ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXIX (1990)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

WIESŁAW PLEŚNIAK (Kraków)

# Zastosowania nierówności Markowa w analizie różniczkowej*

Powszechnie znana nierówność Markowa mówi, że dla każdego wielomianu $p$ stopnia nie większego od $n$

$$|p'(x)| \leqslant n^2 \|p\|_{[-1,1]}, \qquad x \in [-1, 1], \tag{1}$$

gdzie $\|p\|_I := \sup\{|p(x)|: x \in I\}$, przy czym dla wielomianów Czebyszewa

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad (x \in [-1, 1])$$

otrzymujemy równość

$$T_n'(1) = n^2 \|T_n\|_{[-1,1]} = n^2.$$

Historia tej nierówności liczy już jeden wiek. Dokładniej, w 1887 roku D. I. Mendelejew (w związku z badaniami zależności ciężaru właściwego roztworu od stężenia substancji) poszukiwał oszacowania pochodnej $p'(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ dla wielomianu $p$ o normie $\|p\|_{[-1,1]} \leqslant 1$. Mendelejew znalazł takie oszacowanie dla wielomianów stopnia 2, natomiast rozwiązanie ogólne podał w postaci nierówności (1) Andriej Andriejewicz Markow w roku 1889, opublikowane w pracy [MaA]. Dokładne oszacowanie dla $k$-tej pochodnej wielomianu $p$ znalazł 3 lata później jego brat W. A. Markow [MaW]. Ma ono postać

$$|p^{(k)}(x)| \leqslant \frac{n^2(n^2-1)\ldots(n^2-(k-1)^2)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} \|p\|_{[-1,1]} \tag{2}$$

dla $x \in [-1, 1]$ oraz $k = 1, 2, \ldots, n$, przy czym dla każdego $k$ otrzymuje się równość, gdy wielomian $p$ jest (z dokładnością do stałego czynnika) wielomianem Czebyszewa $T_n$ oraz $x = 1$.

Nierówność Markowa (1) znalazła zastosowanie w wielu konkretnych zagadnieniach techniki, np. w optyce (zob. [RaSh], str. 20 i podane tam

* Odczyt plenarny wygłoszony przez autora na Sesji Naukowej PTM w Poznaniu w dniu 14 września 1988 roku.

referencje). Jest ona też podstawowym narzędziem w teorii aproksymacji, szczególnie w konstruktywnej teorii funkcji. Z tego powodu nierówność Markowa stała się punktem wyjścia niezliczonej ilości badań i obrosła już w niezmiernie bogatą literaturę. Z naturalnych powodów badania te skupiały się głównie na przypadku jednej zmiennej, a podejmowane były przez takich matematyków jak S. N. Bernstein, G. Szegö, A. Zygmund, P. Turán. Świetny przegląd jednowymiarowej teorii nierówności Markowa znajdzie Czytelnik w cytowanej już monografii [RaSh].

Uogólnienia na przypadek wielu zmiennych powstawały z dużym trudem i dotyczyły głównie sytuacji dających się łatwo sprowadzić do przypadku jednowymiarowego (np. wersje nierówności Markowa dla zbiorów zwartych wypukłych w $\boldsymbol{R}^N$ — Coatmelec [Co], czy też ogólniej, dla zbiorów z własnością równoległościanu — Zerner [Ze], Baouendi i Goulaouic [BaGu]). Pewnym postępem w tej dziedzinie była metoda oparta na własnościach funkcji ekstremalnej Siciaka $\Phi_E$ skojarzonej ze zbiorem zwartym $E$ w $\boldsymbol{C}^N$, określonej wzorem

$$\Phi_E(x) = \sup\{|p(x)|^{1/\deg p}\colon\ p \in P(E)\} \quad \text{dla } x \in \boldsymbol{C}^N,$$

gdzie $P(E)$ jest rodziną wielomianów z $\boldsymbol{C}^N$ do $\boldsymbol{C}$, różnych od stałych, o normie $\|p\|_E \leqslant 1$. Dzięki tej metodzie uzyskano wersje nierówności Markowa dla szerokiej klasy zbiorów zwartych w $\boldsymbol{C}^N$ zawierającej m.in. zbiory z własnością równoległościanu (zob. [Pl1], [Si1]). Żaden z tych rezultatów nie obejmował jednak przypadku zbiorów z zerowymi ostrzami. Na pierwszy wynik w tym kierunku trzeba było czekać stosunkowo długo, bo do roku 1980, kiedy to Goetgheluck [Gt] oszacował pochodne wielomianów dwóch zmiennych na zbiorze

$$E_p = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^p\}, \qquad p \geqslant 1.$$

Rezultat Goetgheluckа był dla autorów pracy [PaPl1] inspiracją do badań nad wersją nierówności Markowa dla rodziny zbiorów semianalitycznych w $\boldsymbol{R}^N$ (do której oczywiście należą zbiory $E_p$) i ogólniej, dla zbiorów subanalitycznych. Przypomnijmy tutaj, że zbiór $E$ w $\boldsymbol{R}^N$ nazywamy *semianalitycznym*, jeżeli do każdego punktu $x \in \boldsymbol{R}^N$ można znaleźć otoczenie $U_x$ i skończoną rodzinę funkcji $f_{ij}$, $g_{ij}$ analitycznych rzeczywistych w $U_x$, taką, że

$$E \cap U_x = \bigcup_i \bigcap_j \{f_{ij} > 0,\ g_{ij} = 0\}.$$

Rzut zbioru semianalitycznego (względnie zwartego) nie musi być zbiorem semianalitycznym (zob. [Ło1], str. 133–135). Dołączając do rodziny zbiorów semianalitycznych ich obrazy poprzez odwzorowania analityczne właściwe, otrzymujemy rodzinę zbiorów subanalitycznych (zob. np. [Bi]). Inaczej, według definicji pochodzącej od Łojasiewicza i jego uczniów, zbiór $E \subset \boldsymbol{R}^N$ nazywamy *subanalitycznym*, jeśli do każdego punktu $x \in \boldsymbol{R}^N$ można dobrać otoczenie $U_x$ i ograniczony zbiór semianalityczny $A \subset \boldsymbol{R}^M$ $(M \geqslant N)$ tak, aby

$\pi(A) = E \cap U_x$, gdzie $\pi$ jest rzutowaniem kanonicznym $\boldsymbol{R}^M$ na $\boldsymbol{R}^N$. Podstawowe fakty dotyczące teorii zbiorów semianalitycznych i subanalitycznych znajdzie Czytelnik w [Ło1], [DŁS] i [Sta].

Ze słynnego twierdzenia Hironaki o rektylinearyzacji wynika (zob. [PaPl1, Corollary 6.2]), że każdy zbiór otwarty ograniczony subanalityczny w $\boldsymbol{R}^N$ jest sumą skończonej liczby obrazów kostki jednostkowej w $\boldsymbol{R}^N$ poprzez odwzorowania analityczne rzeczywiste. Stosując ten dalece nietrywialny rezultat([1]), pokazano w [PaPl1, Corollary 6.6], że zbiory zwarte *tłuste* (czyli równe domknięciu swojego wnętrza) subanalityczne w $\boldsymbol{R}^N$ należą do rodziny zbiorów o ostrzach wielomianowych, zwanych dalej UPC (*uniformly polynomially cuspidal*), które określa się następująco:

DEFINICJA. Mówimy, że $E \subset \boldsymbol{K}^N$, gdzie $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ lub $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$, jest UPC, jeśli istnieją stałe dodatnie $M$ i $m$ oraz liczba naturalna $d$ takie, że dla każdego $x \in \bar{E}$ można dobrać odwzorowanie wielomianowe $h_x\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{K}^N$ stopnia co najwyżej $d$, dla którego

1° $h_x((0, 1]) \subset E$ oraz $h_x(0) = x$,

2° $\operatorname{dist}(h_x(t), \boldsymbol{K}^N \setminus E) \geqslant Mt^m$ dla $x \in \bar{E}$, $t \in (0, 1]$.

Okazało się ([PaPl1, Theorem 4.1]), że funkcja ekstremalna Siciaka zbioru zwartego UPC $E \subset \boldsymbol{K}^N$ spełnia następujący warunek Höldera:

$$\text{(H)} \qquad \Phi_E(x) \leqslant 1 + M'\delta^{m'}, \quad \text{gdy } \operatorname{dist}(x, E) \leqslant \delta \leqslant 1,$$

gdzie stałe dodatnie $M'$ i $m'$ nie zależą od $\delta$. Wynik ten, w szczególności, wzmacnia istotnie rezultat pracy [Pl2] (uzyskany na podstawie klasycznego twierdzenia Puiseux — zob. np. [Ło2]), zgodnie z którym dla każdego zbioru zwartego tłustego subanalitycznego $E$ w $\boldsymbol{R}^N$ funkcja ekstremalna $\Phi_E$ jest ciągła w $\boldsymbol{C}^N$. Podkreślić jednak należy, że wzmocnienie to uzyskuje się dzięki zastosowaniu potężnego narzędzia, jakim jest twierdzenie Hironaki o rektylinearyzacji. Stosując teraz wzór całkowy Cauchy'ego, łatwo pokazać, że każdy zbiór zwarty $E \subset \boldsymbol{K}^N$, którego funkcja ekstremalna spełnia warunek (H), ma następującą własność Markowa:

(M) Istnieją stałe $M$ i $r$ takie, że dla każdego wielomianu $p\colon \boldsymbol{K}^N \to \boldsymbol{K}$ i każdego wielowskaźnika $\alpha \in \boldsymbol{Z}_+^N$,

$$\|D^\alpha p\|_E \leqslant M(\deg p)^{r|\alpha|}\|p\|_E.$$

Nierówność (M) jest oczywiście wielowymiarowym odpowiednikiem klasycznej nierówności Markowa (1). Do chwili obecnej klasa zbiorów zwartych w $\boldsymbol{K}^N$ o własności (H) jest najszerszą ze znanych klas zbiorów spełniających warunek (M). Siciak [Si2] skonstruował przykład zbioru zwartego typu Cantora w $\boldsymbol{R}$ o własności (H), a więc mającego również własność (M), który równocześnie

([1]) Elementarny (choć niełatwy technicznie) dowód twierdzenia Hironaki o rektylinearyzacji znajdzie Czytelnik w pracy Bierstone'a i Milmana [BiMi].

nie jest UPC. Istnieją też zbiory Cantora, dla których funkcja ekstremalna jest ciągła (co jest — jak wiadomo — równoważne temu, że funkcja Greena dla $C\setminus E$ z biegunem w $\infty$ jest ciągła), które jednak nie mają własności (M) (zob. [Pl4]). Do dzisiaj nie wiadomo, czy klasyczny trójkowy zbiór Cantora jest zbiorem typu (M).

Okazuje się, że zbiory Markowa, czyli zbiory o własności (M), stanowią naturalną rodzinę zbiorów występujących w zagadnieniach związanych z przedłużaniem funkcji klasy $C^\infty$ w sensie Whitneya. Z faktu tego korzystano istotnie w pracach [PaPl1], [PaPl2] i [PaPl3], a rolę zbiorów Markowa w tej problematyce wyjaśniono ostatecznie w pracy [Pl3], dzięki prostej obserwacji, że warunek (M) można w sposób równoważny sformułować w postaci:

(P) Istnieją stałe dodatnie $M$ i $r$ takie, że dla każdego wielomianu $p$ stopnia co najwyżej $n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$|p(x)| \leqslant M \|p\|_E, \quad \text{gdy } \operatorname{dist}(x, E) \leqslant 1/n^r.$$

Aby przedstawić główny rezultat niniejszego artykułu, wprowadzimy najpierw kilka oznaczeń. Jeśli $E$ jest zbiorem zwartym w $\boldsymbol{R}^N$, przez $C^\infty(E)$ rozumiemy zbiór funkcji $f\colon E \to \boldsymbol{R}$ takich, że istnieje funkcja $\tilde{f} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^N)$, dla której $\tilde{f}_{|E} = f$. Podobnie jak Zerner (w komentarzu do [Ze]), wprowadzimy w przestrzeni $C^\infty(E)$ następującą topologię: Niech

$$d_{-1}(f) := \|f\|_E, \quad d_0(f) := \operatorname{dist}_E(f, P_0)$$

i dla $k = 1, 2, \ldots$ określmy

$$d_k(f) := \sup_{n \geqslant 1} n^k \operatorname{dist}_E(f, P_n),$$

gdzie $P_n$ jest zbiorem (ograniczeń do $E$) wielomianów stopnia co najwyżej $n$, a

$$\operatorname{dist}_E(f, P_n) = \inf\{\|f - p\|_E\colon\ p \in P_n\}.$$

Dzięki znanemu twierdzeniu Jacksona (zob. np. [Tim]) funkcjonały $d_k$ są seminormami na $C^\infty(E)$. Niech $\tau_J$ oznacza topologię wyznaczoną przez ciąg seminorm $\{d_k\}_{k=-1}^{+\infty}$. Na ogół, topologia ta nie jest zupełna.

Niech teraz $\tau_Q$ oznacza topologię w $C^\infty(E)$ określoną przez seminormy

$$q_{X,k}(f) := \inf\{|\tilde{f}|_X^k\colon\ \tilde{f} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^N), \tilde{f}_{|E} = f\},$$

gdzie dla dowolnego zbioru zwartego $X$ w $\boldsymbol{R}^N$ i $k = 0, 1, \ldots,$

$$|\tilde{f}|_X^k := \max_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha \tilde{f}\|_X.$$

Topologia $\tau_Q$ jest topologią ilorazową przestrzeni $C^\infty(\boldsymbol{R}^N)/I(E)$, gdzie $C^\infty(\boldsymbol{R}^N)$ rozpatrujemy z jej naturalną topologią wyznaczoną przez seminormy $|\cdot|_X^k$, a $I(E) := \{f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^N)\colon f_{|E} = 0\}$. Przestrzeń $(C^\infty(E), \tau_Q)$ jest oczywiście przestrzenią Frécheta.

W dalszym ciągu powiemy, że zbiór zwarty $E \subset \boldsymbol{R}^N$ jest *determinujący* dla funkcji klasy $C^\infty$, jeśli dla każdej funkcji $f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^N)$ z warunku $f_{|E} = 0$ wynika, że $D^\alpha f_{|E} = 0$ dla wszystkich $\alpha \in \boldsymbol{Z}_+^N$. Jeśli zbiór $E$ jest determinujący, to dzięki klasycznemu twierdzeniu Whitneya o przedłużaniu [Wh] przestrzeń $(C^\infty(E), \tau_Q)$ jest izomorficzna z przestrzenią $\mathscr{E}(E)$ pól whitneyowskich $F = (F^\alpha)$ $(\alpha \in \boldsymbol{Z}_+^N)$, gdzie każde $F^\alpha$ jest funkcją ciągłą na $E$, wyposażoną w topologię $\tau_W$ określoną za pomocą seminorm

$$\|F\|_E^k := |F|_E^k + \sup\{|(R_x^k F)^\alpha(y)|/|x-y|^{k-|\alpha|}: x, y \in E,\ x \neq y,\ |\alpha| \leqslant k\}$$

$(k = 0, 1, \ldots)$, gdzie

$$|F|_E^k = \sup\{|F^\alpha(x)|: x \in E,\ |\alpha| \leqslant k\}$$

oraz

$$(R_x^k F)^\alpha(y) = F^\alpha(y) - \sum_{|\beta| \leqslant k-|\alpha|} (1/\beta!) F^{\alpha+\beta}(x)(y-x)^\beta.$$

Nasz główny rezultat przedstawia się następująco:

TWIERDZENIE ([Pl3]). *Niech $E$ będzie zbiorem zwartym w $\boldsymbol{R}^N$ determinującym dla funkcji klasy $C^\infty$. Wtedy następujące warunki są równoważne*:

(i) *$E$ jest zbiorem Markowa,*

(ii) *$E$ ma własność* (P),

(iii) (charakteryzacja Bernsteina funkcji klasy $C^\infty$) *dla każdej funkcji $f$: $E \to \boldsymbol{R}$, jeśli ciąg $\{\operatorname{dist}_E(f, P_n)\}$ jest szybko malejący* (tzn. $\forall s > 0$, $\lim_{n\to\infty} n^s \operatorname{dist}_E(f, P_n) = 0$), *to istnieje funkcja $\tilde{f} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^N)$ taka, że $\tilde{f}_{|E} = f$,*

(iv) *przestrzeń $(C^\infty(E), \tau_J)$ jest zupełna,*

(v) *topologie $\tau_J$, $\tau_Q$ i $\tau_W$ są równoważne,*

(vi) *istnieje operator liniowy i ciągły*

$$L: (C^\infty(E), \tau_J) \to C^\infty(\boldsymbol{R}^N)$$

*taki, że $Lf_{|E} = f$ dla każdej funkcji $f \in C^\infty(E)$.*

Powyższe twierdzenie kojarzy ze sobą zagadnienia z odległych na pozór dziedzin: konstruktywnej teorii funkcji i analizy różniczkowej. Jego dowód znajdzie Czytelnik w pracy [Pl3]. Opiera się on w dużej mierze na technice rozwiniętej w pracach [PaPl1] i [PaPl2]. W niniejszym artykule ograniczymy się do komentarza uzupełniającego to twierdzenie.

1° Równoważność (i)$\Leftrightarrow$(iii) rozwiązuje stary problem rozważany m. in. przez Zernera (por. [Ze]).

2° Zgodnie z twierdzeniem Jacksona, topologia $\tau_Q$ jest — dla dowolnego zbioru zwartego $E \subset \boldsymbol{R}^N$ — silniejsza od topologii $\tau_J$. Stąd, jeśli zbiór $E$ jest determinujący dla funkcji klasy $C^\infty$, to istnienie (liniowego i ciągłego) operatora przedłużania

$$L_J: (C^\infty(E), \tau_J) \to C^\infty(\boldsymbol{R}^N)$$

zapewnia istnienie analogicznego operatora przedłużania

$$L_W\colon (\mathscr{E}(E), \tau_W) \to C^\infty(\boldsymbol{R}^N).$$

Problem istnienia takiego operatora jest dość złożony. W przeciwieństwie do przypadku funkcji klasy $C^k$ $(k < \infty)$, kiedy to istnienie operatora przedłużania zagwarantowane jest (dla dowolnego zbioru domkniętego $X \subset \boldsymbol{R}^N$) twierdzeniem Whitneya [Wh], dla funkcji klasy $C^\infty$ operator $L_W$ nie zawsze istnieje. Grothendieck pierwszy zauważył, że $L_W$ nie może istnieć, jeśli $E$ redukuje się do punktu (zob. [Tu], str. 79). Z drugiej strony, nawet tłustość zbioru $E$ nie gwarantuje istnienia $L_W$, bowiem Tidten [Tid] pokazał, że $L_W$ nie istnieje, gdy

$$E = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2\colon 0 < x \leqslant 1,\ 0 < y \leqslant e^{-1/x}\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Łatwo pokazać (zob. [Ze]), że zbiór ten nie jest też zbiorem Markowa.

Mitjagin [Mi] i Seeley [Se] skonstruowali operator $L_W$ w przypadku, gdy $E$ jest półprzestrzenią w $\boldsymbol{R}^N$. Stein [Ste] udowodnił istnienie $L_W$ dla domknięcia obszaru w $\boldsymbol{R}^N$, którego brzeg jest lokalnie wykresem funkcji klasy Lipschitza o wykładniku $\alpha = 1$, a Bierstone [Bi] uogólnił ten rezultat na przypadek dowolnego $\alpha$. Główny rezultat pracy Bierstone'a [Bi] głosi, że operator $L_W$ istnieje, gdy $E$ jest zbiorem zwartym, tłustym i subanalitycznym w $\boldsymbol{R}^N$. Skomplikowany dowód Bierstone'a opiera się na bardzo trudnym twierdzeniu Hironaki o desyngularyzacji. Inny (równie żmudny) dowód rezultatu Bierstone'a, omijający twierdzenie Hironaki, podała Wachta [Wa].

Stosując subtelne metody z teorii przestrzeni nuklearnych, stworzone przez Vogta i Wagnera (zob. [Vo]), Tidten [Tid] wykazał istnienie operatora $L_W$ w przypadku podzbiorów $\boldsymbol{R}^N$ o szczególnym rodzaju ostrz. Wszystkie omówione przypadki objęte są definicją zbiorów UPC, dla których operator $L_W$ skonstruowano w [PaPl2]. W pracy tej podano *de facto* wzór na operator przedłużania dla zbiorów typu (H). Ta sama konstrukcja przenosi się bez zmian na przypadek zwartych zbiorów Markowa w $\boldsymbol{R}^N$, a to dzięki równoważności (M) $\Leftrightarrow$ (P) (prawdziwej dla dowolnego zbioru zwartego $E \subset \boldsymbol{C}^N$). Zaletą takiego podejścia do problemu istnienia operatora $L_W$ jest — oprócz istotnego poszerzenia dopuszczalnej rodziny zbiorów $E$ — jego elementarny, konstrukcyjny charakter. W istocie, nasz operator wyraża się prostym wzorem

$$L_W(f) = u_1 L_1 f + \sum_{k=1}^{\infty} u_k (L_{k+1} f - L_k f),$$

gdzie $L_k f$ jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a funkcji $f$ stopnia $k$ z węzłami w punktach ekstremalnych Feketego–Leji zbioru $E$, a $\{u_k\}$ jest stosownie dobranym ciągiem funkcji klasy $C^\infty$ w $\boldsymbol{R}^N$, równych tożsamościowo 1 w otoczeniu zbioru $E$, o nośnikach zwartych dążących do zbioru $E$ (zob. [PaPl2], [Pl3]).

3° Z problemem istnienia operatora $L_W$ łączy się również problem zanurzenia przestrzeni $(C^\infty(E), \tau_W)$ w przestrzeń Frécheta $s$ ciągów liczbowych szybko malejących (zob. [Vo], [Tid]). Rozwinięte w pracach [PaPl1] i [PaPl2] metody pozwalają atakować również i to zagadnienie (szczegóły w pracach [PaPl3] i [Pl3]).

4° Wielu znanych matematyków żywo interesuje się ostatnio zagadnieniem istnienia (liniowego i ciągłego) operatora przedłużania dla pewnych typowych nie-quasi-analitycznych podklas przestrzeni $C^\infty(E)$ (np. klas Gevreya). Wymienić tu warto — jako przykład — pracę Meisego i Taylora [MsTa]. Można się spodziewać, że metody, na których opiera się prezentowany w tym artykule rezultat, pozwolą istotnie poszerzyć rodzinę podzbiorów $\boldsymbol{R}^N$, do której odnoszą się wyniki Meisego i Taylora (zob. [PS]).

**Literatura**


[BaGu] M. S. Baouendi, C. Goulaouic, *Approximation polynomiale de fonctions $C^\infty$ et analytiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 21 (1971), 149–173.

[Bi] E. Bierstone, *Extension of Whitney fields from subanalytic sets*, Invent. Math. 46 (1978), 277–300.

[BiMi] E. Bierstone, P. D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, preprint, University of Toronto, 1987.

[Co] C. Coatmelec, *Approximation et interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 383 (1966), 271–341.

[DŁS] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz, J. Stasica, *Certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), 529–536.

[Gt] P. Goetgheluck, *Inégalité de Markov dans les ensembles effilés*, J. Approx. Theory 30 (1980), 149–154.

[Ło1] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, Inst. Hautes Etudes Sci., Bures-sur-Yvette 1964.

[Ło2] —, *Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej*, PWN, Warszawa 1988.

[MaA] A. A. Markow, *Ob odnom woprosie D. I. Mendelejewa*, Izw. Akad. Nauk St-Petersburg 62 (1889), 1–24 (zob. też: *Sobranije soczinienij*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moskwa 1948, 51–75).

[MaW] W. A. Markow, *O funkcijach naimienieje uklоniajuszczichsia ot nulia w dannom promieżutkie*, Izw. Akad. Nauk St-Petersburg 1892.

[MsTa] R. Meise, B. A. Taylor, *Linear extension operators for ultradifferentiable functions of Beurling type on compact sets*, Amer. J. Math. 111 (1989), 309–337.

[Me] D. I. Mendelejew, *Badanie roztworów wodnych w zależności od zmiany ich ciężarów właściwych* (po rosyjsku; wobec kłopotów z dotarciem do oryginalnej pracy — tytuł wzięty z bibliografii sporządzonej po francusku w [RaSh]), St-Petersburg 1887.

[Mi] B. S. Mitiagin, *Approksimatiwnaja razmiernost' bazisa w jadiernych prostranstwach*, Uspiechi Mat. Nauk 16 (4) (1961), 63–132 (zob. też: Russian Math. Surveys 16 (4) (1961), 59–128).

[PaPl1] W. Pawłucki, W. Pleśniak, *Markov's inequality and $C^\infty$ functions on sets with polynomial cusps*, Math. Ann. 275 (1986), 467–480.

[PaPl2] —, —, *Extension of $C^\infty$ functions from sets with polynomial cusps*, Studia Math. 88 (1988), 279–287.

[PaPl3] —, —, *Approximation and extension of $C^\infty$ functions defined on compact subsets of $\boldsymbol{C}^n$*, w: *Deformations of Mathematical Structures*, J. Ławrynowicz (red.), Kluwer Academic Publishers, 1989, 283–295.

[Pl1] W. Pleśniak, *Quasianalytic functions in the sense of Bernstein*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 147 (1977).

[Pl2] —, *L-regularity of subanalytic sets in $\boldsymbol{R}^n$*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 32 (1984), 647–651.

[Pl3] —, *Markov's inequality and the existence of an extension operator for $C^\infty$ functions*, J. Approx. Theory 61 (1990), 106–117.

[Pl4] —, *A Cantor regular set which does not have Markov's property*, Ann. Polon. Math. 51 (1990), 269–274.

[PS] W. Pleśniak, A. Skiba, *Polynomial approximation and linear extension operators for Gevrey classes of functions on compact sets*, Publ. IRMA 21, No. IV, Lille 1990.

[RaSh] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Les inégalités de Markoff et de Bernstein*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal 1983.

[Se] R. T. Seeley, *Extension of $C^\infty$ functions defined on a half-space*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 625–626.

[Si1] J. Siciak, *Highly noncontinuable functions on polynomially convex sets*, Univ. Iagel. Acta Math. 25 (1985), 95–107.

[Si2] —, *A Cantor's type set preserving Markov's inequality*, preprint, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1987.

[Sta] J. Stasica, *Whitney's condition for subanalytic sets*, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń., Prace Mat. 23 (1982), 211–221.

[Ste] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[Tid] M. Tidten, *Fortsetzungen von $C^\infty$-Funktionen, welche auf einer abgeschlossenen Menge in $\boldsymbol{R}^n$ definiert sind*, Manuscripta Math. 27 (1979), 291–312.

[Tim] A. F. Timan, *Tieorija priblizenija funkcij diejstwitiel'nogo pieriemiennogo*, Fizmatgiz, Moskwa 1960 (wydanie angielskie: *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Pergamon Press, Oxford 1963).

[Tu] J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1972.

[Vo] D. Vogt, *Subspaces and quotient spaces of $(s)$*, w: *Functional Analysis: Surveys and Recent Results*, K.-D. Bierstedt, B. Fuchssteiner (red.), North-Holland Math. Studies 27 (1977), 167–187.

[Wa] K. Wachta, *Sur un théorème du prolongement de Bierstone*, preprint, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1986.

[Wh] H. Whitney, *Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 63–89.

[Ze] M. Zerner, *Développement en séries de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables*, C. R. Acad. Sci. Paris 268 (1969), 218–220.