symacji z wagą za pomocą operatorów typu wykładniczego. Jest tutaj omówiona aproksymacja operatorami Bernsteina, Szásza–Mirakiana, Baskakowa, Posta–Widdera, Meiera–Königa i Zellera, Kantorowicza, Szásza–Kantorowicza oraz Baskakowa–Kantorowicza. Uzyskano wyniki typu saturacyjnego dla modułu ω_φ^r bądź też dla modułów określonych z wagą w.

Rozdział 11 obejmuje aproksymację wielomianami algebraicznymi z wagą $W(x) = \exp(-Q(x))$ przy odpowiednich Q, w przestrzeni $L^p(\boldsymbol{R})$, z użyciem K-funkcjonału odpowiadającego tej wadze W. Rozdział 12 zajmuje aproksymacja funkcji wielu zmiennych wielomianami algebraicznymi. Uzyskuje się twierdzenia o klasie saturacji w kostce $Q^m = [-1, 1]^m$ oraz pewne oszacowania dla $L^p(S)$, gdzie S jest wielościanem wypukłym w $\boldsymbol{R}^m$. Krótki rozdział 13 to dyskusja z aktualnymi wynikami, głównie B. L. Sendowa, K. G. Iwanowa, P. L. Butzera, R. L. Stensa, M. Wehrensa, M. K. Potapowa i W. Hoeffdinga. Książka zawiera też pewne postawione przez autorów problemy otwarte. Na bibliografię składa się 116 pozycji, z czego 2/3 z ostatnich 15 lat.

Książka, w znacznej większości składająca się z oryginalnych wyników obydwu autorów, z których wiele jest tutaj publikowanych w pełni po raz pierwszy, będzie niezbędnym źródłem dla każdego specjalisty w dziedzinie teorii aproksymacji. Jej użyteczność jest tym większa, że dowody przeprowadzono z wystarczającą szczegółowością. Z drugiej strony, pomijając szczegóły dowodów, z treścią książki może zapoznać się z korzyścią dla siebie także każdy matematyk pracujący w dziedzinie analizy matematycznej, choć lawina szczegółów może w pierwszej chwili działać zniechęcająco na tych, którzy przywykli do dużego stopnia ogólności wielu współczesnych prac.

Julian Musielak

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

K. P. Rybakowski, *The Homotopy Index and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg 1987, str. 208, ISBN 3-540-18067-2, 0-387-18067-2.

Niech X będzie przestrzenią metryczną. Ciągłe odwzorowanie $\eta\colon \boldsymbol{R}\times X \to X$ nazywa się *potokiem*, jeżeli

$$\eta(0, x) = x \quad \text{dla } x\in X,$$

$$\eta(t, \eta(s, x)) = \eta(t+s, x) \quad \text{dla } t, s\in\boldsymbol{R},\ x\in X.$$

Klasycznym przykładem potoku jest potok $\eta\colon \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ wyznaczony przez krzywe całkowe równania różniczkowego

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{1}$$

Zakładamy przy tym, że $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ jest „dostatecznie porządnym" odwzorowaniem w tym sensie, że dla każdego warunku początkowego $x(0) = x_0$ równanie (1) ma jednoznaczne rozwiązanie określone na całej prostej.

Podzbiór $Y\subseteq X$ nazywa się *niezmienniczym podzbiorem potoku* η, jeżeli $\eta(t, y)\in Y$ dla $t\in\boldsymbol{R}$, $y\in Y$. Podzbiór $S\subseteq X$ nazywa się *izolowanym podzbiorem niezmienniczym*, jeżeli istnieje zwarty podzbiór $N\subseteq X$ taki, że $S\subseteq \operatorname{Int} N$ oraz S jest maksymalnym podzbiorem niezmienniczym zawartym w N. Taki podzbiór N nazywa się *otoczeniem izolującym* zbioru niezmienniczego S.

Niech $N_0\subseteq N\subseteq X$. Podzbiór N_0 nazywa się *dodatnio niezmienniczym podzbiorem zbioru* N, jeżeli warunki

$$x\in N_0, \quad \eta([0, t]\times\{x\})\subseteq N$$

pociągają za sobą $\eta([0, t]\times\{x\})\subseteq N_0$ (inaczej mówiąc, punkt należący do N_0 nie może opuścić zbioru N_0 wcześniej niż N).

Niech S będzie niezmienniczym podzbiorem potoku η i niech N będzie otoczeniem izolującym zbioru S. Para domkniętych podzbiorów (N_1, N_2), $N_2\subseteq N_1\subseteq N$, nazywa się *parą indeksową*, jeżeli obydwa zbiory są dodatnio niezmienniczymi podzbiorami zbioru N, $S\subseteq \operatorname{Int}(N_1\setminus N_2)$ oraz punkty N_1 mogą opuścić N tylko przez N_2. Okazuje się, że typ homotopijny przestrzeni ilorazowej N_1/N_2 nie zależy ani od wyboru otoczenia izolującego N, ani od wyboru pary indeksowej. Oznaczając przez $h(S)$ typ homotopii przestrzeni N_1/N_2, otrzymujemy niezmiennik wprowa-

dzony przez Conleya i nazwany przez niego indeksem homotopijnym niezmienniczego zbioru S. Obecnie powszechnie $h(S)$ nazywany jest *indeksem Conleya.*

Fundamentalną własnością indeksu Conleya jest lokalna niezmienniczość. Aby wysłowić tę własność dokładniej, załóżmy, że S jest zwartym, niezmienniczym podzbiorem potoku η, a N jest otoczeniem izolującym zbioru S. Jeżeli indeks $h(S)$ jest nietrywialnym typem homotopijnym (oznacza to, że przestrzeń N_1/N_2 nie jest homotopijnie równoważna z przestrzenią jednopunktową), a η' jest potokiem na X „dostatecznie bliskim" potoku η, to N jest otoczeniem izolującym dla pewnego zwartego niezmienniczego podzbioru S' potoku η' oraz $h(S') = h(S)$. Inaczej mówiąc, jeżeli indeks $h(S)$ jest nietrywialny, to za pomocą małej zmiany potoku η nie można zlikwidować niezmienniczego podzbioru w N.

Najlepszym wprowadzeniem do teorii indeksu Conleya jest praca: Charles Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 38, AMS, 1976. Praca ta, która wywołała ogromne zainteresowanie wśród matematyków i jest teraz cytowana w setkach prac, zawiera znacznie więcej niż definicję indeksu $h(S)$ oraz dowody jego podstawowych własności. W pracy tej, oprócz indeksu $h(S)$, Conley wprowadza pewien delikatniejszy niezmiennik, nazwany przez niego indeksem Morse'a, rozwija teorię par atraktor-repeller oraz dowodzi całego szeregu własności tzw. *rozkładów Morse'a*, budując w ten sposób teorię w istotny sposób rozszerzającą klasyczną teorię Morse'a.

W recenzowanej książce K. P. Rybakowski rozwija teorię uogólniającą teorię Conleya. W wielkim skrócie, uogólnienie to polega na zastąpieniu potoku przez lokalny semi-potok (*local semi-flow*). *Lokalnym semi-potokiem* na przestrzeni topologicznej X nazywamy parę (D, η), gdzie D jest otwartym podzbiorem w $[0, \infty) \times X$, a $\eta\colon D \to X$ jest ciągłym odwzorowaniem, spełniającym następujące warunki:

(a) dla każdego $x \in X$ istnieje ω_x, $0 < \omega_x \leqslant \infty$, takie, że $(t, x) \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \leqslant t < \omega_x$,

(b) $\eta(0, x) = x$ dla $x \in X$,

(c) jeżeli $(t, x) \in D$ i $(s, \eta(t, x)) \in D$, to $(t+s, x) \in D$ oraz $\eta(t+s, x) = \eta(s, \eta(t, x))$.

Podstawowymi, modelowymi przykładami lokalnych semi-potoków są lokalne semi-potoki generowane na odpowiednich przestrzeniach Banacha przez równania różniczkowe z opóźnionym argumentem oraz równania różniczkowe cząstkowe typu parabolicznego.

Książka Rybakowskiego jest bardzo starannie zredagowana, ale technicznie dość skomplikowana. Dowody twierdzeń są znacznie bardziej szczegółowe niż dowody odpowiednich twierdzeń w pracy Conleya. Omawiana książka nie jest podręcznikiem (co sugerowałoby wydanie jej w serii *Universitext*), ale raczej małą monografią. Ze względu na systematyczny, wręcz pedantyczny wykład jest to na pewno pożyteczna pozycja i wydaje się, że powinna zdobyć uznanie wśród specjalistów.

Czytelnikowi, który nie jest specjalistą w zakresie indeksu Conleya, a chciałby poznać tę teorię, doradzam na początek lekturę cytowanej wyżej pracy Conleya, a przynajmniej przeczytanie pierwszego rozdziału tej pracy, będącego właściwie znakomitym artykułem popularnonaukowym przedstawiającym geometryczne intuicje leżące u podłoża tej teorii.

Kazimierz Gęba