Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

cznymi dygresjami, brak w nim *explicite* formułowanych twierdzeń, obfituje natomiast w rysunki i ćwiczenia. Rysunki są na każdej niemal stronicy, nieraz po kilka (w sumie jest około 200), a ponadto wkładki z kolorowymi zdjęciami minerałów oraz motywów z Alhambry. Obficie w tekście rozsypane ćwiczenia mają służyć czytelnikowi do sprawdzania rozumienia i do głębszego wnikania samodzielnie w materię rzeczy. Zalecana literatura (38 pozycji) jest niemal całkowicie współczesna i dobrze zestawiona, lecz nie jest kompletna. Autor jednak wiele razy się zastrzega, że nie pisze monografii, tylko tekst dla studentów starszych lat matematyki, interesujących się rozmaitościami niskowymiarowymi.

Na pytanie, co jest w tej książce nowe, autor z rozbrajającą szczerością odpowiada: *Nic nowego poza ujęciem. Pisząc tę książkę, chciałem posłużyć się tymi konstrukcjami jako swego rodzaju „pretekstem" do mówienia o rozmaitościach trójwymiarowych i uczenia intuicji geometrycznej, istotnego elementu formacji naszych studentów, służącego temu, by mogli oni dokonywać nowych odkryć w matematyce. Konstrukcje te służą zatem do wprowadzania różnych pojęć odnoszących się do rozmaitości trójwymiarowych.*

Można podziwiać odwagę autora (i wydawcy, który umieścił książkę w serii *Universitext*), ale jednocześnie wypada pogratulować sukcesu: oto przybyła nam jeszcze jedna dobra książka, która młodemu matematykowi pozwala wejść na obszar intensywnie dziś uprawiany, a starszego poprowadzi ścieżkami, którymi sam być może nie chadzał. Książka, która pokazuje, że matematyka jest sztuką przede wszystkim widzenia, a dopiero potem ubierania tego widzenia w odpowiednią szatę pojęciową i sprawdzania poprawności spetryfikowanych intuicji. Jednocześnie jest ta książka jeszcze jednym przykładem, jak bardzo współczesnej matematyce są potrzebni matematycy, których siła leży nie w tworzeniu nowych koncepcji, rozwiązywaniu trudnych problemów czy dowodzeniu silnych twierdzeń, lecz w głębokiej wiedzy o matematyce i umiejętności oryginalnego jej przekazywania.

Nie jest to jednak książka łatwa i sporo trzeba już wiedzieć z geometrii rzutowej i hiperbolicznej oraz topologii algebraicznej, by móc ją czytać; z drugiej jednak strony, lektura takiej książki bardzo wzbogaca widzenie tego obszaru matematyki i pozwala na podejmowanie otwartych problemów. Dzięki i takim książkom twórcy mogą mieć następców, a matematyka nadzieję, że będzie się nadal rozwijać.

[1] B. Ernst, *Le miroir magique de M. C. Escher*, Medea, Fribourg 1987.

[2] F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Leipzig 1884 (przekład rosyjski: *Lekcji ob ikosaedrie i rieszenija urawnienij piatoj stiepieni*, Moskwa 1989).

[3] H. Poincaré, *Cinquième complément à l'Analysis Situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo 18 (1904), 45–110.

[4] H. Seifert, *Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume*, Acta Math. 60 (1933), 147–238 (przekład angielski w: H. Seifert, *A Textbook of Topology*, Academic Press, 1980, 359–422).

[5] A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, IV wyd., Basel 1955.

Roman Duda

Mathematics Counts, Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the Chairmanship of Dr. W. H. Cockcroft, Her Majesty's Stationery Office, London 1982, str. 311, ISBN 0-11-270522-7([1]).

Nauczanie matematyki jest problemem, z którym każdy kraj musi sobie radzić we własnym zakresie, zgodnie z własnymi uwarunkowaniami kulturowymi i cywilizacyjnymi. Sposób jednak, w jaki do tego problemu podchodzi Wielka Brytania, może służyć jako przykład dobrej, rzetelnej roboty na tym polu.

([1]) Cytaty z tej książki zamieszczamy na stronach 91, 92, 122 i 130.

W lipcu 1977 r. jedna z komisji poselskich Izby Gmin opublikowała raport, w którym stwierdziła istnienie *sporej liczby spraw związanych z matematycznymi postępami dzieci i wymagających bardziej starannego zbadania.* W marcu 1978 rząd Jej Królewskiej Mości zgodził się z tym stanowiskiem i powołał 24-osobową komisję, której zadanie sformułował tak: *Zbadać nauczanie matematyki w podstawowych i średnich szkołach Anglii i Walii, ze szczególnym uwzględnieniem potrzeb matematycznych w dalszym i wyższym kształceniu, w pracy zawodowej i, ogólnie, w życiu dorosłym, oraz sformułować stosowne zalecenia.*

Komisja, w której składzie byli matematycy uniwersyteccy (m.in. M. F. Atiyah), dyrektorzy szkół, nauczyciele i inspektorzy oświatowi — pracowała intensywnie przez 3 lata, zbierając materiały i oświadczenia, odwiedzając szkoły w Anglii i Walii oraz zagraniczne ośrodki, inspirując doraźne badania, przeprowadzając liczne konsultacje indywidualne i zbiorowe, a nade wszystko dużo dyskutując we własnym gronie. Nie licząc indywidualnej pracy członków komisji, uzbierało się w sumie 64 dni posiedzeń plenarnych i 143 dni posiedzeń grup roboczych. W realizację otrzymanego zadania włożono więc ogromną pracę, ale wysiłek się opłacił. Jego wynikiem stał się raport, od nazwiska przewodniczącego komisji zwany Raportem Cockcrofta, który ukazał się drukiem w 1982 r. i niemal z miejsca zyskał czytelników i wpływy, czego dowodem są kilkakrotne jego wznowienia.

Raport dzieli się na 810 modułów zgrupowanych w 17 rozdziałach (245 stronic), po których następuje 5 uzupełnień i indeks. Część pierwsza, złożona z rozdziałów 1–4, ma charakter ogólny i odpowiada na pytania: dlaczego uczymy matematyki? jakie są potrzeby matematyczne w życiu codziennym dorosłego człowieka? w jego pracy? w dalszym i wyższym kształceniu?

Najobszerniejsza część druga, złożona z rozdziałów 5–11 (moduły 187–601), zajmuje się już konkretnie matematyką w szkole, najpierw ogólnie, na szczeblu podstawowym i na szczeblu średnim, a następnie niektórymi problemami szczególnymi, jak kalkulatory i komputery, ocena osiągnięć i ciągłość edukacji, problem egzaminów wieku 16+ (specyficznie brytyjski), matematyka w VI klasie.

Część trzecia składa się z rozdziałów 12–17 (moduły 602–810) i zwraca się w stronę problemów nauczycielskich, omawiając takie sprawy, jak pomoce naukowe w szkole, kształcenie nauczycieli, ułatwianie świeżo wykształconym nauczycielom rozpoczęcia pracy w szkole, wspieranie nauczycieli uczących, spojrzenie w przyszłość.

Na uzupełnienia składają się bogate zestawienia statystyczne (34 tabele), opracowanie na temat różnic w uczeniu się matematyki przez chłopców i dziewczęta oraz wykazy organizacji i osób, które nadesłały uwagi komisji, wizyt w szkołach, zakładach przemysłowych i innych zakładach pracy, wreszcie spotkań z nauczycielami. Książkę zamyka wykaz używanych skrótów oraz dobrze zrobiony indeks, bardzo ułatwiający posługiwanie się nią.

Logiczny i przejrzysty układ Raportu sprawia, że łatwo się nim posługiwać, trzeźwość zaś i solidność wyrażanych w nim sądów niepomiernie podnosi jego rangę, powodując, że jego znaczenie wykroczyło daleko poza wyspy brytyjskie. W szczególności niektóre z jego ocen i spostrzeżeń można odnieść i do polskiej szkoły.

Nie jest łatwo streścić Raport i nie chciałbym tu nawet tego próbować. Ograniczę się jedynie do wyboru. Na podstawowe pytanie — dlaczego uczymy w szkole matematyki? — autorzy odpowiadają prosto: ponieważ dostarcza ona potężnych środków porozumiewania się (przekonywania, wyjaśniania, przewidywania), ponieważ jest ważna w wielu dziedzinach nauki i życia, ponieważ bawi. Sceptycznie natomiast odnoszą się do opinii o jej jakoby szczególnej roli w rozwijaniu intuicji przestrzennych, myślenia logicznego i dokładności w postępowaniu, zauważając, że te zdolności kształcą także inne przedmioty szkolne.

W rozdziale o matematycznych potrzebach w życiu codziennym osoby dorosłej autorzy stwierdzają bardzo często żałosny wręcz (dużo mniejszy, niż się nam wydaje) poziom kompetencji matematycznej dorosłych, i to nawet wśród osób inteligentnych i stojących wysoko w hierarchii społecznej. W tej sytuacji za niezbędne minimum wiedzy matematycznej uznają: odczytywanie liczb i rachowanie, znajomość czasu, płacenie i wy-

dawanie reszty, ważenie i mierzenie, czytanie rozkładów jazdy, a także innych prostych wykresów i tablic (moduł 32). Kładą też nacisk na uzyskanie zaufania do własnej kompetencji.

Dla lepszego wyrażenia swej myśli wdają się w analizę znaczenia słowa *numeracy*. W języku angielskim istnieje para słów *numeracy–literacy*, nie mających odpowiedników w języku polskim. To drugie słowo opisuje pewien poziom biegłości w posługiwaniu się alfabetem, a więc pewną umiejętność czytania i pisania, pierwsze natomiast odnosi się do systemu liczbowego, ogólniej do matematyki, i wyraża pewien poziom biegłości matematycznej. Jaki poziom? Znamienne, że od momentu pierwszego pojawienia się tego słowa (tzw. *Raport Crowthera* z 1959 r.) przeszło ono sporą ewolucję.

Pierwotnie *numeracy* miało być lustrzanym odbiciem wcześniejszego *literacy*, a więc oznaczać *z jednej strony* (...) *rozumienie naukowego podejścia w badaniu zjawisk — obserwacji, hipotez, doświadczeń, weryfikacji. Z drugiej strony* (...) *konieczność myślenia ilościowego we współczesnym świecie, rozumienia, jak dalece nasze problemy są problemami stopnia nawet wtedy, gdy wydają się problemami rodzaju. Ignorancja statystyczna i wiążące się z tym błędy są równie szeroko rozpowszechnione i równie niebezpieczne jak błędy logiczne obejmowane znaczeniem słowa „illiteracy"* (cytuję za modułem 36).

Miał to być poziom osiągany przez szkolną naukę matematyki. Życie jednak sprawiło, a słowniki angielskie (np. *Oxford English Dictionary* oraz *Collins Concise Dictionary*) to potwierdzają, że ten wysoki poziom rozumienia tego terminu spadł jednak z czasem jedynie do *umiejętności wykonywania podstawowych operacji arytmetycznych*. Autorzy Raportu Cockcrofta opowiadają się za rozumieniem pośrednim: być oswojonym z liczbami i działaniami na nich w stopniu odpowiadającym praktycznym potrzebom codziennego życia oraz posiadać umiejętność oceny i rozumienia informacji opisanej w takich terminach matematycznych, jak grafy, wykresy, tabele, procenty (moduł 39). Jeżeli traktować to jako minimalny cel kształcenia matematycznego, to wielu uzna go zapewne za nadmiernie skromny, jednakże autorzy Raportu stwierdzają, że w tej chwili nawet on nie jest realizowany.

Omawiając nieco bardziej szczegółowo poszczególne poziomy nauczania, o szkole podstawowej piszą tak: *Matematyka w szkole podstawowej powinna wzbogacać estetyczne i lingwistyczne doświadczenie dzieci, wyposażać je w środki eksploracji swego otoczenia i rozwijać umiejętność logicznego myślenia, a ponadto nauczyć rachowania, potężnego narzędzia w późniejszej pracy czy studiach* (moduł 288). Kładą nacisk na ciągłość przejścia między szkołą podstawową a średnią (moduł 430). Krytycznie wypowiadają się o egzaminach, zwłaszcza końcowych: *Nie możemy uwierzyć, by było pożądane, aby przeciętnie zdolny uczeń musiał, dla otrzymania świadectwa ukończenia szkoły, rozwiązywać takie listy zadań, za które potrafi otrzymać tylko około 1/3 liczby możliwych do uzyskania punktów* (moduł 444). Krytykują przeładowane i niewłaściwie sformułowane programy. Nie siląc się na przedstawienie własnego programu, opisują jednakże dość szczegółowo podstawowe, ich zdaniem, hasła matematyczne do opanowania w szkole (moduł 438, 5 stronic druku).

Bardzo ciekawa jest część trzecia, traktująca o kształceniu nauczycieli matematyki. Stwierdzając, że nauczycieli matematyki brakuje we wszystkich typach szkół, a ci, którzy są, nie zawsze dobrze jej uczą, piszą tak: *Uważamy za istotne włożenie znacznie większego niż dotychczas wysiłku w podniesienie w opinii publicznej sprawy nauczania, zwłaszcza nauczania matematyki* (moduł 640). Brzmi to bardzo swojsko, chociaż sytuacja nauczyciela w szkołach brytyjskich jest nieporównanie lepsza niż w polskich. I nie wchodząc na teren uniwersytetów, piszą jednak tak: *Ponieważ znaczna liczba nauczycieli matematyki jest i będzie absolwentami uniwersytetów, uznajemy za właściwe rozważenie dwóch kwestii. Po pierwsze, w jakim zakresie obecne programy uniwersyteckie dają należyte przygotowanie przyszłym nauczycielom, i po drugie, czy wygórowane wymagania nie powodują utraty sporej liczby potencjalnych nauczycieli. Przedstawiamy nasze poglądy na te dwie kwestie w nadziei, że uniwersytety zechcą ocenić,*

a może i zmienić swoje stanowisko w tej sprawie (moduł 642). Kryje się w tym zawoalowana krytyka uniwersytetów, a szczegóły są rozwinięte w kolejnych modułach.

Książki tej, jak się rzekło, nie sposób streścić. Nie zrobiła zresztą tego sama komisja, ponieważ była zdania, że jej zalecenia powinny być czytane w całości, w kontekście wszystkich prowadzonych rozważań. Wspomnijmy więc jeszcze tylko, że doczekała się ona poważnych recenzji (najobszerniejsza: T. J. Fletcher [1]), *The Cockcroft report on mathematical education, An assessment of a nation's need*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 5 (1982)), a także że kalkulatory i komputery tak szybko zmieniają oblicze szkoły, iż w tej sprawie autorzy sami musieli zmodyfikować niektóre swoje wcześniejsze poglądy (por. W. Cockcroft, *Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur*, preprint).

Lekturę tego Raportu polecam każdemu, kto się poważnie interesuje nauczaniem matematyki w szkole, a więc dydaktykom, nauczycielom, metodykom, autorom podręczników itd., a także tym wszystkim, którzy podejmują w tym zakresie decyzje, np. ustalając programy czy konstruując zestawy egzaminacyjne. Skorzystają na tym oni sami, ale przede wszystkim skorzysta szkoła. Jednocześnie, czytając Raport, trudno się oprzeć uczuciu zazdrości, że można nad systemem oświatowym pracować systematycznie i rzeczowo, z dobrym rozeznaniem realiów, z rozwagą i poczuciem odpowiedzialności, a nie zrywami, w pośpiechu, pod presją decyzji już podjętych i rozlicznych niemożności.

Roman Duda

([1]) Por. T. J. Fletcher, *Ulepszanie programów nauczania matematyki w zmieniających się społeczeństwach*, Wiadom. Mat. 27 (1986), 93–108 (*przyp. red.*).

Z Ditzian i V. Totik, *Moduli of Smoothness*, Springer Series in Computational Mathematics 9, Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo 1987, str. IX+225+2, ISBN 0-387-96536-X, 3-540-96536-X.

W roku 1912 ukazały się, niezależnie od siebie, prace D. Jacksona oraz S. N. Bernsteina, zawierające proste i odwrotne twierdzenia o aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi w przestrzeni $C_{2\pi}$ funkcji ciągłych 2π-okresowych. Oznaczając przez $\omega^r(f, n^{-1})_C$ moduł gładkości rzędu r funkcji f, a przez $E_n^*(f)_C$ błąd najlepszego przybliżenia funkcji f wielomianami trygonometrycznymi stopnia $\leqslant n$ w $C_{2\pi}$, mamy następujące nierówności:

$$E_n^*(f)_C \leqslant M\omega^r(f, n^{-1})_C$$

(nierówność Jacksona) oraz

$$\omega^r(f, h)_C \leqslant M_r h^r \sum (n+1)^{r-1} E_n^*(f)_C$$

(nierówność Stieczkina), gdzie suma rozciąga się na wskaźniki n spełniające nierówność $0 \leqslant n < h^{-1}$, a M i M_r są stałymi dodatnimi. Otrzymujemy stąd następującą równoważność: $\omega^r(f, h)_C = O(h^\alpha)$ przy $0 < \alpha < r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E_n^*(f)_C = O(n^{-\alpha})$. To samo zachodzi w przestrzeniach $L^p_{2\pi}$ przy $1 \leqslant p < \infty$.

Tzw. „nierówność prosta" zachodzi także, gdy zastąpić wielomiany trygonometryczne wielomianami algebraicznymi. Mianowicie, jeśli przez $E_n(f)_B$ oznaczyć błąd najlepszego przybliżenia funkcji $f \in B$ na przedziale $[-1, 1]$ w metryce przestrzeni $B = C[-1, 1]$ lub $B = L^p[-1, 1]$ wielomianami algebraicznymi stopnia $\leqslant n$, to okazuje się, że

$$E_n(f)_B = O(\omega^1(f, n^{-1})_B).$$

W przypadku funkcji $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ daje to warunek

$$(*) \qquad E_n(f)_B = O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha < r.$$

W przeciwieństwie do wielomianów trygonometrycznych nie jest prawdziwe tzw. odwrotne twierdzenie aproksymacyjne, to jest z warunku $(*)$ nie wynika, że $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$. Klasa funkcji f, dla których zachodzi $(*)$, zwana