ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXIX (1990)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ALEKSANDER PEŁCZYŃSKI (Warszawa)

# O pewnych wynikach uzyskanych w Instytucie Matematycznym PAN*

Na takich imprezach jak dzisiejsza zwyczajowo wygłasza się referat analizujący osiągnięcia pracowników instytucji obchodzącej jubileusz. Nie jestem przekonany, czy obchodzenie naszego jubileuszu w formie okolicznościowej akademii jest potrzebne. Wydaje mi się, że zorganizowanie konferencji np. z topologii przyniosłoby większą korzyść. Nie zdołałem jednak przekonać o tym organizatorów. Natomiast mając wolną rękę przy wyborze prezentowanych osiągnięć, postanowiłem w miarę szczegółowo omówić trzy wybrane rezultaty naszych kolegów. Nie wymienię ich nazwisk, zostawiając słuchaczom domyślenie się, o kogo chodzi. Czytelnicy *Wiadomości Matematycznych* znajdą odpowiedź ukrytą dalej w tekście.

**1. Spektralna charakteryzacja funkcjonałów liniowo-multyplikatywnych w algebrach Banacha.** Homomorfizmy algebr Banacha w ciało $C$ liczb zespolonych, czyli funkcjonały liniowo-multyplikatywne, odgrywają fundamentalną rolę w teorii algebr Banacha, w szczególności przy konstrukcji odwzorowania Gelfanda, będącego abstrakcyjną wersją transformaty Fouriera.

Powstaje pytanie, jak scharakteryzować te funkcjonały w klasie funkcjonałów liniowych. Warunki konieczne są oczywiste. Mianowicie załóżmy, że $A$ jest algebrą Banacha z jedynką $e$ spełniającą $\|e\| = 1$, a funkcjonał $\Phi\colon A \to C$ jest liniowo-multyplikatywny. Wówczas

(i) $$\Phi(e) = 1,$$

(ii) $\Phi(x) \neq 0$ dla każdego elementu $x$ odwracalnego w $A$.

Otóż okazuje się, że te warunki są już wystarczające.

* Referat wygłoszony 16 grudnia 1988 r. z okazji 40-lecia IM PAN.

TWIERDZENIE. *Niech* $\Phi\colon A \to \mathbf{C}$ *będzie funkcjonałem liniowym spełniającym* (i) *i* (ii). *Wówczas dla dowolnych* $x, y \in A$ *zachodzi równość*

(iii) $$\Phi(xy) = \Phi(x)\,\Phi(y).$$

*Ponadto* $\|\Phi\| = 1$.

Dowód. 1° *Funkcjonał* $\Phi$ *jest ograniczony.* Istotnie, załóżmy, że $x \in A$ i $\|x\| < 1$. Wówczas element $te - x$ jest odwracalny dla każdego $t \in \mathbf{C}$ spełniającego nierówność $|t| \geqslant 1$, a stąd

$$\Phi(te - x) = t - \Phi(x) \neq 0.$$

Zatem $|\Phi(x)| < 1$ i $\|\Phi\| = 1$.

2° (Podstawowy krok dowodu). Niech $x$ będzie dowolnym, ustalonym elementem algebry $A$. Pokażemy, że

$$\Phi(x^n) = (\Phi(x))^n \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Bez zmniejszania ogólności można założyć, że $\|x\| = 1$. Rozpatrzmy funkcję zmiennej $\lambda \in \mathbf{C}$ określoną wzorem $f(\lambda) = \Phi(e^{\lambda x})$. Z definicji elementu $e^{\lambda x}$ w $A$ wynika, że

$$f(\lambda) = \Phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \Phi(x^n).$$

Zatem $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ jest funkcją całkowitą, $f(0) = 1$ oraz $f(\lambda) \neq 0$, bo $e^{\lambda x}$ jest odwracalne dla $\lambda \in \mathbf{C}$. Ponadto z nierówności

$$|\Phi(x^n)| \leqslant \|x^n\| \leqslant \|x\|^n = 1$$

wynika, że

$$|f(\lambda)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \Phi(x^n)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda^n|}{n!} = e^{|\lambda|}.$$

Ponieważ $f(\lambda) \neq 0$ dla $\lambda \in \mathbf{C}$, więc istnieje funkcja całkowita $g$ taka, że $f(\lambda) = e^{g(\lambda)}$. Z pozostałych warunków wynika, że

(1) $$g(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad |\operatorname{Re} g(\lambda)| \leqslant |\lambda| \quad \text{dla } \lambda \in \mathbf{C}.$$

Wykorzystamy teraz następujący (pokrewny twierdzeniu Liouville'a)

LEMAT. *Jeżeli funkcja całkowita* $g$ *spełnia* (1), *to jest postaci* $g(\lambda) = c\lambda$.

Dowód. Rozważamy funkcję pomocniczą

$$h_{k,r}(\lambda) = \frac{r^2\left(g(\lambda) - \lambda g'(0)\right)}{\lambda^k\left(g(\lambda) - \lambda g'(0) - 2\left(1 + |g'(0)|\right)\right)},$$

gdzie $r > 0$, $k = 2, 3, \ldots$ Stosując zasadę maksimum i indukcję względem $k$, stwierdzamy, iż $g^{(k)}(0) = 0$ dla $k = 2, 3, \ldots$ Korzystamy przy tym z tego, że dla

dowolnego $\lambda$ spełniającego $|\lambda| = r$, z warunku $|\mathrm{Re}\, g(\lambda)| \leqslant |\lambda|$ wynika nierówność

$$|g(\lambda) - \lambda g'(0)| \leqslant |g(\lambda) - \lambda g'(0) - 2r(|g'(0)| + 1)|;$$

wynika stąd, że istnieje $c \in \boldsymbol{C}$ takie, że $f(\lambda) = e^{c\lambda}$. Zatem $\Phi(e^{\lambda x}) = e^{c\lambda}$, czyli

$$\sum \lambda^n \Phi(x^n)/n! = \sum \lambda^n c^n/n!.$$

Z dowolności $\lambda$ i jednoznaczności współczynników wnioskujemy, że

$$\Phi(x^n) = c^n = (\Phi(x))^n \quad \text{dla } n = 2, 3, \ldots$$

3° *Dla dowolnych* $x, y \in A$ *zachodzi* (iii).

Dla algebr przemiennych fakt ten jest oczywistą konsekwencją poprzedniego kroku dowodowego i tożsamości $(x+y)^2 - x^2 - y^2 = 2xy$. Dla algebr nieprzemiennych mamy tożsamość

$$(x+y)^2 - x^2 - y^2 = xy + yx,$$

z której wynika tylko, że $2\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(xy+yx)$. Okazuje się jednak, że można podać czysto algebraiczny dowód kroku 3° wymagający jedynie pewnych dalszych tożsamości wielomianowych.

Omawiane tu twierdzenie udowodnili A. M. Gleason oraz niezależnie J.-P. Kahane wspólnie z pracownikiem IM PAN. Jest to więc bardzo dobry przykład „joint venture" z udziałem kapitału zagranicznego. Zostało ono odkryte zadziwiająco późno, bo dopiero w końcu lat sześćdziesiątych, gdy ogólna teoria algebr Banacha była już w pełni ukształtowana. Twierdzenie to weszło później do podręcznika W. Rudina *Functional Analysis.*

**2. Topologiczna równoważność przestrzeni Banacha ustalonego ciężaru.** Omawiane niżej rezultaty uzyskano na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych. Ich punktem wyjścia był wynik następujący:

TWIERDZENIE (Kadec, Anderson, 1966). *Każda nieskończenie wymiarowa ośrodkowa przestrzeń Banacha (ogólniej, każda nieskończenie wymiarowa ośrodkowa przestrzeń Frécheta, tzn. liniowo-metryczna, zupełna, lokalnie wypukła) jest homeomorficzna z przestrzenią* $l^2$.

Nasunęło się naturalne pytanie, czy fakt ten da się uogólnić na przypadek przestrzeni nieośrodkowych. Pozytywna odpowiedź na to pytanie — to drugie z omawianych dziś osiągnięć pracowników IM PAN. Uzyskanie tego rezultatu wymagało wprowadzenia nowych technik opartych na istotnej modyfikacji techniki Andersona zbiorów zaniedbywalnych i prawie zupełnego odejścia od liniowych metod przestrzeni Banacha występujących w podejściu Kadeca.

Techniczne skomplikowanie dowodów, limit czasu, a także moje niepełne zrozumienie przedmiotu zmusza mnie do podania jedynie podstawowych wyników i ograniczenia się do paru komentarzy dotyczących użytych środków dowodowych.

*Ciężarem* $w(X)$ przestrzeni metrycznej $X$ nazywamy minimalną moc bazy otoczeń w $X$. Jeżeli $A$ jest zbiorem nieskończonym mocy $|A|$, to ciężar przestrzeń Hilberta $l^2(A)$ jest równy $|A|$; symbolem $l^2(A)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich funkcji $f\colon A \to \boldsymbol{C}$ takich, że zbiór $\{a\colon f(a) \neq 0\}$ jest przeliczalny i $\sum |f(a)|^2 < \infty$; jeżeli $A$ jest zbiorem liczb naturalnych, to $l^2(A)$ jest zwykłą przestrzenią $l^2$. Ciężar przestrzeni metrycznej jest oczywiście niezmiennikiem topologicznym. Okazuje się, że ciężar nieośrodkowych przestrzeni Banacha całkowicie charakteryzuje ich typ topologiczny:

TWIERDZENIE I. *Każda przestrzeń Banacha (ogólniej, każda przestrzeń Frécheta) ciężaru* $|A| > \aleph_0$ *jest homeomorficzna z* $l^2(A)$.

Twierdzenie to jest konsekwencją następującej topologicznej charakteryzacji przestrzeni $l^2(A)$ w klasie przestrzeni metrycznych zupełnych:

TWIERDZENIE II. *Niech* $X$ *będzie przestrzenią metryczną zupełną. Wówczas następujące warunki są równoważne*:

(a) $X \sim l^2(A)$ (*czytaj*: $X$ *jest homeomorficzne z* $l^2(A)$),

(b) $X$ *ma następujące własności*:

(i) $w(X) = |A|$,

(ii) $X \in \mathrm{AR}$ (*czytaj*: $X$ *jest retraktem absolutnym*),

(iii) $X \sim X \times l^2$,

(iv) *Istnieje w* $X$ *metryka* $\varrho$ *równoważna metryce danej i taka, że każde odwzorowanie ciągłe*

$$f\colon A \times Q \to X \tag{2}$$

(*gdzie* $Q$ *oznacza kostkę Hilberta* $I^{\aleph_0}$, $A$ *zaś jest dyskretne*) *jest* $\varrho$*-jednostajnie aproksymowalne takimi odwzorowaniami ciągłymi* $g\colon A \times Q \to X$, *które przeprowadzają włókna* $(\{a\} \times Q)_{a \in A}$ *w rodziny* $\sigma$*-dyskretne.*

Uwaga. Jeżeli w twierdzeniu II zastąpimy warunek (ii) słabszym warunkiem $X \in \mathrm{ANR}$ (absolutny retrakt otoczeniowy), otrzymamy topologiczną charakteryzację rozmaitości zupełnych modelowanych na przestrzeni Hilberta.

W kręgu tych idei pozostaje też następujący wynik:

TWIERDZENIE III. *Przeliczalny produkt topologiczny niezwartych metrycznych przestrzeni* AR *jest homeomorficzny z przestrzenią Hilberta.*

Przejdę teraz do uwag dotyczących dowodów twierdzeń I i II. Otóż prosto dowodzi się implikacji:

*Twierdzenie* II *pociąga za sobą twierdzenie* I.

Dowód. Jeżeli $X$ jest przestrzenią Frécheta oraz $w(X) = |A| > \aleph_0$, to $X \in \mathrm{AR}$ na mocy twierdzenia Dugundjiego z lat pięćdziesiątych. Własność (iii) jest konsekwencją twierdzenia Kadeca–Andersona i następującego wyniku:

TWIERDZENIE (Bartle i Graves, 1956). *Każda podprzestrzeń liniowa domknięta $X$ przestrzeni Frécheta $Y$ jest jej topologicznym składnikiem prostym, tzn. $Y$ jest homeomorficzne z pewnym produktem $X \times Z$.*

Pozostaje jeszcze sprawdzenie warunku (iv). Z pewnika wyboru wynika, że w zbiorze $A$ istnieje dobry porządek $<$ taki, że

$$\forall_{a \in A} \; |\{a' \in A\colon a' < a\}| < |A|.$$

Niech dane będzie przekształcenie ciągłe $f\colon Q \times A \to X$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dowolną przesuwalną równoważną metrykę $\varrho$ na $X$. Funkcję $g$ określamy przez indukcję pozaskończoną. Rozpoczynamy od najmniejszego elementu $a_0$ w porządku $<$, oznaczając

$$g(a_0, q) = f(a_0, q) \quad \text{dla } q \in Q.$$

Przypuśćmy, że dla pewnego $a \in A$ określiliśmy funkcję ciągłą $g$ na zbiorze $I_a \times Q$, gdzie $I_a = \{a'\colon a_0 \leqslant a' < a\}$. Niech $X_a$ będzie domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni $X$ generowaną przez zbiór

$$g(I_a \times Q) \cup f(\{a\} \times Q).$$

Łatwo sprawdzić, że $w(X_a) < w(X)$ (korzysta się tu z tego, że funkcje $f$ i $g$ są ciągłe, zaś $\{a\} \times Q$ jest zwarte, więc ośrodkowe). Istnieje zatem element $x_a$ w kuli $\{x\colon \varrho(x, 0) < \varepsilon\}$ nie należący do $X_a$. Definiujemy

$$g(a, q) = f(a, q) + x_a \quad \text{dla } q \in Q.$$

Tak określone $g$ spełnia warunek

$$\varrho(g(a, q), f(a, q)) < \varepsilon \quad \text{dla } (a, q) \in A \times Q$$

oraz przeprowadza włókna $(\{a\} \times Q)_{a \in A}$ w rodzinę $\sigma$-dyskretną.

W dowodzie twierdzenia II wykorzystuje się modyfikacje różnorodnych technik stworzonych przez wielu matematyków, m.in. przez R. D. Andersona, Binga, Edwardsa i Hendersona. Zamiast bezpośrednio dowodzić istnienia homeomorfizmu z $X$ na $l^2(A)$, dowodzi się istnienia tzw. przybliżonego homeomorfizmu (odwzorowanie $h\colon Y \to Z$ nazywamy *przybliżonym homeomorfizmem*, gdy dla każdego otwartego pokrycia $\mathscr{K}$ zbioru $Z$ istnieje homeomorfizm $f$ z $Y$ na $Z$ taki, że dla każdego $y \in Y$ obrazy $h(y)$ i $f(y)$ leżą w tym samym elemencie pokrycia $\mathscr{K}$).

Ważną rolę odgrywa następujący wynik, zwany *kryterium Binga*:

TWIERDZENIE. *Niech $Y$ i $Z$ będą przestrzeniami metrycznymi zupełnymi. Odwzorowanie ciągłe $\pi\colon Y \to Z$ jest przybliżonym homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi(Y)$ jest gęste w $Z$ oraz spełniony jest następujący warunek: dla każdego pokrycia $\mathscr{U}$ przestrzeni $Y$ oraz pokrycia $\mathscr{V}$ przestrzeni $Z$ istnieje otwarte pokrycie $\mathscr{W}$ przestrzeni $Z$ i przybliżony homeomorfizm $f\colon Y \to Y$ taki, że dla każdego $y \in Y$ obrazy $\pi(y)$ i $\pi f(y)$ należą do tego samego elementu pokrycia $\mathscr{V}$ oraz $f\pi^{-1}(\mathscr{W})$ jest rozdrobnieniem pokrycia $\mathscr{U}$.*

W następnym kroku dowodu twierdzenia II, korzystając z (iv) konstruuje się przybliżone homeomorfizmy z $l^2(A)$ do $X$ na uzupełnieniach $\sigma$-dyskretnych obrazów zbioru $A \times Q$ w $X$.

**3. Ograniczoność pewnej klasy operatorów singularnych w $L^p(R)$.** Poniżej omówione rezultaty, pochodzące z nieukończonej jeszcze pracy, dotyczą problematyki klasycznej. Twierdzenia Riesza i Titchmarsha mówią, że dla każdego $p \in (1, \infty)$ transformata Hilberta

$$f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{y-x} dx$$

indukuje operator liniowy ograniczony z $L^p(R)$ do $L^p(R)$.

Fakt ten ma wielorakie uogólnienia. Michlin i Hörmander rozpatrywali operatory splotu w $R^n$ z jądrami o ujemnej jednorodności $-n$. Calderón i Zygmund wyróżnili klasę takich jąder, których multyplikatory utożsamili z funkcjami na sferze $S_{n-1}$ i które, mówiąc nieprecyzyjnie, na liniach prostych zachowują się tak jak transformata Hilberta.

Innym analogonem transformaty Hilberta jest operator Calderóna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,dx}{y-x+i(a(y)-a(x))},$$

gdzie $(x, a(x))_{x \in R}$ jest wykresem pewnej krzywej lipschitzowskiej (przypadek, gdy krzywą tą jest oś $x$, tzn. gdy $a(x) \equiv 0$, odpowiada transformacie Hilberta).

Rozłożenie operatora Calderóna na formalny szereg potęgowy doprowadziło Coifmana i Y. Meyera do badania tzw. *komutatorów*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a(y)-a(x))^k}{(y-x)^{k+1}} f(x)\,dx.$$

W latach osiemdziesiątych David i Journé stwierdzili, że ograniczoność komutatorów jest szczególnym przypadkiem wyniku odnoszącego się do ogólniejszej klasy jąder dystrybucyjnych. Kryteria $p$-ograniczoności operatorów indukowanych przez takie jądra sformułowali oni w terminach klasy BMO (*bounded mean oscillation*).

W tych samych latach Burkholder i Bourgain badali transformaty Hilberta funkcji o wartościach wektorowych (w przestrzeniach Banacha). Ograniczoność tych transformat okazała się równoważna ograniczoności tzw. transformat martyngałowych (nb. wynik ten był nowy nawet w przypadku skalarnym).

Omawiany poniżej rezultat pracownika IM PAN (który z konieczności podaję w bardzo uproszczonej wersji) łączy podejście Davida i Journé z podejściem Burkholdera i Bourgaina. Dla jego sformułowania przytoczymy kilka definicji.

Niech $\mathscr{I}$ oznacza zbiór wszystkich przedziałów diadycznych

$$I_{s,n} = [s2^n, (s+1)2^n], \quad s, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Przez *układ Haara na prostej* $\boldsymbol{R}$ rozumiemy układ $\{h_{s,n}\}_{s,n\in\boldsymbol{Z}}$ utworzony z funkcji

$$h_{s,n} = 2^{-n/2}(\chi_{I_{2s,n-1}} - \chi_{I_{2s+1,n-1}}),$$

gdzie $\chi_E$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $E$. Innymi słowy, rozpatrywany układ powstaje przez diadyczne przeskalowania i translacje jednej funkcji

$$h_{0,0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{dla } \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Z kolei zdefiniujemy przestrzeń $\mathrm{BMO}_d$ (będącą diadyczną modyfikacją przestrzeni BMO). Rozpatrujemy klasę wszystkich funkcji mierzalnych $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$, dla których skończona jest półnorma

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_d} = \sup_{I\in\mathscr{I}} |I|^{-1} \int_I |f(x) - c_I|\,dx < \infty,$$

gdzie $c_I = |I|^{-1}\int_I f(x)\,dx$.

TWIERDZENIE. *Niech* $\Phi\colon \mathscr{H}\times\mathscr{H}\to\boldsymbol{C}$ *będzie formą dwuliniową, gdzie* $\mathscr{H}$ *oznacza przestrzeń liniową rozpiętą na funkcjach charakterystycznych przedziałów* $I_{s,n}$. *Oznaczmy*

$$w_k^{(\varepsilon,\eta)} = \sup_{s,n} |\Phi(h_{s,n}^{\varepsilon}, h_{s+k,n}^{\eta})|,$$

*gdzie* $\varepsilon, \eta \in \{0, 1\}$, $k\in\boldsymbol{Z}$, *symbol* $h_{s,n}^0$ *oznacza* $|h_{s,n}|$, *a* $h_{s,n}^1 = h_{s,n}$. *Załóżmy, że*

$$\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \log(2+|k|)(w_k^{1,1} + w_k^{1,0} + w_k^{0,1}) < \infty. \tag{3}$$

*Niech* $1 < p < \infty$. *Wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby istniał operator liniowy ograniczony*

$$T\colon L^p(\boldsymbol{R}) \to L^p(\boldsymbol{R})$$

*taki, że*

$$\int_{\boldsymbol{R}} (Th)(x)\,h'(x)\,dx = \Phi(h, h') \quad \text{dla } h, h' \in \mathscr{H}, \tag{4}$$

*jest*

$$\sum_{s,n} \Phi(h_{s,n}, 1)\,h_{s,n} \in \mathrm{BMO}_d, \quad \sum_{s,n} \Phi(1, h_{s,n})\,h_{s,n} \in \mathrm{BMO}_d, \tag{5}$$

*gdzie*

$$\Phi(1, h_{s,n}) = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \Phi(\chi_{I_{k,n}}, h_{s,n}), \tag{6}$$

*a* $\Phi(h_{s,n}, 1)$ *określa się podobnie. Szereg po prawej stronie równości* (6) *jest absolutnie zbieżny na mocy* (3).

Dowód sformułowanego powyżej twierdzenia opiera się na przedstawieniu formy dwuliniowej $\Phi$ w postaci sumy kilku szeregów nieskończonych pewnych „wzorcowych" form liniowych, indukowanych przez operatory liniowe $T_k$, $U_k$ $(k \in \mathbf{Z})$, gdzie

$$T_k(h_{s,n}) = h_{s+k,n}, \qquad U_k(h_{s,n}) = |h_{s+k,n}| - |h_{s,n}|.$$

Operatory $P_a$ i $M_b$ zdefiniowane są wzorami

$$P_a(h_{s,n}) = a_{s,n} 2^{-n} \chi_{I_{s,n}}, \qquad M_b(h_{s,n}) = b_{s,n} h_{s,n},$$

gdzie $a = (a_{s,n})$ i $b = (b_{s,n})$ są pewnymi macierzami liczbowymi $(s, n \in \mathbf{Z})$ oraz $b \in l^\infty(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$. Poszukujemy operatora $T$ w postaci

$$T = \sum_k T_k M_{b'_k} + \sum_k U_k M_{b''_k} + \sum_k (U_k M_{b'''_k})^* + P_a + P_{a'}^*. \tag{7}$$

Warunek zgodności (4) formy dwuliniowej $\Phi$ z operatorem $T$ wyznacza macierze $b_k$, $b'_k$, $b''_k$, $a$, $a'$ jednoznacznie. Warunek (5) pociąga za sobą $p$-ograniczoność operatorów $P_a$ i $P_{a'}$ (przez interpolację).

Operatory $M_b$ są pewnymi transformacjami martyngałowymi. Ich $p$-ograniczoność to klasyczny wynik Paleya–Marcinkiewicza. Dokładniej mówiąc, zachodzi oszacowanie

$$\|M_b\|_{L^p(\mathbf{R})} \leqslant c_p \sup_{s,n} |b_{s,n}|.$$

Operatory $T_k$ i $U_k$ są kombinacjami liniowymi złożeń czterech transformat martyngałowych. Dokładna analiza pokazuje, że

$$\|T_k\|_{L^p(\mathbf{R})} \leqslant c_p \log(2+|k|), \qquad \|U\|_{L^p(\mathbf{R})} \leqslant c_p \log(2+|k|).$$

Warunek (3) gwarantuje absolutną zbieżność szeregów występujących w (7). W taki sposób pokazuje się, że warunek (5) jest wystarczający.

Oprócz powyższego twierdzenia udowodnione zostały pewne jego modyfikacje, w których przestrzeń $\mathscr{H}$ zastępuje się odpowiednimi klasami funkcji gładkich. Pozwalają one otrzymać wszystkie wyniki Davida–Journé o $p$-ograniczoności.

Otrzymane były kolejno wyniki autorstwa lub współautorstwa Wiesława Żelazki, Henryka Toruńczyka i Tadeusza Figla.