorski [W].

4. Równość (4) występuje w różnych sytuacjach teorii operatorów liniowych. H. Wielandt [Y] pokazał, że w żadnej algebrze Banacha nie ma dwóch elementów a i b takich, że $ab - ba = e$, gdzie e oznacza jedność algebry. Stąd wynika w szczególności, że w przestrzeni Banacha nie mogą istnieć dwa endomorfizmy ciągłe spełniające warunek (4)([1]). Z drugiej strony I. Kaplansky ([S], [U]) zauważył, że gdy D jest lokalnie algebraicznym ciągłym endomorfizmem przestrzeni Banacha, to wtedy nie istnieje endomorfizm T (nawet nieciągły) spełniający (4). Podobną sytuację mamy wówczas, gdy D jest operatorem zwartym (niekoniecznie lokalnie algebraicznym).

Zupełnie inaczej przedstawia się problem komutatora w przypadku przestrzeni liniowo metrycznych. W teorii dystrybucji dobrze jest znany fakt, że operacja różniczkowania i mnożenia przez argument są ciągłe w przestrzeni Schwartza $\mathscr{S}$ funkcji szybko malejących. Jak wcześniej wspomnieliśmy, te właśnie operacje tworzą komutator postaci (4).

5. Bardzo interesujące twierdzenie dotyczące równości (4) uzyskał E. Paige [T]. Ustalony endomorfizm D przestrzeni E wyznacza moduł $(E, K[x])$ nad pierścieniem wielomianów $K[x]$, gdy przyjmiemy następującą definicję mnożenia $px := p(D)x$ dla $x \in E$, $p \in K[x]$. Mówimy, że moduł $(E, K[x])$ jest *podzielny*, gdy dla każdego $y \in E$ i $p \in K[x]$, $p \neq 0$, istnieje $x \in E$ takie, że $p(D)x = y$.

([1]) W mechanice kwantowej mnożenie przez współrzędną x_i – to operator położenia Q_i, natomiast różniczkowanie po tej współrzędnej daje operator pędu

$$P_i = -ih\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{(gdzie } h \text{ – to stała Plancka).}$$

Z uwagi na fundamentalną tożsamość $Q_i P_i - P_i Q_i = ihI$, twierdzenie Wielandta pozwala lepiej zrozumieć nieograniczoność tych operatorów (*przyp. red.*).

TWIERDZENIE 4 (Paige). *Jeśli D jest endomorfizmem lokalnie algebraicznym przestrzeni (E, K) i ciało K ma charakterystykę zero, to moduł $(E, K[x])$ jest podzielny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje endomorfizm T przestrzeni E, taki że zachodzi równość* (4).

Na zakończenie podam kilka uwag związanych z twierdzeniem Paige'a. Element $x \in E$ będziemy nazywać *elementem algebraicznym* względem endomorfizmu D, gdy istnieje wielomian $p \in K[x]$, $p \neq 0$ taki, że $p(D)x = 0$. Zbiór wszystkich elementów algebraicznych przestrzeni E jest podprzestrzenią liniową niezmienniczą ze względu na endomorfizm D. Tę przestrzeń będziemy oznaczać symbolem E_a. Na podstawie twierdzenia Paige'a wnioskujemy, że gdy dla endomorfizmu D istnieje endomorfizm T spełniający równość (4), to $(E_a, K[x])$ jest podmodułem podzielnym modułu $(E, K[x])$. W teorii grup abelowych znane jest (por. [S]) następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 5 (R. Baer). *Niech G będzie grupą abelową i niech G_0 będzie podgrupą podzielną tej grupy. Wówczas istnieje podgrupa G_1 taka, że $G = G_0 \oplus G_1$.*

To twierdzenie przenosi się na przypadek dowolnego modułu nad pierścieniem euklidesowym. Zestawiając je z poprzednimi wynikami, otrzymujemy następujący wniosek.

WNIOSEK. *Niech E będzie przestrzenią liniową nad ciałem przemiennym o charakterystyce zero i niech D będzie endomorfizmem tej przestrzeni. Jeśli istnieje inny endomorfizm T tej przestrzeni spełniający równość* (4), *to istnieje podprzestrzeń E_t, niezmiennicza ze względu na endomorfizm D taka, że $E = E_a \oplus E_t$.*

Spis książek, skryptów i opracowań zwartych Jana Mikusińskiego

[Ia] *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa, I wydanie: 1953.
[Ia'] *Rachunek operatorów*, II wydanie rozszerzone: 1957.
[Ib] *Opieratornoje isčislenie*, Izdat. Inostr. Liter., Moskwa 1956.
[Ic] *Operatorenrechnung*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957.
[Id] *Operational Calculus*, PWN–Pergamon Press, Warszawa–Oxford, I wydanie: 1959, wznowienie I wydania: 1967.
[Id'] *Operational Calculus*, II wydanie poprawione i rozszerzone, w dwóch tomach: tom I, 1983; tom II (wspólnie z T. K. Boehmem), 1987.
[Ie] *Operátorszámitás*, Műszaki Kőnyvkiadó, Budapest 1961.
[If] *Rachunek operatorów* (w języku japońskim), Syokabo, Tokyo, ukazało się kilkanaście wydań; I wydanie: 1957.
[IIa] (wspólnie z S. Hartmanem) *Teoria miary i całki Lebesgue'a*, PWN, Warszawa 1957.
[IIb] (wspólnie z S. Hartmanem) *The theory of Lebesgue measure and integration*, PWN–Pergamon Press, Warszawa–New York 1961.
[III] *Wstęp do analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1957.

[IVa] (wspólnie z R. Sikorskim) *Elementarnaja tieorija obobščennych funkcji*, Izdat. Inostr. Liter., cz. I: Moskwa 1959, cz. II: 1963.
[IVb] (wspólnie z R. Śikorskim) *Elementarna teoria dystrybucji* (w jęz. chińskim), Pekin 1960.
[IVc] (wspólnie z R. Sikorskim) *Elementarna teoria dystrybucji* PWN, Warszawa 1964.
[IVd] (wspólnie z R. Sikorskim) *Théorie élémentaire des distributions*, Gauthier-Villars, Paris 1964.
[V] *Une introduction élémentaire à la théorie des distributions de plusieurs variables*, CIME, Inst. Mat. dell' Univ. Roma 1961.
[VI] *Una introduccion de la integral sin la nocion de medida*, Univ. de Buenos Aires, Dep. de Math., Buenos Aires 1963.
[VII] *An introduction to the theory of the Lebesgue and Bochner integrals*, Univ. of Florida, Dept. of Math., Gainesville 1964.
[VIII] *Lectures on the constructive theory of distributions*, Univ. of Florida, Dept. of Math., Gainesville 1969.
[IXa] (wspólnie z P. Antosikiem i R. Sikorskim) *Theory of distributions. The sequential approach*, Elsevier–PWN, Amsterdam–Warszawa 1973.
[IXb] (wspólnie z P. Antosikiem i R. Sikorskim) *Tieorija obobščennych funkcyj. Sekwencjalnyj podchod*, Izdat. Mir, Moskwa 1976.
[X] (wspólnie z zespołem Pracowni Matematycznej CBN PAN) *Wpływ charakterystyki emitora na częstość przekroczeń najwyższych dopuszczalnych stężeń z uwzględnieniem zmierzonego poziomu tła*, opracowanie dla Energoprojektu w Katowicach, Polska Akademia Nauk, Centrum Badań Naukowych w woj. katowickim, Katowice 1973.
[XI] *The Bochner Integral*, Birkhäuser, Basel–Stuttgart 1978.
[XII] (wspólnie z K. Skórnik) *O przyrządach optycznych osiowo-symetrycznych*, Zakład Narodowy im Ossolińskich Wydawn. PAN, Wrocław 1978.
[XIII] *Hiperliczby*. Część I. *Algebra*; *Hypernumbers*. Part I. *Algebra*, Santa Barbara, California 1983 (fotokopia pracy napisanej w 1944 r. w Krakowie, lecz nie wydanej drukiem, wraz z jej angielskim tłumaczeniem; niezależnie ukazała się ta praca w języku angielskim w Studia Math. [140]).

Spis prac naukowych Jana Mikusińskiego

1946

[1] *Sur l'inégalité différentielle* $|f^{(n)}(x)| \geqslant m|f(x)|$, C.R. Acad. Sci. Paris 222 (1946), 359–361.
[2] *Sur les intégrales de quelques équations différentielles linéaires*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 1 (1946), 23–34.
[3] *Sur l'équation différentielle* $y^{(6)}+y=0$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 1 (1946), 35–40.
[4] *Sur la notion de point remarquable dans la géométrie du triangle*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 1 (1946), 41–44.
[5] *Sur quelques propriétés du triangle*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 1 (1946), 45–50.

1947

[6] *Les méthodes algébriques dans l'analyse fonctionnelle*, C. R. Acad. Sci. Paris 224 (1947), 1685–1687.
[7] *Sur un problème d'interpolation pour les intégrales des équations différentielles linéaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 19 (1947), 165–205.

[8] *L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle* (Première partie), Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 2 (1947), 1–48.

1948

[9] *Sur les fonctions* $k_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{n+k\nu}}{(n+k\nu)!}$ $(k = 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, \ldots, k-1)$, Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), 46–51.

[10] *Sur les moyennes de la forme* $\psi^{-1}[\sum q\psi(x)]$, Studia Math. 10 (1948), 90–96.

[11] *Sur la méthode de généralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible*, Fund. Math. 35 (1948), 235–239.

[12] (wspólna z C. Ryll-Nardzewskim) *On linear functionals in abelian groups*, Colloq. Math. 1 (1948), 294–296.

1949

[13] *L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle* (Deuxième partie), Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 3 (1949), 1–84.

[14] *Sur certains espaces abstraits*, Fund. Math. 36 (1949), 125–130.

[15] *Sur les zéros des polynômes et de leurs dérivées successives*, Prace Mat.-Fiz. 47 (1949), 21–40.

[16] *On Fite's oscillation theorems*, Colloq. Math. 2 (1949), 34–39.

[17] *Sur l'unicité des solutions de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits*, Ann. Soc. Polon. Math. 22 (1949), 157–160.

[18] *Sur le calcul opératoire*, Časopis Pěst. Mat. 74 (1949), 89–94.

[19] *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Math. 11 (1949), 41–70.

[20] (wspólna z S. Drobotem) *Sur l'unicité des solutions des quelques équations différentielles dans les espaces abstraits* (II), Studia Math. 11 (1949), 38–40.

1950

[21] *Une nouvelle justification du calcul de Heaviside*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. Ia (8) 2 (1950), 113–121.

1951

[22] (wspólna z C. Ryll-Nardzewskim) *Sur le produit de composition*, Studia Math. 12 (1951), 51–57.

[23] *Un théorème d'unicité pour quelques systèmes d'équations différentielles considérées dans les espaces abstraits*, Studia Math. 12 (1951), 80–83.

[24] (wspólna z J. Aczélem i L. Kalmárem) *Sur l'équation de translation*, Studia Math. 12 (1951), 112–116.

[25] *On generalized power-series*, Studia Math. 12 (1951), 181–190.

[26] *A theorem on moments*, Studia Math. 12 (1951), 191–193.

[27] (wspólna z C. Ryll-Nardzewskim) *Sur l'opérateur de translation*, Studia Math. 12 (1951), 205–207.

[28] *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, Studia Math. 12 (1951), 208–224.

[29] *Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations classiques aux dérivées partielles*, Studia Math. 12 (1951), 227–270.

[30] *Remarks on the moment problem and a theorem of Picone*, Colloq. Math. 2 (1951), 138–141.

[31] (wspólna z L. Finkelsztejnem i C. Ryll-Nardzewskim) *Sur une équation intégro-différentielle*, Colloq. Math. 2 (1951), 178–181.

1952

[32] *Sur un déterminant*, Ann. Soc. Polon. Math. 25 (1952), 27–29.

[33] (wspólna z R. S. Ingardenem) *Uwagi teoretyczne o ziarnistości wywołanych warstw fotograficznych*, Prace Wrocław. Towarz. Nauk., Ser. B, 41 (1952), 5–15.

1953

[34] *On generalized exponential functions*, Studia Math. 13 (1953), 48–50.

[35] (wspólna z C. Ryll-Nardzewskim) *A theorem on bounded moments*, Studia Math. 13 (1953), 51–55.

[36] *A new proof of Titchmarsh's theorem on convolution*, Studia Math. 13 (1953), 56–58.

[37] (wspólna z C. Ryll-Nardzewskim) *Un théorème sur le produit de composition des fonctions de plusieurs variables*, Studia Math. 13 (1953), 62–68.

[38] *Sur un type de conditions mixtes pour les équations aux dérivées partielles*, Studia Math. 13 (1953), 277–286.

[39] *On the Paley–Wiener theorem*, Studia Math. 13 (1953), 287–295.

[40] *O rachunku operatorów*, Zastos. Mat. 1 (1953), 28–40.

[41] *Sur la dérivée algébrique*, Fund. Math. 40 (1953), 99–105.

[42] *O interpretacji zjawisk fizycznych w analizie klasycznej i w rachunku operatorów* [*Sur l'interprétation de phénomènes physiques dans l'analyse classique et dans le calcul des opérateurs*], C. R. Soc. Sci. Lett. Wrocław 8 (1953), 103–104.

1954

[43] *Sur le parquetage du plan par des polygones*, Colloq. Math. 3 (1954), 14–18.

[44] *Sur la méthode d'approximation de Newton*, Ann. Polon. Math. 1 (1954), 184–194.

[45] *Sur certaines fractions continues finies*, Ann. Polon. Math. 1 (1954), 203–206.

[46] *Matematyka dźwięku i skali muzycznej*, Problemy 10 (1954), 668–675.

1955

[47] *Sur l'équation* $x^{(n)} + A(t)x = 0$, Ann. Polon. Math. 1 (1955), 207–221.

[48] *On Dirichlet series with complex exponents*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), 254–256.

[49] *Une définition de distribution*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 3 (1955), 589–591.

[50] *Rachunek operatorów na tle aktualnych kierunków matematyki*, Comment. Math. (Prace Mat.) 1 (1955), 344–370.

1956

[51] *O wielokrotnych zerach funkcyj rzeczywistych*, Zeszyty Nauk. Uniw. Wrocław., Ser. B, 1 (1956), 5–16.

[52] *Sur quelques équations intégro-différentielles*, Studia Math. 15 (1956), 182–187.

[53] *Le calcul opérationnel d'intervalle fini*, Studia Math. 15 (1956), 225–251.

[54] (wspólna z Z. Łuszczkim, K. Urbanikiem, J. Wloką i Z. Zieleźnym) *Einige Bemerkungen über die Hirschman–Widder'schen Funktionen* $H_{n,k}(x)$, Colloq. Math. 4 (1956), 30–32.

[55] *O rabotach polskich matiematikov po tieorii obobščonnych funkcji i opieracjonnomu isčysleniu*, Uspekhi Mat. Nauk 11, wypusk 6 (72) (1956), 169–172.

[56] *Équations différentielles à coefficients constants considérées dans les espaces linéaires généraux*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 4 (1956), 137–139.

[57] *Sur la croissance de la fonction opérationnele* $\exp(-s^a\lambda)$, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 4 (1956), 423–425.

[58] *Problèmes initiaux et mixtes pour les équations aux dérivées partielles considérés du point de vue du calcul opérationnel*, Czechoslovak Math. J. 6 (1956), 311–317.

1957

[59] *Sur les solutions linéairement indépendantes des équations différentielles à coefficients constants*, Studia Math. 16 (1957), 41–47.

[60] *Sur les théorèmes d'unicité et le nombre de solutions linéairement indépendantes*, Studia Math. 16 (1957), 95–98.

[61] *Sur l'espace linéaire avec dérivation*, Studia Math. 16 (1957), 113–123.

[62] *Extensions de l'espace linéaire avec dérivation*, Studia Math. 16 (1957), 156–172.

[63] (wspólna z R. Sikorskim), *The elementary theory of distributions* (I), Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 12 (1957), 1–54.

[64] *Sur quelques inégalités pour les déterminants*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 5 (1957), 699–700.

[65] *O zastosowaniach rachunku operatorów w elektrotechnice*, Wydawnictwo jubileuszowe z okazji 250-lecia Politechniki Praskiej, 277–284.

1958

[66] (wspólna z S. Drobotem) *Ob opieratorie sdviga i jego primienienii k statike balok*, Uspekhi Mat. Nauk 13, wypusk 2 (80) (1958), 73–92.

[67] *Sur la fonction dont la transformée de Laplace est* $e^{-\sqrt{s}}$, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 6 (1958), 691–693.

[68] *Sur les notions de distribution et d'opérateur*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 6 (1958), 737–741.

1959

[69] *On the function whose Laplace-transform is* e^{-s^2}, Studia Math. 18 (1959), 191–198.

[70] *Sur la convolution par* $\exp(t^2)$, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 7 (1959), 669–671.

[71] *Une simple démonstration du théorème de Titchmarsh sur la convolution*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 7 (1959), 715–717.

[72] *Trygonometria równania różniczkowego* $x''+x=0$, Wiadom. Mat. 2 (1959), 207–227.

[73] *Uwagi o dowodach jedyności*, Wiadom. Mat. 2 (1959), 289–291.

[74] *Sur les extrema des déterminants*, Ann. Polon. Math. 6 (1959), 135–143.

[75] *Operatorenrechnung und ihre Beziehungen zur modernen Mathematik*, Z. Angew. Math. Mech. 39 (1959), 381–384.

1960

[76] *Trygonometria równania różniczkowego* $x^{(4)}+x=0$, Wiadom. Mat. 4 (1960), 73–84.

[77] (wspólna z S. Świerczkowskim) *Twierdzenie Titchmarsha o splocie i teoria Dufresnoy*, Comment. Math. (Prace Mat.) 4 (1960), 59–76.

[78] *Remarks on the algebraic derivative in the Operational Calculus*, Studia Math. 19 (1960), 187–192.

[79] *Distributions à valeurs dans les réunions d'espaces de Banach*, Studia Math. 19 (1960), 251–285.

[80] *On the value of a distribution at a point*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), 681–683.

[81] *On the convolution of functions of class* l_1, Bul. Inst. Politehn. Iaşi (N.S.) 6 (1960), 31–34.

1961

[82] *Operations on distributions*, Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem 1960, Jerusalem Academic Press–Pergamon Press, Jerusalem–London 1961, 335–339.

[83] *Irregular operations on distributions*, Studia Math. 20 (1961), 163–169.

[84] *Convolution of functions of several variables*, Studia Math. 20 (1961), 301–312.

[85] *Calcul opérationnel algébrique*, Atti della 2ª Riunione del Groupement de Mathématiciens d'expression latine, Firenze (1961), 30–36.

[86] (wspólna z R. Sikorskim) *The elementary theory of distributions* (II), Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 25 (1961), 1–47.

1962

[87] *Criteria of the existence and of the associativity of the product of distributions*, Studia Math. 21 (1962), 253–259.

[88] *Analytic functions of polynomial growth*, Studia Math. 22 (1962), 7–13.

[89] *O czworościanie*, Wiadom. Mat. 5 (1962), 39–42.

[90] *O ciągłych pochodnych funkcji wielu zmiennych*, Comment. Math. (Prace Mat.) 7 (1962), 55–58.

1963

[91] *Operators and distributions*, Studia Math. Seria Spec. 1 (1963), 77–78.

[46a] *La matematica del sonido y de la musica Ciencia e investigacion*, 19 (9) (1963), 291–307 (hiszpańska wersja pracy [46] opublikowana w Buenos Aires z okazji pobytu autora w 1962 r. w Argentynie jako eksperta UNESCO).

1964

[92] (wspólna z A. Schinzlem) *Sur la réductibilité de certains trinômes*, Acta Arith. 9 (1964), 91–95.

[93] (wspólna z W. Kieratem) *Sur un théorème de calcul opérationnel d'intervalle fini*, Studia Math. 25 (1964), 93–96.

[94] *Sur une définition de l'intégrale de Lebesgue*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 12 (1964), 203–204.

1966

[95] *On weak convergence and strong convergence in the theory of distributions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 14 (1966), 431–434.

[96] *On the square of the Dirac delta-distribution*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 14 (1966), 511–513.

[97] *Germs and their operational calculus*, Studia Math. 26 (1966), 315–325.

[98] *An approximation theorem and its applications in operational calculus*, Studia Math. 27 (1966), 141–145.

[99] *Convolution approximation and shift approximation*, Studia Math. 28 (1966), 1–8.

[100] *Une introduction eléméntaire de la transformation de Fourier dans la théorie des distributions*, Mathematica (Cluj) 8 (31), 1 (1966), 83–90.

1967

[101] *O splocie potęg modulu*, Wiadom. Mat. 10 (1967), 1–2.

[102] *O twierdzeniu Zorna*, Wiadom. Mat. 9 (1967), 225–232.

[103] *A representation of tempered distributions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 15 (1967), 103–104.

1968

[104] *On convergence of sequences of periodic distributions*, Studia Math. 31 (1968), 1–14.

[105] *Sequential theory of the convolution of distributions*, Studia Math. 29 (1968), 151–160.

[106] *Weak convergence and strong convergence in some spaces of sequences*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 47–50.

[107] *A constructive theory of tempered distributions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 727–732.

[108] (wspólna z P. Antosikiem) *On Hermite expansions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 787–791.

1969

[109] *On functions and distributions with a vanishing derivative*, Studia Math. 32 (1969), 9–16.

[110] *On spaces of sequences*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 17 (1969), 17–20.

[111] (wspólna z A. R. Bednarkiem) *Convergence and topology*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 17 (1969), 437–442.

1970

[112] (wspólna z I. K. Brooksem) *On some theorems in functional analysis*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970), 151–155.

[113] *A theorem on vector matrices and its applications in measure theory and functional analysis*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970), 193–196.

1971

[114] *On a theorem of Nikodym on bounded measures*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19 (1971), 441–444.

1972

[115] *On partial derivatives*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 19 (1971), 441–444.

[116] (wspólna z I. K. Brooksem) *Weak integrals defined on Euclidean n-space*, Studia Math. 44 (1972), 501–505.

[117] *Temperierte Ableitungen und temperierte Distributionen*, Beiträge Anal., Halle-Saale, 4 (1972), 139–143.

1973

[118] *Stała Eulera*, Wiadom. Mat. 16 (1973), 1–11.

[119] *O pochodnych cząstkowych i pełnych*, Wiadom. Mat. 16 (1973), 23–35.

[120] *Dlaczego nie suma? Dyskusja nad terminologią i symboliką matematyczną*, Wiadom. Mat. 16 (1973), 111–112.

1974

[121] *On the Daniell integral*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), 161–164.

[122] (wspólna z A. Kamińskim) *On the entropy equation*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), 319–323.

[123] *A lemma on convergence*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), 903–907.

[124] (wspólna z S. Lewandowską) *On Hermite expansions of* $1/x$ *and* $1/|x|$, Ann. Polon. Math. 29 (1974), 167–172.

1975

[125] *Iterated operations on distributions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 23 (1975), 23–25.

[126] (wspólna z P. Antosikiem) *The kernel theorem for Köthe's echelon space*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 23 (1975), 951–954.

[127] *Convergence and locally convex spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 23 (1975), 1171–1173.

[128] *On full derivatives and on the integral substitution formula*, Accad. Naz. Lincei Probl. Att. Sci. Cult. 217 (1975), 377–390.

[129] (wspólna z P. Mikusińskim) *Liczby naturalne i ich aksjomatyka*, Wiadom. Mat. 19 (1975), 136–140.

[130] (wspólna z K. Skórnik) *O twierdzeniu Staudta–Darboux*, Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli (Wydawn. Szkolne i Pedagog.) 5/6 (1975), 332–339.

[131] (wspólna z C. Ferensem) *Urysohn's condition and Cauchy sequences*, Trudy Sem. S. L. Soboleva 1 (1978), 122–124.

1979

[132] (wspólna z A. Kamińskim i Pl. Kannappanem) *Distributional solutions in information theory*, I, Ann. Polon. Math. 36 (1979), 101–110.

1980

[133] (wspólna z P. Mikusińskim) *Algebra of convergence*, Proc. Conf. on Convergence, Szczyrk 1979, PAN, Oddz. w Katowicach (1980), 81–84.

1981

[134] *Sequential methods in mathematics*, Proc. Int. Conf. on Generalized Functions, Moscow 1980 (*Obobščennyje funkcji i ich primenienia w matematičeskoj fizykie*), Moskwa (1981), 342–350.

[135] (wspólna z P. Mikusińskim) *Quotients de suites et leurs applications dans l'Analyse fontionnelle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 293 (1981), 463–464.

[136] (wspólna z P. Mikusińskim) *Quotients of sequences*, Proc. Conf. on Convergence, Szczyrk 1981, Preprint IM PAN (1981), 39–45.

[137] *Czy pojęcie liczb naturalnych warto opierać na teorii mnogości?* Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli (Wydawn. Szkolne i Pedagog.) 4 (1981), 219–221.

1982

[138] wspólna z K. Skórnik) *Modelowanie matematyczne w optyce*, część I, Fizyka w szkole, Czasopismo dla nauczycieli (Wydawn. Szkolne i Pedagog.) 3 (1982), 131–139.

[139] (wspólna z K. Skórnik) *Modelowanie matematyczne w optyce*, część II, Fizyka w szkole. Czasopismo dla nauczycieli (Wydawn. Szkolne i Pedagog.) 4 (1982), 195–201.

1983

[140] *Hypernumbers.* Part I. *Algebra*, Studia Math. 77 (1983), 3–16 (angielskie tłumaczenie pracy *Hiperliczby*. Część I. *Algebra*, napisanej w 1944 r. w Krakowie, lecz nie wydanej wtedy drukiem; niezależnie ukazała się ta praca w formie książeczki [XIII]).

[141] (wspólna z K. Skórnik) *On the refraction of light in the water level*, Zeszyty Nauk. Politechn. Śląsk. Mat.-Fiz. 42 (1983), 183–188.

[142] (wspólna z K. Skórnik) *O załamaniu promieni świetlnych*, Fizyka w szkole. Czasopismo dla nauczycieli (Wydawn. Szkolne i Pedagog.) 4 (1983), 219–222.

1985

[143] *On the Foiaş Theorem on Convolution*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math. 33 (1985), 285–288.

[144] *A remark on functionals in the space of continuous functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. 33 (1985), 623–626.

[145] *On some classes of infinitely decomposable Sobolev–Schwartz test functions*, Ann. Polon. Math. 46 (1985), 193–195.

[146] (wspólna z K. Skórnik) *Gdzie w wodzie znajduje się przedmiot?*, Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli (Wydawn. Szkolne i Pedagog.) 1 (1985), 24–27.

1987

[147] *O twierdzeniu Titchmarsha, Foiaşa i o aproksymacji przesunięciami*, Wiadom. Mat. 27 (1987), 193–202.

w druku

[148] *On the logarithm of the differential operator*, Serdica.
[149] *On defining integrals by series*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math.

Cytowane prace innych autorów

[A] P. Antosik, *On the Mikusiński Diagonal Theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci. 19 (1971), 305–310.
[B] –, *A Generalization of the Diagonal Theorem*, ibidem 20 (1972), 373–377.
[C] –, *Mappings from L-groups into Topological Groups* I–II, ibidem 21 (1973), 145–153, 155–160.
[D] –, *Sur les suites d'applications*, C. R. Acad. Sci., Paris, 287 (1978), 75–77.
[E] – and C. Swartz, *Matrix Methods in Analysis*, Lecture Notes in Math. 1113, Springer-Verlag, 1985.
[F] J. Burzyk, *On convergence in the Mikusiński operational calculus*, Studia Math. 75 (1983), 313–333.
[G] –, *On type* II *convergence in the Mikusiński operdtional calculus*, ibidem 77 (1983), 17–27.
[H] L. Dubikajtis, C. Ferens, R. Ger, M. Kuczma, *On Mikusiński's functional equation*, Ann. Polon. Math. 28 (1973), 39–47.
[I] Y. Hirata, H. Ogata, *On the Exchange Formula for Distributions*, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 22 (1958), 147–152.
[J] M. Itano, *On the Multiplicative Products of Distributions*, ibidem 29 (1965), 51–74.
[K] A. Kamiński, *Remarks on Delta- and Unit-Sequences*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (1978), 25–30.
[L] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*, Uniwersytet Śląski–PWN, Warszawa–Kraków–Katowice 1985.
[M] H. M. MacNeille, *A unified theory of integration*, Proc. of National Acad. of Sci. 27 (1941), 71–76.
[N] L. Schwartz, *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques*, Annales Univ. Grenoble 21 (1945), 57–74.
[O] –, *Théorie des distributions* I–II, Hermann, Paris 1950–1951.
[P] R. Shiraishi, M. Itano, *On the Multiplicative Products of Distributions*, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, 28 (1964), 223–235.
[Q] S. L. Sobolew, *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales*, Mat. Sbornik 1 (1936), 39–71.
[R] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris 1957.
[S] –, *Infinite Abelian Groups*, The University of Michigan Press, 1969.
[T] E. C. Paige, *A generalization of a commutator theorem of Mikusiński*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 1417–1423.
[U] D. Przeworska-Rolewicz and S. Rolewicz, *Equations in linear spaces*, PWN, Warszawa 1968.
[W] R. Sikorski, *On Mikusiński's algebraic theory of differential equations*, Studia Math. 16 (1957), 230–236.
[Y] H. Wielandt, *Über die Unbeschränkheit der Operatoren der Quantenmechanik*, Math. Ann. 121 (1949), 21.