Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

a może i zmienić swoje stanowisko w tej sprawie (moduł 642). Kryje się w tym zawoalowana krytyka uniwersytetów, a szczegóły są rozwinięte w kolejnych modułach.

Książki tej, jak się rzekło, nie sposób streścić. Nie zrobiła zresztą tego sama komisja, ponieważ była zdania, że jej zalecenia powinny być czytane w całości, w kontekście wszystkich prowadzonych rozważań. Wspomnijmy więc jeszcze tylko, że doczekała się ona poważnych recenzji (najobszerniejsza: T. J. Fletcher ([1]), *The Cockcroft report on mathematical education, An assessment of a nation's need*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 5 (1982)), a także że kalkulatory i komputery tak szybko zmieniają oblicze szkoły, iż w tej sprawie autorzy sami musieli zmodyfikować niektóre swoje wcześniejsze poglądy (por. W. Cockcroft, *Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur*, preprint).

Lekturę tego Raportu polecam każdemu, kto się poważnie interesuje nauczaniem matematyki w szkole, a więc dydaktykom, nauczycielom, metodykom, autorom podręczników itd., a także tym wszystkim, którzy podejmują w tym zakresie decyzje, np. ustalając programy czy konstruując zestawy egzaminacyjne. Skorzystają na tym oni sami, ale przede wszystkim skorzysta szkoła. Jednocześnie, czytając Raport, trudno się oprzeć uczuciu zazdrości, że można nad systemem oświatowym pracować systematycznie i rzeczowo, z dobrym rozeznaniem realiów, z rozwagą i poczuciem odpowiedzialności, a nie zrywami, w pośpiechu, pod presją decyzji już podjętych i rozlicznych niemożności.

Roman Duda

([1]) Por. T. J. Fletcher, *Ulepszanie programów nauczania matematyki w zmieniających się społeczeństwach*, Wiadom. Mat. 27 (1986), 93–108 (*przyp. red.*).

Z Ditzian i V. Totik, *Moduli of Smoothness*, Springer Series in Computational Mathematics 9, Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo 1987, str. IX+225+2, ISBN 0-387-96536-X, 3-540-96536-X.

W roku 1912 ukazały się, niezależnie od siebie, prace D. Jacksona oraz S. N. Bernsteina, zawierające proste i odwrotne twierdzenia o aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi w przestrzeni $C_{2\pi}$ funkcji ciągłych 2π-okresowych. Oznaczając przez $\omega^r(f, n^{-1})_C$ moduł gładkości rzędu r funkcji f, a przez $E_n^*(f)_C$ błąd najlepszego przybliżenia funkcji f wielomianami trygonometrycznymi stopnia $\leqslant n$ w $C_{2\pi}$, mamy następujące nierówności:

$$E_n^*(f)_C \leqslant M\omega^r(f, n^{-1})_C$$

(nierówność Jacksona) oraz

$$\omega^r(f, h)_C \leqslant M_r h^r \sum (n+1)^{r-1} E_n^*(f)_C$$

(nierówność Stieczkina), gdzie suma rozciąga się na wskaźniki n spełniające nierówność $0 \leqslant n < h^{-1}$, a M i M_r są stałymi dodatnimi. Otrzymujemy stąd następującą równoważność: $\omega^r(f, h)_C = O(h^\alpha)$ przy $0 < \alpha < r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E_n^*(f)_C = O(n^{-\alpha})$. To samo zachodzi w przestrzeniach $L^p_{2\pi}$ przy $1 \leqslant p < \infty$.

Tzw. „nierówność prosta" zachodzi także, gdy zastąpić wielomiany trygonometryczne wielomianami algebraicznymi. Mianowicie, jeśli przez $E_n(f)_B$ oznaczyć błąd najlepszego przybliżenia funkcji $f \in B$ na przedziale $[-1, 1]$ w metryce przestrzeni $B = C[-1, 1]$ lub $B = L^p[-1, 1]$ wielomianami algebraicznymi stopnia $\leqslant n$, to okazuje się, że

$$E_n(f)_B = O(\omega^1(f, n^{-1})_B).$$

W przypadku funkcji $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ daje to warunek

$$(*) \qquad E_n(f)_B = O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha < r.$$

W przeciwieństwie do wielomianów trygonometrycznych nie jest prawdziwe tzw. odwrotne twierdzenie aproksymacyjne, to jest z warunku $(*)$ nie wynika, że $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$. Klasa funkcji f, dla których zachodzi $(*)$, zwana

też *klasą saturacji*, nie jest więc identyczna z $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Książka Z. Ditziana i V. Totika wywodzi się z następującego problemu: jak zmodyfikować określenie modułu gładkości ω^r, aby wyznaczona przezeń klasa Lipschitza była klasą saturacji dla warunku (*)? Główne pomysły autorów, rozwijających w książce wcześniejsze wyniki własne, polegają na wprowadzeniu do definicji modułu gładkości pewnej wagi φ, modyfikującej wpływ końców (czy też końca) przedziału określoności funkcji, oraz na wprowadzeniu K-funkcjonału J. Peetre jako istotnego elementu w dowodach.

Przedstawię sytuację najprostszą, odpowiadającą aproksymacji wielomianami algebraicznymi w przestrzeni $L^p(D)$, gdzie D jest jednym z przedziałów: $(0, 1)$, $\boldsymbol{R}_+ = (0, \infty)$ lub $\boldsymbol{R} = (-\infty, \infty)$. Niech $\Delta_h^r f(x)$ będzie różnicą symetryczną rzędu r funkcji f w punkcie x dla przyrostu h, przy czym przyjmujemy $\Delta_h^r f(x) = 0$, gdy choćby jeden z przedziałów $[x, x+rh]$, $[x-rh, x]$ nie leży wewnątrz D. Rozpatrujemy funkcję wagową φ określoną w D, lokalnie równoważną stałej, zachowującą się na końcach D asymptotycznie jak potęgi dodatnie i spełniającą pewien warunek, gwarantujący mierzalność funkcji $f(x \pm h\varphi(x))$ dla dostatecznie małych $h > 0$, jeśli funkcja f jest mierzalna. Moduł gładkości r-tego rzędu w $L^p(D)$, odpowiadający wadze φ, określony jest wzorem (rozdział 2, str. 11)

$$\omega_\varphi^r(f, t) = \sup_{0<h\leqslant t} \|\Delta_{h\varphi}^r f\|_p.$$

Przy określeniu tym otrzymuje się (rozdział 7, twierdzenia 7.2.1 i 7.2.4) pełną analogię nierówności Jacksona i Stieczkina, jeśli wziąć ω_φ^r z $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ zamiast ω^r, a $E_n(f)_p$ zamiast $E_n^*(f)_p$ w przestrzeni $L^p[-1, 1]$. Prowadzi to do wniosku, że klasą saturacji dla warunku $E_n(f)_p = O(n^{-\alpha})$ przy $0 < \alpha < r$ jest zbiór tych funkcji f, dla których $\omega_\varphi^r(f, h)_p = O(h^{-\alpha})$. Oznacza to, że rezultat jest optymalny.

Metoda dowodu polega na użyciu K-funkcjonałów. Przedstawię ją tutaj w przypadku najprostszym. Określamy

$$K_{r,\varphi}(f, t^r)_p = \inf\{\|f-g\|_p + t^r \|\varphi^r g^{(r)}\|_p\},$$

$r = 1, 2, \ldots$, gdzie inf po prawej stronie bierze się po zbiorze wszystkich $(r-1)$-krotnie różniczkowalnych funkcji g takich, że pochodna $g^{(r-1)}$ jest absolutnie ciągła w każdym domkniętym podprzedziale przedziału D. Podstawowe twierdzenie (rozdział 2, twierdzenie 2.1.1, str. 12) orzeka wówczas, że dla każdej funkcji f lokalnie w $L^p(D)$, zachodzą nierówności

$$M^{-1}\omega_\varphi^r(f, t)_p \leqslant K_{r,\varphi}(f, t^r)_p \leqslant M\omega_\varphi^r(f, t)_p$$

dla $0 < t \leqslant t_0$, gdzie t_0 i M są stałymi dodatnimi. Twierdzenie to, którego dowód zajmuje 12 stron, pozwala w oszacowaniach dowolnie przechodzić od modułu ω_φ^r do funkcjonału $K_{r,\varphi}$ i na odwót. W szczególności umożliwia ono przeniesienie znanych własności modułów gładkości ω^r na moduły ω_φ^r.

Zarówno K-funkcjonały, jak i moduły ω_φ^r wymagają dalszych uogólnień, by sprostać bardziej skomplikowanym sytuacjom w teorii aproksymacji, np. gdy przestrzeń $L^p(D)$ jest z wagą w bądź też wielomiany najlepszego przybliżenia zastępujemy różnymi średnimi. Wymienię tu moduł Ω_φ^r, mający charakter części głównej (*main-part modulus*), otrzymywany poprzez odsunięcie się od końca przedziału (rozdział 3), oraz K-funkcjonały i moduły $\omega_\varphi^r(f, t)_{w,p}$ odpowiadające przestrzeni $L_w^p(D)$ z pewną wagą w (rozdział 6). Wymaga to w każdym przypadku uzyskania odpowiedniej wersji wspomnianego wyżej twierdzenia podstawowego z rozdziału 2.

Książkę podzielili autorzy na dwie części. Pierwsza, zatytułowana *Moduł gładkości*, obejmuje w 6 rozdziałach podstawowe koncepcje, twierdzenia i dowody, o których pisałem wyżej. Druga, zatytułowana *Zastosowania*, zaczyna się od rozdziału 7 o aproksymacji wielomianami algebraicznymi. O głównym wyniku tego rozdziału również pisałem wyżej.

O ile część pierwsza ma charakter bardzo zwarty, stanowiąc rozwinięcie głównej koncepcji autorów, o tyle druga przedstawia prawdziwy gąszcz różnych przypadków szczegółowych i czyta się ją trudniej. W rozdziale 8 autorzy podejmują zagadnienie najlepszej aproksymacji z wagą wielomianami algebraicznymi. Natomiast rozdziały 9 i 10 poświęcone są zwykłej aproksymacji i apro-

symacji z wagą za pomocą operatorów typu wykładniczego. Jest tutaj omówiona aproksymacja operatorami Bernsteina, Szásza–Mirakiana, Baskakowa, Posta–Widdera, Meiera–Königa i Zellera, Kantorowicza, Szásza–Kantorowicza oraz Baskakowa–Kantorowicza. Uzyskano wyniki typu saturacyjnego dla modułu ω_φ^r bądź też dla modułów określonych z wagą w.

Rozdział 11 obejmuje aproksymację wielomianami algebraicznymi z wagą $W(x) = \exp(-Q(x))$ przy odpowiednich Q, w przestrzeni $L^p(\boldsymbol{R})$, z użyciem K-funkcjonału odpowiadającego tej wadze W. Rozdział 12 zajmuje aproksymacja funkcji wielu zmiennych wielomianami algebraicznymi. Uzyskuje się twierdzenia o klasie saturacji w kostce $Q^m = [-1, 1]^m$ oraz pewne oszacowania dla $L^p(S)$, gdzie S jest wielościanem wypukłym w $\boldsymbol{R}^m$. Krótki rozdział 13 to dyskusja z aktualnymi wynikami, głównie B. L. Sendowa, K. G. Iwanowa, P. L. Butzera, R. L. Stensa, M. Wehrensa, M. K. Potapowa i W. Hoeffdinga. Książka zawiera też pewne postawione przez autorów problemy otwarte. Na bibliografię składa się 116 pozycji, z czego 2/3 z ostatnich 15 lat.

Książka, w znacznej większości składająca się z oryginalnych wyników obydwu autorów, z których wiele jest tutaj publikowanych w pełni po raz pierwszy, będzie niezbędnym źródłem dla każdego specjalisty w dziedzinie teorii aproksymacji. Jej użyteczność jest tym większa, że dowody przeprowadzono z wystarczającą szczegółowością. Z drugiej strony, pomijając szczegóły dowodów, z treścią książki może zapoznać się z korzyścią dla siebie także każdy matematyk pracujący w dziedzinie analizy matematycznej, choć lawina szczegółów może w pierwszej chwili działać zniechęcająco na tych, którzy przywykli do dużego stopnia ogólności wielu współczesnych prac.

Julian Musielak

K. P. Rybakowski, *The Homotopy Index and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg 1987, str. 208, ISBN 3-540-18067-2, 0-387-18067-2.

Niech X będzie przestrzenią metryczną. Ciągłe odwzorowanie $\eta\colon \boldsymbol{R}\times X \to X$ nazywa się *potokiem*, jeżeli

$$\eta(0, x) = x \quad \text{dla } x\in X,$$

$$\eta(t, \eta(s, x)) = \eta(t+s, x) \quad \text{dla } t, s\in\boldsymbol{R},\ x\in X.$$

Klasycznym przykładem potoku jest potok $\eta\colon \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ wyznaczony przez krzywe całkowe równania różniczkowego

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{1}$$

Zakładamy przy tym, że $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ jest „dostatecznie porządnym" odwzorowaniem w tym sensie, że dla każdego warunku początkowego $x(0) = x_0$ równanie (1) ma jednoznaczne rozwiązanie określone na całej prostej.

Podzbiór $Y\subseteq X$ nazywa się *niezmienniczym podzbiorem potoku* η, jeżeli $\eta(t, y)\in Y$ dla $t\in\boldsymbol{R}$, $y\in Y$. Podzbiór $S\subseteq X$ nazywa się *izolowanym podzbiorem niezmienniczym*, jeżeli istnieje zwarty podzbiór $N\subseteq X$ taki, że $S\subseteq \operatorname{Int} N$ oraz S jest maksymalnym podzbiorem niezmienniczym zawartym w N. Taki podzbiór N nazywa się *otoczeniem izolującym* zbioru niezmienniczego S.

Niech $N_0\subseteq N\subseteq X$. Podzbiór N_0 nazywa się *dodatnio niezmienniczym podzbiorem zbioru* N, jeżeli warunki

$$x\in N_0, \quad \eta([0, t]\times\{x\})\subseteq N$$

pociągają za sobą $\eta([0, t]\times\{x\})\subseteq N_0$ (inaczej mówiąc, punkt należący do N_0 nie może opuścić zbioru N_0 wcześniej niż N).

Niech S będzie niezmienniczym podzbiorem potoku η i niech N będzie otoczeniem izolującym zbioru S. Para domkniętych podzbiorów (N_1, N_2), $N_2\subseteq N_1\subseteq N$, nazywa się *parą indeksową*, jeżeli obydwa zbiory są dodatnio niezmienniczymi podzbiorami zbioru N, $S\subseteq \operatorname{Int}(N_1\setminus N_2)$ oraz punkty N_1 mogą opuścić N tylko przez N_2. Okazuje się, że typ homotopijny przestrzeni ilorazowej N_1/N_2 nie zależy ani od wyboru otoczenia izolującego N, ani od wyboru pary indeksowej. Oznaczając przez $h(S)$ typ homotopii przestrzeni N_1/N_2, otrzymujemy niezmiennik wprowa-