ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVIII (1990)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

MIROSŁAW DĄBROWSKI (Warszawa)

Jak przyszli nauczyciele oceniają poprawność rozumowań matematycznych?

Wśród osób zajmujących się w naszym kraju problematyką edukacji matematycznej panuje zgodna opinia, że stopień zawodowego przygotowania nauczycieli matematyki rozpoczynających pracę nie jest zadowalający. Wymienia się przy tym wiele przyczyn takiego stanu rzeczy: słabe przygotowanie matematyczne absolwentów szkół średnich, niewłaściwe predyspozycje kandydatów na nauczycieli, kłopoty z należytą selekcją do zawodu, niezbyt szczęśliwą organizację kształcenia przyszłych nauczycieli itp. (por. [1]–[3], [5]).

Mimo to, że poziom „fachowej" wiedzy studentów tzw. bloku ogólnego od lat niepokoi środowisko matematyków, rzadko bywa on przedmiotem systematyczniejszych badań. Większość wypowiadanych opinii opiera się na własnych przemyśleniach autorów i ich osobistych obserwacjach dokonywanych w trakcie bezpośredniego kontaktu ze studentami.

Sporo konkretnych informacji o tym, czego można oczekiwać od kandydatów na nauczycieli, dostarczają badania przeprowadzone przed 15 laty przez B. Noweckiego (por. [4]). Objęły one dość reprezentatywną dla naszego szkolnictwa grupę 700 osób – uczniów i absolwentów szkół średnich. Jednym z zasadniczych celów tych badań było prześledzenie, czy i w jakim stopniu nauczanie matematyki w szkole średniej wprowadza uczniów w elementy metodologii tej dyscypliny. Oprócz obserwacji o charakterze ogólnym, m.in., że *problemy metodologii matematyki, nawet te najprostsze, są dla uczniów, kończących szkołę średnią, zupełnie obce* ([4], str. 183), B. Nowecki sformułował kilka spostrzeżeń bardziej szczegółowych. I tak okazało się, że dla wielu uczniów biorących udział w badaniach dowód nie wprost był techniką dowodzenia prawie zupełnie obcą; to samo można odnieść do dowodów wykorzystujących metodę indukcji matematycznej; sporo kłopotów mieli uczniowie także z kwantyfikatorami.

Mimo upływu kilkunastu lat i kolejnych reform programów nauczania należy sądzić, że wyniki tych badań nie straciły nic ze swojej aktualności.

Spośród takich właśnie absolwentów szkół średnich rekrutują się studenci bloków ogólnych czy też sekcji nauczycielskich wydziałów matematycznych polskich szkół wyższych.

Czy studia zmieniają ten stan rzeczy? W niniejszym artykule nie pokusimy się o próbę udzielenia odpowiedzi na to pytanie. Przedstawimy w nim natomiast sprawozdanie z fragmentu wstępnych badań – nawiązujących do tej problematyki – przeprowadzonych na III roku bloku ogólnego Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Test, który poniżej omawiamy, został opracowany i zrealizowany przez pracowników Zakładu Dydaktyki Matematyki kierowanego przez doc. W. Zawadowskiego. Pomagał nam przy tym prof. Z. Semadeni.

Pracownicy naszego Zakładu od lat obserwują u części studentów duże braki w wiadomościach i umiejętnościach z zakresu szkoły średniej. Spada więc na nas, i na zajęcia z dydaktyki matematyki, obowiązek choć częściowego usuwania tych braków, co – ze względu na ograniczenia czasowe – trudno pogodzić z programową tematyką tego przedmiotu. Obejmuje ona nie tylko cele, metody i treści procesu nauczania i uczenia się matematyki, ale także uwarunkowania psychologiczne, pedagogiczne i socjologiczne tego procesu, rozważania o filozoficznych podstawach matematyki i jej nauczania oraz, w dobie postępującej komputeryzacji życia, uwagi o informatyzacji kształcenia wzbogacone o tworzenie przez studentów własnych programów dydaktycznych wraz ze wskazaniami co do ich użycia.

Plan studiów na naszym Wydziale przeznacza na zajęcia z dydaktyki matematyki 180 godzin i lokuje je – w układzie jedna godzina wykładu plus dwie godziny ćwiczeń tygodniowo – przez cztery kolejne semestry poczynając dokładnie od półmetka studiów, tzn. od semestru szóstego. Każdy, kto choć trochę interesuje się nauczaniem oraz rozumie, zasygnalizowany wyżej, złożony i interdyscyplinarny charakter wiedzy potrzebnej nauczycielowi matematyki w jego pracy zawodowej, wie, że taki przydział czasu zmusza do bardzo starannej selekcji problematyki poruszanej na zajęciach. Dla zagwarantowania właściwego, z punktu widzenia potrzeb studentów, doboru tematyki zajęć postanowiliśmy głębiej wniknąć w braki w ich podstawowej wiedzy.

Temu właśnie celowi służył omawiany tu test. Przeprowadziliśmy go w marcu 1987 r. na dwóch kolejnych ćwiczeniach z dydaktyki matematyki, każdorazowo w drugiej części zajęć. Studenci mogli przedłużać czas pisania odpowiedzi, nie było żadnego nacisku na zmieszczenie się w określonym czasie. Na trzecich zajęciach omówiliśmy ze studentami typowe błędy popełnione podczas testu.

Testem objęto całość III roku bloku ogólnego, oczywiście z pominięciem osób nieobecnych na tych właśnie zajęciach (test nie był zapowiedziany). Można uznać, że w momencie przeprowadzania badań – początek szóstego semestru studiów – ich uczestnicy, na ogół przyszli nauczyciele matematyki, zostali już w znacznej mierze „matematycznie" ukształtowani. Mieli oni już

za sobą zajęcia i egzaminy z większości dyscyplin matematycznych przewidzianych dla nich planem studiów: wstępu do matematyki w sumarycznym wymiarze 60 godzin wykładów i ćwiczeń, analizy I i II (480), algebry liniowej z geometrią (210), algebry I (90), topologii (120), równań różniczkowych zwyczajnych (60), funkcji analitycznych (60), analizy III (90) oraz po jednym semestrze rachunku prawdopodobieństwa (60) i geometrii (60). Przed nimi było dokończenie tych dwóch przedmiotów (odpowiednio jeszcze 75 i 120 godzin), a ponadto arytmetyka (90), algebra II (60), podstawy matematyki i logika (90), matematyka dyskretna (60) oraz dydaktyka matematyki, historia matematyki, zajęcia fakultatywne i kilka przedmiotów pozamatematycznych. To zestawienie skłania nas do wniosku, że wiedza tych studentów, przynajmniej w zakresie przydatnym do odpowiadania na pytania testu, ulegnie w dalszym toku studiów najprawdopodobniej tylko niewielkim zmianom.

Test składał się z 16 zadań, pogrupowanych w cztery zestawy, nawiązujących między innymi do indukcji matematycznej, implikacji i równoważności zdań oraz pojęcia liczby niewymiernej. Do każdego z zadań podane było rozwiązanie pochodzące od hipotetycznego ucznia. Studenci występowali w roli nauczyciela sprawdzającego pracę ucznia; ich zadaniem było ustosunkowanie się do zaprezentowanych rozumowań. W przypadku akceptacji któregoś z nich mogli po prostu napisać, że odpowiedź ucznia jest poprawna. Gdy natomiast jakieś rozwiązanie było, ich zdaniem, błędne lub niepełne, mieli obowiązek dokładnego wskazania i scharakteryzowania stwierdzonych usterek.

Test był anonimowy – uczestnicy mogli go podpisać dowolnie wybranym pseudonimem, byleby tylko używali go konsekwentnie przez cały czas badań. Zabieg ten miał na celu stworzenie warunków, w których uczestnicy testu mogliby pozwolić sobie na pełną samodzielność i szczerość, a nie uciekali się do mechanizmów obronnych w stylu ściągania czy zgadywania. Opierając się na uzyskanych wypowiedziach można zaryzykować wniosek, że w znacznej mierze cel ten udało się osiągnąć.

Zadania testu zostały tak sformułowane, aby rozumowania poprawne zawierały pewne niestereotypowe myśli i przez to mogły wydać się podejrzane studentom nie rozumiejącym istoty rzeczy, natomiast rozumowania błędne były zredagowane w sposób standardowy, tekst ich był gładki, uspokajający czytającego. Nie oznacza to jednak, że błędy w rozumowaniach były kamuflowane. Wręcz przeciwnie, staraliśmy się o to, aby wszystko, co wiązało się z danym błędem, było sformułowane możliwie jawnie i jasno, choć w tonie autorytatywnie zapewniającym o poprawności tekstu. Być może takim doborem zadań można wytłumaczyć fakt, że znalazł się student, który dał tylko jedną poprawną odpowiedź na 16 postawionych mu pytań.

W trakcie porządkowania zebranych danych, opinie studentów o „uczniowskich" rozwiązaniach zostały przez nas podzielone na trzy klasy: poprawne, błędne oraz wątpliwe, tzn. takie, które ze względu na swoją mgli-

stość, ogólność czy niezrozumiały styl nie pozwalały na jednoznaczną ich ocenę. Do tej trzeciej grupy zaliczyliśmy m.in. ograniczenie się do stwierdzenia, że dane rozumowanie jest niepoprawne, bez żadnych dalszych wyjaśnień (oczywiście w przypadku, gdy rzeczywiście miało ono usterki).

Spośród 16 zadań testu prezentujemy tu osiem, których wyniki okazały się najbardziej jednoznaczne i najciekawsze, a zarazem wydają się nam dość reprezentatywne dla całości badań. Poniżej przedstawiamy: (a) treść wybranych ośmiu pytań testu, (b) po kilka najbardziej typowych czy też najciekawszych opinii uczestników badań o każdym z nich, (c) dane liczbowe dotyczące przytaczanych wypowiedzi.

1. ZADANIE. *Podaj definicję granicy funkcji f w punkcie x_0.*

Odpowiedź. *Niech $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Liczba $a \in \boldsymbol{R}$ nazywa się granicą funkcji f w punkcie x_0, gdy*

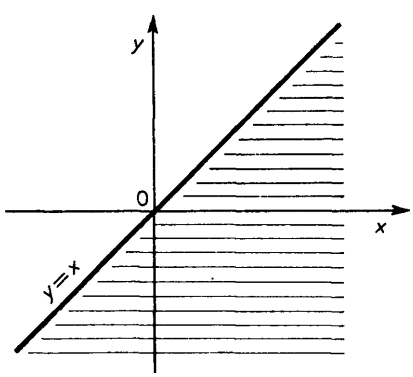
$$\bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{\varepsilon>0} \bigwedge_{x\in\boldsymbol{R}} (0 < |x-x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-a| < \delta).$$

Spośród 51 osób oceniających podaną definicję, 35 uznało ją za poprawną, podczas gdy pozostałe wskazywały na różne jej „usterki". Kilkakrotnie podważano sens nierówności $0 < |x-x_0|$ („bez sensu pisać $|x| > 0$, bo to zawsze prawda"), ale najczęściej zwracano uwagę na użyte w definicji kwantyfikatory. Pięciu studentów uważało, że powinna być „odwrotna kolejność kwantyfikatorów", inni podawali po prostu, jak ma wyglądać poprawna, ich zdaniem, definicja granicy funkcji $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ w punkcie $x_0 \in \boldsymbol{R}$, przy czym robili to błędnie, np. tak:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in\boldsymbol{R}} (0 < |x-x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-a| < \delta),$$

$$\bigwedge_{\varepsilon} \bigvee_{\delta} \bigvee_{x} (0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-a| < \varepsilon).$$

2. ZADANIE. *Wiadomo, że* $\bigwedge_{x,y\in\boldsymbol{R}} (x < y \Rightarrow x < (x+y)/2)$. *Zaznacz na płaszczyźnie zbiór wszystkich par liczb (x, y), które spełniają warunek $x < y \Rightarrow x < (x+y)/2$.*



Rozwiązanie. *Zbiór ten przedstawiony jest na wykresie. Punkty prostej* $y = x$, *tzn. pary liczb postaci* (x, x), *do niego nie należą.*

Powyższe rozwiązanie było analizowane przez 51 studentów, spośród których 16 stwierdziło, że jest ono złe, ponieważ „spełniają to wszystkie pary, bo jest to implikacja". Kilka z tych osób zauważyło, że odpowiedź zawarta jest w treści zadania. Wypowiedzi pięciu uczestników testu zostały przez nas zaklasyfikowane do grupy wątpliwych, m.in. następująca: „źle, bo podany warunek określa, że dla każdych $x < y$ jest prawda, więc to jest prawdą na całej płaszczyźnie, jeśli tylko $x < y$". 30 pozostałych opinii było błędnych. 8 uczestników stwierdziło, że „uczniowskie" rozwiązanie jest poprawne, a 22 uznało, że „nie ta półpłaszczyzna, tylko ta powyżej".

3. TWIERDZENIE. *Dla dowolnych* $x, y \in \boldsymbol{R}$ *zachodzą wzory*:

$$\text{(I)} \qquad \max(x, y) = \tfrac{1}{2}(x+y+|x-y|);$$

$$\text{(II)} \qquad \min(x, y) = \tfrac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

Dowód. *Zauważmy najpierw, że dla dowolnych* $x, y \in \boldsymbol{R}$ *mamy*

$$|x-y| = \max(x, y) - \min(x, y).$$

Załóżmy teraz, że równość (II) *jest prawdziwa. Mamy wówczas*

$$\max(x, y) = \min(x, y) + |x-y| = \tfrac{1}{2}(x+y-|x-y|)+|x-y| = \tfrac{1}{2}(x+y+|x-y|).$$

Udowodniliśmy równość (I). *Wykorzystamy ją teraz w drugiej części dowodu*:

$$\min(x, y) = \max(x, y) - |x-y| = \tfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)-|x-y| = \tfrac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

W ten sposób równość (II) *została też wykazana.*

35 studentów spośród 51 oceniających ten dowód dostrzegło istniejące w nim błędne koło, stwierdzając np., że: „źle, bo korzystamy z tego, co mamy dowieść" lub „źle, oczywiście, jeśli (I) prawdziwa, to i (II) prawdziwa i odwrotnie, ale nie została żadna z nich udowodniona". Pięciu uczestników testu sformułowało swoje wypowiedzi w sposób uniemożliwiający, naszym zdaniem, ich jednoznaczną ocenę, np.: „źle, bo wydaje mi się, że nie można z równości jeszcze nie udowodnionej wywnioskować drugiej, ogólnie rzecz biorąc nie bardzo pamiętam logiki". 10 osób uznało przedstawiony dowód za poprawny, a jedna nie potrafiła się do niego ustosunkować.

4. ZADANIE. *Rozwiązać układ nierówności*:

$$x > 0, \qquad 0 > x-1.$$

Rozwiązanie. *Dodaję nierówności stronami i otrzymuję* $x > x-1$. *Otrzymana nierówność jest w sposób oczywisty spełniona dla każdego* x.

Odpowiedź. x *dowolne.*

Wypowiedzi studentów na temat rozwiązania tego zadania okazały się szczególnie trudne do oceny. Prawie wszyscy uczestnicy testu zauważyli, że odpowiedź jest błędna, ale nikt nie potrafił w wyraźny sposób wskazać przyczyny tego stanu rzeczy, tzn. nikt nie zwrócił uwagi autorowi rozwiązania, że przytoczone przez niego rozumowanie jest „nieodwracalne". Na ogół ograniczano się do podania poprawnego rozwiązania: „źle, bo prawidłowe rozwiązanie jest $x \in (0, 1)$", niekiedy lokując je na osi liczbowej, albo też przytoczenia uwag w rodzaju „nie można dodawać nierówności stronami" lub „w ten sposób nie można rozwiązywać nierówności". Tego typu opinie, a było ich łącznie 45, musieliśmy zaliczyć do grupy wątpliwych([1]). 6 pozostałych wypowiedzi było w jednoznaczny sposób błędnych. M.in. 3 osoby stwierdziły, że rozwiązanie jest poprawne, a jedna uznała, że „nieprawda dla $x = \frac{1}{2}$; rozwiązanie $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$".

5. TWIERDZENIE. $\bigwedge_{x \in (-1, \infty)} (1+x)^n \geqslant 1+nx.$

Dowód. *Zastosujemy metodę indukcji matematycznej.*

1. Sprawdzamy dla $n = 0$. $P = 1$, $L = (1+x)^0 = 1$. $L = P$.

2. Załóżmy, że dla każdego n zachodzi nierówność: $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. *Mamy udowodnić, że nierówność ta zachodzi dla* $n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n \geqslant (1+x)\cdot(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 \geqslant$$
$$\geqslant 1+(n+1)\cdot x \quad \text{c.n.d.}$$

Zadanie to nawiązywało do często powtarzanej przez uczniów opinii, że indukcja matematyczna jest to metoda, w której najpierw zakłada się, że coś jest prawdą, a potem się tego dowodzi. Jedynie czterech studentów zauważyło błędność przytoczonego rozumowania, stwierdzając np., że „przy założeniu nie można pisać dla każdego n, bo to właśnie mamy pokazać". Wypowiedzi czterech innych uznaliśmy za wątpliwe, np.: „złe zastosowanie punktu 2". 43 wypowiedzi uznaliśmy za błędne. Wśród tych ostatnich najczęściej pojawiały się stwierdzenia, że dowód jest dobry (35 osób), a niekiedy doszukiwano się w nim innych usterek, np. „nieprawda dla $x = -\frac{1}{2}$, w dowodzie nie wzięto pod uwagę, że $x \in (-1, \infty)$".

6. ZADANIE. *Jakie pary liczb rzeczywistych spełniają warunek:*

$$|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y?$$

Rozwiązanie. *Warunek ten jest spełniony przez dowolną parę liczb rzeczywistych.*

34 osoby, spośród 43 oceniających zadanie, uznały podaną odpowiedź za poprawną. Pozostałych dziewięciu studentów stwierdziło, że warunek jest

---

([1]) Por. uzupełnienie na końcu artykułu (*przyp. red.*).

spełniony „nie przez wszystkie", popierając to zazwyczaj jakimiś błędnymi kontrprzykładami: „np. (5, 4) nie spełnia", „nie jest spełniony dla pary (0, 0)", „źle, np. $x = 2$, $y = 2$", itp.

7. PYTANIE. *Dla jakich trójkątów prawdziwe jest poniższe zdanie? „Jeśli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat największego boku równa się sumie kwadratów pozostałych".*

Odpowiedź. *Dla wszystkich.*

Zadania 6 i 7 występowały w teście bezpośrednio obok siebie. Rozkład wyników w obu jest identyczny. W jednym i drugim zadaniu było po 9 błędnych wypowiedzi – z tego trzy osoby podały błędne oceny rozwiązań obu zadań. Na 43 studentów analizujących postawione wyżej pytanie i podaną odpowiedź, 34 osoby uznały, że jest ona poprawna, siedem stwierdziło, że jest ona błędna, gdyż zdanie jest prawdziwe „dla wszystkich prostokątnych". Spośród pozostałych osób jedna uznała, że odpowiedź prawidłowa powinna brzmieć „dla trójkątów, w których przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem", druga zaś ograniczyła się do pytania – „czy przeciwprostokątna musi być najdłuższym bokiem?" (obie te opinie powstały niezależnie od siebie – zostały one sformułowane w tym samym czasie, ale w innych salach).

8. TWIERDZENIE. *Kwadrat dowolnej liczby naturalnej dzieli się przez* 4 *lub jest o* 1 *większy od liczby podzielnej przez* 4.

Dowód. *Stosuję metodę indukcji matematycznej. Widać, że dla* $n = 0$ *i* $n = 1$ *twierdzenie jest prawdziwe, bo:* $0^2 = 0$ *i* 0 *dzieli się przez* 4; $1^2 = 1$ *i* $1 = 0+1$, 0 *dzieli się przez* 4.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n. Pokażemy, że z założenia tego wynika, że jest ono prawdziwe dla $n+2$: $(n+2)^2 = n^2+4n+4 = n^2+4(n+1)$, *zatem gdy* n^2 *dzieli się przez* 4, *to i* $(n+2)^2$ *dzieli się przez* 4; *gdy* n^2-1 *dzieli się przez* 4, *to i* $(n+2)^2-1$ *dzieli się przez* 4. *Zatem twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego n, c.n.d.*

Przytoczony wyżej dowód był oceniany przez 43 studentów, spośród których 11 osób stwierdziło, że jest on poprawny. Jedna wypowiedź została przez nas zaliczona do wątpliwych: „coś mi się tu nie podoba, może jeszcze pokazać, że jak prawdziwe dla $n+1$ to i dla $n+3$, a w ogóle czy potrzebna tu jest indukcja?", zaś pozostałych 31 odpowiedzi uznaliśmy za błędne. Wśród tych ostatnich najczęściej (20) powtarzała się opinia, że „źle, gdyż w indukcji z założenia, że prawda dla n wnioskuje się, że prawda dla $n+1$"; były też inne podobne sformułowania, np.: „źle, gdyż w indukcji prawdziwość tezy dla $n+2$ wnioskujemy z prawdziwości dla $n+1$", „powinniśmy przeprowadzić indukcję dla $n+1$, a nie $n+2$", itp.

Procentowe zestawienie wypowiedzi poprawnych, wątpliwych i błędnych dla przytoczonych tu 8 zadań przedstawia poniższa tabela:

Numer zadania	Liczba ocen	Procentowy udział ocen		
		poprawne	wątpliwe	błędne
1	51	68,6	0	31,4
2	51	31,4	9,8	58,8
3	51	68,6	9,8	21,6
4	51	0	88,2	11,8
5	51	7,8	7,8	84,4
6	43	79,1	0	20,9
7	43	79,1	0	20,9
8	43	25,6	2,3	72,1

Z grona 56 studentów biorących udział w co najmniej jednej części testu, 38 osób wypowiedziało się na temat wszystkich ośmiu przytoczonych wyżej „uczniowskich" rozwiązań. Najlepszym wynikiem była poprawna ocena 6 rozwiązań (2 osoby), 9 studentów poprawnie oceniło po 5 zadań, jedenastu — 4, ośmiu — 3, czterech — 2, trzech — 1, a była także osoba, która nie udzieliła żadnej poprawnej odpowiedzi (na 8 możliwych). Przeciętny wynik testu w odniesieniu do podanych tu ośmiu zadań to 3,6 poprawnych ocen, 3,3 błędnych oraz 1,1 wątpliwych.

Proporcje te ulegają niewielkim zmianom, gdy uwzględni się całość testu, tzn. 16 postawionych w nim pytań. Najlepszy wynik to 13 poprawnie ocenionych rozwiązań — uzyskał go jeden student spośród owych 38; ponadto jedna osoba wypowiedziała się trafnie o 12 rozwiązaniach, dwie o 10, cztery o 9, sześć o 8, pięć o 7, jedna o 6, dziesięć o 5, trzy o 4, trzy o 3 zadaniach, jedna o 2, jedna o jednym rozwiązaniu (na 16 zadań). Średnio na jednego uczestnika kompletnych badań przypada 6,4 dobrych ocen, 7,6 błędnych oraz 2 wątpliwe.

Ponieważ test był anonimowy, nie mogliśmy stwierdzić, co dalej działo się z poszczególnymi jego uczestnikami. Wiemy jednak, że cztery osoby spośród biorących w nim udział powtarzały III rok studiów, a reszta uczęszczała na zajęcia na roku IV.

Prezentowane tu wyniki wydają się — ogólnie biorąc — zgodne z tym, o czym pisali B. Nowecki [4] i B. Stachurska [5]. Można by je uznać za alarmujące, uważamy jednak, że ze względu na sposób ich uzyskania, m.in. ograniczenie się do jednego rocznika studentów, nie mamy podstaw do dokonywania jakichkolwiek uogólnień. Jedynym wnioskiem, który się — naszym zdaniem — nasuwa, jest to, iż zasygnalizowane tu zjawisko wymaga dokładniejszej analizy.

Dlatego też zamierzamy powtórzyć te badania w nieco rozszerzonej i ulepszonej postaci z kolejnym rocznikiem przyszłych nauczycieli. Być może uda się także prześledzić początkowy rozwój kariery zawodowej niektórych uczestników omówionego powyżej testu. Jednocześnie zachęcamy pracowników innych uczelni do zorganizowania podobnych badań u siebie. Mamy nadzieję, że uzyskane w ten sposób w ciągu kilku kolejnych lat

informacje będą na tyle bogate i miarodajne, że ukażą nam pełniejszy obraz sytuacji.

P.S. Już po przekazaniu niniejszego artykułu do wydawnictwa, przeprowadziliśmy pod koniec lutego 1988 roku analogiczny test, w którym wziął udział kolejny rocznik studentów bloku ogólnego naszego Wydziału. Test składał się z 22 zadań o zbliżonym poziomie trudności. Wśród nich znalazły się wszystkie zadania przytoczone powyżej, przy czym czwarte z nich, ze względu na kłopoty, jakie mieliśmy poprzednio z oceną studenckich opinii o nim, zostało nieco zmodyfikowane:

ZADANIE. *Rozwiązać układ nierówności* $x > 0$, $0 > x-1$.

Rozwiązanie. *Rozwiązując ten układ skorzystam z następującego twierdzenia: „jeśli* $a > b$ *i* $c > d$, *gdzie* $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, *to* $a+c > b+d$". *Na mocy tego twierdzenia otrzymuję:* $x > x-1$. *Otrzymana nierówność jest w sposób oczywisty spełniona dla każdego* x.

Odpowiedź. x *dowolne.*

Nauczeni doświadczeniem, bardzo wyraźnie poinformowaliśmy studentów o tym, że w przypadku stwierdzenia błędności któregoś z „uczniowskich" rozumowań należy koniecznie wskazać przyczyny tego stanu rzeczy. W konsekwencji pojawiające się np. w związku z nową wersją tego zadania wypowiedzi: „źle", „źle, bo $x \in (0, 1)$", „źle, ale nie wiem dlaczego" i podobne opinie dotyczące rozwiązań innych zadań były traktowane w ten sam sposób i zaliczane do grona błędnych, zatem kryteria oceny przyjęte w ponowionym teście były nieco ostrzejsze niż te, które obowiązywały rok wcześniej.

Spośród 59 osób wypowiadających się na temat zaprezentowanego powyżej rozumowania 7 osób zauważyło, że „twierdzenie, z którego korzystano, jest tylko w jedną stronę", zatem „otrzymana nierówność nie jest równoważna danemu układowi", „tzn. wśród rozwiązań nierówności $x > x-1$ są rozwiązania prawidłowe, ale nie wszystkie jej rozwiązania są rozwiązaniami układu nierówności". Jedną opinię uznaliśmy za wątpliwą, a pozostałe 51, ze względu na zawarte w nich usterki lub zasygnalizowany wyżej „wymijający" charakter, zaliczyliśmy do grona błędnych. Między innymi 8 studentów stwierdziło, że rozwiązanie jest poprawne, 9 podważało prawdziwość wykorzystanego w nim twierdzenia, zaś 3 innych uważało, że błąd tkwi w tym, iż „w twierdzeniu... a, b, c, d są liczbami, a więc stałymi, w naszym przypadku x jest zmienną, nie można tak zrobić".

Wypowiedzi uczestników ponowionego testu na temat pozostałych siedmiu zaprezentowanych w tym artykule zadań nie odbiegały swym charakterem od przytoczonych wcześniej przykładowych opinii ich poprzedników.

Procentowe zestawienie ocen poprawnych, wątpliwych i błędnych dla tych ośmiu zadań przedstawia poniższa tabela:

Numer zadania	Liczba ocen	Procentowy udział ocen		
		poprawne	wątpliwe	błędne
1	45	80,0	0	20,0
2	45	35,6	0	64,4
3	45	46,7	4,4	48,9
4	59	11,9	1,7	86,4
5	59	3,4	0	96,6
6	45	62,2	0	37,8
7	45	80,0	0	20,0
8	45	48,9	0	51,1

Przeciętny wynik drugiego testu w odniesieniu do omówionych w artykule ośmiu zadań – to 3,9 poprawnych ocen, 4,0 błędnych oraz 0,1 wątpliwych. Można chyba uznać, że zbieżność podanych wyników jest znaczna. Natomiast średni wynik całego testu (22 zadania) to 7,3 rozwiązań poprawnych, 1,5 wątpliwych i 13,2 błędnych (dane orientacyjne).

Bibliografia

[1] R. Duda, *Kształcenie matematyczne przyszłych nauczycieli matematyki*, Dydaktyka Matematyki 5 (1985), 163–192.

[2] –, *Założenia reformy programowej kształcenia nauczycieli matematyki*, w: B. Niemierko (red.), *Unowocześnienie procesu dydaktycznego – model dydaktyk szczegółowych*, Resortowy Program Badań Podstawowych RP III 30, t. I, Materiały i sprawozdania z 1986 r., WSP, Bydgoszcz 1987.

[3] Z. Krygowska, *Problemy nowoczesnego kształcenia nauczycieli matematyki*, Wiadom. Mat. 14 (1972), 111–117.

[4] B. Nowecki, *Badania nad efektywnością kształtowania pojęć twierdzenia i dedukcji u uczniów klas licealnych w zmodernizowanym nauczaniu matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1978.

[5] B. Stachurska, *Czy właściwie kształcimy nauczycieli matematyki*? Wiadom. Mat. 25 (1984), 255–270.