ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXIX (1990)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

TADEUSZ JÓZEFIAK (Toruń)

Funkcje symetryczne*

Wstęp. Powyższy tytuł może się wydawać zbyt enigmatyczny. Uprzedzę więc od razu, że będzie tu mowa w zasadzie o wielomianach symetrycznych, tzn. wielomianach, które są niezmiennicze przy działaniu grupy symetrycznej. Dokładniej, jeśli $x_1, \ldots, x_n$ są zmiennymi, to na pierścieniu wielomianów $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ działa grupa permutacji S_n zbioru n-elementowego. Przedmiotem artykułu jest pierścień elementów stałych tego działania, tzn. pierścień

$$\Lambda_n = \{f \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_n];\ \sigma f = f,\ \forall \sigma \in S_n\}.$$

Własności funkcji symetrycznych stanowią klasyczny dorobek matematyki XIX wieku, a ich różnorodne zastosowania były stopniowo odkrywane w XX wieku wraz z rozwojem innych dziedzin.

Celem tego artykułu jest udostępnienie polskiemu czytelnikowi trzech zastosowań teorii funkcji symetrycznych: do opisu nieprzywiedlnych reprezentacji wielomianowych ogólnej grupy liniowej $\mathrm{GL}(n)$, do opisu pierścienia kohomologii grassmannianu oraz w teorii reprezentacji grup symetrycznych.

Pierwszy rozdział poświęcony jest zwięzłemu przedstawieniu pojęć i twierdzeń dotyczących funkcji symetrycznych, które będą potrzebne w dalszej części. Czytelnika pragnącego poszerzyć swe wiadomości w tej dziedzinie odsyłam do znakomitej książki Macdonalda [8]. Na końcu artykułu znajdują się też inne pozycje bibliograficzne związane z tematyką tej pracy.

1. Pierścień funkcji symetrycznych. Z kursu algebry wiemy, że

$$\Lambda_n = \boldsymbol{Z}[e_1, \ldots, e_n],$$

gdzie e_p jest p-tą *elementarną funkcją symetryczną* oraz $e_1, \ldots, e_n$ są algebraicznie niezależne nad $\boldsymbol{Z}$, tzn. każdy wielomian symetryczny przedstawia się jednoznacznie jako wielomian względem $e_1, \ldots, e_n$.

---

* Niniejszy tekst stanowi rozszerzoną wersję odczytu wygłoszonego 15 września 1988 roku w Auli Uniwersytetu Poznańskiego podczas Zjazdu Naukowego PTM. Dziękuję serdecznie Panu Profesorowi Romanowi Dudzie za propozycję opracowania i opublikowania tego w *Wiadomościach Matematycznych*.

Przypomnę, że elementarne funkcje symetryczne można zdefiniować poprzez funkcję generującą

$$E_n(t) = \sum_{p=0}^{n} e_p t^p = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t),$$

tzn.

$$e_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad e_2 = \sum_{i<j} x_i x_j, \quad \ldots, \quad e_n = x_1 \ldots x_n;$$

przyjmujemy też, że $e_0 = 1$.

Zauważmy, że funkcja generująca

$$H_n(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} h_p t^p$$

definiuje nam inne wielomiany symetryczne $h_1, h_2, \ldots$ (tu również $h_0 = 1$), przy czym z równości $H_n(t) E_n(-t) = 1$ wynikają relacje

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r e_r h_{m-r} = 0, \qquad m \geqslant 1,$$

a to oznacza, że

$$\Lambda_n = \boldsymbol{Z}[h_1, \ldots, h_n],$$

że $h_1, \ldots, h_n$ są algebraicznie niezależne nad $\boldsymbol{Z}$ i że $h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots$ wyrażają się (jako wielomiany) poprzez $h_1, \ldots, h_n$. Funkcje h_p nazywają się *zupełnymi funkcjami symetrycznymi*. Ta nazwa pochodzi stąd, że h_p jest sumą wszystkich jednomianów stopnia p względem $x_1, \ldots, x_n$, np.

$$h_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = e_1, \qquad h_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j, \quad \ldots$$

Trzecią ważną rodziną funkcji symetrycznych są sumy potęg

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Oznaczmy

$$P_n(t) = \sum_{r=1}^{\infty} p_r t^{r-1}.$$

Prosty rachunek pokazuje, że $P_n(t) = H_n'(t)/H_n(t)$, gdzie prim oznacza pochodną względem t. Stąd

$$m h_m = \sum_{r=1}^{m} p_r h_{m-r}, \qquad m \geqslant 1,$$

a więc można wyrazić wielomianowo funkcje h przez sumy potęg, z tym

zastrzeżeniem, że współczynniki pojawiające się przy wyrażeniu h poprzez p mogą być wymierne, np. $h_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2)$. Mamy zatem

$$\Lambda_n \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}[p_1, \ldots, p_n]$$

i funkcje $p_1, \ldots, p_n$ są algebraicznie niezależne.

W ten sposób poznaliśmy trzy bazy algebraiczne pierścienia funkcji symetrycznych (trzecią — nad $\mathbf{Q}$). W różnych problemach, o których będzie mowa później, potrzebne nam będą bazy liniowe. Zauważmy, że pierścień Λ_n jest pierścieniem z gradacją:

$$\Lambda_n^k = \{f \in \Lambda_n;\ \deg f = k\},$$

przy czym $\deg e_k = \deg h_k = \deg p_k = k$ oraz $\Lambda_n = \bigoplus_k \Lambda_n^k$. Każda z baz algebraicznych wyznacza bazę liniową składowej jednorodnej Λ_n^k. Istotnie, dla funkcji elementarnych bazę Λ_n^k nad $\mathbf{Z}$ stanowią wszystkie jednomiany $\{e_1^{\lambda_1} \ldots e_n^{\lambda_n}\}$, gdzie $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = k$. Stąd łatwo otrzymać wzór na rangę grupy Λ_n^k. Jeśli $k \leqslant n$, to

$$\text{ranga } \Lambda_n^k = p(k) = \text{liczba wszystkich podziałów liczby } k.$$

Przez *podział* α liczby k rozumiem tu taki ciąg liczb $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_m$, że $\sum \alpha_i = k$. Każdy taki podział wyznacza ciąg $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ w ten sposób, że λ_1 jest liczbą jedynek wśród $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, λ_2 — liczbą dwójek wśród $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ itd. Z samego określenia wynika, że

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = k.$$

Ta odpowiedniość $\alpha \leftrightarrow \lambda$ określa bijekcję między elementami bazy $\{e_1^{\lambda_1} \ldots e_n^{\lambda_n}\}$ a podziałami liczby k dla $k \leqslant n$ i dowodzi wspomnianego wzoru na rangę.

Istnieją inne bazy liniowe grupy Λ_n^k, które nie pochodzą od baz algebraicznych, a najważniejszą z nich jest bez wątpienia baza złożona z tzw. *funkcji Schura.*

Niech α będzie podziałem liczby k; rozpatrzmy wyznacznik

$$a_\alpha = \det \begin{bmatrix} x_1^{\alpha_1+n-1} & x_1^{\alpha_2+n-2} & \ldots & x_1^{\alpha_n} \\ x_2^{\alpha_1+n-1} & x_2^{\alpha_2+n-2} & \ldots & x_2^{\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{\alpha_1+n-1} & x_n^{\alpha_2+n-2} & \ldots & x_n^{\alpha_n} \end{bmatrix}.$$

Jest to wielomian antysymetryczny względem $x_1, \ldots, x_n$, a więc podzielny przez $\prod_{i<j}(x_i - x_j) = a_{(0,\ldots,0)}$. Definiujemy teraz *funkcję Schura* wzorem

$$s_\alpha = a_\alpha / a_{(0,\ldots,0)};$$

oczywiście $s_\alpha \in \Lambda_n^k$. Ta definicja pochodzi jeszcze od Jacobiego, a nazwisko Schura pojawia się tu w związku z zastosowaniem tych funkcji do opisu

reprezentacji grupy $GL(n)$ (patrz [9]), o których będzie mowa w rozdziale 2.

Okazuje się, że funkcje $\{s_\alpha\}$, gdzie α przebiega wszystkie podziały k, tworzą bazę liniową Λ_n^k nad Z dla $k \leqslant n$. Zanotujmy, że $s_k = h_k$, $s_{(1^k)} = e_k$, gdzie (1^k) oznacza podział $(1, \ldots, 1)$ (k jedynek).

Z poprzednich rozważań wynika, że funkcje Schura są wielomianami względem $h_1, h_2, \ldots$ czy też $e_1, e_2, \ldots$ Takie eleganckie przedstawienie podaje nam wzór Jacobiego–Trudiego:

$$s_\alpha = \det[h_{\alpha_i - i + j}], \qquad 1 = i, j \leqslant m,$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $m \leqslant n$. Podobny wzór wyraża s_α poprzez $e_1, \ldots, e_n$.

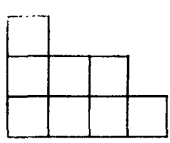
Na zakończenie tego wstępnego rozdziału chcę podać jeszcze jeden klasyczny wzór, który wyraża iloczyn $e_r s_\alpha$ jako sumę funkcji Schura.

Wzór Pieriego. Niech α będzie podziałem k i niech $r+k \leqslant n$. Wówczas

$$e_r s_\alpha = \sum_\nu s_\nu,$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich podziałach ν liczby $r+k$ spełniających warunek $\alpha_i \leqslant \nu_i \leqslant \alpha_i + 1$ dla każdego i.

Łatwo zapamiętać ten wzór, przyporządkowując każdemu podziałowi jego diagram. Jeśli $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, to diagram tego podziału składa się z ciągu kwadratów na płaszczyźnie ustawionych w m wierszach, przy czym i-ty wiersz zawiera α_i kwadratów, np. diagram podziału (4, 3, 1) przedstawiamy na rys. 1.



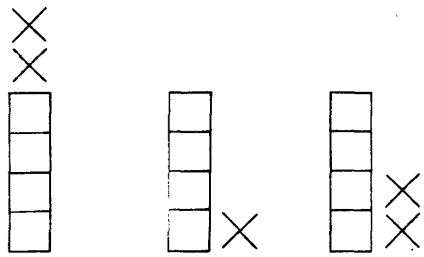
Rys. 1

Teraz wzór Pieriego staje się czysto mechaniczną zabawą. Sumowanie przebiega po wszystkich podziałach ν liczby $r+k$, które powstają z diagramu podziału α poprzez dodanie r kwadratów w ten sposób, by w każdym wierszu dodać co najwyżej jeden kwadrat. Jako ilustrację obliczymy, że

$$e_2 e_4 = s_{(1^6)} + s_{(2,1^4)} + s_{2211}.$$

Pamiętajmy, że $e_r = s_{(1^r)}$. W tym przypadku jedyne możliwości podane są na rys. 2.

Istnieje ogólniejszy wzór, który opisuje iloczyn $s_\alpha s_\beta$ jako sumę funkcji Schura. Tu współczynniki mogą być już różne od 0 i 1; ich kombinatoryczną interpretację podaje prawo Littlewooda–Richardsona (patrz [8]).



Rys. 2

2. Reprezentacje grupy $\mathrm{GL}(n)$. Przez *reprezentację* grupy G rozumiem homomorfizm $T\colon G \to \mathrm{GL}(m, \boldsymbol{C})$, tzn. odwzorowanie spełniające warunki

$$T(1) = 1, \quad T(gh) = T(g)T(h), \quad g, h \in G, \tag{1}$$

gdzie $\mathrm{GL}(m, \boldsymbol{C})$ oznacza grupę liniową wszystkich macierzy odwracalnych stopnia m nad ciałem liczb zespolonych $\boldsymbol{C}$, a 1 oznacza jedynkę grup G i $\mathrm{GL}(m, \boldsymbol{C})$ (nie doprowadzi to chyba do nieporozumień). Liczbę m nazywamy *stopniem* reprezentacji T.

Z reprezentacją T można stowarzyszyć działanie grupy G na przestrzeni $V = \boldsymbol{C}^m$, definiując $g \cdot v = T(g)(v)$. Wówczas z (1) otrzymujemy

$$1 \cdot v = v, \quad (gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v).$$

Taki obiekt nazywamy *G-modułem*. Mamy więc wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między G-modułami a reprezentacjami grupy G. Do podstawowych operacji na G-modułach należy branie sumy prostej oraz podmodułu. Podprzestrzeń $W \subset V$ nazywamy *G-podmodułem* modułu V, jeśli $g \cdot w \in W$ dla każdego $w \in W$, $g \in G$. Dla dwóch G-modułów U, V na zbiorze par (u, v), $u \in U$, $v \in V$, wprowadzamy działanie grupy G wzorem $g \cdot (u, v) = (g \cdot u, g \cdot v)$ i w ten sposób otrzymujemy G-moduł $U \oplus V$ zwany *sumą prostą* U i V. G-moduł V nazywamy *nieprzywiedlnym*, jeżeli nie ma on właściwych G-podmodułów, tzn. podmodułów różnych od 0 i V. Dużej klasie grup przysługuje bardzo ważna własność *pełnej reduktywności*:

(PR) dowolny G-moduł W jest sumą prostą skończonej liczby modułów nieprzywiedlnych:

$$W = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k,$$

gdzie V_i są nieprzywiedlne.

Własność pełnej reduktywności (PR) zachodzi, gdy:

1° G jest grupą skończoną,

2° G jest zwartą grupą Liego lub ogólniej jest grupą reduktywną.

W szczególności, grupa $G = \mathrm{GL}(n) = \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$ jest reduktywna, więc ma własność (PR).

Wobec tego opis wszystkich reprezentacji lub G-modułów dla takich grup sprowadza się do opisu G-modułów nieprzywiedlnych. W wielu przypadkach, w tym również dla $\mathrm{GL}(n)$, wygodnie jest to zrobić, „nadając" zbiorowi wszystkich modułów strukturę pierścienia. Dokładniej, dla grupy G definiujemy tzw. *pierścień reprezentacji* $\mathscr{R}(G)$. Jako grupa abelowa $\mathscr{R}(G)$ jest generowane przez klasy izomorfizmów $[U]$ G-modułów. Jeśli $W = V \oplus U$, to w $\mathscr{R}(G)$ zachodzi równość $[W] = [V] + [U]$. Ponieważ $\mathscr{R}(G)$ jest grupą, więc mamy formalnie w $\mathscr{R}(G)$ element $-[W]$. Jeśli $V_1, \ldots, V_k$ są wszystkimi nieizomorficznymi nieprzywiedlnymi G-modułami, to $\mathscr{R}(G)$ jest wolną grupą abelową rangi k o bazie $[V_1], \ldots, [V_k]$, dzięki własności (PR).

W grupie $\mathscr{R}(G)$ istnieje naturalne mnożenie indukowane przez operację iloczynu tensorowego modułów. Dla G-modułów U i V określamy działanie G na $U \otimes V$, przyjmując $g \cdot (u \otimes v) = g \cdot u \otimes g \cdot v$. Mnożenie w $\mathscr{R}(G)$ jest określone przez żądanie, by $[U] \cdot [V] = [U \otimes V]$.

Zasadniczym problemem w teorii reprezentacji jest opis pierścienia $\mathscr{R}(G)$. W przypadku grupy $\mathrm{GL}(n)$ ograniczymy się do tzw. *reprezentacji wielomianowych*, tzn. takich $T\colon \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{GL}(m)$, że współczynniki macierzy $T(A)$ wyrażają się wielomianowo poprzez współczynniki macierzy A. Oznaczmy przez $\mathscr{R}^w(\mathrm{GL}(n))$ podpierścień pierścienia $\mathscr{R}(\mathrm{GL}(n))$ generowany przez klasy reprezentacji wielomianowych. Oczekiwane powiązanie z funkcjami symetrycznymi sformułuję w następującym twierdzeniu:

TWIERDZENIE 1 (Schur [9]). *Istnieje izomorfizm pierścieni* $\mathscr{R}^w(\mathrm{GL}(n))$ *i* Λ_n. *Odwzorowanie* ch *określające ten izomorfizm zdefiniowane jest wzorem*

$$\mathrm{ch}([W]) = \mathrm{tr}(\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)\colon W \to W),$$

gdzie po prawej stronie mamy ślad przekształcenia liniowego na W *polegającego na działaniu na* W *macierzy generycznej* $\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ *mającej na przekątnej elementy* $x_1, \ldots, x_n$, *a poza przekątną — zera. Ślad ten jest funkcją symetryczną względem* $x_1, \ldots, x_n$, *a więc elementem pierścienia* Λ_n.

Dla zilustrowania twierdzenia podam prosty przykład. Jednak przedtem uwaga, która może nam lepiej uzmysłowić, czym są reprezentacje grupy $\mathrm{GL}(n)$.

Możemy utożsamić $\mathrm{GL}(n)$ z grupą automorfizmów przestrzeni liniowej U wymiaru n; oznaczmy ją przez $\mathrm{GL}(U)$. Dowolny funktor F na kategorii przestrzeni liniowych i ich przekształceń liniowych wyznacza pewną reprezentację $\tilde{F}$ grupy $\mathrm{GL}(U)$. Istotnie, definiujemy $\tilde{F}\colon \mathrm{GL}(U) \to \mathrm{GL}(F(U))$ jako $\tilde{F}(\varphi) = F(\varphi)\colon F(U) \to F(U)$ dla $\varphi \in \mathrm{GL}(U)$. Aksjomaty funktorów zapewniają, że $\tilde{F}$ jest reprezentacją.

Rozpatrzmy konkretny przykład, w którym $F = \bigwedge^k$ jest funktorem k-tej potęgi zewnętrznej; obliczmy $\mathrm{ch}([\bigwedge^k U])$. Dla $\varphi \in \mathrm{GL}(U)$, $u_i \in U$ mamy

$$\varphi \cdot (u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) = (\bigwedge^k \varphi)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) = \varphi(u_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(u_k).$$

Jeśli $\varphi = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$, to $\varphi(v_i) = x_i v_i$ dla pewnej bazy $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni U. Stąd otrzymujemy

$$\operatorname{ch}([\bigwedge^k U]) = \operatorname{tr}(\operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n): \bigwedge^k U \to \bigwedge^k U)$$
$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k} = e_k.$$

Przykład ten pokazuje, że odwzorowanie ch jest epimorfizmem, gdyż Λ_n jest generowane jako pierścień przez $e_1, \ldots, e_n$.

Rozpatrzenie funktorów k-tej potęgi symetrycznej S^k pokazuje, że $\operatorname{ch}([S^k U]) = h_k$.

Jako wniosek odnotujemy:

TWIERDZENIE 2. *Jeśli S_λ oznacza* $\mathrm{GL}(n)$*-moduł, którego klasą w* $\mathscr{R}^w(\mathrm{GL}(n))$ *jest* $\operatorname{ch}^{-1}(s_\lambda)$, *gdzie s_λ jest funkcją Schura wyznaczoną przez podział λ, to zbiór $\{S_\lambda\}$ indeksowany podziałami liczby k tworzy zupełny zbiór nieprzywiedlnych reprezentacji wielomianowych grupy* $\mathrm{GL}(n)$ *stopnia k.*

Twierdzenie Schura pozwala zredukować wiele problemów związanych z reprezentacjami grupy $\mathrm{GL}(n)$ do obliczeń w pierścieniu funkcji symetrycznych Λ_n. Oto jeden z przykładów. Przypuśćmy, że chcemy wiedzieć, jak iloczyn tensorowy $\bigwedge^2 U \otimes \bigwedge^4 U$ przedstawia się jako suma reprezentacji nieprzywiedlnych grupy $\mathrm{GL}(U)$. Na podstawie poprzedniego przykładu wiemy, że $\operatorname{ch}([\bigwedge^k U]) = e_k$. Wobec tego, że ch zachowuje mnożenie, otrzymujemy

$$\operatorname{ch}([\bigwedge^2 U \otimes \bigwedge^4 U]) = \operatorname{ch}([\bigwedge^2 U]) \operatorname{ch}([\bigwedge^4 U]) = e_2 e_4.$$

Ze wzoru Pieriego przedstawionego w poprzednim rozdziale wiemy, że

$$e_2 e_4 = s_{(1^6)} + s_{(21^4)} + s_{2211},$$

a więc otrzymujemy

$$\bigwedge^2 U \otimes \bigwedge^4 U = S_{(1^6)}(U) + S_{(21^4)}(U) + S_{2211}(U).$$

3. Pierścień kohomologii grassmannianu. Rozpatrzmy przestrzeń rzutową $\boldsymbol{P}^n$ oraz zbiór $G_d(n)$ wszystkich d-wymiarowych podprzestrzeni liniowych w $\boldsymbol{P}^n$. Na $G_d(n)$ można określić strukturę rozmaitości algebraicznej (rzutowej) poprzez tzw. *zanurzenie Plückera*

$$p\colon G_d(n) \to P\left(\bigwedge^{d+1} \boldsymbol{C}^{n+1}\right),$$

gdzie $P(U)$ oznacza projektywizację przestrzeni liniowej U. Punkt $z \in G_d(n)$ jest wyznaczony przez $(d+1)$-wymiarową podprzestrzeń L_z w $\boldsymbol{C}^{n+1}$. Jeśli $v_0, \ldots, v_d$ oznacza bazę L_z, to definiujemy $p(z)$ jako punkt przestrzeni $P\left(\bigwedge^{d+1} \boldsymbol{C}^{n+1}\right)$ wyznaczony przez wektor $v_0 \wedge \ldots \wedge v_d$. Rozmaitość $G_d(n)$ nazywana jest *grassmannianem*. Zauważmy, że $G_0(n) = \boldsymbol{P}^n$; można udowodnić, że $\dim_{\boldsymbol{C}} G_d(n) = (d+1)(n-d)$.

Aby opisać strukturę pierścienia kohomologii grassmannianu, rozpatrzmy flagę podprzestrzeni liniowych w $\boldsymbol{P}^n$

$$A = (A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \ldots \subsetneq A_d)$$

i załóżmy, że $\dim A_i = a_i + i$; wówczas $0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_d \leqslant n-d$. Definiujemy tzw. *rozmaitość Schuberta* stowarzyszoną z ciągiem A jako

$$\Omega(A) = \{L \in G_d(n);\ \dim(L \cap A_i) \geqslant i\}.$$

Dla flagi B takiej, że $\dim A_i = \dim B_i$ dla wszystkich i, rozmaitości $\Omega(A)$ i $\Omega(B)$ wyznaczają ten sam element w pierścieniu kohomologii przestrzeni $G_d(n)$, który oznaczamy przez $\Omega(a)$, gdzie $a = (a_0, \ldots, a_d)$, i nazywamy *cyklem Schuberta*. Wiadomo, że

$$\dim_{\boldsymbol{C}} \Omega(a) = \sum_{i=0}^{d} a_i.$$

TWIERDZENIE 3 (o bazie). 1° $H^{2p+1}(G_d(n), \boldsymbol{Z}) = 0$,

2° $H^{2p}(G_d(n), \boldsymbol{Z})$ *jest wolną grupą abelową o bazie składającej się z cykli Schuberta* $\Omega(a)$ *kowymiaru* p (*tzn.* $p = (d+1)(n-d) - \sum_{i=0}^{d} a_i$).

Rozpatrzymy dwa przykłady.

PRZYKŁAD 1. Maksymalne p, dla którego $H^{2p}(G_d(n), \boldsymbol{Z}) \neq 0$, jest równe $(d+1)(n-d) = N$; mamy $H^{2N}(G_d(n), \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Z}\Omega(0, \ldots, 0)$ ($d+1$ zer), przy czym cykl Schuberta $\Omega(0, \ldots, 0)$ składa się z jednego punktu. Z drugiej strony $H^0(G_d(n), \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Z}\Omega(n-d, \ldots, n-d)$ ($n-d$ powtórzone $d+1$ razy).

PRZYKŁAD 2. $G_1(3)$ jest grassmannianem prostych w $\boldsymbol{P}^3$. Baza cykli Schuberta wygląda następująco:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega(2,2) & & \Omega(1,2) & & \Omega(0,2),\ \Omega(1,1) & \Omega(0,1) & \Omega(0,0) \\ H^0 & & H^2 & & H^4 & H^6 & H^8 \end{array}$$

Przypatrzmy się dokładniej, czym są te cykle Schuberta. Przechodząc do bardziej klasycznych oznaczeń, ustalmy flagę $p_0 \subset l_0 \subset L_0$ w $\boldsymbol{P}^3$, tzn. p_0 jest punktem leżącym na prostej l_0, a ta jest zawarta w ustalonej płaszczyźnie L_0. Dla $\Omega(0, 1)$ przyjmujemy flagę $A_0 = p_0$, $A_1 = L_0$ i wówczas

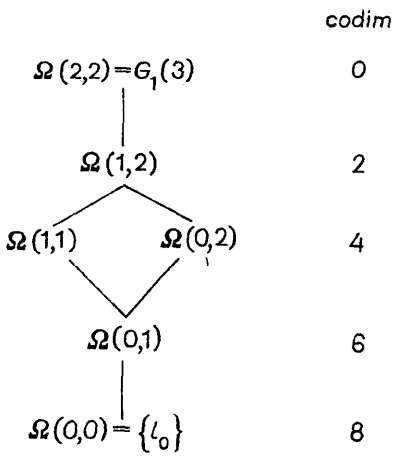
$$\begin{aligned} \Omega(0,1) &= \{l \in G_1(3);\ \dim(l \cap p_0) \geqslant 0,\ \dim(l \cap L_0) \geqslant 1\} \\ &= \{\text{wszystkie proste przechodzące przez } p_0 \text{ i zawarte w } L_0\}. \end{aligned}$$

Podobnie łatwo sprawdzamy, że

$\Omega(0, 2) = \{$wszystkie proste przechodzące przez $p_0\}$,
$\Omega(1, 1) = \{$wszystkie proste zawarte w $L_0\}$,
$\Omega(1, 2) = \{$wszystkie proste przecinające $l_0\}$,

oraz oczywiście $\Omega(0, 0) = \{l_0\}$, $\Omega(2, 2) = G_1(3)$.

Schemat inkluzji pomiędzy tymi cyklami Schuberta ilustruje następujący diagram:



Suma prosta $H^*(G_d(n), \mathbf{Z}) = \bigoplus_k H^k(G_d(n), \mathbf{Z})$, jak i struktura mnożenia na niej, mają bardzo wiele rozmaitych interpretacji. W terminach czysto topologicznych doprowadza to do pierścienia kohomologii.

Inne podejście prowadzi do izomorficznego pierścienia $A(G_d(n))$, zwanego *pierścieniem Chow*, poprzez algebraiczną formalizację przekroju dwóch podrozmaitości. Mamy

$$A(G_d(n)) = \bigoplus_k A^k(G_d(n)) \quad \text{oraz} \quad A^k(G_d(n)) \approx H^{2k}(G_d(n), \mathbf{Z}),$$

przy czym elementami $A^k(G_d(n))$ są kombinacje liniowe klas równoważności podrozmaitości w $G_d(n)$ kowymiaru k. Oczywiście cykle Schuberta, a więc klasy rozmaitości Schuberta, tworzą bazę w $A^k(G_d(n))$ nad $\mathbf{Z}$. Interpretacja mnożenia w $A(G_d(n))$ polega na wzięciu przekroju rozważanych podrozmaitości w sensie algebraicznym, tzn. na rozłożeniu przekroju geometrycznego na składowe nieprzywiedlne i rozpatrzeniu ich kombinacji liniowej o współczynnikach będących krotnościami, z jakimi składowe nieprzywiedlne pojawiają się w przekroju. Wszystko, co teraz piszę, jest bardzo nieprecyzyjne. Chciałbym jednak przedstawić choć drobne intuicje związane z mnożeniem, nie mając możliwości precyzyjnego opisu.

Jak w świetle powyższych uwag wygląda definicja potęgi, np. $[X]^2$, gdzie X jest podrozmaitością? Wybieramy w klasie równoważności $[X]$ taką podrozmaitość Y, że X i Y przecinają się „właściwie", i obliczamy $[X]^2$ jako $[X]\cdot[Y]$ w myśl definicji podanej uprzednio.

Rozpatrzmy prosty przykład. Chcemy obliczyć $\Omega(1, 1)^2$ w pierścieniu $A(G_1(3))$ izomorficznym z $H^*(G_1(3), \mathbf{Z})$. Wiemy, że $\Omega(1, 1)$ jest klasą podrozmaitości w $G_1(3)$ złożonej z wszystkich prostych zawartych w ustalonej płaszczyźnie L_0. Każda inna płaszczyzna L_0' wyznacza ten sam element

$\Omega(1, 1)$. Wybieramy więc L_0' tak, by $L_0' \neq L_0$. Wówczas obie płaszczyzny przetną się wzdłuż jednej prostej, a ta prosta reprezentuje cykl Schuberta oznaczany przez $\Omega(0, 0)$. Stąd $\Omega(1, 1)^2 = \Omega(0, 0)$. Jest to prosty przypadek, ponieważ nie mieliśmy do czynienia z krotnościami.

Tematyka, którą tu zaledwie wspominam, nazywa się *teorią przecięć* i stanowi centralną część geometrii algebraicznej. Stopniowe precyzowanie pojęć i definicji stanowiło w ciągu dziesięcioleci istotny impuls rozwoju podstaw geometrii algebraicznej i przykuwało uwagę najwybitniejszych matematyków. Początek stanowił tu tzw. rachunek Schuberta dla podrozmaitości grassmannianu. Aby dać czytelnikowi posmak tego, czym zajmował się Schubert, jak również uzmysłowić, skąd bierze się wspomniane mnożenie w kohomologiach grassmannianu, rozpatrzmy jeden z najprostszych problemów rozważanych przez Schuberta.

PROBLEM. Dane są 4 proste l_1, l_2, l_3, l_4 w $\boldsymbol{P}^3$ znajdujące się w położeniu ogólnym. Ile istnieje prostych przecinających te 4 proste?

Zbiór prostych w $\boldsymbol{P}^3$ przecinających prostą l_i jest wyznaczony przez cykl $\Omega(1, 2)(l_i)$. Należy to rozumieć tak, że w definicji $\Omega(1, 2)$ bierzemy flagę, w której zamiast l_0 pojawia się l_i. Ponieważ klasa cyklu nie zależy od wyboru flagi (a jedynie od wymiarów występujących w niej przestrzeni), więc wszystkie cykle $\Omega(1, 2)(l_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, wyznaczają ten sam element $\Omega(1, 2)$ w kohomologiach. Proste, o których mowa w pytaniu, należą do każdej podrozmaitości $\Omega(1, 2)(l_i)$, a więc do ich przekroju — co w terminach mnożenia opisanego uprzednio sprowadza się do obliczenia $\Omega(1, 2)^4$ w pierścieniu kohomologii. Zauważmy, że $\Omega(1, 2) \in H^2$, a więc $\Omega(1, 2)^4 \in H^8 = Z\Omega(0, 0)$, czyli $\Omega(1, 2)^4 = m\Omega(0, 0)$, $m \in Z$. Liczba m jest szukaną liczbą prostych przecinających wszystkie cztery proste l_i. Aby ją obliczyć, skorzystamy ze związku z funkcjami symetrycznymi.

TWIERDZENIE 4. *Niech* $N = (d+1)(n-d)$. *Istnieje epimorfizm pierścieni* $\Theta\colon \Lambda_N \to H^*(G_d(n), Z)$ *taki, że*

$$\Theta(s_\lambda) = \Omega(n-d-\lambda_1, \ldots, n-d-\lambda_{d+1})$$

dla $\lambda \subset (n-d)^{d+1}$ (*oznacza to inkluzję odpowiednich diagramów*), *gdzie* $(n-d)^{d+1} = (n-d, \ldots, n-d)$ ($(d+1)$-*krotne powtórzenie*).

Jeśli $\lambda \not\subset (n-d)^{d+1}$, *to* $\Theta(s_\lambda) = 0$. *Wobec tego* $H^*(G_d(n), Z) \approx \Lambda_N / I_{d,n}$, *gdzie* $I_{d,n}$ *jest ideałem generowanym przez* s_λ *dla* $\lambda \not\subset (n-d)^{d+1}$.

Stosując to twierdzenie do grassmannianu $G_1(3)$, otrzymamy

$$\begin{array}{ccccccccccccc} H^*(G_1(3)) & = & Z\Omega(2,2) & + & Z\Omega(1,2) & + & Z\Omega(0,2) & + & Z\Omega(1,1) & + & Z\Omega(0,1) & + & Z\Omega(0,0) \\ \updownarrow\theta & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \Lambda_4/I_{2,2} & = & Zs_0 & + & Zs_1 & + & Zs_2 & + & Zs_{1,1} & + & Zs_{2,1} & + & Zs_{2,2} \end{array}$$

Aby znać $\Omega(1, 2)^4$, wystarczy obliczyć s_1^4 w $\Lambda_4/I_{2,2}$ i znaleźć odpowiadający mu element w $H^*(G_1(3))$. Posługując się wzorem Pieriego w Λ_4, obliczamy,

że klasa s_1^4 modulo $I_{2,2}$ jest równa $2s_{2,2}$, a więc ostatecznie $\Omega(1, 2)^4 = 2\Omega(0, 0)$, co daje odpowiedź na czysto geometryczne pytanie rozważane przez Schuberta.

Na zakończenie tego rozdziału podam jeszcze dwa klasyczne wnioski z twierdzenia 4.

WNIOSEK 1. *Pierścień kohomologii grassmannianu* $G_d(n)$ *jest generowany jako pierścień przez tzw. specjalne cykle Schuberta*

$$\sigma_i = \Omega(n-d-i, \underbrace{n-d, \ldots, n-d}_{d}), \qquad i = 1, \ldots, n-d.$$

WNIOSEK 2 (G. Z. Giambelli).

$$\Omega(n-d-\lambda_1, \ldots, n-d-\lambda_{d+1}) = \det[\sigma_{\lambda_i - i+j}], \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant d+1.$$

Pierwszy wniosek wynika z faktu, że $\Theta(s_i) = \Theta(h_i) = \sigma_i$, a drugi ze wzoru wyznacznikowego Jacobiego–Trudiego dla funkcji Schura.

4. Reprezentacje grup symetrycznych. Powróćmy do oznaczeń z rozdziału 2 i rozpatrzmy pierścień reprezentacji grupy symetrycznej $\mathscr{R}(S_k)$. W tym przypadku nie będzie nas interesowała struktura mnożenia w $\mathscr{R}(S_k)$, natomiast określimy inne mnożenie na sumie prostej $\mathscr{R} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{R}(S_k)$, przyjmując $\mathscr{R}(S_0) = \boldsymbol{Z}$.

Grupę $S_k \times S_m$ można w naturalny sposób zanurzyć w grupę S_{k+m}. Jeśli $[U] \in \mathscr{R}(S_k)$, $[V] \in \mathscr{R}(S_m)$, to na $U \otimes V$ istnieje naturalna struktura $S_k \times S_m$-modułu; definiujemy

$$[U] \cdot [V] = \operatorname{Ind}_{S_k \times S_m}^{S_{k+m}} U \otimes V,$$

gdzie Ind oznacza symbol reprezentacji indukowanej.

W ten sposób otrzymujemy na $\mathscr{R}$ strukturę pierścienia przemiennego, którą również można opisać w terminach funkcji symetrycznych, tym razem jednak zależnych od nieskończonej liczby zmiennych.

Zauważmy, że dla każdego n mamy homomorfizm $\Lambda_{n+1} \to \Lambda_n$ określony przez warunki $x_i \mapsto x_i$, $i = 1, \ldots, n$, $x_{n+1} \mapsto 0$. Przy tym $e_k(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto$ $\mapsto e_k(x_1, \ldots, x_n)$ i podobnie dla funkcji h_k i p_k wprowadzonych w rozdziale 1. To doprowadza do ciągu homomorfizmów pierścieni

$$\ldots \to \Lambda_{n+1} \to \Lambda_n \to \Lambda_{n-1} \to \ldots \to \Lambda_1,$$

a więc do pewnego granicznego pierścienia Λ, który dla naszych celów wygodnie jest zdefiniować jako pierścień wielomianów $\boldsymbol{Z}[e_1, e_2, \ldots]$, przy czym e_k zależy tu od nieskończenie wielu zmiennych $x_1, x_2, \ldots$ Symbol e_k oznacza teraz formalny szereg potęgowy

$$e_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}.$$

Pierścień Λ jest pierścieniem z gradacją, $\Lambda = \bigoplus_k \Lambda^k$, przy czym $\deg e_k = k$. Dla dowolnego n mamy epimorfizm $\Lambda \to \Lambda_n$ polegający na podstawieniu $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$. Stąd $e_k \mapsto e_k(x_1, \ldots, x_n)$. Dlatego $\Lambda^k \approx \Lambda_n^k$ dla $k \leqslant n$, a więc z tego, co udowodniliśmy w rozdziale 1, wynika, że dla dowolnego k ranga $\Lambda^k = p(k) =$ liczba podziałów liczby k. Ponadto funkcje Schura tworzą bazę liniową pierścienia Λ nad $\boldsymbol{Z}$.

Z drugiej strony, ranga grupy $\mathscr{R}(S_k)$ jest też równa $p(k)$. Istotnie, ranga $\mathscr{R}(S_k)$ jest równa liczbie nieizomorficznych nieprzywiedlnych S_k-modułów, a ta jest równa liczbie klas elementów sprzężonych w S_k. Klasy elementów sprzężonych w S_k są opisane przez strukturę cykli: dla dowolnego podziału α liczby k wszystkie permutacje z S_k o strukturze cykli α tworzą jedną klasę elementów sprzężonych C_α.

Teraz możemy już sformułować zasadniczy rezultat.

TWIERDZENIE 5. *Istnieje izomorfizm pierścieni z gradacją* ch: $\mathscr{R} \to \Lambda$ *określony następująco. Niech* $[W] \in \mathscr{R}(S_k)$ *i niech* ψ: $S_k \to \Lambda^k$ *oznacza takie odwzorowanie, że dla* $t \in C_\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *mamy* $\psi(t) = p_{\alpha_1} \ldots p_{\alpha_m}$. *Wówczas*

$$\operatorname{ch}([W]) = \frac{1}{k!} \sum_{t \in S_k} \operatorname{tr}(t\colon W \to W)\psi(t).$$

Jeśli Id oznacza trywialną reprezentację jednowymiarową grupy S_k, to łatwy bezpośredni rachunek pokazuje, że $\operatorname{ch}([\mathrm{Id}]) = h_k$. Podobnie, dla reprezentacji jednowymiarowej sign: $S_k \to \boldsymbol{C}$ przyporządkowującej permutacji jej znak mamy $\operatorname{ch}([\mathrm{sign}]) = e_k$.

TWIERDZENIE 6 (Frobenius [1]). *Reprezentacje nieprzywiedlne grupy* S_k *są indeksowane podziałami liczby k. Niech* Σ_λ *będzie reprezentacją nieprzywiedlną odpowiadającą podziałowi* λ. *Wówczas* $[\Sigma_\lambda] = \operatorname{ch}^{-1}(s_\lambda)$, *gdzie* s_λ *oznacza funkcję Schura indeksu* λ.

WNIOSEK 3. *Niech* λ *i* α *będą podziałami liczby k,* $f_\alpha^\lambda = \operatorname{tr}(t\colon \Sigma_\lambda \to \Sigma_\lambda)$ *dla* $t \in C_\alpha$ *i niech* $p_\alpha = p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots$ *Wówczas*

$$s_\lambda = \sum_\alpha z_\alpha^{-1} f_\alpha^\lambda p_\alpha,$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich podziałach α *liczby k, a* $z_\alpha = 1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \ldots$, *jeśli* α *składa się z* r_1 *jedynek,* r_2 *dwójek itd.*

Wniosek 3 jest zasadniczym wynikiem Frobeniusa. Wyraża on liczby f_α^λ, wartości tzw. charakteru odpowiadającego reprezentacji Σ_λ, poprzez znane funkcje symetryczne p_α i s_λ.

Bibliografia

[1] G. Frobenius, *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1900), 516–534 (Dzieła Zebrane, t. 3, Springer-Verlag, 1968, 148–166).

[2] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag, 1984.
[3] H. Hiller, *Geometry of Coxeter Groups*, Pitman, Boston 1982.
[4] G. D. James, *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, Lecture Notes in Math. 682, Springer-Verlag, 1978 (istnieje przekład rosyjski: *Теория представлений симметрических групп*, Мир, Москва 1982).
[5] G. D. James, A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia Math. Appl. 16, Addison-Wesley, 1981.
[6] S. L. Kleiman, *Rigorous foundations of Schubert's enumerative calculus*, w: Proc. Sympos. Pure Math. 28, Amer. Math. Soc., 1976, 445–482.
[7] S. L. Kleiman, D. Laksov, *Schubert calculus*, Amer. Math. Monthly 79 (1972), 1061–1082.
[8] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, Oxford 1979 (istnieje przekład rosyjski: *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, Москва 1985).
[9] I. Schur, *Über eine Klasse von Matrizen die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*, Dysertacja, Berlin 1901 (Dzieła Zebrane, t. 1, Springer-Verlag, 1973, 1–72).
[10] R. P. Stanley, GL(n, C) *for combinatorialists*, w: Surveys in Combinatorics, E. K. Lloyd (red.), London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, 1983, 187–199.
[11] H. Weyl, *The Classical Groups*, wyd. II, Princeton Univ. Press, Princeton 1946.

Miscellanea

Naszą specjalnością jest matematyka lub jakaś inna dziedzina wiedzy. Naszą specjalnością jest też uczestniczenie w społeczności akademickiej, bez względu na uprawianą przez nas dyscyplinę naukową. A kośćcem tej społeczności jest jej własna etyka, stanowiąca rozszerzenie etyki naturalnej.

Wielu sądzi, że nie ma sensu mówienie o specjalnej etyce uczonego, stawiającej mu większe wymagania niż ludziom spoza środowiska naukowego. Tak zwany „pracownik naukowy" zajmuje się po prostu wykonywaniem swojego zawodu, podobnie jak murarz czy urzędnik. Nie wiadomo więc, dlaczego wkładać na jego barki odpowiedzialność większą niż na tamtych, zwłaszcza że zarabia nie najlepiej.

A jednak w różnych ankietach zawód „profesor uniwersytetu" ma wysoką lokatę. Istnieje prawdziwa tytułomania naukowa. Stopnie i tytuły naukowe zastąpiły dziś u nas hierarchię tytułów arystokratycznych, tyle że nie są dziedziczne. Prestiż ludzi ze środowiska akademickiego jest dużo wyższy, niż by wynikało z ich dochodów. Stanowi to oczywiście dodatkowe źródło satysfakcji dla ludzi tego środowiska, a dla młodych, uzdolnionych zapaleńców dodatkowy motyw podejmowania trudnej drogi kariery uniwersyteckiej.

Prestiż ten jest uwarunkowany tradycyjnym rozumieniem działalności uczonego. Jest nim bezinteresowne dochodzenie prawdy. W odczuciu społecznym powinno to rzutować na całą postawę uczonego. Zgorszeniem jest zamożny kaznodzieja, nawołujący do cierpliwego znoszenia ubóstwa. Zgorszeniem jest też