wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Recenzje

José Maria Montesinos, *Classical Tesselations and Three-manifolds*, with 225 figures including 29 colour illustrations, Universitext, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg 1987, str. 230, ISBN 3-540-15291-1, 0-387-15291-1.

Każdy zna ornamenty i mozaiki: zdobią one ściany i podłogi pięknych sal, oglądać je można na kratach i witrażach, stosuje się je we wzornictwie przemysłowym. Jest ich mnogość nieprzebrana, jednakże kiedy się zastanowić nad sposobem ich powstawania, to okazuje się, że prawideł jest niewiele. Matematyk wie, że grup symetrii, których elementami są izometrie płaszczyzny przeprowadzające daną mozaikę na siebie, jest tylko 17 (idąc za autorem, tu i dalej przez *mozaikę* będziemy rozumieli wzór pokrywający całą płaszczyznę, nieredukowalny do ornamentów liniowych i punktowych). Wszystkie te grupy były już znane starożytnym Egipcjanom ([5], str. 76), a także hiszpańskim Maurom, twórcom Alhambry (por. uwagę autora na str. 228).

Tak się mają rzeczy na płaszczyźnie euklidesowej E^2. Ale można przecież zdobić także inne powierzchnie, np. sferę S^2 czy płaszczyznę hiperboliczną H^2. Mozaiki na sferze S^2 mają te same grupy symetrii, co bryły platońskie w tę sferę wpisane. Dołączając do nich ostrosłup podwójny powstały z dwóch ostrosłupów prawidłowych, zetkniętych podstawami, będącymi wielokątami foremnymi o dowolnej liczbie boków, mamy tutaj nieskończenie wiele grup symetrii, które można jednak podzielić na skończenie wiele klas. Ich materialnych przedstawicieli dostarcza świat kryształów.

Znacznie bogatsza od płaszczyzny euklidesowej i sfery okazuje się, z tego punktu widzenia, płaszczyzna hiperboliczna H^2. Nie wydaje się prawdopodobne, by mozaiki hiperboliczne zostały znalezione w przyrodzie, jednakże tacy artyści jak M. Escher już je rysowali [1].

Omawiana książka rozpatruje mozaiki euklidesowe, sferyczne i hiperboliczne. Jest to przedmiot wdzięczny i sam w sobie bardzo ciekawy, jednakże głównym przedmiotem zainteresowań książki nie są owe mozaiki same w sobie, lecz ich przestrzenie położeń, co prostą już drogą prowadzi do pewnych rozmaitości trójwymiarowych. W istocie mozaiki służą w tej książce przede wszystkim do wydobycia różnych intuicji, jakie można wiązać z rozmaitościami trójwymiarowymi, i autor adresuje ją do tych, którzy chcą się poważnie zainteresować tymi rozmaitościami, obiecując im bogactwo materiału i oglądu.

Obietnicy dotrzymuje, a jako przykład jego metody rozpatrzmy dwunastościan foremny wpisany w sferę S^2 i weźmy pod uwagę zbiór wszystkich jego położeń przy ruchu tej sfery po sobie, przy czym położenia, w których dwunastościan przechodzi na siebie, będziemy uważali za identyczne. Okazuje się, że zbiór tych położeń, z najbardziej naturalną topologią, jest pewną rozmaitością zamkniętą, orientowalną, wymiaru 3. Rozmaitością zresztą dobrze topologom znaną, jest to bowiem pierwsza nietrywialna sfera homologiczna, odkryta przez H. Poincarégo jeszcze w 1904 r. [3]. W tej samej pracy Poincaré wysunął zresztą jednocześnie problem do dziś

otwarty, a znany pod nazwą hipotezy Poincarégo: czy każda sfera homologiczna, której grupa podstawowa jest trywialna, jest homeomorficzna ze sferą zwykłą?

Przy okazji autor zwraca uwagę na mało znane spostrzeżenie L. Siebenmanna, że 20 lat wcześniej F. Klein był bardzo bliski odkrycia sfery homologicznej Poincarégo w postaci przestrzeni ilorazowej $SO(3)/A_5$ (p. [2]). I zapytuje: dlaczego dzisiaj nadal warto definiować sferę homologiczną Poincarégo jako przestrzeń położeń dwunastościanu foremnego, a nie np. w bardziej eleganckiej postaci $SO(3)/A_5$? Jego odpowiedź jest godna geometry: bo ta pierwsza definicja jest bardziej intuicyjna, pozwala na proste definiowanie różnych rozmaitości i daje głęboki wgląd w ich strukturę. W rozważanym przykładzie sfery homologicznej Poincarégo można np. ustalić średnicę tej sfery i definiować działanie S^1 na sferze homologicznej przez obrót wokół tej średnicy; zależnie od doboru średnicy dwunastościan wraca do swego położenia po pełnym obrocie, po 1/2, po 1/3 lub po 1/5 obrotu. Przestrzeń położeń jest więc tutaj rozłączną sumą okręgów, przy czym niektóre z nich są wyjątkowe, a zatem ma ona strukturę rozmaitości Seiferta z włóknami wyjątkowymi rzędów 2, 3 i 5.

Książka składa się z pięciu rozdziałów i dwóch uzupełnień. W rozdziale I autor definiuje sferyczną wiązkę styczną TX nad powierzchnią zamkniętą X (pod-wiązka wiązki stycznej, składająca się z wektorów o normie 1) oraz jej uogólnienie, S^1-wiązkę nad X. Biorąc jako X sferę S^2, powierzchnie orientowalne i powierzchnie nieorientowalne, opisuje dość szczegółowo wiązki TX, a po drodze traktuje o takich rzeczach, jak liczba Eulera, diagramy Heegarda, przestrzenie soczewkowe, grupy podstawowe, rozmaitości zespolone.

Rozdziały II, III i V są naturalnymi rozwinięciami rozdziału I. Tam przedmiotem rozważań były sferyczne wiązki styczne nad powierzchniami (dwuwymiarowymi rozmaitościami), tu będą nad dwuwymiarowymi „orbifoldami", odpowiadającymi mozaikom, odpowiednio, euklidesowym, sferycznym i hiperbolicznym.

Termin „orbifold" zdradza podobieństwo do terminu „manifold" (rozmaitość) i taka też jest jego geneza. Jak wiadomo, dla każdej (spójnej) rozmaitości M można skonstruować jej nakrycie uniwersalne $\tilde{M} \to M$ i związać z nim grupę G przekształceń nakrywających (izomorficzną z grupą podstawową $\pi_1(M)$), która działa na $\tilde{M}$ w sposób wolny i dyskretny. Pozwala to myśleć o M jako o przestrzeni ilorazowej $\tilde{M}/G$. Otóż w przypadku mozaik wygodnie jest rozpatrywać sytuację ogólniejszą: rozmaitość $\tilde{M}$ i grupę G, która działa na niej w sposób dyskretny, ale niekoniecznie wolny: iloraz $\tilde{M}/G$ jest wówczas właśnie „orbifoldem" i jest to oczywiście pojęcie ogólniejsze od rozmaitości.

Na przykład, dwuwymiarowe euklidesowe „orbifoldy" są przestrzeniami ilorazowymi płaszczyzny euklidesowej E^2 przez działanie na niej jednej z 17 grup symetrii mozaikowych i w tym przypadku są to wszystko powierzchnie z brzegiem (który bywa pusty). Zawierają one dostatecznie dużo informacji, by rekonstruować nakrycie uniwersalne i odpowiednie grupy mozaik, a więc są tych mozaik dobrymi reprezentantami. „Orbifoldom" jest poświęcone uzupełnienie A, umieszczone zaraz po rozdziale II, w którym to rozdziale, w oparciu o intuicyjne ich rozumienie, rozważa się sferyczne wiązki styczne nad „orbifoldami" mozaik euklidesowych — rozmaitości związane z tymi mozaikami. Rozdziały III i V zajmują się sferycznymi i hiperbolicznymi przypadkami tej sytuacji.

Rozdział IV jest przerywnikiem poświęconym rozmaitościom Seiferta. Tutaj wciąż jeszcze najlepszym wprowadzeniem jest oryginalna praca Seiferta [4] z 1933 r., chociaż D. B. A. Epstein dowiódł niedawno, że są to rozmaitości, które mają foliacje złożone wyłącznie z okręgów. Autor w swoim wykładzie idzie za oryginałem.

Kończy książkę uzupełnienie B, zawierające dywagacje na temat płaszczyzny hiperbolicznej, wiążące się z kwestiami poruszanymi w rozdziale V. Jest to tekst niesystematyczny, ale pełen bardzo ciekawych spostrzeżeń i uwag.

Do tego krótkiego przeglądu treści koniecznie trzeba dodać parę słów o jej, jak pisze sam autor, „nieortodoksyjnym" charakterze: tekst ma charakter luźnej gawędy z li-

cznymi dygresjami, brak w nim *explicite* formułowanych twierdzeń, obfituje natomiast w rysunki i ćwiczenia. Rysunki są na każdej niemal stronicy, nieraz po kilka (w sumie jest około 200), a ponadto wkładki z kolorowymi zdjęciami minerałów oraz motywów z Alhambry. Obficie w tekście rozsypane ćwiczenia mają służyć czytelnikowi do sprawdzania rozumienia i do głębszego wnikania samodzielnie w materię rzeczy. Zalecana literatura (38 pozycji) jest niemal całkowicie współczesna i dobrze zestawiona, lecz nie jest kompletna. Autor jednak wiele razy się zastrzega, że nie pisze monografii, tylko tekst dla studentów starszych lat matematyki, interesujących się rozmaitościami niskowymiarowymi.

Na pytanie, co jest w tej książce nowe, autor z rozbrajającą szczerością odpowiada: *Nic nowego poza ujęciem. Pisząc tę książkę, chciałem posłużyć się tymi konstrukcjami jako swego rodzaju „pretekstem" do mówienia o rozmaitościach trójwymiarowych i uczenia intuicji geometrycznej, istotnego elementu formacji naszych studentów, służącego temu, by mogli oni dokonywać nowych odkryć w matematyce. Konstrukcje te służą zatem do wprowadzania różnych pojęć odnoszących się do rozmaitości trójwymiarowych.*

Można podziwiać odwagę autora (i wydawcy, który umieścił książkę w serii *Universitext*), ale jednocześnie wypada pogratulować sukcesu: oto przybyła nam jeszcze jedna dobra książka, która młodemu matematykowi pozwala wejść na obszar intensywnie dziś uprawiany, a starszego poprowadzi ścieżkami, którymi sam być może nie chadzał. Książka, która pokazuje, że matematyka jest sztuką przede wszystkim widzenia, a dopiero potem ubierania tego widzenia w odpowiednią szatę pojęciową i sprawdzania poprawności spetryfikowanych intuicji. Jednocześnie jest ta książka jeszcze jednym przykładem, jak bardzo współczesnej matematyce są potrzebni matematycy, których siła leży nie w tworzeniu nowych koncepcji, rozwiązywaniu trudnych problemów czy dowodzeniu silnych twierdzeń, lecz w głębokiej wiedzy o matematyce i umiejętności oryginalnego jej przekazywania.

Nie jest to jednak książka łatwa i sporo trzeba już wiedzieć z geometrii rzutowej i hiperbolicznej oraz topologii algebraicznej, by móc ją czytać; z drugiej jednak strony, lektura takiej książki bardzo wzbogaca widzenie tego obszaru matematyki i pozwala na podejmowanie otwartych problemów. Dzięki i takim książkom twórcy mogą mieć następców, a matematyka nadzieję, że będzie się nadal rozwijać.

[1] B. Ernst, *Le miroir magique de M. C. Escher*, Medea, Fribourg 1987.

[2] F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Leipzig 1884 (przekład rosyjski: *Lekcji ob ikosaedrie i rieszenija urawnienij piatoj stiepieni*, Moskwa 1989).

[3] H. Poincaré, *Cinquième complément à l'Analysis Situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo 18 (1904), 45–110.

[4] H. Seifert, *Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume*, Acta Math. 60 (1933), 147–238 (przekład angielski w: H. Seifert, *A Textbook of Topology*, Academic Press, 1980, 359–422).

[5] A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, IV wyd., Basel 1955.

Roman Duda

Mathematics Counts, Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the Chairmanship of Dr. W. H. Cockcroft, Her Majesty's Stationery Office, London 1982, str. 311, ISBN 0-11-270522-7([1]).

Nauczanie matematyki jest problemem, z którym każdy kraj musi sobie radzić we własnym zakresie, zgodnie z własnymi uwarunkowaniami kulturowymi i cywilizacyjnymi. Sposób jednak, w jaki do tego problemu podchodzi Wielka Brytania, może służyć jako przykład dobrej, rzetelnej roboty na tym polu.

([1]) Cytaty z tej książki zamieszczamy na stronach 91, 92, 122 i 130.