pojęciem logiki. W szczególności wydaje się, że logiki rozszerzone stanowią jakąś próbę odnowienia logicyzmu, gdyż mają być narzędziem definiowania pojęć matematycznych w języku mogącym uchodzić za należący do logiki.

Z matematycznego punktu widzenia nie jest ważne, czy owe logiki rozszerzone nazywać będziemy logikami właśnie czy skromniej – językami teorio-modelowymi. Ważne jest, że pojawił się nowy kierunek badań w ramach podstaw matematyki i dość szybko zaowocował wieloma interesującymi wynikami technicznymi. I to jest wystarczająca legitymacja do jego dalszej obecności. A jeśli ożywione zostały stare spory filozoficzne, to tym lepiej.

Jan Woleński

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Michael J. Beeson, *Foundations of Constructive Mathematics*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 6, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1985, XII+466 str., ISBN 3-540-12173-0 (w RFN) i 0-387-12173-0 (w USA).

W głośnej książce Philipa J. Davisa i Reubena Herscha, *The Mathematical Experience* (Basel 1981) wyrażona jest następująca opinia: „Typowy matematyk jest zarazem platonikiem i formalistą – ukrytym platonikiem z formalistyczną maską wkładaną wtedy, gdy wymaga tego sytuacja. Konstruktywiści są plemieniem nielicznym, a ich pozycja w świecie matematycznym jest taka, jak tolerowanych heretyków otoczonych przez ortodoksyjnych członków panującego kościoła" (str. 322). Wolno, jak się zdaje, przyjąć, że jest to typowa opinia o socjologicznej sytuacji konstruktywistów.

Konstruktywiści jednak nie rezygnują z roszczeń do właściwej interpretacji matematyki i, jak przystało na tolerowanych heretyków, starają się nawrócić ortodoksów na swą wiarę. Monografia Beesona jest właśnie przykładem i wyrazem kolejnej ekspansji konstruktywizmu na tereny okupowane przez platoników. Jest to najobszerniejszy, jak dotychczas, wykład podstaw matematyki z konstruktywistycznego punktu widzenia.

Książka ta składa się z czterech części. Część pierwsza (rozdziały I–V) dotyczy praktyki i filozofii matematyki konstruktywnej. Autor omawia kolejno: przykłady matematyki konstruktywnej, jej podstawy nieformalne i różne filozofie, matematykę rekurencyjną oraz rolę systemów formalnych w podstawach matematyki.

Część II (rozdziały VI–XI), najobszerniejsza w całej książce, nosi tytuł *Systemy formalne lat siedemdziesiątych* i zawiera obszerną prezentację ostatnich prób formalnego ugruntowania matematyki konstruktywnej, m. in. systemów stworzonych przez Myhilla, Fefermana, Martin-Löfa, a także samego Beesona.

W części III (rozdziały XII–XVI) przeprowadzone są różne badania matematyczne nad systemami z części II. Rozważane są m. in. konstruktywne modele teorii mnogości, moc dowodowa poszczególnych systemów oraz relacje pomiędzy zasadami przyjmowanymi przez konstruktywistów, np. między tezą Churcha a zasadą ciągłości Brouwera.

Część IV (rozdział XVII) poświęcona jest filozoficznej dyskusji pojęcia dowodu konstruktywnego. Książkę kończy krótki, acz treściwy dodatek historyczny, w którym zarysowany jest rozwój konstruktywizmu od końca XIX w. do końca lat siedemdziesiątych.

Książka Beesona jest wielowątkowa, a przeplatają się w niej kwestie formalne, filozoficzne i historyczne. Jest też, czego autor bynajmniej nie ukrywa, energiczną propagandą konstruktywizmu. Konstruktywizm Beesona można uznać za kontynuację idei zmarłego w 1983 r. Erreta Bishopa – autora znanej książki *Foundations of Constructive Analysis* (New York 1967); ostatnio ukazała się nowa wersja tego dzieła pt. *Constructive Analysis* (Berlin 1985), której współautorem jest D. S. Bridges.

Bishop i Beeson nawiązują do sławnej debaty między Hilbertem a Brouwerem argumentując, że obaj wielcy antagoniści niewłaściwie ocenili zasięg matematyki konstruktywnej. Hilbert i Brouwer zgadzali się, że rezygnacja z części matematyki klasycznej jest ceną, którą trzeba zapłacić za akceptację konstruktywizmu, i obaj odczuwali, że jest to cena poważna. Brouwer godził się z potrzebą rezygnacji, a Hilbert nie.

Tymczasem, jak argumentują Bishop i Beeson, koszty konstruktywizmu wcale nie są wygórowane, a ponadto matematyka konstruktywna może być wyłożona w sposób zadowalający „klasyków", tj. bez różnych dziwnych pojęć wymyślonych przez Brouwera (np. ciągów wyboru). Konflikt między Brouwerem a Hilbertem jest opisany jako konflikt między bezpieczeństwem (Brouwer z jego dążeniem do eliminacji „podejrzanych" elementów matematyki klasycznej) a siłą (Hilbert z jego dążeniem do zachowania pełni możliwości dowodowych matematyki klasycznej); Beeson stwierdza sarkastycznie, że w podstawach matematyki, podobnie jak w polityce, bezpieczeństwo zostało poświęcone na rzecz potęgi.

Jednakże, jak to pokazał Bishop w cytowanych książkach (Beeson odwołuje się jedynie do pierwszej), konflikt jest pozorny, gdyż to, co jest ważne w matematyce klasycznej, daje się wyłożyć zgodnie z wymaganiami konstruktywizmu; rozdział I książki Beesona jest próbą przekonania czytelnika, że tak właśnie jest. W ten sposób znajdujemy się w samym centrum sporu między konstruktywizmem a platonizmem.

Dzieło Beesona (podobnie jak i prace Bishopa) ma, w sprawie tego centralnego punktu, niewątpliwą przewagę nad innymi omówieniami konstruktywizmu. Zazwyczaj jest bowiem tak, że wykłada się ogólne postulaty konstruktywizmu, a następnie są one ilustrowane kilkoma spektakularnymi przykładami twierdzeń niekonstruktywnych (np. pewnik wyboru czy twierdzenie Bolzano–Weierstrassa). Na takiej podstawie wyprowadza się ogólny wniosek, że konstruktywizm drastycznie ogranicza matematykę klasyczną.

W obiegowych wzmiankach o konstruktywizmie brakuje najczęściej pozytywnych przykładów matematyki konstruktywnej, a nawet i sami konstruktywiści często postępują w taki właśnie sposób. Podane przez Beesona przykłady matematyki konstruktywnej obejmują: analizę, topologię, równania różniczkowe, teorię potencjału, teorię miary, rachunek wariacyjny i teorię aproksymacji.

Taktykę konstruktywizmu ilustruje następujący, standardowy zresztą, przykład. Zgodnie z postulatem Brouwera, każda funkcja z R do R jest ciągła, co jest fałszywe z klasycznego punktu widzenia. Brouwer uzasadniał swój postulat przez specjalne konstrukcje, np. przez wspomniane wyżej ciągi wyboru. Współczesny konstruktywista powiada, że wystarczy ograniczyć się do funkcji jednostajnie ciągłych w przedziale zamkniętym. W ten sposób postulat Brouwera przybiera postać całkowicie zrozumiałą z klasycznego punktu widzenia. Wyraźnie też widać, co pozostaje w tym przypadku poza zasięgiem analizy konstruktywnej: funkcje nieciągłe. Konstruktywista godzi się na to i, w konsekwencji, godzi się także na ograniczenie topologii do przestrzeni metrycznych. Oczywiście, wcześniej zdecydował się na wykluczenie obszernych partii teorii mnogości; w tym przypadku konstruktywista argumentuje, że partie te nie mają znaczenia dla „zwykłej" matematyki.

Beeson jest świadom tego, że poza zasięgiem dzisiejszej matematyki konstruktywnej znajdują się zagadnienia, które powinny być potraktowane z konstruktywnego punktu widzenia, np. algebry Banacha, ale ma nadzieję, że da się to uczynić.

Prędzej czy później musi pojawić się pytanie następujące: jak oceniać roszczenia konstruktywistów? Zwraca uwagę fakt, że spór między konstruktywizmem a poglądem klasycznym może być tylko oceniany, a trudno go rozstrzygać z jakiegoś teoretycznego punktu widzenia. Rzecz bowiem w tym, że obie spierające się strony odwołują się do „istotności", „ważności", „wystarczalności", „zwykłej praktyki matematycznej" itp., a więc do kategorii, którym trudno przypisać obiektywną miarę. I dlatego każdy musi rozstrzygać wedle własnego rozumienia

praktyki matematycznej. Można odwołać się oczywiście do socjologii, ale nie jest to, rzecz jasna, rozstrzygnięcie sporu filozoficznego.

Beeson kładzie duży nacisk na formalizację matematyki konstruktywnej, a tego rodzaju podejście uważa za charakterystyczne dla współczesnego konstruktywizmu. Pod tym względem konstruktywizm ostatnich lat różni się wyraźnie od tradycyjnego intuicjonizmu, gdyż Brouwer i jego bezpośredni uczniowie nie byli zbytnio zainteresowani formalizacją. Beeson przewiduje, że postępy formalizacji matematyki konstruktywnej spowodują szerszą akceptację konstruktywizmu jako filozofii matematyki. Prognoza ta wydaje się dość ryzykowna. Na pewno należy oczekiwać wzrostu zainteresowania sformalizowanymi systemami matematyki konstruktywnej, ale będzie to chyba niezależne od sukcesów socjologicznych samego konstruktywizmu. Systemy, o których mowa, są interesującymi obiektami badań same dla siebie, a będą badane niezależnie od filozofii akceptowanej przez ich badacza, podobnie jak to miało miejsce w przypadku logiki intuicjonistycznej, która wzbudziła żywe zainteresowanie także poza kręgiem intuicjonistów.

Części II i III recenzowanej książki zawierają poważny bagaż informacji, które zapewne będą podstawą dalszych badań nad formalnymi systemami matematyki konstruktywnej. Wydaje mi się jednak, że rozważania metamatematyczne Beesona i wyprowadzane z nich wnioski ogólne nie dotykają kwestii najbardziej fundamentalnych. Jest rzeczą zastanawiającą, że konstruktywiści bardzo rzadko rozważają konsekwencje twierdzeń Gödla o niezupełności. Twierdzenia te zostały udowodnione w sposób konstruktywny i dają się bez trudu zrekonstruować w formalnej arytmetyce Heytinga. Znaczy to m. in., że dowód niesprzeczności arytmetyki Heytinga nie daje się w niej sformalizować, a jeśli tak jest, to można wątpić, czy w ogóle daje się sformalizować w sposób konstruktywny.

Konstruktywista powiada, że zdanie A jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy daje się ono konstruktywnie udowodnić, z czego wynika, że zdanie „arytmetyka Heytinga jest niesprzeczna" jest bezsensowne, gdyż ani ono, ani jego negacja, nie mają konstruktywnego dowodu. Nie jest to jednak łatwe do zaakceptowania. Konstruktywista może się bronić powiadając, że przecież nie żąda formalizacji wszystkiego, gdyż jest to niemożliwe. W szczególności, formalizacji i konstruktywizacji nie podlegają podstawowe przeświadczenia o matematyce, m. in. o pierwotności ciągu liczb naturalnych. Taka obrona czyni jednak przekonanie o roli systemów formalnych w rozwoju konstruktywizmu dość iluzorycznym. Ważniejsze wydaje się to, że konstruktywiści w końcu też odwołują się do wiary w niesprzeczność arytmetyki.

Ogólny argument konstruktywisty jest teraz prosty: zagrożenie sprzecznością jest tym mniejsze, im słabsze środki dowodowe, tj. właśnie konstruktywne, są akceptowane. Ale w tym punkcie platonista ma równie prostą odpowiedź: nie ma powodu do rezygnacji ze środków silniejszych, dopóki się nie wykaże, że prowadzą do sprzeczności. Używając innej metaforyki, można powiedzieć, że spór dotyczy defetyzmu (konstruktywizm) i prawa do ryzyka (platonizm), a jego rozwiązanie znowu zależy od tego, kto i jak wartościuje.

Konstruktywizm nie jest kierunkiem jednolitym. Beeson pokazuje to zarówno od strony formalnej — przez porównanie różnych formalizacji matematyki konstruktywnej, jak i nieformalnej — za pomocą fikcyjnych konwersacji, dołączonych do większości rozdziałów, pomiędzy stronnikami różnych konstruktywizmów. Owe różnice mogą być interpretowane na niekorzyść konstruktywizmu, gdyż — jak się okazuje — jego intuicyjne podstawy wcale nie są tak oczywiste, jak to się wydawało Brouwerowi. Ale mogą one także stanowić punkt wyjścia dla interpretacji konfliktu wokół konstruktywizmu *sine ira et studio*, bez ukrywającej emocje metaforyki siły i bezpieczeństwa, defetyzmu i ryzyka czy herezji i ortodoksji.

Dawno już zauważono, że można mówić o stopniach konstruktywności i badać konstruktywną zawartość twierdzeń matematyki; w latach pięćdziesiątych program taki został zarysowany przez A. Mostowskiego. Tego wątku zdecydowanie brakuje w książce Beesona, a jest to spowodowane zapewne tym, że konstruktywiści odrzucają ja-

kiekolwiek dyskusje zakładające prawomocność matematyki klasycznej.

Książka Beesona jest na pewno wartościowym kompendium na temat konstruktywizmu. Jednakże nie sądzę, aby zmieniła pogląd wyrażony w cytacie otwierającym niniejszą recenzję.

Jan Woleński

Rosemarie Rheinwald, *Der Formalismus und seine Grenzen. Untersuchungen zur neueren Philosophie der Mathematik*, Verlag Anton Hain, Königstein, Ts., 1984, str. 204, ISBN 3-445-02321-2.

Donald Monk przypuszcza (*Mathematical Logic*, Springer, Berlin 1976, str. 3), że wśród matematyków jest 65% platoników, 30% formalistów oraz 5% intuicjonistów. Formalizm jest więc nadal żywotnym kierunkiem w podstawach matematyki i nic dziwnego, że bywa przedmiotem odrębnych monografii. Recenzowana książka jest próbą całościowego spojrzenia na współczesny formalizm i jego filozoficzne problemy ze szczególnym uwzględnieniem tych ostatnich. Składa się z pięciu części kolejno poświęconych: pojęciu formalizmu, implikacjonizmowi, modalizmowi, problematyce niesprzeczności, istnienia i prawdy w matematyce oraz definicjom.

Przypomnijmy, że kryzys w podstawach matematyki na przełomie XIX i XX w. zaowocował powstaniem trzech alternatywnych i konkurencyjnych stanowisk w filozofii matematyki: logicyzmu, formalizmu i intuicjonizmu.

Formalizm traktował matematykę jako kolekcję abstrakcyjnych, niezinterpretowanych systemów, dla których ostatecznym uzasadnieniem są absolutne dowody niesprzeczności. Hilbert, twórca i główny przedstawiciel formalizmu, żądał, aby dowody niesprzeczności były prowadzone za pomocą tzw. metod finistycznych; *nota bene* pojęcie owych metod nigdy nie zostało należycie sprecyzowane. Nadto formaliści sądzili, że niesprzeczność jest koniecznym i wystarczającym warunkiem istnienia obiektów matematycznych. Poszukiwanie absolutnych dowodów niesprzeczności doprowadziło do powstania metamatematyki, czyli ogólnej teorii systemów sformalizowanych.

W metamatematyce formaliści reprezentowali skrajnie finitystyczny punkt widzenia i pod tym względem podzielali wiele poglądów intuicjonistów. Z kolei oba kierunki różnią się zasadniczo w kwestii istnienia obiektów matematycznych, gdyż intuicjoniści traktują niesprzeczność tylko jako konieczny warunek istnienia; w kwestiach istnienia zachodzi podobieństwo między formalizmem a logicyzmem. Nawet te pobieżne uwagi wskazują na skomplikowany charakter odniesień między logicyzmem, formalizmem a intuicjonizmem.

W początkach lat trzydziestych matematyczny program Hilberta został zachwiany (co najmniej) przez sławne twierdzenia Gödla o niezupełności systemów formalnych zawierających arytmetykę. Równocześnie Tarski wprowadził do metamatematyki infinitystyczne metody teoriomnogościowe, dzięki czemu metamatematyka stała się niezależna od rygorystycznych postulatów Hilberta. Dalszy rozwój podstaw matematyki doprowadził do wykrystalizowania się następujących kierunków: teoriomnogościowego (odpowiednik logicyzmu), teoriodowodowego (odpowiednik formalizmu) i konstruktywizmu (odpowiednik intuicjonizmu); pierwszy jest też uważany za platonizm.

Ewolucja formalizmu daje się ująć krótko jako przejście od oryginalnego metamatematycznego programu Hilberta do najnowszych prób w teorii dowodu. Wydaje mi się, że monografia o formalizmie powinna tę ewolucję opisać. Autorka obrała całkowicie odmienny punkt widzenia i zaczyna swą książkę od próby określenia „formalnego" w matematyce. Czyni to (str. 25 i dalsze) poprzez analizę różnych przeciwstawień formy i treści. W rezultacie, czemu trudno się dziwić, otrzymuje różne wersje „formalizmu", które w dalszych partiach książki są ilustrowane bardziej konkretnymi poglądami