wmptm 1897

J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg 1987, str. 373, ISBN 3-540-16951-2, ISBN 0-387-16951-2.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Omawiana książka J. Bochnaka, M. Coste i M.-F. Roy jest poświęcona geometrii algebraicznej rzeczywistej. Dziedzina ta pozostawała przez dłuższy czas na marginesie burzliwie rozwijającej się geometrii algebraicznej nad ciałami algebraicznie domkniętymi.

Autorzy książki uważają, iż znaczenie geometrii nad ciałami rzeczywiście domkniętymi było i jest nadal nie docenione. I to pomimo licznych zastosowań, jak i „estetyki" samej teorii. Wiele zagadnień z analizy czy geometrii można sprowadzić do zagadnień algebraicznych. I wtedy znajomość geometrii algebraicznej rzeczywistej okazuje się znacznie bardziej przydatna niż zespolonej.

Książka ma na celu zaprezentowanie podstawowych pojęć, wyników i metod teorii.

Kluczowym pojęciem charakterystycznym dla przypadku rzeczywistego (a obcym dla zespolonego) jest pojęcie porządku. W rozdziale I omówione zostały podstawowe definicje, pojęcia i własności ciał uporządkowanych. Warto wspomnieć tu o dwóch faktach:

1. Każde ciało uporządkowane ma domknięcie rzeczywiste.

2. Z formuł wielomianowych nad ciałem rzeczywiście domkniętym można eliminować kwantyfikatory, czyli (w języku geometrii) rzut zbioru semi-algebraicznego jest semi-algebraiczny (zasada Tarskiego–Seidenberga).

Powyższa zasada zapewnia nam modelową zupełność teorii. Fakt algebraiczny prawdziwy dla liczb rzeczywistych jest prawdziwy dla dowolnego ciała rzeczywiście domkniętego.

W rozdziałach drugim i trzecim badane są zbiory semi-algebraiczne i rozmaitości algebraiczne rzeczywiste. Autorzy wprowadzają tu między innymi pojęcie funkcji semi-algebraicznej, tj. funkcji, której wykres jest zbiorem semi-algebraicznym. Zauważmy, że przykładem takiej funkcji może być odległość punktu od zbioru semi-algebraicznego. Pozwala to m.in. sformułować i udowodnić nierówność Łojasiewicza jako związek między dwiema funkcjami semi-algebraicznymi.

Rozdziały 4–7 i 10 poświęcone są algebraicznym aspektom teorii. W rozdziałach 4 i 6 bada się własności pierścieni wielomianów nad ciałem rzeczywiście domkniętym. Wśród wielu przytoczonych faktów na uwagę zasługuje rzeczywisty wariant twierdzenia o zerach (*Nullstellensatz*) i twierdzenie o rozkładzie nieujemnego wielomianu na sumę kwadratów funkcji wymiernych (17. problem Hilberta). Następnie autorzy konstruują rzeczywiste spektrum pierścienia (rozdział 7) i badają punkty rzeczywiste – *places réelles* (rozdział 10).

W rozdziale 8 omawia się analityczne aspekty teorii. Główny obiekt badań stanowią funkcje Nasha, tj. funkcje analityczne, które są pierwiastkami równań o współczynnikach wielomianowych (np. $f^2 = 1 + x^2$). Zainteresowanie funkcjami Nasha wynika z tego, że z jednej strony są to obiekty algebraiczne, a z drugiej charakteryzują się „giętkością" funkcji analitycznych. Dla przykładu, w dziedzinie funkcji Nasha prawdziwe jest twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa i twierdzenie o dzieleniu.

Rozdziały 9–14 poświęcone są topologicznym aspektom teorii: stratyfikacji zbiorów semi-algebraicznych i ich charakterystykom topologicznym, algebraicznym wiązkom wektorowym oraz funkcjom wielomianowym i regularnym na sferach.

W ostatnim rozdziale 15 rozważa się związki między rzeczywistą geometrią algebraiczną a algebraiczną teorią form kwadratowych.

Reasumując, trzeba powiedzieć, że autorom książki udało się zrealizować zamierzony cel. W sposób zwięzły i przystępny przedstawili aktualny obraz osiągnięć geometrii algebraicznej rzeczywistej. Ich książka może służyć czytelnikom jako cenne źródło informacji o tej dziedzinie i o jej związkach z innymi działami matematyki.

Piotr Jaworski