Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Jeżeli jednak chodzi o zakres tematyki przedstawionej w książce, to, jak sądzę, Autorom udało się dać przejrzystą i kompletną prezentację teorii. Książka napisana jest z troską o czytelnika. Szczególnie pomocne są wstępy do poszczególnych rozdziałów i paragrafów oraz *Komentarze* przy końcu rozdziałów. Pozwalają one zrozumieć zasadnicze idee i motywację prezentowanego materiału, a także zawierają informacje natury historycznej. Autorzy starali się przedstawić najlepsze ze znanych obecnie ujęć poszczególnych tematów.

Można oczywiście mieć zastrzeżenia co do różnych szczegółów. Jak to w pierwszych wydaniach bywa, jest sporo usterek literowych, niezręcznych sformułowań itp., które nieco utrudniają studiowanie tej książki.

Przytoczę tylko jedno niezręczne sformułowanie. We wstępie do rozdziału II, *Pierścienie noetherowskie*, Autorzy piszą „Nazwa ta pochodzi od Emmy Noether, ...". Przecież to nie ona tę nazwę wprowadziła, lecz ktoś inny. Nazwa pochodzi więc od nazwiska Emmy Noether!

Jestem przekonany, że książka ta znajdzie szeroki krąg czytelników. Będzie ona przydatna dla wszystkich algebraików, a w szczególności studentów i pracowników naukowych interesujących się geometrią algebraiczną. Zawiera ona niezbędny aparat algebraiczny stosowany w tej teorii.

Dla zainteresowanych teorią liczb algebraicznych przydatność tej książki nie jest duża. Z tego zakresu zawiera bowiem tylko dowód skończoności grup klas ideałów pierścieni liczb całkowitych ciał liczbowych, ogólne wiadomości o pierścieniach Dedekinda i nieco informacji o pierścieniach lokalnych spotykanych w teorii liczb algebraicznych. Również bibliografia zawiera głównie pozycje związane z geometrią algebraiczną. Z teorii liczb cytowane są jedynie stare prace K. Hensela, R. Dedekinda i D. Hilberta.

Załączam spis istotniejszych poprawek przesłany mi uprzejmie przez autorów.

W § 1 rozdziału I brak definicji *ideału właściwego* pierścienia, tzn. ideału, który jest różny od całego pierścienia. Ograniczenie się do ideałów właściwych jest potrzebne np. w definicji pierścienia ilorazowego, ideału pierwszego, maksymalnego, nieprzywiedlnego. Ograniczenie to jest związane z koniecznością przyjęcia w definicji pierścienia na str. 7 założenia $1 \neq 0$.

Na str. 8 definicja charakterystyki pierścienia jest niepełna. Powinno być: „*Charakterystyką pierścienia* R, char R, nazywamy liczbę zero, jeśli $n \cdot 1 \neq 0$ dla dowolnej liczby naturalnej n; w przeciwnym przypadku — najmniejszą liczbę naturalną m taką, że $m \cdot 1 = 0$".

234^{4} należy skreślić „regularny",

254^{12} zamiast „minimalna" powinno być „maksymalna",

268_{7} zamiast „pierścienia regularnego" powinno być „pierścienia lokalnego",

271^{14} zamiast „największy wspólny dzielnik" powinno być „najmniejszą wspólną wielokrotność",

284^{1} zamiast „na podstawie wniosku (2.7.9)" powinno być „na podstawie definicji (2.6.9)",

311^{10} zamiast „na podstawie § 5" powinno być „na podstawie wniosku (7.4.6)".

Jerzy Browkin

Walter Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1986, 432 str., cena 280,— zł; ISBN 83-01-05124-8.

Ta niezwykle potrzebna i cenna książka miała dwa wydania angielskie (1966 i 1974). Ukazanie się jej przekładu jest znaczącym wydarzeniem, które można porównać z przetłumaczeniem książki G. Hardy'ego (*Kurs analizy*, Mathesis Polska, Warszawa 1930). Obecny przekład książki Rudina jest ogromną zasługą tłumaczy: Antoniego Pierzchalskiego i Pawła Walczaka.

W przedmowie do pierwszego wydania Rudin pisał: „Być może najważniejszym powodem powstania książki była chęć rozprawienia się z przestarzałym i złudnym poglądem, że analiza składa się z dwu odrębnych

części: „rzeczywistej" i „zespolonej". Jak dotąd „... między odpowiednimi wykładami kursowymi na uniwersytetach brak jest wzajemnych odniesień."

Celem książki jest zaakcentowanie związków między funkcjami holomorficznymi a aparatem teorii funkcji zmiennej rzeczywistej (głównie całką Lebesgue'a) w kontekście możliwie prostym. Jest to wykład opracowany przez znakomitego uniwersalistę, autora licznych prac z teorii algebr i przestrzeni funkcyjnych. Trzeba przyznać, że nie jesteśmy przyzwyczajeni do wstępnych wykładów, które prezentują tak wielkie bogactwo harmonijnie przeplatających się idei i teorii, gdzie trudności formalne nie nużą, ale wręcz nikną wobec wielości konkretnych twierdzeń, o krótkich niezwykle pomysłowych dowodach, a twierdzenia z kolei schodzą na dalszy plan wobec inspirujących, znakomicie dobranych przykładów. Koronnym przykładem, ogniskującym całą konstrukcję książki, jest przestrzeń Hardy'ego H^2.

W *prologu* do książki autor omawia własności funkcji $\exp(z)$ i rozpoczyna zdaniem: „Funkcja wykładnicza jest najważniejszą funkcją w matematyce". Całą książkę można traktować jako argument na rzecz tej tezy; holomorficzna transformata Fouriera (zwana także transformatą Laplace'a) jest mostem między analizą rzeczywistą a zespoloną.

Oto krótkie omówienie treści książki:

0. *Materiał standardowy.* Mamy tu ogólną teorię całki względem danej miary dodatniej, przestrzenie L^p, twierdzenie Fubiniego, algebrę splotową L^1, rzeczywiste transformaty Fouriera wraz z twierdzeniem Plancherela. Elementarna teoria przestrzeni Hilberta jest ilustrowana na przykładzie przestrzeni $L^2(T, \mu)$ funkcji na okręgu jednostkowym, całkowalnych z kwadratem względem unormowanej miary Lebesgue'a. Daje to okazję do wprowadzenia współczynników Fouriera, a także szeregu Fouriera dla funkcji $f \in L^1(T)$ (a więc w szczególności dla $f \in L^2(T)$). Elementarna teoria przestrzeni Banacha (twierdzenie Baire'a, Banacha o odwzorowaniu otwartym, Banacha–Steinhausa, Hahna–Banacha) ilustrowana jest dowodem istnienia funkcji $f \in C(T)$, której szereg Fouriera nie jest zbieżny punktowo. Elementarna teoria algebr Banacha jest ilustrowana twierdzeniem Wienera o bezwzględnie zbieżnych szeregach Fouriera. Jest tu również teoria funkcji holomorficznych (włączając rachunek residuów), twierdzenie Riemanna o odwzorowaniu na koło, wraz z dyskusją odpowiedniości brzegów, przedłużenia analityczne wraz z twierdzeniem o monodromii i twierdzeniem Picarda. Bardzo przystępnie omówiono iloczyny nieskończone i twierdzenie Weierstrassa o istnieniu funkcji holomorficznej o danych zerach, a także warunki holomorficzności całki z parametrem. Spośród wielu bardzo udanych pomysłów dydaktycznych pragnę wymienić dwa: arytmetykę w półprostej $[0, \infty]$ oraz sformułowanie twierdzenia Cauchy'ego dla trójkąta, w którym dopuszcza się funkcje holomorficzne z pozorną osobliwością.

1. *Twierdzenie F. Riesza o reprezentacji.* Znajdujemy tu długi (podzielony na 8 części), ale przystępny dowód następującego twierdzenia F. Riesza: Jeśli X jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, $C_c(X)$ przestrzenią funkcji ciągłych o zwartych nośnikach, a $J: C_c(X) \to R$ funkcjonałem liniowym dodatnim, to istnieje dokładnie jedna miara dodatnia μ na σ-algebrze zbiorów borelowskich taka, że miara każdego zbioru zwartego jest skończona, miara każdego zbioru otwartego jest równa supremum miar jego podzbiorów zwartych, miara każdego zbioru mierzalnego jest równa infimum miar jego nadzbiorów otwartych oraz

$$J(f) = \int_X f(x)\,d\mu(x) \quad \text{dla } f \in C_c(X).$$

Należy podkreślić, że sposób, w jaki Rudin rozwija teorię miary i całki, pozostaje dydaktycznie bardzo cenny również wówczas, gdy od ogólnego przypadku X lokalnie zwartego przejdziemy do $X = R^k$. Określając J na $C_c(R^k)$ za pomocą sum Riemanna dochodzimy poprzez podaną konstrukcję do miary Lebesgue'a m_k. Ujęcie to jest dość poglądowe i być może uzupełni odmienne tendencje dydaktyczne (miara zewnętrzna, całka Daniella) reprezentowane u nas w książkach R. Sikorskiego (*Funkcje rzeczywiste*, tom 1 i 2, 1958 i 1959) oraz K. Maurina (*Analiza*, tom 1, 1971), (por. także M. Skwarczyński, Matematyka 1–3 (1982)).

Twierdzenie Riesza zastosowane do przestrzeni $C(T)$ prowadzi do pojęcia miary harmonicznej i całki Poissona.

2. *Twierdzenie Lebesgue'a–Radona–Nikodyma.* Miara zespolona jest to przeliczalnie addytywna funkcja zbioru przyjmująca wartości zespolone. Miara zespolona λ jest *osobliwa* względem dodatniej miary μ, jeśli obie miary są skoncentrowane na rozłącznych zbiorach. Miara zespolona λ jest *absolutnie ciągła* względem μ, jeśli $\mu(E) = 0$ pociąga $\lambda(E) = 0$. Twierdzenie Lebesgue'a–Radona–Nikodyma mówi, że przy danych λ i μ istnieje jednoznaczny rozkład $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, gdzie λ_s jest miarą osobliwą, a λ_a miarą absolutnie ciągłą (względem μ). Co więcej, istnieje dokładnie jedna funkcja $h \in L^1(\mu)$, zwana *pochodną Radona–Nikodyma*, oznaczana przez $d\lambda/d\mu$, taka że

$$\lambda_a(E) = \int_E h(x)\,d\mu(x)$$

dla każdego zbioru borelowskiego $E \subset X$.

Rudin sprowadza dowód tego twierdzenia do przypadku, gdy obie miary są dodatnie i ograniczone, oraz przytacza piękny dowód von Neumanna dla takich miar. Jest on oparty na własnościach funkcjonału liniowego

$$f \mapsto \int_X f\,d\lambda, \quad \text{gdzie } f \in L^2(\lambda+\mu).$$

Korzystając z teorii przestrzeni Hilberta funkcjonał ten reprezentuje się przez całkę $\int f g\,d(\lambda+\mu)$, gdzie $g \in L^2(\lambda+\mu)$, a następnie pokazuje się, że $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ p.w. Składnik λ_s jest określony przez obcięcie λ do zbioru $\{g(x) = 1\}$, a składnik λ_a przez obcięcie λ do zbioru $\{g(x) < 1\}$. Co więcej, $h = g + g^2 + g^3 + \ldots$

Twierdzenie Lebesgue'a–Radona–Nikodyma jest wykorzystane przy opisie ciągłych liniowych funkcjonałów na przestrzeni L^p $(1 \leqslant p < \infty)$. Ten ostatni rezultat (dla $p = 1$) jest z kolei zastosowany do opisu wszystkich ciągłych liniowych funkcjonałów na przestrzeni $C_c(X)$.

3. *Różniczkowanie miar.* W pierwszym wydaniu Rudin pisał: *differentiation seems to be unduly slighted in most modern texts.* Można chyba zaryzykować proste wyjaśnienie: nie był to temat łatwy. W drugim wydaniu odpowiedni rozdział został napisany na nowo, z zasadniczymi zmianami. Obecne, znakomite ujęcie będzie zapewne wzorem dla innych autorów i zostanie spopularyzowane w wielu podręcznikach.

Podstawowe znaczenie ma pojęcie dobrej zbieżności, pochodzące od J. Serrina. Mówimy, że ciąg E_i zbiorów borelowskich w R^k *dąży dobrze* do punktu $x \in R^k$, jeśli istnieje $a > 0$, oraz ciąg kul $B(x, r_i)$ o promieniach dążących do 0, taki że

$$E_i \subset B(x, r_i) \quad \text{oraz} \quad m(E_i) \geqslant a\,m(B(x, r_i))$$

dla $i = 1, 2, \ldots$ Jeśli dla każdego ciągu E_i zbieżnego dobrze do x istnieje (ta sama) granica

$$D\lambda(x) = \lim \lambda(E_i)/m(E_i),$$

to $D\lambda(x)$ nazywa się *pochodną* miary zespolonej borelowskiej λ w punkcie x. Autor dowodzi, że skończona granica $D\lambda(x)$ istnieje prawie wszędzie w R^k oraz że $D\lambda$ jest pochodną Radona–Nikodyma miary λ_a względem m.

4. *Twierdzenia aproksymacyjne.* Dzięki twierdzeniu Hahna–Banacha znajomość ogólnej postaci funkcjonału liniowego na danej przestrzeni funkcyjnej pomaga otrzymywać twierdzenia aproksymacyjne w tej przestrzeni. Autor podaje bardzo elegancki dowód twierdzenia Rungego, które z kolei znajduje zastosowanie w dowodzie twierdzenia Mittag–Lefflera. W książce znajdujemy również twierdzenie Müntza–Szasza o rozpinaniu przestrzeni $C(I)$, $I = [0, 1]$ przez funkcje

$$1, t^{k_1}, t^{k_2}, \ldots,$$

takie że

$$\sum_n 1/k_n = \infty$$

oraz twierdzenie Mergelyana o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłej na kompakcie za pomocą funkcji wymiernych z biegunami poza tym kompaktem.

5. *Funkcje harmoniczne i przestrzeń H^2.* Całka Poissona $P[d\lambda]$ zespolonej miary borelowskiej λ na okręgu T jest

zespoloną funkcją harmoniczną h: $U \to \boldsymbol{C}$ i w każdym punkcie $\theta \in T$, w którym λ ma pochodną (zatem p.w. na T), istnieje skończona granica radialna

$$h^*(\theta) = \lim_{r \to 1} h(re^{i\theta})$$

dana wzorem $h^*(\theta) = D\lambda(\theta)$.

Przyporządkowanie $\lambda \to P[d\lambda]$ określa odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną między miarami borelowskimi na T a tymi funkcjami harmonicznymi w U, które spełniają warunek wzrostu

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\theta})|\, d\theta < \infty$$

Funkcje holomorficzne spełniające ten warunek wzrostu tworzą *przestrzeń Hardy'ego* H^1. Funkcje te są całkami Poissona miar borelowskich λ spełniających warunek

$$\int_T e^{-im}\, d\lambda(t) = 0 \quad \text{dla } n = -1, -2, \ldots$$

(znikanie „połowy" współczynników Fouriera). Przestrzeń Hardy'ego H^2 zawiera funkcje holomorficzne

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in U,$$

spełniające silniejszy warunek wzrostu

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta < \infty.$$

Można łatwo przekonać się, że funkcja $f \in H^2$ jest całką Poissona (a także całką Cauchy'ego) swojej granicy radialnej

$$f^*(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Co więcej, H^2 ma naturalną strukturę przestrzeni Hilberta, a przyporządkowanie funkcji $f \in H^2$ ciągu $(a_0, a_1, \ldots) \in l^2$ jest unitarnym izomorfizmem. Operatorowi przesunięcia S: $l^2 \to l^2$ odpowiada przy tym operator mnożenia przez z w przestrzeni H^2. Tak więc typowy problem abstrakcyjnej analizy funkcjonalnej, jakim jest charakteryzacja niezmienniczych podprzestrzeni operatora S, może być rozwiązywany w kontekście przestrzeni H^2. Jak pisze autor: *Sedno sprawy polega na tym, że operator mnożenia jest łatwiejszy do badania (dzięki bogatszej strukturze przestrzeni H^2, która jest przestrzenią funkcji holomorficznych) niż wyjściowy operator w przestrzeni ciągów l^2.*

Metoda ta opiera się na następującym twierdzeniu Beurlinga: domknięta podprzestrzeń $Y \subset H^2$ jest S-niezmiennicza (tzn. $SY \subset Y$) wtedy, gdy ma postać $Y = f \cdot H^2$ dla pewnej funkcji $f \in H^2$, takiej że $|f^*| = 1$ p.w. na T. (Taka funkcja f nazywa się *wewnętrzną*; w kole U jest spełniona nierówność $|f| \leqslant 1$.) Autor podaje piękny dowód twierdzenia Beurlinga oparty na metodzie pochodzącej od Helsona i Lowdenslagera. Istota pomysłu polega na wyszukaniu w przestrzeni Y funkcji ortogonalnej do podprzestrzeni SY.

Autor, tłumacze i wydawnictwo zasłużyli na najwyższe uznanie. Na różnych poziomach wykształcenia matematycznego książka silnie inspiruje czytelnika do własnych przemyśleń: być może jest to jej najbardziej charakterystyczna cecha. Rozumowania prowadzone są na najwyższym poziomie ścisłości. Do tego dochodzi 348 starannie przemyślanych ćwiczeń, umieszczonych w partiach po każdym z 20 rozdziałów, w kolejności odpowiadającej omawianym zagadnieniom.

Pierwsze wydanie angielskie recenzował R. E. Edwards (MR 35, # 1420); nie ma powodu szerzej omawiać zastrzeżeń, które już wtedy zostały sformułowane. Pamiętajmy, że lepsze może być wrogiem dobrego (w tym przypadku świetnego). To prawda, że student analizy zespolonej powinien równolegle czytać książkę W. Veecha (*A second course in complex analysis*, Benjamin 1967), aby poznać nakrycia holomorficzne, a globalne twierdzenie Cauchy'ego jest najlepiej, jak dotąd, wyłożone w książce L. Ahlforsa (*Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York 1953; jest tłumaczenie bułgarskie).

Przechodząc od książki Rudina do studiowania wielu zmiennych zespolonych, terminy *odwzorowanie konforemne* i *element analityczny* trzeba zastąpić przez *odwzorowanie biholomorficzne* i *kiełek holomorficzny*, ale wypada sądzić, że ta mała niedogodność, to po prostu ukłon w kierunku matematycznej

tradycji ze strony autora *Lectures on the edge of the wedge theorem.*

Twierdzenie o zamianie zmiennych w całce Lebesgue'a to klucz do teorii form różniczkowych, szkoda więc, że (w porównaniu z innymi twierdzeniami w książce) ma ono dowód stosunkowo mało przejrzysty. Cóż z tego, skoro i tak jest to najlepszy z dowodów, jakie recenzent znalazł w literaturze podręcznikowej.

Szkoda, że autor nie wspomniał ani słowem o teorii Bergmana (tak bliskiej analizie funkcjonalnej), ale któż w 1966 roku mógł przypuszczać, że ma ona jakikolwiek związek z teorią przestrzeni H^2?

Tłumaczenia dokonali kompetentni matematycy, godząc (na ogół z powodzeniem) wierność wobec oryginału z respektem dla polskiej tradycji terminologicznej.

Oto kilka najważniejszych zastrzeżeń:

W (19_{11}) symbol $g \circ f$ oznacza złożenie f z g (trzeba najpierw obliczyć wartość dla f, później dla g), chociaż niektórzy autorzy (m. in. J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*) odwracają tę naturalną kolejność. Niby drobiazg, ale to złożenie funkcji mierzalnej z ciągłą jest mierzalne, wbrew tekstowi.

W (15_8) znajdujemy żargonową definicję „rodziny rozłącznej", dzięki której figura F może należeć do każdej z rodzin A i B w sytuacji, gdy zdanie „A i B są rozłącznymi rodzinami zbiorów" można uważać za prawdziwe. Sformułowanie „Funkcje holomorficzne są harmoniczne" w twierdzeniu 11.4 jest zdecydowanie zbyt swobodne.

Z kolei uwagi pod adresem wydawnictwa:

W przypisach do rozdz. 14 czytamy, że hipoteza Bieberbacha nie jest udowodniona, (por. Wiadom. Mat. 27 (1986), str. 1).

Zdanie w bibliografii (istnieje polski „odpowiednik") w odniesieniu do książek Banacha, Saksa i Saksa–Zygmunta jest za mało precyzyjne. A skoro wskazuje się istnienie tłumaczeń rosyjskich, to można było wskazać istnienie angielskiego tłumaczenia bardzo ważnej książki Riesza–Nagy (*Lectures on Functional Analysis*, Blackie and Son, London 1956); informacja ta ma istotne, a nie tylko formalne znaczenie. Literatura uzupełniająca powinna obejmować książki I. P. Natansona, (ze względu na twierdzenia Helley'ego) oraz S. Krantza (ze względu na funkcję Bergmana).

I jeszcze trzy uwagi ogólniejszej natury.

1° W związku z twierdzeniami aproksymacyjnymi omawianymi przez autora warto wspomnieć, że analogiczne zagadnienia w kontekście aproksymacji w metryce L^2 były badane przez S. O. Sinaniana (Mat. Sb. 69 (1966)).

2° Wcześniejsze książki – S. Hartmana i J. Mikusińskiego, *Teoria miary i całki Lebesgue'a* (1957), L. Maurina, M. Mączyńskiego i T. Traczyka, *Matematyka* (tom 1 i 2, 1973 i 1975) – wraz z książką Rudina – urealniają oparcie wykładu matematyki na całce Lebesgue'a także dla studentów politechniki. W ojczyźnie S. Zaremby postęp w upowszechnianiu teorii Lebesgue'a musi być witany z radością.

3° Analiza rzeczywista i analiza zespolona obejmują obszerny materiał, który nie znalazł się w recenzowanej książce, ale jest dostępny w innych podręcznikach. Można tu wymienić teorię potencjału (Helms), twierdzenie Stokesa (Spivak, Birkholc), funkcje automorficzne (Lehner), geometrię różniczkową (Spivak, Flanders), powierzchnie Riemanna (Springer), funkcje holomorficzne wielu zmiennych (Krantz), równania różniczkowe (Pontriagin, Folland), rachunek prawdopodobieństwa (Gliwenko, Petersen), twierdzenie spektralne (Stone, Mlak), zastosowania w fizyce (Mackey, Sommerfeld), i wiele innych. Jestem przekonany, że książka Rudina ułatwi studiowanie każdej z tych pozycji. Podsumowując: książka Rudina jest znakomitym wprowadzeniem do współczesnej analizy matematycznej.

Maciej Skwarczyński