ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXIX (1990)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

HENRYK ŻOŁĄDEK (Warszawa)

Teoria Kołmogorowa–Arnolda–Mosera i ograniczone zagadnienie trzech ciał

1. Wstęp. Od pewnego czasu uwagę znacznej części fizyków i matematyków przyciąga teoria Kołmogorowa–Arnolda–Mosera (KAM). Dotyczy ona układów mechanicznych o skończonej liczbie stopni swobody i w wielu przypadkach daje rezultaty dotyczące stabilności, które nie mogły być uzyskane na innej drodze. Oto najbardziej znane przykłady:

ruch ciała sztywnego z unieruchomionym punktem, gdy energia kinetyczna jest duża w porównaniu z energią potencjalną;

płaskie ograniczone zagadnienie trzech ciał;

zagadnienie n ciał dla dostatecznie małych mas planet;

geodezyjne na powierzchni bliskiej elipsoidzie trójosiowej;

uwięzienie plazmy w kamerach toroidalnych.

Celem niniejszego artykułu jest zapoznanie czytelnika z teorią KAM i pokazanie jej znaczenia na przykładzie płaskiego ograniczonego zagadnienia trzech ciał.

2. Teoria KAM. Za początek teorii KAM należy uważać referat A. N. Kołmogorowa wygłoszony na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Amsterdamie w 1954 roku. Wtedy to Kołmogorow sformułował twierdzenie o zachowaniu prawie okresowego charakteru pewnych ruchów przy małym zaburzeniu układu mechanicznego o ruchu okresowym lub prawie okresowym. (Ruch układu nazywa się *prawie okresowy*, jeżeli wyraża się przez funkcje prawie okresowe, tzn. przez funkcje jednostajnie aproksymowalne przez sumy funkcji okresowych.) Dowód twierdzenia Kołmogorowa został podany na początku lat sześćdziesiątych niezależnie przez W. I. Arnolda w przypadku analitycznym i przez J. Mosera dla układów gładkich. (Początkowa klasa gładkości wynosiła 333, dzisiaj została obniżona do 3.)

Układ mechaniczny składający się ze skończonej liczby punktów materialnych jest określony przez zadanie położeń i prędkości jego cząstek. Ewolucja (ruch) układu jest zadana przez układ równań różniczkowych, których prawe

strony zależą od fizycznego charakteru układu. Rozwiązaniem układu równań jest trajektoria układu.

PRZYKŁADY. 1. Ruch n swobodnych cząstek materialnych spełnia układ równań

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gdzie x_i są położeniami cząstek, v_i — ich prędkościami, a kropka oznacza pochodną względem czasu.

2. Pojedyncza cząstka spełnia równanie Newtona

$$\dot{x} = v, \quad m\dot{v} = F,$$

gdzie m jest masą cząstki, a F — siłą, która na nią działa. W szczególnym przypadku układu zachowawczego $F = -dU/dx$, gdzie $U = U(x)$ jest energią potencjalną.

3. Oscylator harmoniczny jest układem o jednym stopniu swobody z energią potencjalną $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, gdzie k jest współczynnikiem sprężystości (rys. 1).

Dla znacznej części układów mechanicznych równania różniczkowe przyjmują postać układu równań Hamiltona

$$\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

gdzie q_i oznaczają współrzędne uogólnione, p_i — pędy uogólnione, $H = H(p, q, t)$ jest pewną funkcją zwaną *hamiltonianem*, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, a n jest liczbą stopni swobody. Zmienne q_i i p_j nie muszą oznaczać zwykłych współrzędnych położenia i pędu (mogą być jakimiś ich funkcjami, zależnymi od czasu). Podobnie hamiltonian może zależeć od czasu.

Układy podane w powyższych przykładach są hamiltonowskie, a funkcja H jest sumą energii kinetycznej i energii potencjalnej układu. W przykładzie 1 mamy

$$H = \tfrac{1}{2}\sum p_i^2, \quad q_i = x_i, \quad p_i = v_i.$$

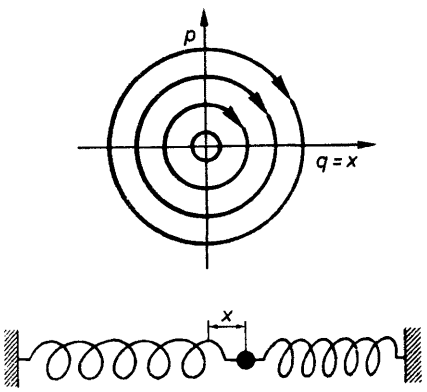
W przykładach 2 i 3 mamy $H = p^2/(2m) + U(q)$, $q = x$, $p = m\dot{x}$. W dalszym ciągu będziemy się zajmować wyłącznie układami hamiltonowskimi.

Jeżeli istnieje taka zamiana zmiennych $(p, q) \mapsto (P, Q)$, która przeprowadza układ hamiltonowski (1) w nowy układ hamiltonowski z hamiltonianem $K(Q)$ zależnym tylko od zmiennych $Q_1, \ldots, Q_n$, to układ wyjściowy nazywa się *całkowalnym* (określenie to jest równoważne zwykłej definicji w terminach całek pierwszych i ma tę zaletę, że nie wymaga dodatkowych pojęć).

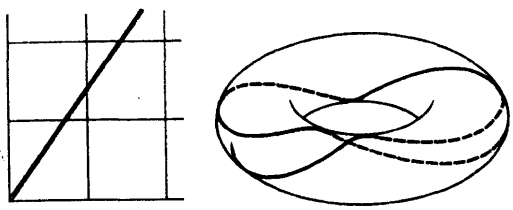
Układ całkowalny można łatwo rozwiązać. Mianowicie, z uwagi na to, że $\dot{Q}_j = 0$, więc $Q_j(t) = \text{const}$ i stąd $\dot{P}_j = -\partial K/\partial Q_j = \text{const}$, zatem P_j musi być postaci

$$P_j(t) = \omega_j(Q)\,t + P_j(0).$$

Układ z przykładu 1 jest całkowalny względem zmiennych $(P_i, Q_i) = (-q_i, p_i)$. Podobnie układ z przykładu 3 (przy $m = k = 1$) jest całkowalny względem zmiennych $P = \operatorname{arc\,tg}(p/q)$ i $Q = (p^2+q^2)/2 = H$. Jak widać, zmienne P_j mogą być nieograniczone; mogą też być okresowe (zwiększenie P_j o krotność 2π nie zmienia stanu układu). Fizycznie najbardziej interesujące są układy z okresowymi P_j (przypadek nieograniczony jest zwykle związany z ruchem środka masy). W takiej sytuacji zmienne (P_j, Q_j) nazywają się zmiennymi typu *kąt-działanie*. Ruch odbywa się na n-wymiarowych niezmienniczych torusach $S^1 \times \ldots \times S^1$ (produkt n-krotny) określonych równaniami $Q_j = \text{const}$. Zatem w takim przypadku ruch jest okresowy lub prawie okresowy (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

Niestety, większość układów hamiltonowskich nie jest całkowalna. Ich ruch jest przeważnie skomplikowany i trudny do zbadania metodami współczesnej analizy.

Jeśli nie można zbadać wszystkich układów niecałkowalnych, to przynajmniej należy stworzyć jakąś teorię dla małych zaburzeń układów całkowalnych. Dokładniej, rozważa się układ (1) z hamiltonianem

$$H = H_0 + \varepsilon H_1,$$

gdzie $H_0 = H_0(Q)$ jest hamiltonianem układu całkowalnego.

Do 1954 roku podstawową metodą badania takich układów była metoda uśredniania. Rozpatruje się uśredniony układ $\dot{Q}_i = \varepsilon g_i(Q)$, gdzie $g_i(Q)$ jest wartością $\partial H_1/\partial P_i$ uśrednioną po zmiennych kątowych P_i. Okazuje się, że po czasie $t < 1/\varepsilon$ trajektorie Q_i dla układu (1) i układu uśrednionego rozchodzą się na odległość nie przekraczającą $\text{const} \cdot \varepsilon$. Metoda uśredniania nie daje odpowiedzi na pytanie o zachowanie się układu po nieskończonym czasie (np. stabilność).

W 1954 roku pojawiła się praca Kołmogorowa, w której zawarta jest częściowa odpowiedź na to pytanie. Oto treść tego wyniku.

TWIERDZENIE KAM. *Jeśli niezaburzony układ Hamiltona spełnia pewien warunek niezdegenerowania, to dla dostatecznie małego hamiltonowskiego zaburzenia większość niezmienniczych torusów nie znika, a jedynie ulega małemu zniekształceniu. Każda powierzchnia* $H = \text{const}$ *jest zapełniona torusami niezmienniczymi zajmującymi większość jej obszaru. Torusy niezmiennicze są zapełnione nawijającymi się na nie gęsto trajektoriami zaburzonego układu.*

Warunek niezdegenerowania oznacza, że częstości ω_i zmieniają się dostatecznie szybko z Q_j. Dokładniej,

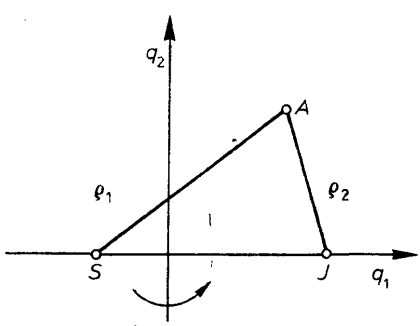
$$\det(\partial\omega_i/\partial Q_j) \neq 0, \qquad \det\begin{bmatrix} \partial\omega_i/\partial Q_j & \omega_i \\ \omega_j & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Uwaga. W przypadku układów o jednym stopniu swobody z hamiltonianem niezależnym od czasu teoria KAM nie wnosi nic nowego. Rzeczywiście, wtedy trajektorie leżą na krzywych $H(p, q) = \text{const}$, które, jeśli są zwarte i spójne, są okręgami.

3. Płaskie ograniczone zagadnienie trzech ciał. Zagadnienie 3 ciał polega na opisie ruchu 3 punktów materialnych w przestrzeni trójwymiarowej o masach m_1, m_2 i m_3, poruszających się pod wpływem sił wzajemnego przyciągania grawitacyjnego. Tak sformułowany problem jest trudny i nie doczekał się do dziś zadowalającego rozwiązania. Znane są szczególne przypadki, kiedy problem poddaje się badaniu jakościowemu. Jednym z nich jest płaskie ograniczone zagadnienie 3 ciał. Aby wyjaśnić, na czym ono polega, wypada kilka słów powiedzieć o zagadnieniu 2 ciał (znanym jako problem Keplera).

Jest to układ całkowalny, Rozważmy sytuację, w której środek masy spoczywa. Wtedy ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie i ciała poruszają się po elipsach o wspólnym ognisku położonym w środku masy układu. W szczególności, elipsy mogą być współśrodkowymi okręgami, a częstość obrotu jest stała.

Płaskie ograniczone zagadnienie 3 ciał jest to układ, w którym 2 ciała obracają się ze stałą prędkością kątową wokół ich środka masy ($x_{śr} = 0$), a trzecie ciało porusza się w płaszczyźnie obrotu 2 ciał i ma masę tak małą, że



Rys. 3

nie zakłóca ich ruchu. Na rys. 3 mamy taki układ, w którym S oznacza Słońce, J – Jowisz, A zaś jest Asteroidem. Jednostki czasu, długości i masy można wybrać tak, żeby prędkość kątowa, suma mas S i J oraz stała grawitacyjna były równe 1. Wtedy odległość między S a J też równa się 1. Jedynym parametrem charakteryzującym układ jest masa Jowisza J.

Równania ruchu Asteroidu są hamiltonowskie z hamiltonianem

$$H = \text{en. kinet.} + \text{en. potenc.} = \tfrac{1}{2}(p_1^2+p_2^2) - \left(\frac{1-\mu}{\varrho_1}+\frac{\mu}{\varrho_2}\right),$$

gdzie ϱ_1 i ϱ_2 są odległościami A od S i J odpowiednio. Zauważmy, że położenia S i J zmieniają się z czasem:

$$J\colon (1-\mu)\cdot(\cos t, \sin t), \qquad S\colon (-\mu)\cdot(\cos t, \sin t).$$

Zatem hamiltonian zależy bezpośrednio od czasu.

4. Względne położenia równowagi. Zależność H od czasu jest niepożądana. Aby się jej pozbyć, stosujemy zamianę zmiennych prowadzącą do układu hamiltonowskiego z hamiltonianem niezależnym od czasu. Zamiana ta jest tzw. przekształceniem kanonicznym i wyraża się wzorami

$$q' = X(t)q, \qquad p' = X(t)p, \qquad X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

a nowy hamiltonian wynosi

$$(2) \qquad H = \tfrac{1}{2}(p_1'+q_2')^2 + \tfrac{1}{2}(p_2'-q_1')^2 - V(q_1', q_2'), \qquad V = \tfrac{1}{2}(q_1'^2+q_2'^2) + \frac{1-\mu}{\varrho_1} + \frac{\mu}{\varrho_2},$$

$$\varrho_1^2 = (q_1'+\mu)^2 + q_2'^2, \qquad \varrho_2^2 = (q_1'+\mu-1)^2 + q_2'^2.$$

W nowych zmiennych (q_1', q_2'), S i J spoczywają.

Badanie układu równań różniczkowych $\dot{x} = f(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^k$, rozpoczyna się od znalezienia położeń równowagi (albo rozwiązań równania $f(x) = 0$). Łatwo sprawdzić, że dla układu (1) z hamiltonianem (2) położenia równowagi odpowiadają punktom krytycznym funkcji V, tzn. $\partial V/\partial q_i' = 0$, i przy tym $p_1' = -q_2'$, $p_2' = q_1'$. Naturalne jest nazwanie ich *względnymi położeniami równowagi.*

Znajdźmy punkty krytyczne V. Mamy

$$\partial V/\partial q_2' = q_2' f = 0, \qquad f = 1 - (1-\mu)/\varrho_1^3 - \mu/\varrho_2^3,$$

$$\partial V/\partial q_1' = q_1' f - \mu(1-\mu)(\varrho_1^{-3} - \varrho_2^{-3}) = 0.$$

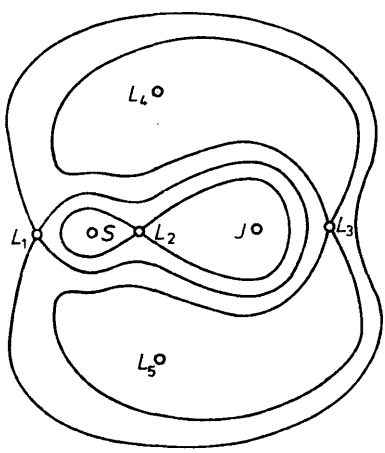
Niech najpierw $q_2' \neq 0$. Wtedy $f = 0$ i $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$. Zatem S, J i A leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Mamy 2 takie punkty równowagi L_4 i L_5, nazywają się one *trójkątnymi punktami libracji.* Pierwszym, który znalazł to rozwiązanie (dla dowolnych mas ciał), był Lagrange. Sam Lagrange odnosił się do tych rozwiązań jak do „czystego curiosum" i uważał je za nieprzydatne dla astronomii. Jednakże w 1907 roku odkryto asteroid nazwany Achillesem, który porusza się praktycznie po orbicie Jowisza, wyprzedzając go o 60°. W pobliżu Achillesa znajduje się jeszcze 9 asteroidów („Grecy"), a po przeciwnej stronie jest 5 asteroidów („Trojanie").

Znajdźmy względne położenia równowagi na osi q_1'. Są one punktami krytycznymi funkcji

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1-\mu}{|x+\mu|} + \frac{\mu}{|x-1+\mu|}.$$

Ponieważ $g > 0$ i $g(x) \to \infty$ przy $x \to \pm\infty$, $-\mu$, $1-\mu$, więc w przedziałach $(-\infty, -\mu)$, $(-\mu, 1-\mu)$, $(1-\mu, \infty)$ istnieją 3 lokalne minima funkcji g. Ponieważ $g'' > 0$, są to jedyne punkty krytyczne funkcji g. Nazywają się one *współliniowymi punktami libracji* L_1, L_2, L_3 i były znalezione przez Eulera.

Można pokazać, że L_4 i L_5 są punktami minimum dla V, a L_1, L_2 i L_3 mają typ siodłowy (jak funkcja $x_1^2 - x_2^2$) oraz $V(L_1) < V(L_2) < V(L_3)$ przy $\mu < 1/2$. Na tej podstawie można narysować poziomice V (rys. 4).



Rys. 4

5. Stabilność w sensie Lapunowa. Mówimy, że położenie równowagi $x = 0$ układu równań $\dot{x} = f(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^k$, $f(0) = 0$, jest *stabilne w sensie Lapunowa,* jeśli dowolna trajektoria $x(t)$ startująca z punktu leżącego dostatecznie blisko

punktu równowagi pozostaje blisko dla dowolnego $t > 0$. To określenie zgadza się z potocznym rozumieniem stabilności.

Badanie stabilności rozpoczynamy od zbadania liniowego przybliżenia $\dot{x} = Ax$, gdzie A jest macierzą różniczki funkcji wektorowej f w 0. Układy liniowe są dobrze zbadane. Okazuje się, że w typowej sytuacji każde rozwiązanie jest sumą rozwiązań postaci

$$e^{\lambda t}\cdot\vec{f}, \quad e^{\alpha t}\cos\omega t\cdot\vec{g}, \quad e^{\alpha t}\sin\omega t\cdot\vec{h}, \tag{3}$$

gdzie λ, α i ω zależą tylko od macierzy A (poprzez wartości własne), a wektory $\vec{f}$, $\vec{g}$ i $\vec{h}$ zależą od A i od wartości początkowej $x(0)$ (im mniejsze $x(0)$, tym mniejsze długości tych wektorów). Oczywiste jest, że stabilności możemy spodziewać się jedynie w przypadku, gdy wszystkie λ i wszystkie α są niedodatnie.

Zbadajmy stabilność punktów L_1–L_5 w ograniczonym zagadnieniu. Prosty rachunek polegający na znalezieniu macierzy A i obliczeniu jej wartości własnych pokazuje, że punkty L_1–L_3 są niestabilne już w przybliżeniu liniowym, natomiast gdy

$$27\mu(1-\mu) < 1 \quad \text{lub} \quad \mu < \mu_1 = \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\tfrac{23}{27}}\right) \approx 0{,}03852, \tag{4}$$

to dla L_4 i L_5 mamy tylko rozwiązania typu (3) z $\alpha = 0$ i $\omega = \omega_1 = \omega_2$, $\omega_1 < 0 < \omega_2 \neq -\omega_1$. Stabilność liniowego przybliżenia nie zapewnia jeszcze stabilności w sensie Lapunowa. Jednakże fakt, że układ jest hamiltonowski, pozwala to osiągnąć. Na razie musimy przebić się jeszcze przez kilka faktów z mechaniki hamiltonowskiej.

Przybliżenie liniowe w otoczeniu punktu L_4 jest układem hamiltonowskim z hamiltonianem będącym kwadratowym przybliżeniem hamiltonianu (2). Można wybrać współrzędne kanoniczne (współczynniki przy wektorach $\vec{g}$ i $\vec{h}$), tak, że w nowych zmiennych układ liniowy jest hamiltonowski z hamiltonianem

$$H_0 = \tfrac{1}{2}\omega_1(\tilde{q}_1^2+\tilde{p}_1^2)+\tfrac{1}{2}\omega_2(\tilde{q}_2^2+\tilde{p}_2^2).$$

Z przykładu 3 wnioskujemy, że jest to hamiltonian układu całkowalnego w zmiennych kąt-działanie $P_i = \operatorname{arc\,tg}(\tilde{p}_i/\tilde{q}_i)$, $Q_i = (\tilde{q}_i^2+p_i^2)/2$, $H_0 = \omega_1 Q_1 + {}+\omega_2 Q_2$. Mamy sytuację jak w twierdzeniu KAM: $H = H_0 + H_1$, gdzie H_0 jest całkowalne, a H_1 zawiera wyrazy rzędu wyższego niż 1 ze względu na Q_i, które są małe. To nie wystarcza, ponieważ częstości $\omega_i = -\partial H_0/\partial Q_i$ są stałe, a z warunku niezdegenerowania wynika, że powinny zmieniać się wraz z Q_j. Należy więc uwzględniać jeszcze dalsze wyrazy rozwinięcia H w otoczeniu L_4. Pojawiają się tu przeszkody w postaci rezonansów.

Mówimy, że para częstości (ω_1, ω_2) *spełnia relację rezonansową rzędu* l, jeśli istnieją liczby całkowite k_1 i k_2, $|k_1|+|k_2| = l$, takie, że $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$.

TWIERDZENIE (G. D. Birkhoff, lata dwudzieste). *Jeśli* ω_1 *i* ω_2 *nie spełniają żadnej relacji rezonansowej rzędu* $\leqslant 4$, *to istnieje kanoniczna zamiana zmiennych* $(\tilde{p}, \tilde{q}) \to (p, q)$ *dająca hamiltonian*

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \sum \omega_i \tau_i + \sum \omega_{ij} \tau_i \tau_j, \quad \tau_i = \tfrac{1}{2}(p_i^2 + q_i^2), \tag{5}$$

gdzie H_1 *zawiera wyrazy piątego i wyższych rzędów.*

Teraz jesteśmy przygotowani do dowodu stabilności trójkątnych punktów libracji. Obliczenia związane z macierzą A pokazują, że rezonansom rzędu 3 i 4 odpowiadają wartości parametru

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{1833}}{45}\right) \approx 0{,}02429, \quad \mu_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{213}}{15}\right) \approx 0{,}01352. \tag{6}$$

Następnie trzeba obliczyć H_0 w (5). H_0 jest hamiltonianem układu całkowalnego, a H_1 — jego małym zaburzeniem. Warunek niezdegenerowania oznacza, że

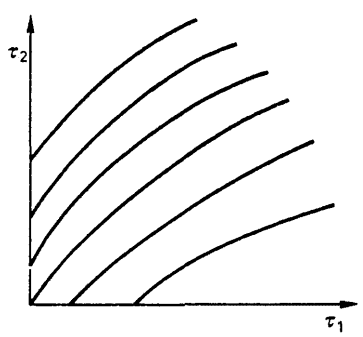
$$\det \omega_{ij} \neq 0, \quad \det \begin{bmatrix} \omega_{ij} & \omega_i \\ \omega_j & 0 \end{bmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

Zostaje on naruszony przy jedynej wartości parametru

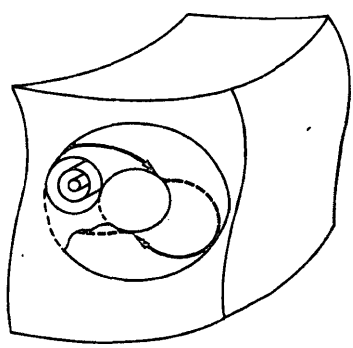
$$\mu_c \cong 0{,}0109.$$

Ten wynik został uzyskany przez A. M. Leontowicza w 1962 roku. Jest on trudny do udowodnienia i przedtem wiadomo było jedynie, że H_0 jest zdegenerowane przy skończonej liczbie wartości μ. Możemy zatem stosować teorię KAM.

Jak z twierdzenia KAM wynika stabilność? Otóż znajdujemy się w przestrzeni 4-wymiarowej w otoczeniu punktu równowagi. Ponieważ układ jest hamiltonowski z hamiltonianem niezależnym od czasu, więc ruch odbywa się po powierzchniach $H = \text{const}$. Są one trójwymiarowe i dla hamiltonianu H_0 są zaznaczone na rys. 5. Możemy założyć, że znajdujemy się w przestrzeni



Rys. 5



Rys. 6

trójwymiarowej. Z twierdzenia KAM wynika, że jest ona zapełniona niezmienniczymi torusami, których jest tym więcej, im bliżej jesteśmy torusa $\{\tau_i = 0\}$ (pracujemy w układzie współrzędnych kąt-działanie $\varphi_i = \operatorname{arc\,tg}(p_i/q_i)$ i τ_i). Każdy torus niezmienniczy rozbija powierzchnię $H = \text{const}$ na 2 części, swoje wnętrze i zewnętrze. Żaden punkt z wnętrza nie wychodzi zeń w trakcie ewolucji. Ponieważ torusy mogą być dowolnie małe (w zmiennych (p_i, q_i)), wynika stąd stabilność w sensie Lapunowa.

W przypadku układu S, J, A mamy

$$\mu = (\text{masa } J)/(\text{masa } S + \text{masa } J) \approx 10^{-3} < \mu_1$$

i jest różne od μ_2, μ_3 i μ_c (patrz (4), (6) i (7)).

Na koniec zauważmy, że w przypadku jednego stopnia swobody stabilność położenia równowagi przy stabilności przybliżenia liniowego jest oczywista. Dla dwóch stopni swobody uzyskuje się stabilność, ale po dosyć skomplikowanej analizie. Natomiast dla większej liczby stopni swobody nie ma stabilności w sensie Lapunowa. Można pokazać (N. N. Niechoroszew, lata siedemdziesiąte), że niestabilność ta jest bardzo słaba: dla $H = H_0 + \varepsilon H_1$ po czasie $0 < t < \varepsilon^{-1} \exp(1/(a\varepsilon))$ różnica między $Q_1(t)$ dla układów niezaburzonego i zaburzonego szacuje się przez ε^b, gdzie a i b są stałymi.

6. Uzupełnienie. Dowód twierdzenia Birkhoffa. Na przykładzie dowodu twierdzenia Birkhoffa pokażemy efekt pojawiania się rezonansów. Będziemy szukać kanonicznej zamiany zmiennych postaci

$$\tilde{p} = \partial S/\partial \tilde{q}, \qquad q = \partial S/\partial p,$$

gdzie $S(\tilde{q}, p) = \sum \tilde{q}_i p_i + S_1(\tilde{q}, p)$, a S_1 zawiera wyrazy rzędu 3 i 4 (najpierw z pierwszego równania wyznaczamy $p = p(\tilde{q}, \tilde{p})$ i podstawiamy do drugiego). Taka zamiana przeprowadza równania Hamiltona w równania Hamiltona. Mamy

$$\tilde{p} = p + \partial S_1/\partial q, \qquad q = \tilde{q} + \partial S_1/\partial p$$

i po podstawieniu $z = \tilde{p} + i\tilde{q}$, $Z = p + iq$, $i = \sqrt{-1}$ z dokładnością do wyrazów wyższego rzędu otrzymujemy

$$Z = z + i(\partial S_1/\partial \bar{z})(z, \bar{z}), \qquad z = Z - i(\partial S_1/\partial \bar{Z})(Z, \bar{Z}) \tag{8}$$

oraz

$$H = \tfrac{1}{2}\omega_1 z_1 \bar{z}_1 + \tfrac{1}{2}\omega_2 z_2 \bar{z}_2 + H_1(z, \bar{z})$$

z H_1 rzędu 3 i więcej. Zobaczmy, jak działa zamiana (8), gdy S_1 jest jednomianem

$$S_1 = z_1^{r_1} \bar{z}_1^{r_2} z_2^{s_1} \bar{z}_2^{s_2}.$$

Wtedy łatwo zobaczyć, że $H(z, \bar{z})$ przejdzie w wyrażenie

$$H(Z, \bar{Z}) + \tfrac{1}{2}[(r_1 - r_2)\omega_1 + (s_1 - s_2)\omega_2] S_1(Z, \bar{Z})$$

plus wyrazy wyższych rzędów. Widać, że jeśli nie ma rezonansów rzędu $\leqslant 4$, to za pomocą odpowiedniego S_1 można zlikwidować wszystkie wyrazy rzędu 3 i 4 oprócz członów typu $|z_1|^{2m}|z_2|^{2n}$. To daje tezę twierdzenia.

Literatura

[1] W. I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa 1981.

[2] W. I. Arnold, W. W. Kozłow, A. I. Nejsztadt, *Matiematiczeskije aspiekty klassiczeskoj i niebiesnoj miechaniki*, Sowriemiennyje Problemy Matiematiki, Fundamiental'nyje Naprawlenija, t. 3, WINITI, Moskwa 1985.

[3] W. I. Arnold, A. B. Giwiental', *Simplekticzeskaja gieometrija*, Sowr. Prob. Mat., Fund. Naprawl., t. 4, WINITI, Moskwa 1985.

[4] A. N. Kołmogorov, *Obszczaja tieorija dinamiczeskich sistem i klassiczeskaja miechanika*, w: *Mieżdunarodnyj matiematiczeskij kongress w Amsterdamie*, Fizmatgiz, Moskwa 1961, 187–208.

[5] J. K. Moser, *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II Math.-Phys. Kl. 9 (4) (1962), 673–692.

[6] W. Szebehely, *Theory of Orbits*, Academic Press, New York 1967.