ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVIII (1988)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Recenzje

Stanisław Balcerzyk i Tadeusz Józefiak, *Pierścienie przemienne*, Biblioteka Matematyczna, tom 58, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1985, str. 375, nakład 3000 egz., cena 340.– zł; ISBN 83-01-04874-3, ISSN 0519-8356.

Książka poświęcona jest wybranym rozdziałom teorii pierścieni przemiennych. W polskiej literaturze matematycznej nie było dotychczas książki na ten temat. Jedynie w podręcznikach algebry można znaleźć po kilka rozdziałów dotyczących pierścieni. Na przykład w *Elementach algebry wyższej* A. Mostowskiego i M. Starka są rozdziały o pierścieniach wielomianów; w *Algebrze* A. Białynickiego-Biruli teoria pierścieni jest zawarta w pięciu rozdziałach, omawiane są m. in. zagadnienia jednoznaczności rozkładu na czynniki nierozkładalne oraz własności pierścieni ideałów głównych; w *Algebrze* S. Langa przedstawione są m. in. podstawowe informacje o pierścieniach noetherowskich i własności rozszerzeń całkowitych.

Tak więc omawiana książka do pewnego stopnia wypełni istotną lukę w polskiej literaturze matematycznej.

Teoria pierścieni, a nawet tylko pierścieni przemiennych, jest bardzo obszerna i jest powiązana z różnymi działami matematyki. Na przykład, pewne klasy pierścieni występują w teorii liczb algebraicznych i własności tych pierścieni są ściśle związane z odpowiednimi własnościami liczb algebraicznych, m. in. własność jednoznaczności rozkładu na czynniki nierozkładalne. Najprostszym przykładem takiego pierścienia jest pierścień Z zwykłych liczb całkowitych, a jego uogólnieniami – pierścienie liczb całkowitych ciał liczbowych. Wszystkie te pierścienie są zawarte w klasie tzw. pierścieni Dedekinda – określonej aksjomatycznie – i właśnie teoria pierścieni Dedekinda stanowi odpowiedni stopień ogólności dla badania pierścieni interesujących z punktu widzenia teorii liczb algebraicznych.

Inne klasy pierścieni występują w geometrii algebraicznej i własności tych pierścieni są ściśle związane z własnościami geometrycznymi zbiorów algebraicznych – na przykład osobliwość punktu na rozmaitości może być wyrażona za pomocą pewnej własności algebraicznej pierścienia funkcji wymiernych określonych w tym punkcie. Najprostszym przykładem pierścienia rozważanego w geometrii algebraicznej jest pierścień wielomianów

$$k[x_1, \ldots, x_n]$$

(gdzie k jest ciałem), a jego uogólnieniami – pierścienie funkcji regularnych na rozmaitościach. Wszystkie te pierścienie są zawarte w klasie pierścieni noetherowskich (określonej aksjomatycznie). I właśnie klasa pierścieni noetherowskich (lub pewne jej podklasy) stanowi odpowiedni stopień ogólności do badania pierścieni interesujących z punktu widzenia geometrii algebraicznej.

W książce zostały omówione pewne klasy pierścieni występujące w teorii liczb algebraicznych oraz w geometrii algebraicznej i zostały przedstawione podstawowe własności pierścieni należące do tych klas. Widać to

dokładniej z przedstawionego niżej szczegółowego omówienia treści książki.

I. *Wiadomości wstępne.* Zebrane tu są podstawowe własności ideałów i modułów, podana konstrukcja lokalizacji oraz informacje o gradacji pierścienia i modułu.

II. *Pierścienie i moduły noetherowskie.* Podane są podstawowe informacje o pierścieniach i modułach noetherowskich włącznie z twierdzeniem Hilberta o bazie, twierdzeniami o rozkładach prymarnych i twierdzeniem Krulla o przekroju. Następnie omawiane są topologie m-adyczne w pierścieniach noetherowskich i uzupełnienia względem takich topologii.

III. *Rozszerzenia całkowite i pierścienie Dedekinda.* Podane są własności rozszerzeń całkowitych, w szczególności rozszerzanie i ograniczanie ideału pierwszego przy rozszerzeniu całkowitym; własności pierścieni całkowicie domkniętych, zwanych tu normalnymi; podstawowe własności pierścieni Dedekinda; waluacje związane z ideałami; budowa skończenie generowanych modułów nad pierścieniami Dedekinda; grupa klas ideałów pierścienia Dedekinda i grupa Picarda.

IV. *Dywizory i pierścienie Krulla.* Na pierścienie Krulla można patrzeć jak na naturalne uogólnienie pierścieni Dedekinda. Pierścień Krulla jest przecięciem pierścieni waluacyjnych dla odpowiednich rodzin waluacji, jak to się dzieje w przypadku pierścieni Dedekinda. Na pierścienie Krulla przenosi się teoria rozkładu ideału na iloczyn ideałów pierwszych w postaci tzw. teorii dywizorów, przenosi się pojęcie grupy klas dywizorów (uogólnienie grupy klas ideałów) itd. Ponadto klasa pierścieni Krulla obejmuje ważne z punktu widzenia geometrii algebraicznej przykłady pierścieni, na przykład pierścienie wielomianów wielu zmiennych, które nie są pierścieniami Dedekinda.

Rozdział ten zawiera (wraz z dowodami) dwa zasadnicze wyniki teorii pierścieni Krulla. Twierdzenie L. Claborna: Każda grupa abelowa jest grupą klas ideałów pewnego pierścienia Dedekinda; Twierdzenie M. Nagaty: Domknięcie całkowite noetherowskiej dziedziny całkowitości jest pierścieniem Krulla. Tak więc w geometrii algebraicznej w istocie można ograniczyć się do rozpatrywania pierścieni Krulla.

V. *Wymiar i krotność.* Ten najdłuższy rozdział zawiera aparat algebraiczny służący do opisu własności geometrycznych: wymiaru rozmaitości oraz krotności przecięcia dwóch zbiorów algebraicznych w danym punkcie. Omawiane jest więc pojęcie wymiaru Krulla pierścienia i odpowiednie własności pierścieni lokalnych – regularność, zbiory parametrów, wielomian Hilberta–Samuela, krotność przecięcia pary modułów nad danym pierścieniem lokalnym. Podane są fakty algebraiczne pozwalające na określenie pierścieni Chow rozmaitości.

VI. *Pierścienie lokalne regularne.* Omawiane są pierścienie lokalne odpowiadające punktom regularnym rozmaitości algebraicznych. Udowodniono twierdzenie M. Auslandera, D. A. Buchsbauma i J. P. Serre'a: Pierścień lokalny jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy ma wymiar globalny skończony; oraz twierdzenie M. Auslandera i D. A. Buchsbauma: W pierścieniu lokalnym regularnym zachodzi twierdzenie o jednoznaczności rozkładu. Ponadto jest opisana budowa pierścieni lokalnych zupełnych (twierdzenie Cohena).

Dwa ostatnie rozdziały poświęcone są pewnym uogólnieniom pierścieni lokalnych regularnych, mianowicie pierścieniom Cohena–Macaulaya i pierścieniom Gorensteina. W dodatku homologicznym przy końcu książki zebrane są informacje z algebry homologicznej wykorzystywane w poprzednich rozdziałach. Bibliografia liczy 27 pozycji książkowych i 56 artykułów.

Przy końcu każdego paragrafu jest pewna liczba zadań o różnym stopniu trudności. Ich znajomość nie jest niezbędna do rozumienia zasadniczego tekstu.

Jak widać z powyższego przeglądu treści, książka nie omawia „wszystkich" pierścieni przemiennych, lecz tylko pewne ich klasy ważne z punktu widzenia teorii liczb algebraicznych lub geometrii algebraicznej. Tak więc tytuł książki jest nieco mylący. Czytelnik nie znajdzie tu niczego np. o pierścieniach grupowych grup abelowych, o pierścieniach Centrum $(K[G])$ grających ważną rolę w teorii reprezentacji grup, lub też o różnych pierścieniach funkcyjnych, np. o pierścieniu funkcji ograniczonych $R \to R$.

Jeżeli jednak chodzi o zakres tematyki przedstawionej w książce, to, jak sądzę, Autorom udało się dać przejrzystą i kompletną prezentację teorii. Książka napisana jest z troską o czytelnika. Szczególnie pomocne są wstępy do poszczególnych rozdziałów i paragrafów oraz *Komentarze* przy końcu rozdziałów. Pozwalają one zrozumieć zasadnicze idee i motywację prezentowanego materiału, a także zawierają informacje natury historycznej. Autorzy starali się przedstawić najlepsze ze znanych obecnie ujęć poszczególnych tematów.

Można oczywiście mieć zastrzeżenia co do różnych szczegółów. Jak to w pierwszych wydaniach bywa, jest sporo usterek literowych, niezręcznych sformułowań itp., które nieco utrudniają studiowanie tej książki.

Przytoczę tylko jedno niezręczne sformułowanie. We wstępie do rozdziału II, *Pierścienie noetherowskie*, Autorzy piszą „Nazwa ta pochodzi od Emmy Noether, ...". Przecież to nie ona tę nazwę wprowadziła, lecz ktoś inny. Nazwa pochodzi więc od nazwiska Emmy Noether!

Jestem przekonany, że książka ta znajdzie szeroki krąg czytelników. Będzie ona przydatna dla wszystkich algebraików, a w szczególności studentów i pracowników naukowych interesujących się geometrią algebraiczną. Zawiera ona niezbędny aparat algebraiczny stosowany w tej teorii.

Dla zainteresowanych teorią liczb algebraicznych przydatność tej książki nie jest duża. Z tego zakresu zawiera bowiem tylko dowód skończoności grup klas ideałów pierścieni liczb całkowitych ciał liczbowych, ogólne wiadomości o pierścieniach Dedekinda i nieco informacji o pierścieniach lokalnych spotykanych w teorii liczb algebraicznych. Również bibliografia zawiera głównie pozycje związane z geometrią algebraiczną. Z teorii liczb cytowane są jedynie stare prace K. Hensela, R. Dedekinda i D. Hilberta.

Załączam spis istotniejszych poprawek przesłany mi uprzejmie przez autorów.

W § 1 rozdziału I brak definicji *ideału właściwego* pierścienia, tzn. ideału, który jest różny od całego pierścienia. Ograniczenie się do ideałów właściwych jest potrzebne np. w definicji pierścienia ilorazowego, ideału pierwszego, maksymalnego, nieprzywiedlnego. Ograniczenie to jest związane z koniecznością przyjęcia w definicji pierścienia na str. 7 założenia $1 \neq 0$.

Na str. 8 definicja charakterystyki pierścienia jest niepełna. Powinno być: „*Charakterystyką pierścienia* R, char R, nazywamy liczbę zero, jeśli $n \cdot 1 \neq 0$ dla dowolnej liczby naturalnej n; w przeciwnym przypadku — najmniejszą liczbę naturalną m taką, że $m \cdot 1 = 0$".

234^{4} należy skreślić „regularny",

254^{12} zamiast „minimalna" powinno być „maksymalna",

268_{7} zamiast „pierścienia regularnego" powinno być „pierścienia lokalnego",

271^{14} zamiast „największy wspólny dzielnik" powinno być „najmniejszą wspólną wielokrotność",

284^{1} zamiast „na podstawie wniosku (2.7.9)" powinno być „na podstawie definicji (2.6.9)",

311^{10} zamiast „na podstawie § 5" powinno być „na podstawie wniosku (7.4.6)".

Jerzy Browkin

Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1986, 432 str., cena 280,— zł; ISBN 83-01-05124-8.

Ta niezwykle potrzebna i cenna książka miała dwa wydania angielskie (1966 i 1974). Ukazanie się jej przekładu jest znaczącym wydarzeniem, które można porównać z przetłumaczeniem książki G. Hardy'ego (*Kurs analizy*, Mathesis Polska, Warszawa 1930). Obecny przekład książki Rudina jest ogromną zasługą tłumaczy: Antoniego Pierzchalskiego i Pawła Walczaka.

W przedmowie do pierwszego wydania Rudin pisał: „Być może najważniejszym powodem powstania książki była chęć rozprawienia się z przestarzałym i złudnym poglądem, że analiza składa się z dwu odrębnych