ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVIII (1988)

wmptm 1897

JAN KONIOR (Katowice)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Z badań nad konstrukcją tekstu dowodu w podręcznikach akademickich i monografiach matematycznych

1. Wstęp. Tekst matematyczny stanowi jeden z głównych środków przekazu wiedzy matematycznej. Nauka czytania i efektywna lektura tekstu matematycznego nie przychodzą jednak łatwo. Percepcja tekstów matematycznych wymaga specyficznej aktywności i specjalnej techniki czytania. Rozmaite obserwacje uzasadniają przypuszczenie, że tekst matematyczny (w szczególności tekst dowodu) ma swoistą konstrukcję. Stosowane tu środki, techniki oraz sposoby przekazu wypracowane zostały praktycznie przez pokolenia matematyków i przekazywane są następnym jako pewna tradycja. Zagadnienia te, a w szczególności problemy funkcjonowania tekstu matematycznego w procesie przekazywania wiedzy, zostały przedstawione przez Z. Krygowską na Pierwszym Międzynarodowym Kongresie Nauczania Matematyki w Lyonie [4].

Także pisanie i redagowanie tekstu matematycznego nie jest zadaniem prostym, gdy ma on zyskać aprobatę czytelników i specjalistów. Sposoby pisemnej prezentacji rezultatów aktywności matematycznej stanowią przedmiot zainteresowań różnych środowisk, w tym także twórczych matematyków (por. np. [7]).

Niniejszy artykuł jest szkicowym omówieniem niektórych wyników przedstawionych szerzej w pracy [3]. Postanowiono tam zbadać, jak zbudowane są teksty dowodów zredagowane w podręcznikach akademickich i monografiach matematycznych. Chodziło więc o obiektywną analizę rezultatów pracy matematyków-specjalistów. Badając szerzej te dowody, można było ujawnić pewne prawidłowości oraz zidentyfikować bardzo wartościowe techniki godne upowszechnienia. Choć badania te dotyczą budowy tekstu, nie zakłada się żadnej krytyki analizowanych tekstów, ani też oceny, które z nich są lepsze, bądź gorsze. Celem analizy, przeprowadzonej z punktu widzenia technik przekazu, było ujawnienie pewnych ogólnych prawidłowości konstrukcji tekstu dowodu, wyodrębnienie interesujących rozwiązań, sposobów prezentacji rozumowań i metod kierowania pracą czytelnika oraz scharakteryzowanie typowych zabiegów redakcyjnych.

Materiał do analizy (bynajmniej nie zamkniętej) stanowiła próba 700 tekstów dowodów pochodzących z podręczników akademickich i monografii matematycznych, które zostały wydane — głównie w języku polskim — w okresie ostatniego ćwierćwiecza.

Syntetyczny opis i wybrane rezultaty przedstawimy tu bez dokumentowania materiałem źródłowym, pominięte zostanie także szersze uzasadnienie znaczenia dla przebiegu lektury wykrytych komponentów i zabiegów redakcyjnych.

2. Segmentacja tekstu dowodu. Jednym z głównych środków, za pomocą których autor kieruje pracą czytelnika i przekazuje informacje pozwalające odtworzyć pełną konstrukcję dowodową, jest *segmentacja* tekstu. Segmentacja nie jest jednak zagadnieniem jedynie stylistycznym, lecz uwypukla matematyczną budowę dowodu. Nasuwa się więc pytanie o środki stosowane przez autorów w celu segmentacji tekstu. Dokonana analiza pokazuje, że w tekstach dowodów wypracowane zostały własne, specyficzne dla tego gatunku techniki i środki służące uwypuklaniu części (specjalnych fragmentów) tekstu, w szczególności sygnalizowaniu ich granic. Są to techniki oraz komponenty rzadziej spotykane lub nie występujące wcale w tekstach niematematycznych. Stosuje się zarówno językowe, jak i pozawerbalne (np. graficzne) środki i *wyznaczniki granicy* (*delimitatory*) danego fragmentu. Tekst bywa tak zbudowany, że nośnikami takich sygnałów są wyrażenia o referencji przedmiotowej (tzn. będące argumentacją matematyczną), ale jednocześnie dodatkowo nacechowane informacją o granicy jakiejś części tekstu. Z tego też powodu jedno i to samo wyrażenie pełni nieraz więcej funkcji w tekście dowodu. Owa wielofunkcyjność wyrażeń oraz wielokanałowość procesu komunikacji — to charakterystyczne cechy budowy zwięzłego tekstu dowodu. Elementami przekazu są różne komponenty tekstu, specyficzna symbolika, terminologia, język naturalny, rysunek. Ta szczególna heterogeniczność tekstów dowodów wyróżnia je spośród innych tekstów.

Wyznaczniki granicy pełnią ważną rolę w konstrukcji tekstu dowodu (wolno sądzić, że mają one istotne znaczenie także w procesie lektury). Jednym z zabiegów redakcyjnych wiążących się z wykorzystaniem delimitatorów jest budowanie *ramy delimitacyjnej*, która „wycina" z tekstu pewien fragment. Zabieg ten służy zasygnalizowaniu takich fragmentów, które w koncepcji redakcyjnej autora powinny być — czy to z powodów matematycznych, czy też heurystycznych — dostrzegane na tle całej konstrukcji. Choć nazwy „delimitator" i „rama delimitacyjna" zostały zapożyczone z rozważań językoznawczych (por. np. [1]), to jednak w przypadku tekstów dowodów pojęcia te mają bezpośredni związek z konstrukcjami i procedurami matematycznymi: wiążemy je z pojęciami logicznymi charakteryzującymi budowę ciągu dowodowego.

3. Obszary założeniowe. Powszechnie spotykane w praktyce matematycznej sposoby dowodzenia nie różnią się zasadniczo od stosowanych w logice metod budowania *dowodów założeniowych* (*supozycyjnych*). Podstawowa idea jest w obu przypadkach ta sama. Nic w tym dziwnego, gdyż formalizacją zwykłych sposobów rozumowania są systemy *dedukcji naturalnej* operujące dowodem założeniowym (w [6] przedstawiony jest pełny taki system; tutaj przytoczymy informacyjnie niezbędne dalej fakty, ograniczając się do przykładu z rachunku zdań).

Supozycyjny dowód twierdzenia będącego na przykład implikacją

$$(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

rozpoczynamy od wypisania założenia (1). Przyjmujemy dalej założenie dodatkowe (1.1), aby po wyprowadzeniu zeń formuł (1.2) i (1.3) zamknąć ten fragment, pisząc implikację (2) o poprzedniku (1.1) i następniku (1.3) stanowiącym ostatni z wniosków w obrębie dodatkowego założenia p. Następny fragment, rozpoczęty od założenia chwilowego q, buduje się analogicznie. Koniunkcja (4) implikacji (2) i (3) uzyskanych przy założeniu (1) stanowi tezę dowodzonego twierdzenia.

(1) $p \vee q \rightarrow r$	$p \vee q \rightarrow r$
(1.1) p	p
(1.2) $p \vee q$	$p \vee q$
(1.3) r	r
(2) $p \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
(2.1) q	q
(2.2) $p \vee q$	$p \vee q$
(2.3) r	r
(3) $q \rightarrow r$	$q \rightarrow r$
(4) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

Takie fragmenty, jak podciągi (1.1), (1.2), (1.3) oraz (2.1), (2.2), (2.3) zostały w pracy Jaśkowskiego [2] nazwane *obszarami założeniowymi* (wyznaczonymi odpowiednio przez założenia p i q). Graficzna ilustracja (po prawej) pozwala na wizualne uwypuklenie obszarów założeniowych. Brzeg prostokąta symbolizuje tu zasięg odpowiedniego założenia dodatkowego, o którym mówimy, że otwiera dany obszar.

Z takiego dodatkowego założenia i wyrażeń uzyskanych na jego podstawie nie można oczywiście korzystać w dalszych częściach rozumowania (nie

dotyczy to implikacji wypisanej bezpośrednio po zamknięciu obszaru). Jest to dopuszczalne jedynie w zasięgu supozycji otwierającej dany obszar. Jest też widoczne, że przesłanki i wnioski oznaczone tu pojedynczymi numerami lokują się niejako w innej płaszczyźnie niż te, które oznakowano podwójnie. Wśród tych ostatnich rysują się wyraźnie wyodrębnione grupy. Oznakowanie dobrano tak, aby numery otwierające poszczególne wiersze dowodowe kwalifikowały i klasyfikowały wyrażenia ze względu na ich rolę i stosunek do innych. Sposób zapisu ma tu wyrażać cały złożony układ zależności i relacji między przesłankami, częściowymi rezultatami, a także zespołami wyrażeń w procesie dowodzenia.

W praktyce matematycznej sytuacja jest na ogół o wiele bardziej złożona. W dowodach występuje inny język, bardziej złożony niż język rachunku zdań, zarówno w swej strukturze, jak i w sposobie zapisu. Ale przede wszystkim może być więcej obszarów założeniowych, które w związku z odmiennym zapisem nie zawsze wyodrębniają się typograficznie tak ostro. Obszary założeniowe bywają zresztą dłuższe, mogą zawierać ponadto podobszary. Konieczność dokonywania skrótów nie pozwala autorowi na włączanie do tekstu *explicite* nawet ważniejszych nieraz elementów konstrukcji dowodowej. Wszystko to nie tylko nakłada na czytelnika obowiązek permanentnych uzupełnień, ale stawia go wobec potrzeby stałej kontroli, jakie założenia w danym momencie funkcjonują, do jakich obszarów dany wniosek należy, a do których już nie należy. Czasami wypadnie śledzić jednocześnie kilka wątków rozpoczętych w różnych miejscach, a potem w każdym przypadku należy samodzielnie już dokonać syntezy i myślowo zapanować nad całością. Ujęcie przez czytelnika całokształtu wspomnianych stosunków, a w szczególności właściwa rekonstrukcja obszarów założeniowych, jest warunkiem *sine qua non* pełnego rozumienia dowodu.

Ostatnie stwierdzenie nabiera szczególnej wymowy dla praktyki nauczania i uczenia się. Zrozumienie tekstu dowodu wymaga koncentracji właśnie na inferencjach, a nie ograniczania się do ciągu izolowanych faktów (członów inferencji), narzuconych przez linearny porządek zapisu.

Zarówno z punktu widzenia czytania, jak i redagowania tekstu nasuwają się następujące pytania: (a) czy w tekstach dowodów matematycy podejmują zabiegi eksponujące obszary założeniowe, (b) jakimi środkami operują oni, aby wyostrzyć zarysy tych obszarów na tle całej konstrukcji dowodowej. Analiza materiałów źródłowych ujawnia pewne prawidłowości budowy tekstu; dalej przedstawimy fragmentarycznie tylko niektóre z nich.

Obszary założeniowe wydziela się przede wszystkim w toku segmentacji tekstu dowodu. Nierzadko w celu uwydatnienia obszaru założeniowego tworzy się oddzielny akapit. Wydzielenie akapitu stanowi jednak dopiero wstępny zabieg: sygnalizuje obecność danego obszaru, ułatwia w toku lektury globalne jego wyodrębnienie i umożliwia czytelnikowi spojrzenie nań niejako od zewnątrz. Właściwy efekt, którym powinno być odebranie akapitu

jako fragmentu powiązanego wewnętrznie i nie rozpadającego się na części oraz odczytanie go jako jednego obszaru założeniowego, osiąga się przez drugi ważny zabieg. Jest nim wykorzystanie mechanizmów spójności tekstu wewnątrz tego akapitu (*spójność* jest jedną z podstawowych kategorii występujących w ogólnojęzykowych badaniach nad tekstem). Wszystkie — zarówno ogólnojęzykowe, jak i specyficzne dla tekstów matematycznych — środki spójności zostają spożytkowane w celu zespolenia wielozdaniowego tekstu tworzącego akapit mający odpowiadać jednemu obszarowi założeniowemu. Łącznym rezultatem tych zabiegów „od zewnątrz" i „od wewnątrz" jest wyposażenie tekstu w takie cechy, które sprawiają, iż czytelnik może odbierać wydzielony fragment jako ciągły (bez luk bądź przeskoków, co nie oznacza, że bez skrótów) i kompletny.

Niektóre teksty są tak zredagowane, że każda próba odejścia w samodzielnej rekonstrukcji od właściwej linii rozumowania może być odczuta z chwilą przejścia do następnej sekwencji tekstu jako naruszenie jego spoistości. Tekst „reaguje" w ten sposób na odchylenie od właściwego kursu, zapobiegając fałszywym krokom odbiorcy. Oznacza to dla czytelnika zachętę do samokontroli i rewizji każdego kroku, przy którym pojawia się taki sygnał. W takim tekście tok kolejnych wypowiedzi jest naturalny w odbiorze i płynny. Każde poprzednie wyrażenie nasuwa od razu następne, zaś cały łańcuch inferencji zaczyna się od supozycji otwierającej dany obszar. Ten sposób podwójnego sygnalizowania obszarów założeniowych można uznać za pewien ogólny wzorzec w redagowaniu tekstów dowodów.

Jednym z charakterystycznych zabiegów redakcyjnych służących uwypuklaniu obszarów założeniowych jest stosowanie zapisu jednozdaniowego. Wszystkie wyrażenia dowodowe, będące w ramach danego obszaru wnioskami z założenia otwierającego ten obszar, ujmuje się w postaci jednego zdania. Przez *zdanie* rozumiemy tu odpowiedni odcinek tekstu wyodrębniony za pomocą dwóch kolejnych kropek (jako znaków przestankowych), występujących wówczas w roli nieleksykalnych wyznaczników granicy obszaru założeniowego. Długość zdania podyktowana jest rozmiarami obszaru, któremu ono odpowiada; zasięg supozycji rozpoczynającej takie zdanie kończy się wtedy wraz z zakończeniem zdania. Jest to więc naturalny, najmniej skomplikowany wyznacznik obszaru założeniowego. Tego rodzaju sygnał może być łatwo odczytany w toku lektury. Kierując się tą ideą, można by na przykład podstawową część tekstu dowodu implikacji $x \neq 0 \rightarrow |x| > 0$ tak oto zredagować:

Jeśli $x > 0$, to z definicji wartości bezwzględnej $|x| = x$, stąd $|x| > 0$; następnik implikacji jest więc spełniony.

Jeśli $x < 0$, to $-x > 0$; na mocy definicji mamy $|x| = -x$, a zatem $|x| > 0$; tak więc warunek w następniku implikacji również zachodzi.

Każdy z dwu obszarów założeniowych uwypuklono tu w zapisie jednozdaniowym (poszczególne części zdania rozdzielone są średnikami, choć natural-

niejsze byłyby może kropki). Niezależnie od inicjalnego „Jeśli..." podkreślającego supozycyjny charakter postępowania, wykorzystywane bywają w dowodach inne środki. W celu wyodrębnienia danego obszaru stosuje się dodatkowo (jak w tym przypadku): wcięcie wiersza, akapit i oddzielne formuły finalne zamykające obszar stwierdzeniem, że teza jest spełniona.

Oprócz założeń chwilowych, występują oczywiście założenia dowodzonego twierdzenia. Tekst dowodu rozpoczyna się często od wyszczególnienia tych założeń *explicite*; wypisuje się wszystkie założenia. Czasem jednak niektóre z założeń twierdzenia autor wprowadza do tekstu później: tam, gdzie zostaną wykorzystane. Pisze na przykład „Wobec monotoniczności ciągu, co wykorzystujemy tu po raz pierwszy...", bądź w ogóle otwiera tekst metodologiczną uwagą typu: „Najpierw wykorzystamy tylko dwa pierwsze założenia...". W takich przypadkach część dowodu poprzedzająca wykorzystanie i wyszczególnienie założenia, którego na początku tekstu nie wypisano, jest zredagowana z widocznym podkreśleniem, że uzyskane w jej obrębie wnioski są od tego założenia niezależne.

Jeśli natomiast wszystkie założenia twierdzenia zostały zawarte w formule inicjalnej tekstu dowodu, autor zaś – wykorzystując je dalej – już do nich bezpośrednio nie odsyła, to zbadanie, które z nich uczestniczą w wyprowadzeniu danego wniosku, a które nie, pozostaje (częściowo bądź w całości) zadaniem czytelnika. Rekonstrukcję ułatwia komentarz, ale z oczywistych powodów nie może on relacjonować każdego ogniwa w szczegółach.

Z punktu widzenia przebiegu procesu lektury zwyczajowe wypisanie założenia na początku oznacza inne rozwiązanie niż wyszczególnienie tego założenia *explicite* dopiero później, w miejscu jego wykorzystania. Rozwiązania te implikują bowiem zupełnie różne sytuacje myślowe. Sukcesywne wprowadzanie założeń może być nieraz korzystne. Tym niemniej w konkretnym przypadku mogą istnieć ważne powody skłaniające autora do przyjęcia innego rozwiązania.

W praktyce dowodowej wypracowano różne środki eksponowania obszarów założeniowych. To, które z tych środków będą zastosowane w konkretnym przypadku, zależeć może od wielu okoliczności, wynikających nie tylko z samej logicznej budowy dowodu i rozwijanej teorii, ale na przykład uwikłanych w złożone procesy funkcjonowania języka naturalnego w tekście zawierającym – obok wyrażeń matematycznych – również warstwę wyrażeń potocznych. Język naturalny, ze swymi nie dość określonymi regułami składniowymi i semantycznymi, ma pewien margines swobody i dzięki temu umożliwia dokonywanie skrótów, sprzyja pojawianiu się w tekście niedopowiedzeń, pośrednich sygnałów itp. Z tego też powodu może lepiej służyć przekazowi informacji mających kierować lekturą, podczas gdy komunikowanie treści matematycznych odbywa się w warstwie symboliczno-terminologicznej tekstu. Język naturalny ma znaczący udział w budowie takiego komunikatu, jakim jest prezentowany na piśmie dowód (chodzi nie tylko o

procedurę logiczną, ale także o przekazanie pewnych sugestii dotyczących m. in. sposobu wykrywania dalszych kroków, ich motywacji, konieczności dokonywania syntezy). Ta rola języka naturalnego oraz późniejsze jego funkcjonowanie w procesach recepcji tekstu stanowi oddzielny problem dydaktyczny.

4. Komponenty tekstu organizujące heurystyczne działania czytelnika. Tekst dowodu w podręczniku czy monografii reprezentuje matematykę gotową. Ale autentyczna lektura jest procesem żywym, jest aktywnością, którą w dużej mierze nieraz można uznać nawet za twórczą. Nie ulega wątpliwości, że dla czytelnika niezwykle cennym elementem organizującym lekturę są fragmenty tekstu wychodzące naprzeciw tej twórczej rekonstrukcji o charakterze heurystycznym. Analiza materiałów źródłowych pokazuje, że teksty dowodów, obok warstwy formalno-logicznej, zawierają często takie fragmenty, składniki i komponenty. Autor tekstu przekazuje coś czytelnikowi także z tej heurystycznej warstwy, organizuje sytuacje, które pozwalają – na podstawie szkicowego tylko zapisu – dokonać pełnej rekonstrukcji rozumowania. Czyni tak, choć tego typu informacje mogą nie być wyrażone *expressis verbis* w słownym przekazie. Wiele tekstów podaje nie tylko gotowy rezultat ujęty w logiczny schemat, lecz także – przygotowując akt odkrycia – sugeruje czytelnikowi, jak on sam mógłby taki wynik znaleźć. Charakterystycznym rezultatem takich zabiegów są na przykład celowo włączane do tekstów *plany postępowania.*

Analiza tekstów pozwala wyróżnić pewne rodzaje planów stosowanych w praktyce. Można wymienić przede wszystkim plan rozumiany w zwykłym, potocznym sensie, jako wykaz kolejnych czynności (najpierw wykażemy, że ..., później ...). Ale plan bywa na ogół czymś innym niż tylko prostą dyspozycją, przyjętym na początku harmonogramem działań. Najczęściej plan ma w tekście dowodu zróżnicowany i bardziej wysublimowany charakter. W roli planów występują często drobne wzmianki, sugestie, wtrącone uwagi, a nawet pojedyncze słówka pośrednio ukierunkowujące działania czytelnika i raczej stwarzające odpowiednie sytuacje myślowe niż wprost dyktujące następstwo czynności.

Charakterystycznym przykładem planu jest inicjalne zdanie tekstu: „Dowód oprzemy na twierdzeniu ...". Tego typu plany stosowane są wówczas, gdy całe postępowanie zmierza do wykorzystania w końcowej części dowodu jakiegoś pomocniczego twierdzenia lub definicji. Jeśli to pomocnicze twierdzenie ma kilka założeń, to dla czytelnika taka zapowiedź staje się jednocześnie zapowiedzią kolejnych czynności, które będą wykonywane w celu sprawdzenia, iż wszystkie te założenia są w danym przypadku spełnione. Jest to więc w istocie dość szczególny plan podyktowany przez koniunkcję tych założeń.

Jako plan funkcjonuje też nieraz zapowiedź metody. Mówi się na

przykład: *W dowodzie zastosujemy metodę przekątniową.* Jeśli ta metoda jest czytelnikowi znana, to stanowi dlań rodzaj przewodnika w toku rekonstrukcji pełnego rozumowania. Podobną rolę może spełniać wskazanie na początku głównego schematu logicznego, na którym opiera się cała konstrukcja (autor mówi na przykład: *Zamiast dowodzić alternatywy* $\alpha \vee \beta$, *udowodnimy, że* $\sim \alpha \rightarrow \beta$). Podanie tautologii logicznej, będącej podstawą konstrukcji dowodowej, jest zarazem ustaleniem ogólnych ram organizacyjnych dalszych działań czytelnika.

Inny rodzaj planów reprezentuje wstępna zapowiedź, że dowód, do którego przystępujemy, będzie przebiegał analogicznie do pewnego dowodu wcześniej już przeprowadzonego. Czasem taka analogia ma szerszy zasięg i przy studiowaniu kolejnych dowodów w podręczniku plan może okazać się bardzo operatywny.

W celu ukazania dalszych składników tekstu dowodu i prawidłowości jego budowy związanych z heurystyczną stroną procesu lektury, rozważymy paradygmatyczny przykład. Na przykładzie tym ukażemy prawidłowości mające charakter ogólny. Na stronie 77 przedstawiony jest tekst dowodu twierdzenia Banacha zaczerpnięty z [5]: *każde odwzorowanie zwężające przestrzeni metrycznej zupełnej E w siebie ma dokładnie jeden punkt stały.* W układzie typograficznym reprodukowanego tekstu dokonano drobnych zmian umożliwiających dorysowanie prostokątów, a dla ułatwienia jego analizy wprowadzono dodatkowe wyróżnienia kursywą.

W dowodzie tym wyodrębnimy najpierw plany postępowania. Taki charakter ma właśnie wyrażenie: *Udowodnimy teraz istnienie punktu stałego.* Jest to plan odnoszący się do całej następującej po nim części postępowania dowodowego. Plan ten został dodatkowo rozbudowany i wzmocniony zapowiedzią metody: *Zastosujemy w tym celu tak zwaną metodę kolejnych przybliżeń.* Dalej figuruje zwrot: *Wykażemy, że jest on ciągiem Cauchy'ego.* To również plan, tym razem plan częściowy; czytelnik jest w tym miejscu poinformowany, jaka część całej konstrukcji będzie aktualnie rozbudowywana.

Powracając do początku dowodu zauważamy, że wyróżniony tam kursywą fragment także funkcjonuje jako plan; pośrednio zapowiada bowiem, co będzie przedmiotem roztrząsań w pierwszej części dowodu.

Interesujące jest nie tylko to, że w tekstach dowodów występują plany. Wiąże się z tym ogólniejsza idea. Analiza pokazuje (tak jest również w prezentowanym przykładzie), że zasięg działania planów bywa w jakiś sposób sygnalizowany. Oznacza to, iż zakończenie działań wcześniej przewidzianych planem jest specjalnie akcentowane. Zabieg ten wymaga oczywiście zastosowania w tekście oddzielnego wyznacznika granicy.

Rozważmy fragment tekstu otwarty przez plan: *Wykażemy, że jest on ciągiem Cauchy'ego.* Po zrealizowaniu tego zamierzenia pojawia się zdanie: *W ten sposób ciąg* x_n *okazał się ciągiem Cauchy'ego.* Oczywiście jest ono końcowym wnioskiem w ciągu dowodowym rozbudowywanym w tym fragmen-

Dowód. *To, że jest najwyżej jeden punkt stały, jest oczywiste nawet bez zakładania zupełności E. Istotnie,* gdyby były dwa punkty stałe a i b, wtedy mielibyśmy $d(a, b) \leqslant kd(a, b) < d(a, b)$, jeśli $d(a, b) \neq 0$. Zatem musi być $d(a, b) = 0$, tzn. a i b *pokrywają się.*

Udowodnimy teraz istnienie punktu stałego. Zastosujemy w tym celu tak zwaną metodę kolejnych przybliżeń. Niech x_0 będzie dowolnym punktem z E. Przyjmijmy

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \ldots,\ x_n = f(x_{n-1}),\ \ldots$$

Utworzyliśmy nieskończony ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ elementów z E.

Wykażemy, że jest on ciągiem Cauchy'ego. Ponieważ f jest odwzorowaniem zwężającym, możemy napisać ciąg nierówności:

$$d(x_2, x_1) \leqslant kd(x_1, x_0),$$
$$d(x_3, x_2) \leqslant kd(x_2, x_1) \leqslant k^2 d(x_1, x_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n d(x_1, x_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a zatem

$$d(x_{n+p}, x_n) \leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant (k^{p-1} + k^{p-2} + \ldots + k + 1) k^n d(x_1, x_0) \leqslant$$
$$\leqslant k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0).$$

Stąd otrzymujemy, że $d(x_{n+p}, x_n)$ dąży do 0, gdy n dąży do $+\infty$. *W ten sposób ciąg x_n okazał się ciągiem Cauchy'ego.*

Ponieważ E jest z założenia przestrzenią zupełną, więc ciąg ten jest zbieżny do pewnej granicy a. Dzięki ciągłości odwzorowania f ciąg $x_{n+1} = f(x_n)$ jest zbieżny do $f(a)$, a ponieważ ciąg x_{n+1} także jest zbieży do a, więc mamy $f(a) = a$ i *a jest oczywiście punktem stałym odwzorowania f.*

cie tekstu, ale to tylko część roli, jaka mu przypada. Niezależnie od tej formalno-logicznej pozycji, zamyka ono sekwencję wcześniej zapowiedzianych działań. Wyraźnie bowiem nawiązuje do planu, wyznacznika początku tej sekwencji, tworząc wraz z nim charakterystyczną ramę delimitacyjną wyodrębniającą ten fragment na tle całej konstrukcji. Nie chodzi tu jednak o zwykłe, mechaniczne wycięcie fragmentu z tła całego tekstu za pomocą ramy. Stwierdzamy coś więcej: odpowiednie zredagowanie planu i nawiązującej doń formuły zamykającej ów fragment sprawia, że działaniom czytelnika zostaje nadany w obrębie tego fragmentu pewien nadrzędny kierunek. Podporządkowano je w ten sposób celowi etapowemu.

Dla czytelnika przedzierającego się z trudem przez obcy dla niego teren i gubiącego często — ze względu na brak jeszcze pełnego przeglądu sytuacji —

właściwy kierunek, ważne jest nie tylko pojawienie się końcowego w tym fragmencie wniosku, ale także „oficjalne" potwierdzenie, że jego uzyskanie kończy zaplanowany wcześniej cykl. Dopiero z chwilą takiego potwierdzenia pojawić się może synteza (w skali lokalnej), bez której nie byłoby ujęcia wszystkich fragmentów w powiązaniu (globalnie). Tego rodzaju fragmenty, wydzielone taką techniką, z uwagi na ich heurystyczną rolę w toku lektury, będziemy nazywać *obszarami ukierunkowania czytelnika przez plan* (krótko: obszarami ukierunkowania).

Analiza materiałów źródłowych ujawnia tendencję autorów do takiego redagowania dowodu, aby konstruowane w nim obszary ukierunkowania pokrywały cały tekst. Jeśli autor rozpoczyna od planu odnoszącego się do całego postępowania dowodowego, to na ogół akcentuje także oddzielnie moment jego wykonania; mamy do czynienia z jednym (generalnym) obszarem ukierunkowania. Na danym obszarze ukierunkowania funkcjonują często mniejsze podobszary; wszystkie razem tworzą wtedy pewien system. Egzemplifikacji takiego sposobu zredagowania dostarcza rozpatrywany przez nas dowód twierdzenia Banacha. Występują w nim trzy obszary ukierunkowania (wyeksponowane wizualnie za pomocą wpisanych w tekst prostokątów). Dwa z tych obszarów pokrywają cały tekst i nie zachodzą na siebie, trzeci stanowi podobszar głównego obszaru. Podkreślenia kursywą, dokonane w tej pracy w celu ilustracji, służą dodatkowemu uwypukleniu składników tekstu pełniących rolę wyznaczników granic tych obszarów ukierunkowania.

Analizowany przez nas tekst jest zwięzły, ale w tym skondensowanym tekście znalazło się miejsce na częściowy plan, konstrukcję obszarów ukierunkowania, na stwierdzenie, że w danym fragmencie nie wykorzystuje się pewnego założenia. Widocznie autor uważał, że te komponenty i zabiegi redakcyjne są ważne dla przedstawienia konstrukcji matematycznej i dla odbioru, być może ważniejsze niż bardziej szczegółowe rozpisywanie formalnych przejść. Z niektórych tekstów — choć bardzo oszczędnie zredagowanych — można byłoby tego rodzaju komponenty łatwo usunąć bez szkody dla logicznej konstrukcji dowodu, a nawet nieraz bez konieczności dokonywania językowej korekty. To, że znalazły się w zwięzłym tekście dowodu, najlepiej świadczy o ich docenianiu przez autora dokonującego procesu ostrej selekcji podczas pracy nad tekstem.

W rutynowej lekturze tekstu dowodu nie zwracamy uwagi na to, jak funkcjonują delimitatory. Wyszkolony czytelnik robi użytek z każdego sygnału, prawidłowo ujmuje obszary założeniowe i obszary ukierunkowania. W innej sytuacji jest początkujący. Wolno sądzić, że jego poczucie — niekoniecznie w pełni uświadomione — iż działa on na danym obszarze ukierunkowania lub obszarze założeniowym, jest mu potrzebne, a nawet wręcz niezbędne dla prawidłowego określenia miejsca i roli każdego kroku dowodowego w całej konstrukcji oraz przewidywania kolejnych ogniw. Jest mu potrzebne również i do tego, aby zebrać te kroki razem i dokonać końcowej syntezy.

Analiza rozmaitych dowodów pokazuje, że nie tyle włączanie do tekstu planów, co konstruowanie obszarów ukierunkowania stanowi jeden z charakterystycznych zabiegów redakcyjnych wypracowanych w tradycji i praktyce matematycznej. Podobnie nie tylko wypisanie założeń, lecz także wyostrzenie zarysów obszarów założeniowych należy do arsenału środków, którymi operuje się w konstrukcji tekstu dowodu.

5. Zakończenie. Zasygnalizowano tu tylko niektóre spośród regularności budowy tekstu dowodu stwierdzonych w toku analizy. Ujawnianie takich prawidłowości może służyć różnym celom. Dostarcza przede wszystkim materiału do formułowania wniosków dotyczących redagowania tekstów matemątycznych. Ponadto rezultaty takich analiz stwarzają racjonalne podstawy do organizacji badań empirycznych nad przebiegiem lektury tekstu matematycznego.

Choć wyodrębnione i scharakteryzowane cechy nie wyczerpują własności i metod budowy tekstu dowodu, tego rodzaju analiza i jej wyniki mogą być wykorzystane w organizacji procesu uczenia się i nauki czytania tekstów matematycznych. Dotyczy to różnych poziomów kształcenia matematycznego. Jest na przykład okazja, aby po zakończeniu dowodu adresowanego do początkujących słuchaczy, wykładowca zwrócił od czasu do czasu uwagę na budowę tekstu i występujące tu specyficzne elementy: konwencjonalne skróty, środki użyte w celu uwypuklenia ważnych fragmentów, wspomagające systemy komunikacji itp. Dla nieobeznanego z technikami konstrukcji tekstów matematycznych, takie uwagi mogą okazać się pomocne w samodzielnej nauce.

Studiujący mają trudności z pisemną prezentacją własnych rozumowań i dowodów matematycznych. Trudności te są udziałem nie tylko rozpoczynających studia, ale często (dotyczy to zwłaszcza studiów w systemie zaocznym) pojawiają się później — przy pisaniu prac dyplomowych. Rezultaty analizy, której fragmenty zasygnalizowaliśmy, mogą okazać się także tutaj pomocne.

Literatura cytowana

[1] T. Dobrzyńska, *Delimitacja tekstu pisanego i mówionego*; *Tekst. Język. Poetyka.* Zbiór studiów pod red. M. R. Mayenowej, Wydawnictwo PAN, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1978.

[2] S. Jaśkowski, *On the rules of suppositions in formal logic*, Studia Logica 1 (1934), 1–32.

[3] J. Konior, *Analiza konstrukcji tekstu dowodu jako środka przekazu w matematyce*, Uniwersytet Śląski, Katowice 1983.

[4] Z. Krygowska, *Le texte mathématique dans l'enseignement*, Educational Studies in Mathematics 2/3 (1970), 360–370.

[5] L. Schwartz, *Kurs analizy matematycznej*, t. 1, PWN, Warszawa 1979.

[6] J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, PWN, Warszawa 1963.

[7] N. E. Steenrod, P. R. Halmos, M. M. Schiffer, J. A. Dieudonné, *Jak pisać teksty matematyczne*, Wiadom. Mat. 21 (1978), 29–81.