ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVIII (1990)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zadania

Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (nowe zadania, rozwiązania zadań itp.) należy kierować pod adresem: Michał Krych, Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego, Pałac Kultury i Nauki, IX piętro, 00-901 Warszawa. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane. Gwiazdką są oznaczone zadania, których rozwiązanie nie jest znane redakcji. Niektóre zadania publikowane w tym dziale mogą być znane dawniej, jednak ani autorowi, ani redakcji nic o tym nie wiadomo.

296*. Przestrzeń trójwymiarową podzielono na cztery niepuste, parami rozłączne zbiory. Czy co najmniej jeden z tych zbiorów zawiera 3 punkty będące wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku 1?

W. Mnich (Opole)

297. Niech A będzie macierzą, której wszystkie wyrazy poza główną przekątną są dodatnie i której suma wyrazów w każdej kolumnie jest ujemna. Dowieść, że części rzeczywiste wartości własnych macierzy A są ujemne.

M. Misiurewicz (Warszawa)

298. Niech S oznacza sferę jednostkową w przestrzeni Banacha z normą $\|\cdot\|$. Niech

$$\beta(t) = \sup\{\|x-y\|\colon x, y\in S,\ \tfrac{1}{2}\|x+y\| = 1-t\} \quad \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\delta(s) = \inf\{1-\tfrac{1}{2}\|x+y\|\colon x, y\in S,\ \|x-y\| = s\} \quad \text{dla } 0 \leqslant s \leqslant 2,$$

$$\varrho(s) = \sup\{1-\tfrac{1}{2}\|x+y\|\colon x, y\in S,\ \|x-y\| \leqslant s\} \quad \text{dla } 0 \leqslant s \leqslant 2.$$

(a) Wyrazić wzorem β za pomocą δ.
(b)* Czy ϱ jest funkcją ciągłą na przedziale $[0, 2]$?

J. Banaś (Rzeszów)

299. Niech $0 < s < 1$ i niech $G_s(x) = (x^s - x)(1-x^{s+1})^{-1}$ dla $0 < x < 1$. Dowieść, że funkcja G_s jest ściśle rosnąca.

A. Maciejkowska (Lublin), *M. Skwarczyński* (Warszawa)

300. Korzystając z twierdzenia Beckmana–Quarlesa sformułowanego poniżej udowodnić, że dla dowolnej liczby porządkowej $\varkappa$ takiej, że $\omega_0 \leqslant \varkappa \leqslant 2^{\omega_0}$, istnieje rodzina $\mathscr{R}$ mocy $2^{\varkappa}$ relacji dwuargumentowych na $\varkappa$ taka, że jeżeli $R_1, R_2 \in \mathscr{R}$ i $f\colon \varkappa \to \varkappa$ jest homomorfizmem $(\varkappa, R_1)$ w $(\varkappa, R_2)$, to $R_1 = R_2$ i f jest identycznością.

TWIERDZENIE BECKMANA–QUARLESA (1953). *Niech f przekształca $\boldsymbol{R}^n$ na $\boldsymbol{R}^n$, $n \geqslant 2$, przy czym jeśli $\|x-y\| = 1$, to $\|f(x)-f(y)\| = 1$; $\|\cdot\|$ oznacza tu normę euklidesową. Wówczas f jest izometrią.* Por. zadanie 223, Wiadom. Mat. 19. 1 (1975).

A. Tyszka (Kraków)