ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVIII (1988)

wmptm 1897

TADEUSZ PRUCNAL (Kielce)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O pewnym równaniu diofantycznym

Równanie diofantyczne

$$(*) \qquad x^2 - yz - 1 = 0$$

zasługuje na uwagę mimo swej prostoty. Intrygujący jest mianowicie związek między rozwiązaniami tego równania w liczbach naturalnych a operacją największego wspólnego dzielnika. Na fakt ten zwrócił uwagę prof. A. Schinzel, który w artykule *Równania diofantyczne* pisze między innymi: *Nie są znane żadne wzory zależne od skończenie wielu niezależnych parametrów, które dawałyby wszystkie rozwiązania równania* (*) *i nie zawierały w jakiejś formie operacji największego wspólnego dzielnika. O ile dopuści się tę operację, wystarczy przyjąć*

$$(S) \qquad x = t_1, \quad y = (t_2, t_1^2 - 1), \quad z = (t_1^2 - 1)/(t_2, t_1^2 - 1)$$

(Wiadom. Mat. 12 (1971), str. 231).

Aby wyznaczyć wzory rozwiązań równania (*), czyniące zadość wyżej postawionym warunkom, wystarczyłoby zatem zdefiniować operację największego wspólnego dzielnika za pomocą odpowiednich działań na liczbach całkowitych. W niniejszej nocie zdefiniujemy tę operację i wyznaczymy wzory rozwiązań równania (*) czyniące zadość postawionym wyżej warunkom.

Niech m, n będą danymi liczbami naturalnymi. W zbiorze liczb całkowitych określamy funkcję $f_m^{(n)}$ wzorem:

$$f_m^{(n)}(x) = (x-m)\cdot(x-2m)\cdot\ldots\cdot(x-nm).$$

Funkcja ta ma następującą własność: dla każdej liczby naturalnej $k \leqslant m$

$$(P1) \qquad f_m^{(n)}(kn) = 0 \Leftrightarrow [m, n] \mid kn,$$

gdzie $[m, n]$ jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb naturalnych m i n. Uwaga: przez liczby naturalne rozumiemy tu liczby całkowite większe od zera.

Niech z kolei F będzie funkcją określoną w zbiorze liczb całkowitych

następującym wzorem

$$F(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(-1)^{2^{x^2}}.$$

Tak określona funkcja ma własność:

(P2) $$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0. \end{cases}$$

LEMAT 1. *Dla dowolnych liczb naturalnych m, n:*

$$(m, n) = m - \sum_{k=1}^{m} F\left(f_m^{(n)}(kn)\right).$$

Dowód. Niech m, n będą danymi liczbami naturalnymi. Zgodnie z własnością (P1), dla każdej liczby naturalnej $k \leqslant m$ mamy

(1) $$f_m^{(n)}(kn) = 0 \Leftrightarrow \frac{[m, n]}{n} \Big| k.$$

Stąd, zgodnie z (P2), otrzymujemy

(2) $$F\left(f_m^{(n)}(kn)\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{[m, n]}{n} \Big| k$$

oraz

(3) $$F\left(f_m^{(n)}(kn)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{[m, n]}{n} \Big| k$$

dla dowolnej liczby naturalnej $k \leqslant m$. A ponieważ wszystkich liczb naturalnych $\leqslant m$, które są wielokrotnościami liczby $[m, n]/n$ jest dokładnie (m, n), więc

(4) $$\sum_{k=1}^{m} F\left(f_m^{(n)}(kn)\right) = m - (m, n),$$

co kończy dowód lematu 1.

Z lematu 1 i ze wzorów (S) otrzymujemy:

TWIERDZENIE. *Wszystkie rozwiązania równania* $x^2 - yz - 1 = 0$ *w liczbach naturalnych, x, y, z dane są wzorami*

$$x = n,$$

$$y = m - \sum_{k=1}^{m} F\left(f_m^{(n^2-1)}(kn^2 - k)\right),$$

$$z = (n^2 - 1)\left(m - \sum_{k=1}^{m} F\left(f_m^{(n^2-1)}(kn^2 - k)\right)\right)^{-1},$$

gdzie m jest dowolną liczbą naturalną, natomiast n — dowolną liczbą naturalną > 1.

Podane wyżej wzory rozwiązań równania (*) nie zawierają wprawdzie operacji największego wspólnego dzielnika, ale oprócz działań $+$, $-$, $\cdot$, 1 oraz potęgowania x^y dla $y \geqslant 0$, zawierają operatory dodawania i mnożenia zmiennej liczby wyrazów; tzn. operatory $\sum_{k=1}^{m}$ i $\prod_{k=1}^{n}$. Nasuwa się w związku z tym następujące pytanie. Czy istnieją wzory zależne od skończonej liczby niezależnych parametrów zawierające tylko superpozycje działań $+$, $-$, $\cdot$, 1, x^y, które dawałyby wszystkie rozwiązania równania (*) w liczbach naturalnych?

Miscellanea

Niewielka to szkoda nie być Geometrą; znacznie większym złem jest wierzyć, że Geometria jest czymś godnym najwyższego szacunku i wysoko cenić napełnianie swej głowy liniami, kątami, okręgami i proporcjami. Zaiste, godną pożałowania ignorancją jest nie wiedzieć, że wszystkie te jałowe spekulacje w niczym nie przyczyniają się do uczynienia nas szczęśliwszymi, ulżenia nam w biedzie, uleczenia naszych chorób, że nie przysparzają nam żadnych korzyści realnych i trwałych, że człowiek nie został do tego stworzony; że nie tylko nie ma on podstaw do wynoszenia się z powodu posiadania tej wiedzy, lecz, przeciwnie, dowodzi ona niższości jego umysłu, skoro jest on tak dalece pozbawiony prawdziwej wartości, że potrafi tak próżnym i niepotrzebnym oddawać się rzeczom.

Z przedmowy Nicole'a do książki
Nouveaux Elements de Geometrie
Antoine'a Arnauda (Paryż, Savreux 1667).
Przełożyła Anna Sierpińska.