ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXIX (1990)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zadania

Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (nowe zadania, rozwiązania zadań itp.) należy kierować pod adresem: Michał Krych, Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego, Pałac Kultury i Nauki, IX piętro, 00-901 Warszawa. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane. Gwiazdką są oznaczone zadania, których rozwiązanie nie jest znane redakcji. Niektóre zadania publikowane w tym dziale mogą być znane dawniej, jednak ani autorowi, ani redakcji nic o tym nie wiadomo.

301*. Dane są długości boków pięciokąta wpisanego w okrąg. Znaleźć promień tego okręgu.

T. Prucnal (Kielce)

Rozwiązania zadań

271*. Czy dla każdej funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej $f(x)$, ograniczonej w otoczeniu x_0, warunek $\lim_{h\to 0} \Delta^3 f(x_0) = 0$, czyli warunek

$$\lim_{h\to 0} [f(x_0+3h)-3f(x_0+2h)+3f(x_0+h)-f(x_0)] = 0$$

pociąga za sobą ciągłość funkcji f w punkcie x_0?

W. Sierpiński, przypomniał *R. Rabczuk* (Wrocław)

Odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest negatywna. Niech $G = \{2^n 3^k: n, k \in \mathbf{Z}\}$. Oczywiście $x \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $3x \in G$, i jest to równoważne temu, że $2x \in G$. Niech $c = \sqrt{35}-i$, $d = 6i$, $z = \frac{1}{18}(17+i\sqrt{35})$ oraz

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \notin G, \\ (-1)^q c z^{p+q}, & \text{jeżeli } x = 2^p 3^{2q},\ p, q \in \mathbf{Z}, \\ (-1)^q d z^{p+q}, & \text{jeżeli } x = 2^p 3^{2q+1},\ p, q \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Łatwy rachunek przekonuje nas, że $\Delta^3 F(0) = 0$ dla każdego h, $F(x) = 0$ dla $x \notin G$ oraz $|F(x)| = |c| = |d| = 6$ dla $x \in G$. Ponieważ 0 jest punktem skupienia zbioru G i do G nie należy, więc F nie jest ciągła w 0. Przyjmując $f = \operatorname{Re} F$ lub $f = \operatorname{Im} F$, otrzymujemy żądany przykład.

A. Gajda (Białystok)

288*. Znaleźć wszystkie typy wielościanów wypukłych, w których liczba ścian jest równa liczbie wierzchołków.

W. Mnich (Opole)

Niech wielościan, w którym liczba ścian jest równa liczbie wierzchołków, nazywa się *magiczny*. Wielościanów magicznych jest wiele, a przy tym bardzo różnorodnych. Do dowolnej n-kątnej ściany dowolnego wielościanu W można dolepić pewien wielościan W' tak, aby $W \cup W'$ był wielościanem magicznym. Istotnie, jeśli różnica między liczbą ścian i wierzchołków w wielościanie W wynosi r, to odpowiednia różnica dla wielościanu W' powinna wynosić $2-n-r$. Jako W' można np. wziąć wielościan, który powstaje z ostrosłupa ściętego o podstawach n-kątnych w wyniku odcięcia od niego lub też dolepienia do niego odpowiedniej liczby czworościanów; odcięcie czworościanu płaszczyzną przechodzącą przez punkty wewnętrzne krawędzi zmniejsza różnicę o 1, natomiast po doklejeniu omawiana różnica wzrasta o 1. Oczywiście może się zdarzyć, że po to, aby było możliwe doklejanie, trzeba najpierw coś odciąć, by mieć do czynienia z wielościanem, który ma co najmniej jedną ścianę trójkątną.

Opiszemy jeszcze jedną metodę tworzenia wielościanów magicznych. Tym razem z wielościanu magicznego utworzymy wielościan magiczny, który ma o jedną ścianę więcej, dokładniej: przybędzie jedna ściana trójkątna i jedna krawędź w sąsiedniej ścianie. Okazuje się, że w ten sposób w skończonej liczbie kroków możemy otrzymać dowolny wielościan magiczny, startując z czworościanu, który sam jest magiczny.

Niech s_k oznacza liczbę ścian k-kątnych dla $k = 3, 4, \ldots$ w wypukłym wielościanie magicznym. Ze wzoru Eulera wynika, że

$$s_3 = 4 + \sum_{k \geqslant 5} (k-4) s_k.$$

Stąd wynika, że wielościan magiczny ma przynajmniej cztery ściany trójkątne. Jeżeli ma dokładnie cztery takie ściany, to jest oczywiście czworościanem. W przeciwnym razie wielościan ten ma krawędź, która jest wspólna dla pewnej ściany trójkątnej i pewnej ściany n-kątnej, gdzie $n \geqslant 4$. Po sklejeniu tej krawędzi do punktu powstaje wielościan, który ma o jedną ścianę mniej i o jeden wierzchołek mniej. Proces kolejnego sklejania wybieranych krawędzi wyjściowego wielościanu prowadzi w końcu do wielościanu, którego wszystkie ściany są trójkątami, lub też do wielościanu, który w następnym kroku przekształciłby się już nie w wielościan, lecz w wielobok. Ostatnie zjawisko nie jest możliwe, bo mamy do czynienia z wielościanem magicznym, a to oznacza, że proces sklejania wypukłego wielościanu magicznego musi zakończyć się na czworościanie. Oznacza to, że każdy wypukły wielościan magiczny możemy otrzymać z czworościanu w wyniku wielokrotnego „rozdmuchiwania".

A. Gajda (Białystok)

289. Czy istnieje nie zawarty w prostej, właściwy, niepusty podzbiór płaszczyzny taki, że każda prosta przechodząca przez dwa punkty tego zbioru jest jego osią symetrii?

W. Mnich (Opole)

Łatwo można sprawdzić, że takim zbiorem jest np. zbiór tych punktów, których obie współrzędne są algebraiczne.

K. Hryniewiecki (Białystok)

294. Podać przykład miary borelowskiej, bezatomowej, półskończonej (σ-skończonej) na przedziale $(0, 1)$ i takiej, że jedyną funkcją ciągłą całkowalną względem tej miary jest funkcja zerowa.

M. Krych (Warszawa)

Oznaczmy przez (U_n) ciąg złożony ze wszystkich podprzedziałów przedziału (0, 1) mających wymierne końce. Za pomocą łatwej indukcji można skonstruować ciąg (P_n) zbiorów nigdziegęstych o następujących własnościach:

(i) P_n ma dodatnią miarę Lebesgue'a,

(ii) $P_1 \subset U_1$,

(iii) $P_{n+1} \subset U_{n+1} \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Niech μ_n oznacza miarę borelowską, probabilistyczną, bezatomową, skupioną na P_n. Wówczas $\mu = \sum \mu_n$ ma żądane własności, w szczególności na mocy (iii), $\mu(U) = \infty$ dla każdego niepustego zbioru otwartego $U \subset (0, 1)$.

Z. Lipecki (Wrocław)

LIST DO REDAKCJI

W sprawie doktorów promowanych przez W. Sierpińskiego

Prof. H. Toruńczyk zwrócił mi uwagę na fakt, że w swoim referacie *Rola Wacława Sierpińskiego w historii matematyki polskiej* (Wiadom. Mat. 26 (1984), 1–9) niesłusznie wymieniłem Antoniego Zygmunda wśród doktorów promowanych przez Sierpińskiego na Uniwersytecie Warszawskim: z dokumentów wynika, że promotorem Antoniego Zygmunda był Stefan Mazurkiewicz. Ten sam błąd znajduje się w moim artykule *Życiorys Wacława Sierpińskiego* (ibidem 12 (1971), 303–308), w którym ponadto, idąc za księgą pamiątkową jubileuszu Sierpińskiego z roku 1948 (dodatek do tomu XXI Rocznika PTM, str. 43) wśród matematyków doktoryzowanych przez Sierpińskiego wymieniłem niesłusznie Bronisława Knastera i Alfreda Tarskiego. Ze względu na to, że informacje zawarte w księdze pamiątkowej okazały się w trzech przypadkach nieścisłe, pozostaje do wyjaśnienia, czy Sierpiński istotnie doktoryzował Zenona Waraszkiewicza, Jerzego Spławę-Neymana i Wacława Kozakiewicza. Natomiast niewątpliwie promował na UW Kazimierza Kuratowskiego, Kazimierza Zarankiewicza, Ottona Nikodyma, Adolfa Lindenbauma, Edwarda Marczewskiego i Antoniego Wakulicza.

Andrzej Schinzel