wmptm 1897

Model-Theoretic Logics, edited by J. Barwise and S. Feferman, Springer Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo 1985, str. XVIII+893, ISBN 0-387-90936-2, ISBN 3-540-90936-2.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Książka ukazała się jako kolejny tom serii *Perspectives in Mathematical Logic*; poszczególne tomy nie są numerowane. Ten bardzo obszerny tom zawiera materiał będący nowością nawet dla osób specjalnie zainteresowanych logiką matematyczną.

Logika matematyczna jest jedną z dyscyplin naukowych. Ale kiedy pada pytanie o to, co jest teorią logiczną (szkoda, że język polski nie zawiera rodzajników — tutaj pasowałby rodzajnik określony), to odpowiedź najczęściej spotykana wskazuje na węższy rachunek predykatów, czyli logikę pierwszego rzędu; teoria modeli została rozwinięta przede wszystkim dla tego właśnie rachunku. Bywały jednak i odpowiedzi odmienne, gdyż np. Russell uważał za logikę (jako teorię) tzw. teorię typów logicznych, a teoria ta oczywiście wykracza poza węższy rachunek predykatów.

Przeciętny podręcznik logiki matematycznej zawiera zwykle rozdział (lub przynajmniej wzmiankę) o logice drugiego rzędu, a czasem i wyższych rzędów; jest to niewątpliwie jakaś pozostałość po pojmowaniu logiki przez Fregego i Russella — „ojców założycieli" logiki matematycznej. Tak więc termin „logika" funkcjonuje dwuznacznie nawet na gruncie tzw. tezy pierwszego rzędu, tj. właśnie poglądu, że logiką w sensie właściwym jest logika pierwszego rzędu; na gruncie tej tezy logiki wyższych rzędów należą do logiki w sensie rozszerzonym.

Logikę można rozszerzać nie tylko poprzez kwantyfikację zmiennych coraz wyższych typów. Innymi sposobami są rozszerzenia korzystające z tzw. kwantyfikatorów uogólnionych oraz logiki z formułami o nieskończonej długości.

Kwantyfikatory uogólnione zostały wprowadzone przez A. Mostowskiego w 1957 r. Niech $\aleph_i$ będzie daną liczbą kardynalną. Wyrażenie $Q_i f(x)$ znaczy: istnieje $\aleph_i$ przedmiotów takich, że $f(x)$. Teoria formalna zawierająca Q_i jest logiką $L(Q_i)$, gdzie i jest wskaźnikiem danego alefa.

O. Helmer (1938), P. S. Nowikow (1939) oraz P. A. Boczwar (1940) byli pionierami logiki z nieskończenie długimi formułami, ale systemy te zaczęły być przedmiotem systematycznych badań dopiero w końcu lat pięćdziesiątych (A. Tarski i jego uczniowie). Jeśli m i n są pozaskończonymi liczbami kardynalnymi, to symbol L_{mn} oznacza język, w którym dopuszczone są koniunkcje i dysjunkcje złożone z mniej niż m argumentów oraz kwantyfikatory wiążące mniej aniżeli n zmiennych; język z formułami o skończonej długości jest w związku z tym oznaczany symbolem $L_{\omega\omega}$.

Tak więc istnieją obecnie trzy rodzaje logik rozszerzonych oraz, odpowiednio, trzy rozszerzone teorie modeli. Szybko pojawił się problem porównywania różnych logik i ich własności, co dało początek tzw. abstrakcyjnej teorii modeli. Zapoczątkowały ją twierdzenia Lindströma o charakteryzacji systemów logicznych (1969). Jeśli nie liczyć teorii typów Russella, to historia logik w sensie rozszerzonym, rozszerzonej teorii modeli oraz abstrakcyjnej teorii modeli liczy sobie około trzydziestu lat. Tom pod redakcją Barwise'a i Fefermana przedstawia rezultaty uzyskane w tym okresie oraz perspektywy dalszych badań.

Książka podzielona jest na pięć części składających się w sumie z dwudziestu rozdziałów. Wygląda to następująco (w nawiasach podane są nazwiska autorów poszczególnych rozdziałów):

Część A. *Wstęp, teoria podstawowa i przykłady*. I. Logiki teorio-modelowe: tło i cele (J. Barwise). II. Logiki rozszerzone: ramy ogólne (H.-D. Ebbinghaus). III. Charakteryzowanie logik (J. Flum).

Część B. *Języki skończone z dodatkowymi kwantyfikatorami*. IV. Kwantyfikator „istnieje nieskończenie wiele" i pokrewne (M. Kaufmann). V. Twierdzenia o transferze i ich zastosowania do logik (J. H. Schmerl). VI. Inne kwantyfikatory: przegląd (D. Mundici). VII. Rozstrzygalność i eliminacja kwantyfikatorów (A. Baudisch, D. Seese, P. Tuschik, M. Weese).

Część C. *Języki nieskończone.* VIII. $L_{\omega_1\omega}$ i fragmenty dopuszczalne (M. Nadel). IX. Większe języki nieskończone (M. A. Dickmann). X. Kwantyfikacja jako gra (Ph. G. Kolaitis). XI. Zastosowania do algebry (P. C. Eklof).

Część D. *Logika drugiego rzędu.* XII. Definiowalne kwantyfikatory drugiego rzędu (J. Baldwin). XIII. Monadyczne teorie drugiego rzędu (Y. Gurewicz).

Część E. *Logiki topologii i analizy.* XIV. Kwantyfikatory probabilistyczne (H. J. Keisler). XV. Topologiczna teoria modeli (M. Ziegler). XVI. Struktury Borela, miara i logiki kategorialne (C. I. Steinhorn).

Część F. *Zaawansowane problemy abstrakcyjnej teorii modeli.* XVII. Teoriomnogościowa definiowalność logik (J. Väänänen); XVIII. Zwartość, zanurzenia i definiowalność (J. A. Makowsky); XIX. Abstrakcyjne relacje równoważnościowe (J. A. Makowsky, D. Mundici); XX. Abstrakcyjne relacje zanurzeniowe (J. A. Makowsky). Książkę zamyka bardzo obszerna bibliografia (ponad 1200 pozycji), którą sporządzili D. S. Scott, D. C. McCarty oraz J. F. Horty.

Spis treści i rozmiary bibliografii najlepiej ilustrują bujny i wielostronny rozwój logik teorio-modelowych. Poszczególne rozdziały prezentują głównie problemy techniczne. Ogrom materiału uniemożliwia nawet pobieżne omówienie treści książki; niech więc tylko lista rozdziałów służy jako wizytówka tomu. Natomiast nie od rzeczy będzie omówienie pewnych kwestii ogólnych.

Od dawna wiedziano, że w ramach logiki pierwszego rzędu nie da się określić wielu pojęć matematycznych, np. pojęcia skończoności. Logiki rozszerzone mają służyć właśnie wzbogaceniu możliwości definicyjnych logiki. Logika pierwszego rzędu jest logiką struktur algebraicznych. Powstał więc problem logiki właściwej struktur topologicznych czy przestrzeni prawdopodobieństw; te kwestie rozważane są w części E.

Ogólnie mówiąc, logiki rozszerzone motywowane są przekonaniem o tym, że różne obiekty matematyczne mają różne logiki. Odnotujmy przy tym, że tego rodzaju pluralizm jest zupełnie odmienny od poglądu, że pewne struktury podlegają logice klasycznej, a inne – nieklasycznej; wszystkie logiki rozważane w recenzowanym tomie są rozszerzeniami logiki klasycznej.

Pojęcie skończoności można zdefiniować albo w logice drugiego rzędu, albo w logice z uogólnionymi kwantyfikatorami, albo w logice z formułami nieskończenie długimi. Którą z nich wybrać jako właściwą? O tym muszą decydować jakieś dodatkowe własności poszczególnych systemów. Wspomniane wyżej wyniki Lindströma dostarczyły pierwszych kryteriów porównywania różnych systemów logicznych. I tak logika pierwszego rzędu, jako jedyna, spełnia twierdzenie o zwartości (jeśli każdy skończony podzbiór zbioru zdań X ma model, to zbiór X ma model) oraz twierdzenie Löwenheima–Skolema „w dół" (jeśli zbiór X ma model w dziedzinie nieskończonej, to ma także model w dziedzinie przeliczalnej), czyli ma tzw. własność Löwenheima. $L(Q_1)$ jest zwarta, ale nie ma własności Löwenheima. $L_{\omega_1\omega}$ ma własność Löwenheima, ale nie jest zwarta, natomiast logika rzędu drugiego ani nie jest zwarta, ani nie ma własności Löwenheima.

Dalszy rozwój abstrakcyjnej teorii modeli polegał m. in. na badaniu poszczególnych logik z punktu widzenia innych jeszcze własności (interpolacja, pełność, rozmaite rodzaje definiowalności). Badania te sprawiły, że jedną z centralnych kwestii rozważanych w ramach abstrakcyjnej teorii modeli stała się kwestia zakresu logiki. Jest to, rzecz jasna, problem natury filozoficznej i nie da się go rozstrzygnąć metodami matematycznymi.

Odpowiedź zależy od wyboru jakiejś własności czy kolekcji własności charakteryzującej logikę w sposób naturalny. Zwolennicy tezy pierwszego rzędu uważają, że takimi własnościami są zwartość i własność Löwenheima. Idea recenzowanej książki zaś jest taka, że abstrakcyjna teoria modeli sugeruje rozszerzenie pojęcia logiki tak, aby za systemy logiczne uchodziły także i logiki omawiane w tej książce. Wyraża to radykalne sformułowanie Barwise'a: nie ma powrotu do tezy pierwszego rzędu. Być może, iż jest to pogląd zbyt radykalny, ale na pewno rozszerzona i abstrakcyjna teoria modeli dostarczają nowych danych do dyskusji nad

pojęciem logiki. W szczególności wydaje się, że logiki rozszerzone stanowią jakąś próbę odnowienia logicyzmu, gdyż mają być narzędziem definiowania pojęć matematycznych w języku mogącym uchodzić za należący do logiki.

Z matematycznego punktu widzenia nie jest ważne, czy owe logiki rozszerzone nazywać będziemy logikami właśnie czy skromniej – językami teorio-modelowymi. Ważne jest, że pojawił się nowy kierunek badań w ramach podstaw matematyki i dość szybko zaowocował wieloma interesującymi wynikami technicznymi. I to jest wystarczająca legitymacja do jego dalszej obecności. A jeśli ożywione zostały stare spory filozoficzne, to tym lepiej.

Jan Woleński

Michael J. Beeson, *Foundations of Constructive Mathematics*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 6, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1985, XII+466 str., ISBN 3-540-12173-0 (w RFN) i 0-387-12173-0 (w USA).

W głośnej książce Philipa J. Davisa i Reubena Herscha, *The Mathematical Experience* (Basel 1981) wyrażona jest następująca opinia: „Typowy matematyk jest zarazem platonikiem i formalistą – ukrytym platonikiem z formalistyczną maską wkładaną wtedy, gdy wymaga tego sytuacja. Konstruktywiści są plemieniem nielicznym, a ich pozycja w świecie matematycznym jest taka, jak tolerowanych heretyków otoczonych przez ortodoksyjnych członków panującego kościoła" (str. 322). Wolno, jak się zdaje, przyjąć, że jest to typowa opinia o socjologicznej sytuacji konstruktywistów.

Konstruktywiści jednak nie rezygnują z roszczeń do właściwej interpretacji matematyki i, jak przystało na tolerowanych heretyków, starają się nawrócić ortodoksów na swą wiarę. Monografia Beesona jest właśnie przykładem i wyrazem kolejnej ekspansji konstruktywizmu na tereny okupowane przez platoników. Jest to najobszerniejszy, jak dotychczas, wykład podstaw matematyki z konstruktywistycznego punktu widzenia.

Książka ta składa się z czterech części. Część pierwsza (rozdziały I–V) dotyczy praktyki i filozofii matematyki konstruktywnej. Autor omawia kolejno: przykłady matematyki konstruktywnej, jej podstawy nieformalne i różne filozofie, matematykę rekurencyjną oraz rolę systemów formalnych w podstawach matematyki.

Część II (rozdziały VI–XI), najobszerniejsza w całej książce, nosi tytuł *Systemy formalne lat siedemdziesiątych* i zawiera obszerną prezentację ostatnich prób formalnego ugruntowania matematyki konstruktywnej, m. in. systemów stworzonych przez Myhilla, Fefermana, Martin-Löfa, a także samego Beesona.

W części III (rozdziały XII–XVI) przeprowadzone są różne badania matematyczne nad systemami z części II. Rozważane są m. in. konstruktywne modele teorii mnogości, moc dowodowa poszczególnych systemów oraz relacje pomiędzy zasadami przyjmowanymi przez konstruktywistów, np. między tezą Churcha a zasadą ciągłości Brouwera.

Część IV (rozdział XVII) poświęcona jest filozoficznej dyskusji pojęcia dowodu konstruktywnego. Książkę kończy krótki, acz treściwy dodatek historyczny, w którym zarysowany jest rozwój konstruktywizmu od końca XIX w. do końca lat siedemdziesiątych.

Książka Beesona jest wielowątkowa, a przeplatają się w niej kwestie formalne, filozoficzne i historyczne. Jest też, czego autor bynajmniej nie ukrywa, energiczną propagandą konstruktywizmu. Konstruktywizm Beesona można uznać za kontynuację idei zmarłego w 1983 r. Erreta Bishopa – autora znanej książki *Foundations of Constructive Analysis* (New York 1967); ostatnio ukazała się nowa wersja tego dzieła pt. *Constructive Analysis* (Berlin 1985), której współautorem jest D. S. Bridges.