ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXIX (1990)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ANDRZEJ SCHINZEL (Warszawa)

Postęp w teorii liczb w latach 1978–1988*

11 lat temu wygłosiłem odczyt na podobny temat na posiedzeniu Oddziału Wrocławskiego PTM opublikowany w *Wiadomościach Matematycznych* (Schinzel [1979]). Mówiłem wtedy o okresie 1966–1978. Obecny referat pomyślany jest tak, aby łącznie z poprzednim pokrył cały okres po Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Moskwie, doprowadzając ten przegląd do jesieni 1988 r.

Zanim przejdę do omawiania poszczególnych działów teorii liczb, chciałbym zreferować otrzymane w ostatnim dziesięcioleciu rozwiązania pięciu klasycznych zagadnień teorii liczb, w porządku chronologicznym ich postawienia.

A. *Hipoteza Eulera* z 1769 r.: równanie $x^4+y^4+z^4=t^4$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Elkies [1988] znalazł takie rozwiązania, co więcej, dowiódł, że punkty wymierne leżą gęsto na powierzchni $u^4+v^4+w^4=1$. Następnie Frye znalazł rozwiązanie z najmniejszym t, które przytaczam:

$$95800^4+217519^4+414560^4=442481^4.$$

B. *Hipoteza Waringa* z 1770 r. Każda liczba naturalna jest sumą 19 czwartych potęg liczb całkowitych.

Balasubramanian, Deshouillers i Dress [1986] potwierdzili to przypuszczenie, wyznaczając tym samym $g(4)$, tj. najmniejszą liczbę czwartych potęg wystarczającą do przedstawienia w postaci sumy dowolnej liczby naturalnej (79 wymaga ich dziewiętnastu). Dla wszystkich innych wykładników n liczba $g(n)$ była wyznaczona wcześniej, zatem klasyczny problem Waringa został ostatecznie rozwiązany. Pozostaje do rozwiązania jego modyfikacja pochodząca od Hardy'ego i Littlewooda, o której będzie mowa dalej.

C. *Problem Gaussa* z 1800 r. dotyczący form kwadratowych dwójkowych.

---

* Odczyt wygłoszony 27 kwietnia 1989 r. na posiedzeniu Oddziału Warszawskiego PTM, z pewnymi uzupełnieniami.

Gauss rozpatrywał wyłącznie formy o środkowym współczynniku parzystym, ale problem można łatwo przetłumaczyć na język współczesny. Formy kwadratowe

$$ax^2+bxy+cy^2, \quad \text{gdzie } (a, b, c)=1 \text{ oraz } b^2-4ac=d \ (d \text{ ustalone}),$$

dzielimy na klasy, zaliczając f i g do tej samej klasy, jeśli

$$g(x, y)=f(\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y),$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są całkowite i $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Liczbę klas w ten sposób otrzymanych oznaczamy przez $h(d)$. Problem polega na wyznaczeniu wszystkich ujemnych wyróżników d, dla których $h(d)$ ma ustaloną wartość.

Gross i Zagier [1986], idąc drogą wskazaną przez D. Goldfelda, podali rozwiązanie, które Oesterlé [1985] ulepszył następnie do postaci (patrz też Goldfeld [1985])

$$h(d) > \frac{1}{55}\log|d| \cdot \prod_{\substack{p|d \\ p\neq|d|}} \left(1-\frac{[2\sqrt{p}]}{p+1}\right).$$

Goldfeld, Gross i Zagier otrzymali za ten wynik nagrodę Cole'a przyznawaną co 5 lat przez Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne za prace z teorii liczb.

D. *Hipoteza Mertensa* z 1897 r. dotycząca funkcji Möbiusa.

Funkcja Möbiusa $\mu(n)$ określona jest dla liczb naturalnych wzorem

$$\mu(n)=\begin{cases}(-1)^k, & \text{jeśli } n \text{ jest iloczynem } k \geqslant 0 \text{ różnych czynników pierwszych;}\\ 0, & \text{w przeciwnym razie.}\end{cases}$$

Mertens przypuszczał, że funkcja $M(x)=\sum_{n=1}^{x}\mu(n)$ spełnia nierówność

$$|M(x)|<\sqrt{x} \quad \text{dla } x>1.$$

Wynikałaby stąd hipoteza Riemanna.

Odlyzko i te Riele [1985] dowiedli, że przypuszczenie Mertensa nie jest prawdziwe, a nawet pokazali, że

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{M(x)}{\sqrt{x}}>1{,}006, \qquad \liminf_{x\to\infty}\frac{M(x)}{\sqrt{x}}<-1{,}0009.$$

Z drugiej strony Pintz [1987] dowiódł, że

$$|M(x_0)|>\sqrt{x_0} \quad \text{dla pewnego } x_0<e^{4\cdot 10^{64}}.$$

E. *Hipoteza Mordella* z 1922 r.: każda krzywa algebraiczna rodzaju >1 zawiera tylko skończenie wiele punktów wymiernych.

Rodzaj krzywej to liczba „uszek" odpowiedniej powierzchni Riemanna. Bardziej algebraicznie można krzywe rodzaju >1 scharakteryzować przez to, że nie są obrazami krzywych stopnia $\leqslant 3$ przy przekształceniach wymiernych.

Faltings [1983] potwierdził prawdziwość przypuszczenia Mordella, uogólniając je zarazem na dowolne algebraiczne ciała liczbowe. Otrzymał za to w 1986 r. medal Fieldsa.

Po tym przeglądzie rozwiązań klasycznych problemów przejdę do przeglądu systematycznego według następujących działów (kolejność według Mathematical Reviews):

1. Elementarna teoria liczb i ogólna addytywna teoria liczb.
2. Równania diofantyczne i geometria diofantyczna.
3. Geometria liczb i aproksymacja diofantyczna.
4. Analityczna teoria liczb.
5. Algebraiczna teoria liczb i obliczenia teorioliczbowe.

1. Na uwagę zasługują następujące wyniki:

A. (Heath-Brown [1984]). Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n takich, że n i $n+1$ mają tę samą liczbę dzielników.

Wynik ten potwierdza przypuszczenie P. Erdösa i L. Mirsky'ego z 1952 r.

B. (Pomerance i Selfridge [1980]). Dla dowolnych liczb naturalnych m i n istnieje przekształcenie f zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na zbiór $\{m+1, \ldots, m+n\}$ takie, że $(i, f(i)) = 1$ dla wszystkich $i \leqslant n$.

Potwierdza to przypuszczenie D. J. Newmana z 1962 r.

C. (Szegedy [1986]). Istnieje efektywnie obliczalna liczba n_0 taka, że dla dowolnych $n \geqslant n_0$ różnych liczb naturalnych $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\max_{i,j} \frac{a_i}{(a_i, a_j)} \geqslant n.$$

Stanowi to zasadniczy krok na drodze do dowodu przypuszczenia R. L. Grahama z 1970 r.

D. (Heath-Brown [1987]). Istnieją stałe $c > 0$ i $k > 0$ takie, że każdy zbiór liczb naturalnych $\leqslant x$ nie zawierający żadnego postępu arytmetycznego trójwyrazowego jest mocy $\leqslant kx/(\log x)^c$.

Taka stała k istnieje zapewne dla każdego c, ale poprzedni wynik w tym kierunku, pochodzący od K. F. Rotha z 1953 r., zawierał tylko oszacowanie $O(x/\log\log x)$.

2. A. Sławne twierdzenie Thuego z 1909 r. orzeka, że każde równanie diofantyczne

$$F(x, y) = a,$$

gdzie F jest formą nieprzywiedlną stopnia $r \geqslant 3$ i $a \neq 0$, ma tylko skończenie wiele rozwiązań całkowitych. Bombieri i Schmidt [1987] dowiedli, że liczba rozwiązań właściwych tego równania, tj. takich, że $(x, y) = 1$, nie przekracza cr^{1+t}, gdzie c jest stałą absolutną, a t jest liczbą różnych czynników pierw-

szych liczby a. Dla $a = 1$ oszacowanie to jest najlepsze z dokładnością do stałej c.

B. Ponieważ dla $n > 3$ krzywa $x^n + y^n = 1$ jest rodzaju > 1, więc z twierdzenia Faltingsa wynika, że dla każdego $n > 3$ równanie Fermata $x^n + y^n = z^n$ ma tylko skończoną liczbę rozwiązań właściwych. Stąd już stosunkowo łatwo Heath-Brown [1985] wyprowadził wniosek, że dla prawie wszystkich n równanie Fermata nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych (w sensie gęstości wykładników złożonych). W przypadku wykładników pierwszych postęp został dokonany dzięki pracom Adlemana i Heath-Browna [1985] oraz Fouvry'ego [1985]. Wynika z nich, że dla nieskończenie wielu liczb pierwszych n równanie $x^n + y^n = z^n$ pociąga za sobą podzielność $n \mid xyz$.

3. W geometrii liczb do odnotowania mamy dwa ważne wyniki dotyczące form kwadratowych o współczynnikach rzeczywistych.

A. (Margulis [1987]). Dla $n \geqslant 3$ każda forma nieokreślona $f \in \boldsymbol{R}[x_1, \ldots, x_n]$ taka, że dla $n < 5$ jest $f \neq \lambda g$, $g \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, przyjmuje w punktach całkowitych $\neq 0$ wartości dowolnie bliskie 0.

Dla $n \geqslant 5$ stanowi to potwierdzenie przypuszczenia Oppenheima z 1929 r.

B. (Kabatianskij i Lewensztejn [1978]). Każda forma kwadratowa dodatnio określona $f \in \boldsymbol{R}[x_1, \ldots, x_n]$ przyjmuje w punkcie całkowitym $\neq 0$ wartość nie przewyższającą liczby

$$2^{0,802+o(1)} \mathscr{D}^{1/n} (\varkappa_n)^{-2/n},$$

gdzie $\mathscr{D}$ jest wyróżnikiem formy f, zaś $\varkappa_n$ objętością kuli n-wymiarowej. W analogicznym oszacowaniu Blichfeldta z 1929 r. wykładnik przy potędze dwójki był postaci $1 + o(1)$.

W teorii aproksymacji diofantycznych na uwagę zasługują następujące wyniki:

C. (Apéry [1981], patrz też van der Poorten [1979]). Liczba $\zeta(3)$ jest niewymierna. Niewymierność liczby $\zeta(2)$ była udowodniona przez Legendre'a w 1794 r.

D. (Bombieri i Vaaler [1983]). Dla każdej macierzy całkowitej A rzędu m mającej m wierszy i n kolumn ($n > m$) istnieje $n-m$ wektorów całkowitych $\boldsymbol{x}_i = [x_{i1}, \ldots, x_{in}]$ $(1 \leqslant i \leqslant n-m)$, liniowo niezależnych i takich, że

$$A\boldsymbol{x}_i = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-m),$$

$$\prod_{i=1}^{n-m} \max_{i \leqslant n} |x_{ij}| \leqslant \sqrt{\det AA^t}.$$

4. A. Koniagin [1981] i niezależnie McGehee, Pigno i Smith [1981] rozwiązali problem Littlewooda z 1948 r., dowodząc, że istnieje stała $c > 0$

taka, że dla dowolnych różnych liczb całkowitych $n_1, \ldots, n_N$ norma w metryce L^1 wielomianu trygonometrycznego spełnia nierówność

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{N} e^{in_k x} \right| dx > c \log N.$$

Znalezione oszacowanie jest najlepsze możliwe z dokładnością do stałej c.

B. W badaniu funkcji ζ Riemanna dokonano niewątpliwego postępu w obliczeniach numerycznych. Van de Lune, te Riele i Winter [1986] stwierdzili, że pierwsze $1{,}5 \cdot 10^9$ zer funkcji ζ leży na prostej krytycznej.

Kuzniecow [1989] anonsował ważny rezultat teoretyczny

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^8 \, dt < c(\varepsilon) \, T^{1+\varepsilon}$$

dla każdego $\varepsilon > 0$, który jednak nie został dotychczas powszechnie zaakceptowany (dowód nie ukazał się jeszcze drukiem).

C. W teorii rozmieszczenia liczb pierwszych notujemy pewien postęp w badaniu zmian znaku funkcji $\pi(x) - \operatorname{li} x$. H. te Riele [1987] dowiódł, że pierwsza zmiana znaku zachodzi poniżej $7 \cdot 10^{370}$, a Kaczorowski [1985] wykazał, że istnieją x_0 i $c > 0$ takie, że dla $x > x_0$ liczba zmian znaku w przedziale $[1, x]$ jest większa niż $c \log x$. Pięćdziesiąt lat wcześniej to samo oszacowanie zostało podane przez A. E. Inghama, przy pewnym dodatkowym, dotąd nie udowodnionym założeniu o zerach funkcji ζ.

W oszacowaniu różnic między kolejnymi wyrazami ciągu liczb pierwszych p_n osiągnięto następujące rezultaty:

$$\limsup \frac{\log(p_{n+1} - p_n)}{\log p_n} \leqslant \frac{11}{20} - \frac{1}{384} \quad \text{(Mozzocchi [1986])},$$

$$\limsup \frac{(p_{n+1} - p_n)(\log_3 p_n)^2}{\log p_n \cdot \log_2 p_n \cdot \log_4 p_n} \geqslant e^{\gamma} c,$$

gdzie γ jest stałą Eulera, zaś $c = 1{,}32\ldots$ pierwiastkiem równania $4/c = 3 + e^{-4/c}$ (Maier i Pomerance [1988]); $\log_k x$ oznacza tutaj k-tą iterację funkcji $\log x$. Postęp wyraża się w składniku $-\frac{1}{384}$ i w czynniku c.

D. Maier i Tenenbaum [1985] dowiedli, że prawie każda (w sensie gęstości) liczba naturalna ma dwa dzielniki d_1 i d_2 takie, że $d_1 < d_2 < 2d_1$.

Maier i Tenenbaum rozwiązali w ten sposób problem postawiony przez P. Erdösa w 1934 r. i otrzymali odeń nagrodę 600 dolarów. Dowiedli oni nawet więcej, a mianowicie, że dla prawie wszystkich liczb naturalnych n funkcja

$$\Delta(n) = \max_a \sum_{\substack{d \mid n \\ a < d < ea}} 1$$

spełnia nierówność $\Delta(n) > (\log\log n)^c$ przy pewnym $c > 0$.

Funkcja $\Delta(n)$ wprowadzona przez C. Hooley'a okazała się przydatna w wielu pozornie ze sobą nie związanych zagadnieniach teorii liczb.

E. Modyfikując klasyczny problem Waringa, Hardy i Littlewood wprowadzili w 1920 r. funkcję $G(n)$ określoną jako najmniejsza liczba n-tych potęg liczb całkowitych nieujemnych, wystarczająca do przedstawienia w postaci sumy każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej. Vaughan [1989] dowiódł, że

$$G(5) \leqslant 19, \quad G(6) \leqslant 29, \quad G(7) \leqslant 41, \quad G(8) \leqslant 57, \quad G(9) \leqslant 75, \quad G(10) \leqslant 93$$

oraz

$$G(n) \leqslant 2n(\log n + \log\log\log n + 1 + \log 2 + o(1)).$$

F. Iwaniec i Mozzocchi [1988] dowiedli, że dla każdego $\varepsilon > 0$ liczba punktów kratowych leżących w kole o środku 0 i promieniu $\sqrt{x}$ różni się od pola koła πx o mniej niż $c(\varepsilon)x^{7/22+\varepsilon}$. W oszacowaniu Sierpińskiego z 1906 r. zamiast $7/22+\varepsilon$ występowała $1/3$.

G. Na pograniczu analitycznej i algebraicznej teorii liczb w *Mathematical Reviews* umieszcza się prace o współczynnikach rozwinięć Taylora funkcji wymiernych, czyli ciągach rekurencyjnych liniowych. Dla każdego takiego ciągu u_n istnieje równanie minimalnego rzędu postaci

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k}.$$

Przy założeniu, że ciąg u_n zawiera nieskończenie wiele wyrazów różnych od 0, równanie powyższe jest wyznaczone przez ten ciąg jednoznacznie. Niech

$$x^k - a_1 x^{k-1} - \ldots - a_k = \prod_{i=1}^{h} (x-\theta_i)^{e_i},$$

gdzie θ_i są różnymi liczbami zespolonymi. Ciąg u_n nazywamy niezdegenerowanym, jeśli żadna z liczb θ_i/θ_j $(1 \leqslant i < j \leqslant h)$ nie jest pierwiastkiem z jedności. Van der Poorten i Schlickewei [1982] (patrz też Evertse [1984]) dowiedli, że dla każdego ciągu niezdegenerowanego zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|u_n|}{n} = \max_{1\leqslant i\leqslant h} \log|\theta_i|.$$

5. Rozwiązanie problemu Gaussa można wysłowić w języku ideałów pierścieni liczb całkowitych ciał algebraicznych. Inny problem związany z pracami Gaussa, chociaż nie postawiony przezeń explicite, został rozwiązany przez Matthewsa [1979]. Podał on jawny, choć dość skomplikowany, wzór dla sum postaci $\sum_{n=0}^{p-1} \exp(2\pi i n^e/p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą, zaś $e = 3$ lub 4. Dla $e = 3$ wzór zawiera funkcje eliptyczne, lecz dla $e = 4$ jest porównywalny z klasycznym wzorem Gaussa ($e = 2$). Poza tymi wynikami zapewne najważniejszym osiągnięciem omawianego okresu w algebraicznej teorii liczb był

dowód tzw. głównego przypuszczenia o ciałach cyklotomicznych, podany przez Mazura i Wilesa [1984]. Ze względu na techniczny charakter tego wyniku nie będę go tutaj omawiał. Wspomnę natomiast o dwóch pracach teoretycznych z zakresu obliczeń teorioliczbowych.

Adleman, Pomerance i Rumely [1983] podali algorytm rozstrzygnięcia, czy liczba n jest pierwsza, wymagający co najwyżej

$$(\log n)^{c \log\log\log n}$$

operacji. A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, Jr. i L. Lovász [1982] podali algorytm rozkładania na czynniki wielomianów o współczynnikach całkowitych wymagający

$$O(n^{12} + n^9 (\log \|f\|)^3)$$

operacji, gdzie n jest stopniem wielomianu f, a $\|f\|$ pierwiastkiem kwadratowym z sumy kwadratów jego współczynników.

Bibliografia

L. M. Adleman, D. R. Heath-Brown [1985], *The first case of Fermat's last theorem*, Invent. Math. 79, 409–416.

L. M. Adleman, C. Pomerance, R. S. Rumely [1983], *On distinguishing prime numbers from composite numbers*, Ann. of Math. (2) 117, 173–206.

R. Apéry [1981], *Interpolation de fractions continues et irrationalité de certaines constantes*, Comité des travaux historiques et scientifiques: Bull. Sec. Sci., III, 37–53.

R. Balasubramanian, J. M. Deshouillers, F. Dress [1986], *Problème de Waring pour les bicarrés*, 1: *schéma de la solution*, C. R. Acad. Sci. Paris 303, 85–88, 2: *résultats auxiliaires pour le théorème asymptotique*, ibidem, 161–163.

E. Bombieri, W. M. Schmidt [1987], *On Thue's equation*, Invent. Math. 88, 69–81.

E. Bombieri, J. D. Vaaler [1983], *On Siegel's lemma*, ibidem 73, 11–32, Addendum, ibidem 75, 377.

N. D. Elkies [1988], *On* $A^4+B^4+C^4=D^4$, Math. Comp. 51, 824–835.

J. H. Evertse [1984], *On sums of S-units and linear recurrences*, Compositio Math. 53, 225–244.

G. Faltings [1983], *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. 73, 349–366, Erratum, ibidem 75, 381.

E. Fouvry [1985], *Théorème de Brun–Titchmarsh, application au théorème de Fermat*, ibidem 73, 383–407.

D. Goldfeld [1985], *Gauss' class number problem for imaginary quadratic fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 13, 23–37.

B. Gross, D. Zagier [1986], *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math. 84, 225–320.

D. R. Heath-Brown [1984], *The divisor function at consecutive integers*, Mathematika 31, 141–149.

D. R. Heath-Brown [1985], *Fermat's Last Theorem for "almost all" exponents*, Bull. London Math. Soc. 17, 15–16.

D. R. Heath-Brown [1987], *Integer sets containing no arithmetic progression*, J. London Math. Soc. 35, 385–394.

H. Iwaniec, C. J. Mozzocchi [1988], *On the divisor and circle problems*, J. Number Theory 29, 60–93.

G. A. Kabatianskij, W. I. Lewensztejn [1978], *O granicach dla układok na sfierie i w prostranstwie*, Problemy Pieriedaczi Informacii 14, no 1, 3–25.

J. Kaczorowski [1985], *On sign-changes in the remainder-term of the prime-number formula*, II, Acta Arith. 45, 65–74.

S. W. Koniagin [1981], *O problemie Littlewooda*, Izw. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 45, 243–265.

N. W. Kuzniecow [1989], *Sums of Kloosterman sums and the eighth power moment of the Riemann zeta function*, Number Theory and Related Topics, Oxford University Press, 57–117.

A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, Jr., L. Lovász [1982], *Factoring polynomials with rational coefficients*, Math. Ann. 261, 515–534.

H. Maier, C. Pomerance [1989], *Unusually large gaps between consecutive primes*, Théorie des Nombres (Québec, PQ, 1987), de Gruyter, Berlin–New York, 625–632.

H. Maier, G. Tenenbaum [1984], *On the set of divisors of an integer*, Invent. Math. 76, 121–128.

G. A. Margulis [1987], *Formes quadratiques indéfinies et flots unipotents sur les espaces homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 304, 249–253.

C. R. Matthews [1979], *Gauss sums and elliptic functions. I. The Kummer sum*, Invent. Math. 52, 163–185; *II. The quartic sum*, ibidem 54, 23–52.

B. Mazur, A. Wiles [1984], *Class fields of abelian extensions of* $\boldsymbol{Q}$, ibidem 76, 179–230.

O. C. McGehee, L. Pigno, B. Smith [1981], *Hardy's inequality and the* L^1 *norm of exponential sums*, Ann. of Math. (2) 113, 613–618.

C. J. Mozzocchi [1986], *On the difference between consecutive primes*, J. Number Theory 24, 181–187.

A. M. Odlyzko, H. J. J. te Riele [1985], *Disproof of the Mertens conjecture*, J. Reine Angew. Math. 357, 138–160.

J. Oesterlé [1985], *Nombres de classes des corps quadratiques imaginaires*, Astérisque 121/122, 309–323.

J. Pintz [1987], *An effective disproof of the Mertens conjecture*, Astérisque 147/148, 325–333.

C. Pomerance, J. L. Selfridge [1980], *Proof of D. J. Newman's coprime mapping conjecture*, Mathematika 27, 69–83.

H. Riesel, R. C. Vaughan [1983], *On sums of primes*, Ark. Mat. 21, 45–74.

A. Schinzel [1979], *Postęp w teorii liczb w latach 1966–1978*, Wiadom. Mat. 22, 1–11.

M. Szegedy [1986], *The solution of Graham's greatest common divisor problem*, Combinatorica 6, 67–71.

H. J. J. te Riele [1987], *On the sign of the difference* $\pi(x)-\operatorname{li} x$, Math. Comp. 48, 323–328.

J. van de Lune, H. J. J. te Riele, D. T. Winter [1986], *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip, IV*, ibidem 47, 667–681.

A. J. van der Poorten [1979], *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$. *An informal report*, Math. Intelligencer 1 (1978/79), 195–203.

A. J. van der Poorten, H. P. Schlickewei [1982], *The growth conditions for recurrence sequences*, Macquarie Math. Reports 82-0041, Macquarie University, Australia 2109.

R. C. Vaughan [1989], *A new iterative method in Waring's problem*, Acta Math. 162, 1–71.