ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXX (1993)

wmptm 1897

ANDRZEJ SCHINZEL (Warszawa)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Historia teorii liczb w Polsce w latach 1851–1950

Przeglądu prac w zakresie teorii liczb w Polsce, w wymienionym w tytule stuleciu, dokonamy opisując jej dzieje w ośrodkach uniwersyteckich, kolejno w Krakowie, Lwowie, Poznaniu, Warszawie, Wilnie i Wrocławiu a następnie omawiając prace wykonane poza tymi ośrodkami, ale na ziemiach polskich. Nie będziemy omawiać prac matematyków polskich żyjących na obczyźnie (Axer, Jabłoński, Niewęgłowski, Ptaszycki, Sochacki, Żbikowski) ani też prac matematyków rosyjskich działających na Cesarskim Uniwersytecie Warszawskim (Andriejew, Morduchaj-Bołtowskoj, Nazimow, Romanowski, Sonin, Stankiewicz, Wielmin, Woronoj). Twórczość niektórych, w szczególności najwybitniejszego z nich G. F. Woronoja omówiona jest w książce E. P. Ożigowej [7] *, która zawiera także spis ich prac z teorii liczb. Jeśli chodzi o matematyków, którzy opuścili ziemie polskie po rozpoczęciu twórczości naukowej (Czajkowski, Mandelbrojt, Mertens, Walfisz), to będziemy omawiać tylko ich prace napisane przed emigracją.

1. Teoria liczb w Krakowie.

a. Analiza prac F. Mertensa.

Franciszek Mertens był profesorem Uniwersytetu Jagiellońskiego w latach 1865–1884 (od roku 1869 zwyczajnym), później wyjechał do Austrii. Związków z Polską całkowicie nie zerwał, czego dowodem jest publikacja w języku polskim prac [4]–[6] ogłoszonych wcześniej po niemiecku. W wymienionym okresie ogłosił trzy prace z teorii liczb. Wyniki pracy [2] najwcześniej napisanej (nosi datę 20 lipca 1873 r.) weszły w sposób trwały do teorii rozmieszczenia liczb pierwszych. Oto jej treść.

Legendre w 1808 r., a po nim Czebyszew w 1849 r., daremnie próbowali w swoich książkach udowodnić istnienie granic

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}-\log\log x\Big),\qquad \lim_{x\to\infty}\log x\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big),$$

* Numery w nawiasach kwadratowych drukowane kursywą odnoszą się do prac cytowanych na końcu artykułu, drukowane antykwą do prac cytowanych w bibliografii.

gdzie p przebiega liczby pierwsze.

Mertens nie tylko dowodzi istnienia powyższych granic, ale podaje twierdzenie dokładniejsze, które we współczesnych oznaczeniach daje się zapisać w postaci

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \log\log x + c_0 + O\left(\frac{1}{\log x}\right), \\ &\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = e^{\gamma}\log x + O(1), \end{aligned}$$

gdzie γ jest stałą Eulera. Dowód oparty jest na również bardzo interesującym wzorze

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

W dalszym ciągu pracy Mertens dowodzi, że dla dowolnego charakteru Dirichleta χ, różnego od charakteru głównego,

$$\text{(2)} \qquad \sum_{p\leqslant x}\frac{\chi(p)}{p} = c(\chi) + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

co w szczególności pociąga za sobą zbieżność, nigdy wcześniej nie udowodnioną, szeregu

$$\sum_{p>2}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{p}$$

rozpatrywanego już przez Eulera. Z równości (1) i (2) Mertens wyprowadza również wniosek, że dla dowolnych liczb naturalnych k i l względnie pierwszych

$$\text{(3)} \qquad \sum_{\substack{p\equiv l \pmod k \\ p\leqslant x}}\frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi(k)}\log\log x + c(k,l) + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Dokładniejszą informację o asymptotycznym rozmieszczeniu liczb pierwszych w postępach arytmetycznych otrzymał dopiero de la Vallée Poussin w 1896 r.

Praca [1], ukończona w styczniu 1874 r. i nie mająca już tak podstawowego znaczenia, zawiera szereg luźno związanych ze sobą wzorów asymptotycznych, z których każdy był następnie przedmiotem badań innych matematyków. Oto jej wyniki kolejno.

1. $$\sum_{m=1}^{G}\varphi(m) = \frac{3}{\pi^2}G^2 + O(G\log G).$$

Oszacowanie błędu w tym wzorze zostało poprawione dopiero przez A. Walfisza w 1953 r.

$$2. \qquad \sum_{m=1}^{G} \psi(m) = \frac{6}{\pi^2} G(\log G + c_2) + O(\sqrt{G} \log G),$$

gdzie $\psi(m)$ jest liczbą dzielników m dodatnich i bezkwadratowych.

Oszacowanie błędu w tym wzorze zostało poprawione jeszcze później, bo w 1961 r. przez J. Tulla.

$$3. \qquad \sum_{p \leqslant G} \frac{1}{p} = c_3(f) \log\log G + c_4(f) + O\left(\frac{1}{\log G}\right), \quad c_3(f) > 0,$$

gdzie p przebiega liczby pierwsze przedstawialne przez ustaloną formę kwadratową dwójkową f o wyróżniku $d < 0$, $d \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$. Zakłada się przy tym, że wyróżnik d jest regularny, tzn. grupa klas form kwadratowych pierwotnych o wyróżniku d, należących do rodzaju głównego jest cykliczna, a dowód przeprowadzony jest w szczegółach tylko dla przypadku, gdy rząd wymienionej grupy jest nieparzysty.

Wynik powyższy zawiera w sobie istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych przedstawialnych przez formę f — fakt, którego dowód został naszkicowany przez Dirichleta w 1840 r. przy dodatkowym założeniu, że $d = -4P$, P — liczba pierwsza postaci $4k + 3$.

Pierwszy dowód twierdzenia Dirichleta w przypadku ogólnym, podany przez Schweringa, został ogłoszony w 1856 r. Mertens najwidoczniej go nie znał, co można tłumaczyć faktem, że ukazał się on jedynie w dziełach zebranych Schweringa, nie zaś w żadnym z czasopism naukowych. Drugi dowód ogłosił w 1882 r. H. Weber; zarzuty wysunięte przez Webera w stosunku do dowodu Mertensa uważam za bezzasadne, przynajmniej odnośnie przypadku rozpatrzonego w szczegółach. Sam Mertens wrócił do tematu w 1900 r., dowiódł wówczas wzoru (3) dla form o dowolnym wyróżniku różnym od kwadratu, wynik wchłonięty następnie przez mocniejszy wynik Landau'a z 1907 r.

$$4. \qquad \sum_{d=1}^{G} h(-4d) = \frac{4\pi}{21\zeta(3)} G^{3/2} + O(G).$$

Wzór jeszcze dokładniejszy mianowicie

$$\sum_{d=1}^{G} h(-4d) = \frac{4\pi}{21\zeta(3)} G^{3/2} - \frac{2}{\pi^2} G + o(G),$$

był znany Gaussowi, który podał go bez dowodu w *Disquisitiones Arithmeticae*. Pierwszy dowód tego ostatniego wzoru z jawnym oszacowaniem błędu

podał I. M. Winogradow w 1918 r.

$$5. \qquad \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}[i]\\ N(m)\leqslant G}} \varphi(m) = c_5 G^2 + O(G^{3/2}),$$

gdzie $N(m)$ oznacza normę liczby zespolonej całkowitej m, $\varphi(m)$ zaś liczbę klas reszt mod m względnie pierwszych z m.

$$6. \qquad \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}[i]\\ N(m)\leqslant G}} \tau(m) = \pi^2 G(\log G + c_5) + O(G^{1/2}),$$

gdzie $\tau(m)$ jest liczbą wszystkich dzielników m w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$.

$$7. \qquad \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}[i]\\ N(m)\leqslant G}} \psi(m) = \frac{6}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}} G(\log G + c_7) + O(G^{1/2}),$$

gdzie $\psi(m)$ ma to samo znaczenie co we wzorze (3), z tym że nie żąda się, aby dzielniki były dodatnie.

Wzory (5)–(7) stanowią pierwsze przykłady przenoszenia twierdzeń z analitycznej teorii liczb całkowitych wymiernych na przypadek ciał algebraicznych. Raport [8] nazywa Mertensa pionierem w pracy tego rodzaju. Uogólnienie wzorów (5)–(7) na dowolne ciała liczbowe podał E. Landau w 1903 r.

$$8. \qquad \sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}[i]\\ p\equiv l(\mathrm{mod}\ k)\\ Np\leqslant G}} \frac{1}{N(p)} = \frac{4}{\varphi(k)} \log\log G + c_8(k,l) + O\left(\frac{1}{\log G}\right),$$

gdzie p przebiega liczby pierwsze ciała $\mathbb{Q}(i)$.

Wzór powyższy stanowi przeniesienie na przypadek ciała $\mathbb{Q}(i)$ wzoru (3) z pracy [2], jest jednak istotnie trudniejszy do dowodu od wzorów (5)–(7), zawiera bowiem w sobie twierdzenie o postępie arytmetycznym dla ciała $\mathbb{Q}(i)$ udowodnione przez Dirichleta w 1841 r. Mertens wykorzystał dowód Dirichleta; w pracy [6] powrócił do tego tematu podając własny, bardziej elementarny dowód twierdzenia Dirichleta, który również daje się zastosować do dowodu wzoru 8. Dalej idące wyniki dotyczące postępów arytmetycznych w dowolnych ciałach liczbowych podał Landau w 1918 r.

Praca [3] ma charakter przyczynku, zawiera prostszy dowód twierdzenia Gaussa o formach kwadratowych zredukowanych o wyróżniku dodatnim.

b. Krótkie omówienie prac pozostałych autorów (L. Birkenmajer, S. Kępiński, E. Sanczer, S. Turski, W. Wilkosz).

Każdy z wymienionych autorów prócz E. Sanczera był specjalistą z innej dziedziny matematyki, teoria liczb stanowiła margines ich twórczości.

Praca L. Birkenmajera [1] zawiera dowód twierdzenia udowodnionego wcześniej przez Wolstenholme'a, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ licznik

ułamka $1 + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{p-1}$ w postaci nieskracalnej dzieli się przez p^2. Autor zauważa, że własność te jest charakterystyczna dla liczb pierwszych > 3. Praca [2] dotyczy reszty mod p liczby $(\frac{p-1}{2})!$, gdzie p jest liczbą pierwszą o postaci $4k - 1$.

Prace S. Kępińskiego [1]–[2] dotyczą grupy przekształceń liniowych o współczynnikach całkowitych, które nie zmieniają formy kwadratowej $q\zeta^2 - s\eta^2 - r\zeta^2$, gdzie q, s, r są liczbami pierwszymi i co najwyżej dwie z nich mogą być równe. Tę samą grupę dla dowolnych całkowitych wartości p, q, r zbadał w rok później znany algebraik R. Fricke.

Praca S. Turskiego [1] zawiera dowód twierdzenia wypowiedzianego bez dowodu przez F. Pollocka w 1851 r., że każda liczba naturalna jest sumą co najwyżej 10 kwadratów liczb nieparzystych. Autor zauważa, że liczby 10 nie można tu zmniejszyć. W pracy [2] wyprowadza z jednego z twierdzeń Sznirelmana wniosek, że dla każdej liczby naturalnej p istnieje takie k, że każda liczba naturalna jest sumą co najwyżej k p-tych potęg liczb naturalnych nieparzystych.

Broszury E. Sanczera i W. Wilkosza nowych wyników nie zawierają.

2. Teoria liczb we Lwowie.

a. Krótkie omówienie prac W. Lewickiego i M. Czajkowskiego.

Dwaj matematycy narodowości ukraińskiej Włodzimierz Lewicki i Mikołaj Czajkowski byli na Uniwersytecie Lwowskim uczniami J. Puzyny.

Lewicki po ukończeniu studiów w 1894 r. pracował jako nauczyciel gimnazjalny we Lwowie, potem w Tarnopolu, potem znów we Lwowie, następnie jako inspektor lwowskiego kuratorium, wreszcie od 1941 r. jako profesor uniwersytetu. Znaczna część jego prac dotyczyła funkcji analitycznych, w szczególności funkcji modułowych ważnych dla teorii liczb. Prace [1], [2], [3], [5], [6] mają charakter przeglądowy. W pracach [4] i [7] autor podaje prosty sposób zwijania ułamków łańcuchowych postaci

$$a_n - \cfrac{1}{a_{n-1}} - \ldots - \cfrac{1}{a_1 + z},$$

przez które dla a_i całkowitych można przedstawić dowolny element grupy modułowej. Praca [8] zawiera pewne przeformułowanie hipotezy Riemanna, zaś w pracy [9] autor rozważa dwa typy funkcji fuchsowskich i ich związek z funkcją $\wp$ Weierstrassa.

Mikołaj Czajkowski doktoryzował się w 1911 r. na podstawie pracy [1] poświęconej równaniom z grupą rozwiązalną stopnia p^2. W pracy tej dał pierwszy, jak się zdaje, w językach słowiańskich wykład teorii Galois. W pracy [2] badał kongruencje stopni 3 i 4 według modułu pierwszego. Wyemigrował i od 1929 r. pracował w Odessie.

b. Krótkie omówienie prac S. Ruziewicza i E. Żylińskiego.

W 1908 r. habilitował się na Uniwersytecie Lwowskim Wacław Sierpiński, którego twórczość omówiona jest w części 4. Sierpiński prowadził na uniwersytecie wykłady z teorii liczb, z których powstał najpierw skrypt [11], a potem podręcznik [29]. Wśród uczniów Sierpińskiego był Stanisław Ruziewicz, późniejszy profesor Uniwersytetu Jana Kazimierza, którego główny przedmiot zainteresowań stanowiła teoria mnogości i jej zastosowania. Prowadził on jednak sporadycznie wykłady z teorii liczb, których plonem jest skrypt [2] zawierający dowód twierdzenia Dirichleta o postępie arytmetycznym (według jednej z prac Landau'a) oraz dowód Hilberta twierdzenia Waringa z uproszczeniami pochodzącymi od Stridsberga. Aż do ukazania się podręcznika W. Narkiewicza, a więc przez blisko 50 lat skrypt Ruziewicza stanowił jedyną publikację, w której dowody wspomnianych twierdzeń dostępne były w języku polskim. Jedna z prac badawczych Ruziewicza z teorii liczb [5] zawiera nowy dowód twierdzenia Borela, że dla każdej podstawy numeracji zbiór liczb rzeczywistych, które przy tej podstawie nie są normalne, jest miary zero.

Drugim obok Ruziewicza profesorem Uniwersytetu Jana Kazimierza zainteresowanym teorią liczb był Eustachy Żyliński, uczeń Dymitra Grawego z uniwersytetu kijowskiego. O ile Ruziewicza pociągała analityczna teoria liczb, Żyliński zajmował się teorią algebraiczną. Jego praca [2] zawiera następujące ciekawe twierdzenie: Jeżeli liczba pierwsza dzieli wyróżnik wszystkich liczb całkowitych ciała K, ale nie dzieli wyróżnika ciała K, to jest mniejsza od stopnia ciała K. Pozostałe prace Żylińskiego z teorii liczb mają co najwyżej wartość metodologiczną. Książka *Wstęp do matematyki I*, wspólne dzieło Ruziewicza i Żylińskiego, zawiera elementy teorii liczb w skromnym zakresie.

c. Krótkie omówienie prac pozostałych autorów (T. Ciuropajłowicz, P. Dziwiński, A. Łomnicki, J. Mihułowicz, H. Steinhaus, E. Snopek i W. Wierzbicki)

Antoni Łomnicki, profesor Politechniki Lwowskiej jest autorem przyczynku [1] do tematyki rozważanej przez Sierpińskiego w jego pracy [4]. E. Snopek [1] dowodzi równoważności twierdzeń Schönemanna i Radosa o liczbie rozwiązań kongruencji algebraicznej według modułu pierwszego.

Prace P. Dziwińskiego i J. Mihułowicza nowych wyników nie zawierają. Do prac T. Ciuropajłowicza i W. Wierzbickiego nie dotarłem, jedynie z dostępnego mi tytułu niemieckiego pracy Ciuropajłowicza [2] wnoszę, że dotyczy ona teorii liczb, nie zaś, jak sugeruje tytuł ukraiński, algebry.

H. Steinhaus [2] wskazał pewne związki między równomiernym rozmieszczeniem mod 1 a niezależnością statystyczną.

3. Teoria liczb w Poznaniu. Teorią liczb w Poznaniu zajmował się w latach dwudziestych Kazimierz Abramowicz, w latach trzydziestych Kazimierz Cwojdziński, w latach czterdziestych Zygmunt Butlewski, wszyscy trzej związani z Uniwersytetem Poznańskim.

Sześć prac Abramowicza dotyczy grup nieciągłych i form automorficznych. Tematyka ta, zbliżona do tematyki prac S. Kępińskiego, obecnie zaliczana do teorii liczb, w owych czasach zaliczała się do teorii funkcji. Wyniki są zbyt techniczne, aby je tutaj omawiać.

Prace K. Cwojdzińskiego na temat równań diofantycznych drugiego stopnia są, w przeciwieństwie do prac Abramowicza, bardzo elementarne i nowych wyników nie zawierają. Z. Butlewski podał dowód, zbliżony do dowodu Hermite'a, że liczba e^m jest niewymierna przy wszelkim naturalnym m.

4. Teoria liczb w Warszawie.

a. Krótkie omówienie prac S. Dicksteina.

Samuel Dickstein był zasadniczo historykiem matematyki. Cztery z jego publikacji ([5]–[8]) dotyczą twórczości teorioliczbowej Hoene-Wrońskiego. Dickstein odnosi się z szacunkiem do twierdzeń Wrońskiego wypowiadanych na ogół bez dowodów, w bombastycznej formie i stara się nadać im precyzyjny sens matematyczny.

Okazuje się jednak w pracy [8], że "wielkie prawo teleologiczne", odnoszące się do kongruencji

$$x^n - ay^n \equiv 0 \pmod{M},$$

pojmowane wiernie według myśli Wrońskiego jest fałszywe (odpowiedni kontrprzykład pochodzi od korespondenta Dicksteina, G. Vivantiego), zaś poprawione staje się banalne. W pracy [7] na życzliwą wzmiankę zasługują zastrzeżenia Dicksteina wobec rzekomego dowodu Wrońskiego prawa wzajemności reszt kwadratowych. [9] jest referatem o wynikach Hermite'a i Lindemanna.

Trzy prace Dicksteina [1], [2], [4] dotyczą kryteriów podzielności liczb, w [2] opartych na uwadze następującej: Liczba $N = ap+b$ jest podzielna przez liczbę $R = ep + d$ pierwszą względem d, jeżeli R dzieli $a - br$, gdzie r jest liczbą całkowitą, czyniącą zadość równaniu nieoznaczonemu $Rl + dr = c$.

b. Analiza prac W. Sierpińskiego.

Wacław Sierpiński w czasie studiów na Uniwersytecie Warszawskim (1900–1904) znalazł się pod wpływem G. F. Woronoja.

Jego pierwsza praca [1], ściśle wzorowana na pracy Woronoja z 1903 r. o problemie dzielników, zawiera oszacowanie różnicy między liczbą punktów kratowych w kole o środku $(0,0)$ i promieniu $\sqrt{x}$ a polem koła przez $c_1\sqrt[3]{x}$ (c_1, c_2, ... oznaczają stałe). Poprzedni wynik w tym kierunku należący do

Gaussa był $c_2\sqrt{x}$, a następny krok zrobił dopiero w 1923 r. J. G. van der Corput dowodząc oszacowanie $c_3 x^\theta, \theta < \frac{1}{3}$.

Wynik Sierpińskiego wszedł w sposób trwały do historii teorii liczb. W związku z pracą [1] pozostaje praca [15], zawierająca dowód wzoru

$$\sum_{l^2+m^2+n^2 \leqslant x} \frac{1}{l^2+m^2+n^2} = 4\pi\sqrt{x} + c + O(x^{-1/6}),$$

a po drodze oszacowania

$$\sum_{l^2+m^2+n^2 \leqslant x} 1 = \frac{4}{3}\pi x\sqrt{x} + O(x^{5/6})$$

ulepszonego w trzy lata później przez Landaua.

Praca doktorska Sierpińskiego [3], stanowiąca rozwinięcie jego rozprawy kandydackiej, dotyczy sum postaci $\sum_{b \geqslant n > a} r(n)f(n)$, gdzie f jest dowolną funkcją liczbową, $r(n)$ zaś liczbą rozkładów liczby naturalnej n na sumę dwóch kwadratów (zamiast używanego obecnie oznaczenia $r(n)$ autor używa oznaczenia $\tau(n)$). Udowodnione są m.in. wzory następujące:

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{r(n)}{n} = \pi \log x + c_5 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big), \tag{4}$$

$$\sum_{n \leqslant x} r(n^2) = \frac{4}{\pi} x \log x + c_6 x + O(x^{2/3}), \tag{5}$$

$$\sum_{n \leqslant x} r(n)^2 = 4x \log x + c_7 x + O(x^{3/4} \log x). \tag{6}$$

Dowód opiera się na pomysłowym przekształceniu $\sum_{b \geqslant n > 0} r(n)f(n)$, a mianowicie

$$\sum_{b \geqslant n > 0} r(n)f(n) = 4 \sum_{\nu=0}^{[(b-1)/2]} (-1)^\nu \sum_{\mu=0}^{[b/(2\nu+1)]} f((2\nu+1)\mu)$$

co stanowi uogólnienie tożsamości Liouville'a

$$\Big[\sqrt{x}\Big] + \Big[\sqrt{x-1^2}\Big] + \Big[\sqrt{x-2^2}\Big] + \ldots = \Big[\frac{x}{1}\Big] - \Big[\frac{x}{3}\Big] + \Big[\frac{x}{5}\Big] - \ldots$$

Wzór (5) został po raz pierwszy ulepszony w pracy M. I. Stroniny z 1969 r., wzór (6) zaś w pracy S. Ramanujana z 1916 r., nie zawierającej dowodów, a następnie w pracy W. Recknagela z 1989 r.

Z pracą [3] wiążą się tematycznie prace [5], [7] i [8]. W pracy [5] podane są wzory asymptotyczne dla sum $\sum_{n \leqslant x} f_i(n)$ $(i = 1, 2, 3)$, gdzie $f_1(n)$ jest liczbą liczb naturalnych m takich, że $m^2 \mid n$, $f_2(n)$ jest sumą tych liczb, $f_3(n)$ zaś największą z nich.

Suma $\sum f_3(n)$ i jej uogólnienia były przedmiotem badań S. M. Lee w roku 1975.

W pracy [8] autor rozważa sumy $\sum_{k=1}^{n} \rho(k)$, gdzie $\rho(k)$ jest liczbą przedstawień k w postaci różnicy dwóch kwadratów i otrzymuje wzór

$$\sum_{k=1}^{n}(\rho(k) - d(k)) = O(\sqrt{n}),$$

gdzie $d(k)$ jest liczbą dzielników k.

Omówione dotychczas prace należą do analitycznej teorii liczb. Inna grupa wczesnych prac Sierpińskiego obejmująca [2], [4], [10], [13], [16], [21], [26], [27] dotyczy rozwinięć liczb rzeczywistych na szeregi i iloczyny nieskończone. Prace te w przekonaniu autora należały do analizy, dziś zalicza się je do teorii liczb (w klasyfikacji Reviews in Number Theory 1973–1983 dział A 68). Wiążą się z nimi w pewnym stopniu prace St. Guzela [4] i [5].

Praca [2] zawiera dowód następującego twierdzenia. Niech $a > 1$ będzie liczbą całkowitą, $\tau(a,k) = 1 - a$ jeżeli $a \mid k$, i 1 jeżeli $a \nmid k$, wówczas dla każdej liczby rzeczywistej $x < 1$

$$a^x = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\tau(a,k)x}{k - x}\right).$$

Dla $x = \frac{1}{2}$ wzór ten zawiera jako szczególne przypadki wzory podane wcześniej przez Eulera i Sterna.

Praca [13] zawiera m.in. wzór:

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{k_n}\right),$$

gdzie $k > 1$ jest liczbą naturalną, $k_1 = k$ i $k_{n+1} = 2k_n^2 - 1$. Szczególne przypadki tego wzoru były podane przez G. Cantora w 1879 r., wzór zaś odkryty ponownie 4 lata później przez F. Engela, któremu bywa na ogół przypisywany.

W pracy [27] zebrane są wyniki prac [21], [26], jest też materiał nowy. Autor rozważa następujące rozwinięcia liczby niewymiernej $x > 1$, w których a_k oznaczają liczby naturalne.

$$(7) \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{a_k}, \qquad a_{k+1} \geqslant a_k(a_k + 1),$$

$$(8) \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{a_1 \ldots a_k}, \qquad a_{k+1} > a_k,$$

$$(9) \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_1 \ldots a_k}, \qquad a_{k+1} \geqslant a_k,$$

$$(10) \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\alpha_1 \ldots \alpha_k}, \qquad 0 \leqslant c_k < \alpha_k, \quad c_k \text{ całkowite.}$$

Rozwinięcia typu (7) były badane wcześniej przez E. Cohena w 1891 r., a rozwinięcia typu (8) przez M. Ostrogradskiego, który jednak swoich wyników nie ogłosił i znaleziono je w jego spuściźnie pośmiertnej wiele lat po ukazaniu się pracy [27]. Szczególne przypadki rozwinięć typu (3) można znaleźć w dziełach Lamberta, nie dowiódł on jednak na ich temat żadnych twierdzeń ogólnych. Zrobił to F. Engel w roku 1913; rozwinięcia typu (9) są nazywane powszechnie rozwinięciami Engela, z wyraźną krzywdą Sierpińskiego, który wyprzedził Engela o dwa lata. Wyniki Sierpińskiego dotyczące rozwinięć (7)–(9) zostały uogólnione w pracy doktorskiej G. Statemeyera z roku 1931.

Rozwinięcia typu (10) ze względu na ustalony ciąg liczb rzeczywistych α_k spełniających warunek $\lim_{k\to\infty} \alpha_1 \ldots \alpha_k = \infty$ stanowią daleko idące uogólnienie rozwinięć przy ustalonej zasadzie numeracji. Przypadek, gdy α_k są naturalne, był rozpatrzony przez E. Straussa w 1887 r., jeszcze ogólniejsze rozwinięcia zwane rozwinięciami f, rozważał B. M. Bissinger w 1944 r.

Rozwinięć przy ustalonej zasadzie numeracji dotyczy praca [31], związana jednak bliżej z następną grupą prac teorioliczbowych Sierpińskiego, prac poświęconych aproksymacjom diofantycznym. Poza [31] grupa obejmuje prace [12], [14], [18], [19], [20], [22], [23] (rozszerzona wersja [18]) i [25] (rozszerzona wersja [22]) pochodzące z lat 1909–1910.

W pracy [19] dowodzi się, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby naturalnej n istnieją co najwyżej dwa ułamki p/q takie, że $|x - p/q| < \frac{1}{nq}$, $1 \leqslant q \leqslant n$. Prace [18] i [20] anonsują, zaś prace [12], [14] i [23] zawierają dowód, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{kx\} \begin{cases} < \frac{1}{2} & \text{dla } x \text{ wymiernego} \\ = \frac{1}{2} & \text{dla } x \text{ niewymiernego.} \end{cases}$$

Wzór ten uogólniony jest w pracach [22], [25] dla niewymiernych x w sposób następujący:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{kx + y\} = \frac{1}{2} \quad (y \text{ dowolne}).$$

Ten ostatni wzór jest równoważny równomiernemu rozmieszczeniu ciągu kx mod 1. Parę miesięcy wcześniej ten sam wynik otrzymał P. Bohl, a parę miesięcy później H. Weyl, którego następna podstawowa praca na temat równomiernego rozmieszczenia przyćmiła wszystkie wyniki wcześniejsze.

Praca [31] wiąże się z równomiernym rozmieszczeniem mod 1 ciągu αg^k, dotyczy bowiem liczb absolutnie normalnych. Nazywamy tak liczby rzeczywiste α takie, że dla każdego naturalnego $g > 1$ w rozwinięciu liczby α przy zasadzie g każda cyfra występuje z jednakową częstością. Według twierdzenia Borela prawie wszystkie liczby rzeczywiste są absolutnie normalne. [31] zawiera nowy dowód tego twierdzenia wraz z konstrukcją liczby absolutnie normalnej.

Wśród prac Sierpińskiego z lat 1940–50 są dwie poświęcone liczbom pierwszym. W [36] autor dowodzi, że dla ciągu liczb pierwszych p_n zachodzi równość

$$\limsup \min\{p_n - p_{n-1}, p_{n+1} - p_n\} = \infty,$$

a w [41], że dla dowolnych liczb n i k istnieje liczba pierwsza p, taka, że $p \pm i$ $(i = 1, ..., k)$ ma więcej niż n dzielników. Pierwszy wynik był na różne sposoby wzmacniany przez Erdősa, Walfisza i Prachara.

Pozostałe prace Sierpińskiego z omawianego okresu, poza artykułem polemicznym [6] i artykułami przeglądowymi [24], [25], [30], [44], stanowią drobne przyczynki do elementarnej teorii liczb.

Oprócz prac badawczych Sierpiński opublikował w omawianym okresie skrypt [11] i dwie książki [29] i [34]. Najważniejszą pozycję stanowi tu podręcznik uniwersytecki [29], który miał trzy wydania. Zakres poruszanych w nim tematów jest mniejszy niż np. w podręczniku Hardy'ego i Wrighta, ale w obrębie tych tematów autor stara się dostarczyć czytelnikom jak najwięcej informacji.

W książce podany jest między innymi pochodzący od autora wzór

$$\sum_{n \leqslant x} r_4(n) = 8S(x) - 32S\left(\frac{x}{4}\right),$$

w którym $r_4(n)$ oznacza liczbę rozkładów n na sumę 4 kwadratów, a $S(x) = \sum_{n \leqslant x} \sigma(n)$. Wzór ten został zastosowany przez Walfisza w 1925 r. do badania liczby punktów kratowych w kuli czterowymiarowej.

Znacznie mniejsza od [29] książka [34] powstała z wykładów dla nauczycieli szkół średnich. Działalność dydaktyczna Sierpińskiego w zakresie teorii liczb zaowocowała w Warszawie dopiero po roku 1950.

c. Analiza prac A. Walfisza

Arnold Walfisz studiował matematykę na uniwersytetach niemieckich, doktoryzował się w Getyndze w roku 1921 na podstawie pracy [2], jako uczeń E. Landaua. Do Warszawy, która była miejscem jego urodzenia, powrócił na dobre w roku 1927 (niektóre jego prace pisane w 1925 r. również są datowane w Warszawie) i pracował w towarzystwie ubezpieczeniowym "Europa". Został docentem prywatnym Uniwersytetu Warszawskiego i w roku 1935 założył wspólnie z Salomonem Lubelskim pismo "Acta Arithmetica" poświęcone specjalnie teorii liczb. W 1936 r. wyjechał do Gruzji. Niniejsza analiza obejmuje jedynie prace ogłoszone przez Walfisza do 1936 r. i opiera się w dużej mierze na artykule G. Lomadse [*1*].

Praca [1] zawiera dowód, że szeregi Dirichleta $\sum_p p^{-s}$ i $\sum(\log p)p^{-s}$ (p przebiega liczby pierwsze) nie dają się przedłużyć analitycznie poza prostą $\sigma = 0$.

Praca [2] dotyczy sum częściowych współczynników szeregu Dirichleta przedstawiającego funkcję zeta Epsteina dowolnej formy kwadratowej dodatnio określonej k zmiennych o współczynnikach całkowitych oraz szeregu Dirichleta przedstawiającego funkcję zeta Dedekinda ζ_K ciała liczbowego K stopnia k. Dla każdej z tych sum autor podaje rozwinięcie w szereg funkcji Bessla lub uogólnionych funkcji Bessla. Szeregi te są zbieżne dla $k = 2$, a sumowalne odpowiednią metodą średnich dla $k > 2$. Ponadto dla sumy $H(x)$ początkowych $[x]$ współczynników funkcji $\zeta_K(s)$ autor podaje oszacowanie

$$(11) \qquad H(x) - \rho x = \Omega_{\pm}(x^{\frac{k-1}{2k}}), \quad \rho = \text{ residuum } \zeta_K(s) \text{ w } s = 1.$$

Rozwinięcie i ulepszenie pracy [2] w części dotyczącej funkcji zeta Dedekinda stanowią prace [7] i [14] oraz [12] i [13]. Bada się w nich sumy częściowe współczynników szeregu Dirichleta przedstawiające ζ_K^m dla dowolnego naturalnego m. Pierwsza para prac dotyczy rozwinięć na szeregi uogólnionych funkcji Bessla, druga uogólnień wzoru (11). Najciekawszy wydaje się wynik następujący poprawiony dopiero w roku 1982 przez J. Hafnera. Oznaczając przez $H_m(x)$ sumę pierwszych $[x]$ współczynników funkcji $\zeta_K(s)^m$, przez $\rho_m(x)$ residuum w $s = 1$ funkcji $\frac{x^{s-1}}{s}\zeta_K(x)^m$ mamy $H_m(X) - \rho_m x = \Omega_{\pm}\left((x\log x)^{\frac{k-1}{2k}}(\log\log x)^{m-1}\right)$, gdzie $\kappa = km \geqslant 4$. Dla $\kappa \leqslant 3$ autorzy (prace [12] i [13] są wspólne z G. Szegö) uzyskają tylko wyniki częściowe. Praca [6] zawiera oszacowanie dla $k = 1$, $H_3(x) - \rho_3 x = O(x^{43/87+\varepsilon})$, a praca [9] oszacowanie dla $k = 2$, $H(x) - \rho x = O(x^{163/494})$.

Suma pierwszych $[x]$ współczynników funkcji zeta Epsteina formy kwadratowej Q to z dokładnością do stałej liczba punktów kratowych w elipsoidzie $Q \leqslant x$, oznaczana dalej przez $A_Q(x)$.

Połóżmy $P_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x)$, gdzie V_Q jest objętością rozważanej elipsoidy i niech

$$P_k(x) = P_Q(x) \quad \text{dla} \quad Q = \sum_{i=1}^{k} x_i^2.$$

Funkcje $P_k(x)$ i $P_Q(x)$ stanowiły ulubiony przedmiot badań Walfisza w ciągu całego życia. Wyniki jego na ten temat z omawianego okresu dają się streścić jak następuje.

k = 2 (12) $P_2(x) = O(x^{37/112+\varepsilon})$ w [3], $P_2(x) = O(x^{163/494})$ w [10]

(13) $\int_0^x P_2^2(t)dt = M_2 x^{3/2} + O(x\log^3 x)$ w [10]

k = 3 (14) $P_3(x) = O(x^{43/58+\varepsilon})$ w [6]

k = 4 (15) $P_4(x) = O\left(\frac{x\log x}{\log\log x}\right)$ w [10]

(16) $P_Q(x) = O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right)$ w [29], $Q \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$

(17) $P_4(x) = \Omega(x \log \log x)$, w [10]

(18) $P_Q(x) = \Omega(x \log \log x)^\lambda$, $\lambda = \lambda(Q) > 0$ w [32]

(19) $\int_0^x P_4^2(t)dt = M_4 x^3 + O(x^{5/2})$ w [41]

(20) $\int_0^x P_Q^2(t)dt = M_Q x^3 + O(x^{5/2} \log^2 x)$,
$Q \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ w [39]

k = 5 (21) $P_Q(x) = O(x^{3/2})$, $Q = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i x_i^2$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ w [21]

k ⩾ 5 (22) $P_k(x) = O(x^{\frac{k}{2}-1})$ w [5]

(23) $P_Q(x) = \Omega_\pm(x^{\frac{k}{2}-1})$, $Q \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ w [11]

k ⩾ 8 (24) $P_Q(x) = O(x^{\frac{k}{2}-1})$, $Q \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ w [5]

k ⩾ 10 (25) $P_Q(x) = O(x^{\frac{k}{2}-1})$,
$Q = \alpha x_1^2 + Q_1$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ $Q_1 \in \mathbb{Q}[x_2, \ldots, x_k]$ w [16]

Pionierski charakter miał wynik (25), pierwszy wynik na temat punktów kratowych w elipsoidach niewymiernych. Pozostałe wyniki stanowiły na ogół ulepszenie wcześniejszych wyników Landaua i nie miały charakteru ostatecznego. I tak wynik (12) został poprawiony przez Nielandta w roku 1928, (13) przez Kátai w roku 1965, (14) przez Winogradowa w roku 1935, (15) i (16) przez samego Walfisza w roku 1939, (17) przez Adhikari, Balasubramaniana i Sankaranarayana w roku 1989, (20) przez Jarnika w roku 1940. Jednakże z porównania wzorów (22), (23) i (24) wynika, że są one ostateczne, z tym, że jak udowodnił Landau w roku 1924, (24) zachodzi również dla $k = 5$, 6 i 7. W [37] autor dowodzi m.in., że dla dowolnej formy kwadratowej dodatnio określonej $Q \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ funkcja dana przez szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_Q(n)}{N^s}$ przedłuża się na całą płaszczyznę.

W [42] podaje wzory asymptotyczne dla sum $\sum_{n=1}^{N} r_k^2(n)$, gdzie $r_k(n)$ jest liczbą przedstawień n w postaci sumy k kwadratów i $k \geqslant 4$.

W bliskim związku z wynikami o punktach kratowych znajdują się twierdzenia Walfisza dotyczące funkcji

$$\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a.$$

I tak w [10] dowodzi się, że

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_{-1}(n)-\frac{\pi^2}{6}x+\frac{1}{2}\log x=O\Big(\frac{\log x}{\log\log x}\Big), \tag{26}$$

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_1(n)-\frac{\pi^2}{12}x^2=O\Big(\frac{\log x}{\log\log x}\Big). \tag{27}$$

W pracach [25] i [41] podane są oszacowania całek z kwadratów lewych stron, a w [34] oszacowania całek kwadratów odpowiednich wyrażeń dla $s=\pm\frac{1}{2}$. Wreszcie w [40] autor dowodzi, że

$$x\sum_{n\leqslant x}\sigma_{-1}(n)-\sum_{n\leqslant x}\sigma_1(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2-\frac{1}{2}x\log x-\frac{1}{2}(\gamma-1+\log 2\pi)x+O(x^{\frac{3}{10}}). \tag{28}$$

Oszacowanie (26) i (27) zostało poprawione przez samego Walfisza w roku 1960, a oszacowanie (28) przez H. Y. Penga w roku 1942.

W [18] poprawione jest oszacowanie błędu we wzorze Ramanujana

$$\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant x\\ m\equiv m_0 \pmod k}} d(m)=\alpha x\log x+\beta x+O(x^{\frac{1}{3}}\log x),$$

słusznym dla dowolnych ustalonych k i m_0 i zależnych od nich α,β.

Autor zastępuje $x^{\frac{1}{3}}\log x$ przez $x^{27/82}\log^{11/41}x$. Można stąd otrzymać oszacowanie dla sumy

$$\sum_{m\geqslant x} d(m)e^{2\pi i\frac{h}{k}m},\quad \text{gdzie}\quad (h,k),=1.$$

Ogólniejsze sumy

$$D(x,\theta)=\sum_{n\geqslant x} d(n)e^{2\pi in\theta}\quad\text{i}\quad R(x,\theta)=\sum_{n\geqslant x} r_2(n)e^{2\pi in\theta}$$

bada się w pracach [24], [28] i [30].

W [24] dowodzi się między innymi, że dla prawie wszystkich θ

$$D(x,\theta)=O(x^{\frac{1}{2}}\log^{2+\varepsilon_x}),$$
$$D(x,\theta)=\Omega(x^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}}x\log\log x)$$

i podobne oszacowanie zachodzi dla $R(x,\theta)$. W [28] drugie z przytoczonych oszacowań wzmocnione jest do postaci

$$\text{dla prawie wszystkich } \theta \begin{cases} \operatorname{Re} D(x,\theta)=\Omega_+(x^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}}x(\log\log x)^{3/2}),\\ \operatorname{Im} D(x,\theta)=\Omega_\pm(x^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}}x(\log\log x)^{3/2}).\end{cases}$$

Wzmiankowane prace zawierają również oszacowania dla $D(x,\theta)$ i $R(x,\theta)$ zależne od arytmetycznej struktury liczby θ i w tym sensie dotyczą teorii przybliżeń diofantycznych. Praca [30] zawiera m.in. oszacowanie

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\{\theta n\}} = O(x \log^{2+\varepsilon} x)$$

słuszne dla wszystkich $\varepsilon > 0$ i prawie wszystkich rzeczywistych θ.

Do teorii przybliżeń diofantycznych należą prace [22], [26] i [27]. W [22] modyfikując znane twierdzenie Chinczyna autor bada nierówność

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{f(k)}{k}$$

przy założeniu, że ciąg $kf(k)$ jest malejący, ciąg $\frac{f(k)}{f(2k)}$ ograniczony i całka $\int_1^\infty f(t)dt$ rozbieżna. Dowodzi, że dla prawie wszystkich liczb rzeczywistych θ nierówność ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych h, k gdzie $k > 0$, $k \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$ i $(h,k) = 1$.

Praca [26] zawiera prosty dowód oszacowania Hardy'ego-Littlewooda

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\sin n\theta\pi} = O(x)$$

słusznego pod warunkiem, że mianowniki rozwinięcia łańcuchowego θ są ograniczone. W [27] dowodzi się przy tym samym założeniu, że

$$\sum_{n \leqslant x} \left(n\left(\{n\theta\} - \frac{1}{2}\right)\right)^{-1} = O(\log x).$$

Niech $\psi(u) = \{u\} - \frac{1}{2}$, jeżeli $u \notin \mathbb{Z}$, $\psi(u) = 0$, jeżeli $u \in \mathbb{Z}$. W pracy habilitacyjnej Riemanna znajduje się podana bez dowodu tożsamość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\psi\left(n\theta + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t(n) \sin 2n\pi\theta, \quad \text{gdzie} \quad t(n) = \sum_{d|n} (-1)^d,$$

w której θ oznacza dowolną liczbę wymierną.

W pracy [35] Walfisz i Chowla dowodzą, że tożsamość ta zachodzi dla prawie wszystkich θ i dla wszystkich θ algebraicznych, istnieje jednak zbiór liczb θ, gęsty na prostej, dla których oba występujące w tożsamości szeregi są rozbieżne.

Oprócz omówionych na wstępie prac związanych z rozprawą doktorską Walfisz ogłosił szereg innych prac dotyczących funkcji zeta Riemanna i Dedekinda oraz rozmieszczenia liczb pierwszych.

Praca [4] zawiera oszacowanie

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{163/988}),$$

które zostało poprawione przez Titchmarsha w roku 1931. Praca [15] zawiera oszacowanie funkcji zeta Dedekinda $\zeta_K(s)$ dla dowolnego ciała abelowego K, mianowicie

$$\zeta_K(1+it) = O\Big(\frac{\log t}{\log\log t}\Big).$$

Mocniejszy wynik dla dowolnego ciała algebraicznego K uzyskał A. W. Sokołowski w roku 1968.

Praca [31] zawiera dowód, że dla dowolnych liczb dodatnich δ i ε w obszarze

$$t > 16, \quad 1 - \frac{(\log\log\log t)^{1+\varepsilon}}{\log\log t} < \sigma < 1 + \frac{(\log\log\log t)^{1+\varepsilon}}{\log\log t}$$

istnieje zbiór miary $\leqslant \delta$, w którym funkcja $\zeta_K(\sigma + it)$ dowolnego ciała algebraicznego K przyjmuje każdą wartość, z wyjątkiem co najwyżej jednej, nieprzeliczalnie wiele razy.

Praca [36] zawiera wzór asymptotyczny dla liczby przedstawień $N_{r,s}(x)$ liczby naturalnej n jako sumy r kwadratów liczb naturalnych i s liczb pierwszych ($r \geqslant 5$, $s \geqslant 1$). Wzór ten otrzymany był wcześniej przez G. K. Stanley, jednak przy założeniu uogólnionej hipotezy Riemanna.

Praca [38] zawiera wzór asymptotyczny dla $N_{4,1}$ oraz wzór asymptotyczny dla liczby przedstawień n w postaci sumy liczby bezkwadratowej i liczby pierwszej, w tym drugim przypadku z nieporównanie lepszym niż znane poprzednio oszacowaniem błędu. W dowodzie istotną rolę gra lemat, który jest zapewne najtrwalszym wkładem Walfisza do teorii rozmieszczenia liczb pierwszych. Niech $\pi(x,k,l)$ oznacza liczbę liczb pierwszych $\leqslant x$ w postępie arytmetycznym $kt + l$, gdzie $(k,l) = 1$. Z udowodnionego właśnie przez Siegela oszacowania $L(1,\chi)$ (χ — charakter kwadratowy) Walfisz wyprowadza nierówność

$$\Big|\pi(x,k,l) - \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(k)}\Big| < xe^{\frac{-A\sqrt{\log x}+x^{1-ck^{-\varepsilon}}}{\varphi(k)\log x}}$$

słuszną dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i odpowiedniego c (A jest stałą absolutną).

Wynika stąd, że dla każdego a i $b > 0$ zależnego od a

$$\pi(x,k,l) = \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(k)} + O(xe^{-b\sqrt{\log x}})$$

jednostajnie dla wszystkich $k \leqslant (\log x)^a$. To ostatnie twierdzenie bywa niekiedy nazywane twierdzeniem Siegela-Walfisza.

W pracy [33] Walfisz wzmocnił oszacowanie Heckego dla sumy częściowej współczynników Fouriera formy modułowej.

Pozostałe prace Walfisza to nowe dowody znanych twierdzeń ([17], [20]), artykuły przeglądowe ([8], [19]) i recenzja [23].

d. Analiza prac S. Lubelskiego

Informacje o życiu Salomona Lubelskiego są dość skąpe. Doktoryzował się na Uniwersytecie Warszawskim. W roku 1935 założył wspólnie z Walfiszem "Acta Arithmetica" i był ich redaktorem do roku 1939. Po wybuchu wojny znalazł się w Białymstoku zajętym przez wojska radzieckie i objął tam stanowisko kierownika katedry matematyki w Instytucie Pedagogicznym. Po zajęciu Białegostoku przez wojska niemieckie w roku 1941 zginął w obozie koncentracyjnym.

Zainteresowania Lubelskiego ewoluowały od elementarnej ku algebraicznej teorii liczb. Charakter elementarny ma praca [6] zawierająca 122 zadania (część I) z rozwiązaniami (część II) jak również znaczna część artykułu przeglądowego [13].

Praca [3] zawiera dowód kongruencji tożsamościowej

$$f(x)^{p^{m-1}} \equiv \prod_{n=1}^{p^{m-1}} f(x+np) (\mathrm{mod}\ p^m)$$

gdzie f jest dowolnym wielomianem o współczynnikach całkowitych, a p liczbą pierwszą, praca [2] zaś zawiera uogólnienie tej kongruencji na przypadek ciał algebraicznych. Dokładniejszą kongruencję (mod p^{m+1}) podał w roku 1964 L. Carlitz.

Prace [1], [4], [5], [7], [11], [12] i [17] dotyczą form kwadratowych. W pracach [1], [4] i [7] autor bada formy kwadratowe $x^2 + Dy^2$ $(D > 0)$ o tej własności, że dla pewnego a i dla każdego L względnie pierwszego z $2D$ zachodzi implikacja (istnieją liczby całkowite x, y takie, że $(x, y) = 1$ i $L \mid x^2 + Dy^2$) $\Rightarrow$ (istnieją liczby całkowite x, y takie, że $(x, y) = 1$ i $L = x^2 + Dy^2$ lub $2^a L = x^2 + Dy^2$). Lubelski wyznacza wszystkie liczby naturalne D o żądanej własności przy dodatkowych warunkach $a = 0$ lub $a \geqslant 3$. Podaje również warunek konieczny i dostateczny, aby żądana własność zachodziła dla $a \leqslant 2$. Warunek ten sformułowany jest bez użycia naturalnego w tym przypadku obiektu, jakim jest grupa klas form pierwotnych o wyróżniku $-4D$. Być może, używając dostępnej informacji na temat wyróżników z małą liczbą klas, dałoby się problem Lubelskiego, moim zdaniem dość sztuczny, rozstrzygnąć do końca.

Praca [5] dotyczy również form kwadratowych $x^2 + Dy^2$ i zawiera dowód następującego ciekawego twierdzenia. Na to, aby liczba M względnie pierwsza z $2D$, $M = M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} \ldots M_n^{\alpha_n}$, gdzie M_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ są różnymi liczbami pierwszymi, miała $(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_s + 1)$ istotnie różnych przedstawień właściwych przez formę $x^2 + Dy^2$ potrzeba i wystarcza, aby liczba M i liczby $M_s^2 (s = 1, 2, \ldots, n)$ były przedstawialne przez tę formę, pierwsza w sposób właściwy. (Dwa przedstawienia różnią się nieistotnie, jeśli jedno otrzymuje się z drugiego przez automorfizm formy).

Praca [11] zawiera m.in. dowód rozwiązalności równania Pella przy pomocy teorii kompozycji form kwadratowych, bez użycia liczb niewymiernych. Autor pisze, że dowód bez użycia liczb niewymiernych był od dawna poszukiwany. Można tu zauważyć, że algorytm rozwijania $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy może być sformułowany bez użycia liczb niewymiernych (patrz Sierpiński [29], wyd. 3, str. 283) i dość łatwo otrzymać zeń dowód rozwiązalności równania Pella $x^2 - Dy^2 = 1$.

W obszernej pracy [12] Lubelski rozwija teorię form dwójkowych o współczynnikach całkowitych z ciała kwadratowego urojonego. W pracy [17] zajmuje się związkiem między globalną i lokalną przedstawialnością zera przez formy trójkowe nad ciałami euklidesowymi $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ dla $D = -1, -2, -3$ lub -7. Warto dodać, że na podstawie rękopisu przekazanego przez Lubelskiego van der Corputowi zostały przygotowane dwie jego prace pośmiertne [2] i [3] dotyczące teorii form kwadratowych nad dowolnym pierścieniem euklidesowym.

Dwie prace Lubelskiego dotyczą równań diofantycznych stopni wyższych. Praca [8] dotyczy równania $x^p + y^p = cz^p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, c zaś liczbą całkowitą i zawiera dowód następującego twierdzenia. Jeżeli wymienione równanie ma rozwiązanie całkowite spełniające $(xyz, p) = 1$, a ponadto $(c\varphi(c), p) = 1$ i albo kongruencją $u^p \equiv c \pmod{p^2}$ jest rozwiązalna, albo kongruencja $2u^p \equiv c \pmod{p^2}$ jest nierozwiązalna, to $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

Wynik ten został zarazem wzmocniony i uproszczony przez Inkeriego w roku 1989. Praca [9] zawiera kompletne rozwiązanie równania $x^4 - 15y^4 = 1$ z pomocą twierdzenia Thuego z roku 1918.

Prace [10] i [14] pod wspólnym tytułem zawierają kilkanaście luźno związanych ze sobą rezultatów. Myśli autora krążą wokół twierdzeń Kroneckera-Webera i Bauera. Dla drugiego z nich podaje własny dowód (twierdzenie 7 w [14]), a z obu wyprowadza szereg wniosków. Do niektórych z nich (twierdzenie V w [10] i twierdzenie 10 w [14]) nawiązuje praca Davenporta, Lewisa i Schinzla z roku 1964. Warto zauważyć, że twierdzenie IV z pracy [10], które brzmi:

Jeżeli wielomian $F \in \mathbb{Z}[x]$ ma mod p, dla prawie wszystkich liczb pierwszych p, co najmniej v czynników liniowych, to F ma co najmniej v czynników w $\mathbb{Z}[x]$ (licząc z krotnościami) — można wzmocnić.

Przy tym samym założeniu $F(x)$ ma w $\mathbb{Z}[x]$ co najmniej $v+1$ czynników (licząc z krotnościami) lub $F(x)$ jest iloczynem v czynników liniowych.

Praca [16] stanowi, moim zdaniem, kulminacyjne osiągnięcie Lubelskiego w zakresie algebraicznej teorii liczb. Podaje on w niej dla ciał algebraicznie rozwiązalnych dowód twierdzenia Minkowskiego, że wyróżnik każdego ciała algebraicznego oprócz $\mathbb{Q}$ jest różny od ± 1, nie odwołując się do pojęcia liczby rzeczywistej. Stąd już wynika, że również twierdzenie Kroneckera-Webera daje się udowodnić bez użycia tego pojęcia. Problem w przypadku

twierdzenia Minkowskiego był, jak podaje autor za N. Czebotariewem, postawiony przez E. Noether. Zajęcie się nim świadczy o fascynacji Lubelskiego metodami arytmetycznymi.

e. Krótkie omówienie prac pozostałych autorów:

(T. Banachiewicz, St. Guzel, S. Kernbaum, A. Łaparewicz, S. Mandelbrojt, R. Niewiadomski, E. Poznański, M. Rottenberg, E. Rubinstein, W. Smosarski, A. Stamirowska, R. Witwiński, K. Zarankiewicz).

Nieliczne prace wymienionych w tytule ustępu autorów można zgrupować według poruszanych tematów

Stosunkowo dużo uwagi poświęcono zagadnieniem podzielności i rozkładu liczb na czynniki pierwsze. Dotyczą ich prace Banachiewicza [1], Kernbauma [1], Łaparewicza [1]–[3], Mandelbrojta [1], Niewiadomskiego [2], [3], [3a], [5], częściowo [6], Rottenberga [1] i Witwińskiego [1], [2]. (Prace Kernbauma, Mandelbrojta i Rottenberga nie zawierają informacji o miejscu ich zamieszkania. Omawiam je w tym rozdziale ze względu na związki z pracami Łaparewicza i Niewiadomskiego).

Banachiewicz [1] wyraża pogląd, że Fermat swoje fałszywe twierdzenie o pierwszości liczb $F_k = 2^{2^k} + 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ wyprowadził z faktu, że

$$F_k | 2^{F_k - 1} - 1$$

i z fałszywego przypuszczenia, że liczba n spełniająca podzielność $n | 2^{n-1} - 1$ jest pierwsza. W czasie, gdy Banachiewicz pisał swoją pracę i wiele jeszcze lat później sądzono błędnie, że takie przypuszczenie wysunęli starożytni matematycy chińscy (por. Sierpiński [35]).

Łaparewicz [1] omawia dwie metody Gaussa rozkładu liczb na czynniki pierwsze (*Disquisitiones Arithmeticae*, Art. 329–334) i przy tej okazji daje wykład elementów teorii form kwadratowych dwójkowych oraz własności tzw. liczb dogodnych (*numeri idonei*) Eulera. Łaparewicz [2] podaje dowód kryterium Lucas pierwszości liczb $2^p - 1$ i przy tej sposobności przedstawia zasadnicze własności arytmetyczne ciągów Lucasa (krytyka pod adresem Lucasa nie wydaje się uzasadniona).

Mimo że ostatnia praca Łaparewicza ukazała się w tomie 11 Wiadomości Matematycznych, w tomie 15 R. Niewiadomski ogłosił pracę [1], w której twierdzenie udowodnione przez Łaparewicza dla ogólnych ciągów Lucasa formułuje jako przypuszczenie w szczególnym przypadku ciągu Fibonacciego. Są też w owej pracy inne przypuszczenia, których fałszywość wykazał Kernbaum [1]. Ten autor daje własny wykład własności ciągów Lucasa, który choć nie zawiera nowych wyników, robi wrażenie pracy całkowicie samodzielnej i czyta się ciekawie. Nie można tego powiedzieć o pracy Rottenberga [1], której wyniki są banalne. Banalne są również wyniki Mandelbrojta [1].

Prace Witwińskiego [1], [2] zawierają dowód następującego twierdzenia. Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ są wielomianami o współczynnikach całkowitych i $f(\xi) | g(\xi)$

dla dostatecznie dużych liczb naturalnych ξ, to $f(x)|g(x)$. To nietrudne twierdzenie w mocniejszej postaci znajduje się jako zadanie 92 rozdziału VIII znanej książki Pólya i Szegö *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* wydanej w roku 1925; być może Witwiński ma pierwszeństwo w sformułowaniu tego rezultatu, choć jądro dowodu jest już w pracy Libriego z 1832 r.

Drugi temat, który się powtarza, to kongruencje wykładnicze o modułach pierwszych. Dotyczy ich dziełko E. Poznańskiego i praca W. Smosarskiego, które nowych wyników nie zawierają. We wstępie do swego dziełka Poznański mówi, że w naszej literaturze "brak śladów poszukiwań samodzielnych lub opracowania jakiejkolwiek oddzielnej kwestii, brak oryginalnego lub tłumaczonego podręcznika z teorii liczb".

Trzeci powtarzający się temat, to równania diofantyczne, badane przez Niewiadomskiego [2], [7]–[11], Rubinsteina i Zarankiewicza. Praca [2] dotyczy równania $x^2 - xy - y^2 = N$ i jego związków z uogólnionym ciągiem Fibonacciego (tzn. ciągiem danym przez wzór zwrotny $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ i dowolne wyrazy początkowe u_0, u_1). Autor, który był matematykiem z zamiłowania, ale nie z wykształcenia, niczego istotnego nie dowodzi, formułuje jedynie po części trafne przypuszczenia. Praca [7] dotyczy liczb postaci $\frac{1}{2}r[2 + (m-2)(r-1)]$, zawiera głównie tożsamości algebraiczne.

Zarankiewicz [1] bada wyłącznie przypadek $m = 3$ i rozważa również własności otrzymanych wówczas liczb trójkątnych, które nie sprowadzają się do tożsamości.

Z wzorów zawartych w pracy Niewiadomskiego [9] można otrzymać dowód, że $x^4 + y^4 + z^4 = 2A^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z, A nie zawartych w tożsamości

$$x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2.$$

Dwie prace Niewiadomskiego [8] i [10] dotyczą wielkiego twierdzenia Fermata, a wiąże się z nim również praca [11]. W pracy [8] autor stwierdza, że kongruencja $x^p + y^p \equiv z^p \pmod{p^2}$ jest nierozwiązalna w liczbach x, y, z, niepodzielnych przez p dla wszystkich $p < 200$, $p \equiv -1 \pmod 6$ z wyjątkiem $p = 59, 83, 179$. Kongruencja ta była w roku 1920 badana przez A. Arwina, który zauważył osobliwość liczby 59. Praca [10] dotyczy oszacowań dla ewentualnych rozwiązań równania $x^p + y^p = z^p$ w przypadku $xyz \not\equiv 0 \pmod p$ i poprawia wyniki G. Jamesa z roku 1934. Lepsze wyniki otrzymał K. Inkeri w roku 1953.

Praca E. Rubinsteina o uogólnionym równaniu Pella powtarza wyniki K. Petra z roku 1927 i nie zawiera wzmianki o miejscu zamieszkania autora.

Pozostało do omówienia 5 prac, które nie wiążą się z innymi.

A. Stamirowska [1] dowodzi, że najmniejszy dzielnik pierwszy liczby doskonałej nieparzystej jest mniejszy od liczby jej dzielników pierwszych, co stanowi nieznaczne wzmocnienie twierdzenia Servais z roku 1887. Lepszy wynik otrzymał w roku 1961 K. Norton.

St. Guzel [1] wykazuje, że w przytoczonym wyżej oszacowaniu Sierpińskiego dla sumy $\sum_{n-1}^{n}(\varrho(k) - d(k))$ za stałą w symbolu O można przyjąć 4. Guzel [2] oznaczając przez $\delta(n)$ największy dzielnik nieparzysty liczby n dowodzi wzorów

$$\sum_{n\leqslant x}\delta(n) = \frac{x^2}{3} + O(x), \qquad \sum_{n\leqslant x}\frac{\delta(n)}{n} = \frac{2}{3}x + O(1).$$

W pracy [3] bada ogólniejsze sumy $\sum_{n\leqslant x}\delta(n)\tau(n)$, gdzie $\tau(n)$ jest dowolną funkcją arytmetyczną.

Z. Zalcwasser bada wielomiany trygonometryczne

$$s_n^{(2)} = \sum_{\nu=1}^{n} e^{(\nu-1/2)^2\pi ix},$$

$$s_n^{(3)} = \sum_{\nu=1}^{n} e^{\nu^2\pi ix},$$

$$s_n^{(4)} = \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu e^{\nu^2\pi ix}$$

i dowodzi, że dla $\lambda = 2, 3, 4$ i dowolnego $A > 0$ miara zbioru

$$\{x \in (0,1) : \max_{n\leqslant N}|s_n^\lambda(x)| \geqslant A\sqrt{N}\}$$

nie przekracza $\frac{F}{A^4}$, przy pewnej stałej F.

5. Teoria liczb w Wilnie. Rozprawa Mikołaja Trynkowskiego z końca ubiegłego stulecia ma charakter kompilacyjny. We wstępie autor wymienia dzieła, z których korzystał; są to przede wszystkim wykłady Kleina z teorii funkcji modułowych, ponadto pierwsze wydanie książki H. Webera *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen* oraz pięć innych książek z teorii funkcji eliptycznych. Oprócz tego autor powołuje się w tekście na oryginalne prace Abela, Jacobiego i Schwarza, monografie E. Netto z teorii podstawień oraz Fáa di Bruno z teorii form dwójkowych. Erudycja autora jest imponująca, zwłaszcza jeśli się zważy, że był matematykiem z wykształcenia ale nie z zawodu. Nie dostrzegłem natomiast w rozprawie wyników nowych, przynajmniej w zakresie teorii liczb.

W okresie międzywojennym teorią liczb w Wilnie zajmowali się przygodnie Kazimierz Jantzen (astronom) i Juliusz Rudnicki, profesor Uniwersytetu Stefana Batorego. K. Jantzen badał równanie

$$\arctan\frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{k}\arctan\frac{i}{u_i}$$

gdzie a, b są danymi, zaś u_i poszukiwanymi liczbami całkowitymi. Rozwiązania tego równania są użyteczne przy obliczeniach przybliżonych liczby π.

J. Rudnicki dowiódł, że jeśli n jest liczbą całkowitą, zaś p liczbą pierwszą, to poczynając od pewnego miejsca wszystkie reszty ciągu $p, p^p, p^{p^p}, \ldots$ mod n są równe. W. Sierpiński i autor niniejszego artykułu udowodnili w roku 1959, że to samo twierdzenie zachodzi dla dowolnych liczb całkowitych p, niekoniecznie pierwszych.

6. Teoria liczb we Wrocławiu. We Wrocławiu teorią liczb zajmowali się w latach czterdziestych Stanisław Hartman, Jakub Intrator, Maria Nosarzewska i Hugo Steinhaus. Z tego okresu pochodzą dwie prace Hartmana dotyczące aproksymacji diofantycznych. [1] zawiera uogólnienie na przypadek wielowymiarowy twierdzenia Ostrowskiego z roku 1930 o odchyleniach od równomiernego rozmieszczenia mod 1 ciągu $n\xi$ (ξ niewymierne). [2] zawiera dowód następującego twierdzenia.

Dla dowolnych liczb naturalnych a, b i s i dowolnej liczby niewymiernej $\xi > 0$ istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych u, v spełniających warunek

$$\left|\xi - \frac{u}{v}\right| \leqslant \frac{2s^2}{v^2}, \quad u \equiv a \pmod{s}, \quad v \equiv b \pmod{s}.$$

Jak zauważył w roku 1952 K. Černy, stałą 2 można tu zastąpić przez $\frac{1}{\sqrt{5}} + \varepsilon$ (ε dowolne dodatnie) stosując twierdzenie Chinczyna z roku 1935 o aproksymacjach niejednorodnych.

Krótka praca J. Intratora poświęcona jest liczbie rozkładów liczby naturalnej na sumę ustalonej liczby składników naturalnych niemalejących.

H. Steinhaus [3] i M. Nosarzewska zajmowali się oszacowaniem liczby punktów kratowych w obszarze płaskim przez funkcje pola i obwodu tego obszaru. Oszacowanie Nosarzewskiej dotyczące obszarów wypukłych było optymalne i jego uogólnieniem na przypadek przestrzeni n-wymiarowej zajmowało się w latach siedemdziesiątych wielu autorów obcych.

7. Teoria liczb poza głównymi ośrodkami. Poza głównymi ośrodkami teorię liczb uprawiało w Polsce zaledwie kilka osób: biskup Antoni Baranowski (Sejny), nauczyciele Karol Czajkowski (Buczacz, Przemyśl), Konstanty Matulewicz (Góra Śląska) i Edward Stamm (Lubowidz) oraz przygodnie Hugo Steinhaus (w czasie pobytu w Jaśle).

A. Baranowski [1]–[2] zajmował się obliczaniem liczby liczb pierwszych $\pi(x)$ nie przekraczających x na podstawie wzoru

$$\pi(x) = \varphi(x, \pi(\sqrt{x})) + \pi(\sqrt{x}) - 1,$$

w którym $\varphi(x, m)$ oznacza liczbę liczb naturalnych $\leqslant x$ niepodzielnych przez żadną z początkowych m liczb pierwszych.

Do tego samego wzoru zapisanego nieco inaczej sprowadzają się wywody E. Stamma [1].

K. Matulewicz [1] dowiódł znanego wcześniej twierdzenia o liczbach pseudopierwszych utworzonych z dwu czynników pierwszych.

Rozprawa K. Czajkowskiego ([1], [2]- są to kolejne części tej samej rozprawy) ma charakter kompilacyjny. Nota H. Steinhausa zawiera próbę odpowiedzi na pytanie postawione w Intermédiaire der mathématiciens.

Do wydanej w Bydgoszczy w języku niemieckim rozprawy K. Wilske nie dotarłem.

*

W sposób trwały do teorii liczb weszły wyniki pracy Mertensa [2], Sierpińskiego [22], [27] bez jego nazwiska, Walfisza [5], [11], [38] i Żylińskiego [2], a ponadto do historii teorii liczb wynik pracy Sierpińskiego [1]. Nie jest to lista długa.

Prace cytowane

[1] G. Lomadse, *The scientific work of Arnold Walfisz*, Acta Arith. 10 (1964), 227–238.

[2] S. Lubelski, *Unpublished results on number theory I, Quadratic forms in a Euclidean ring.* (Edited by C. Schogt), Acta Arith. 6 (1961), 217–224.

[3] S. Lubelski, *Unpublished results on number theory II. Composition theory of binary quadratic forms* (Edited by C. Schogt), Acta Arith. 7 (1961), 9–17.

[4] F. Mertens, *O sumach Gaussa*, Prace Mat. Fiz. 8 (1897), 1–4.

[5] F. Mertens, *O przestępności liczb e i π*, Prace Mat. Fiz. 9 (1898), 28–45.

[6] F. Mertens, *Dowód, że każda funkcja liniowa o współczynnikach całkowitych zespolonych i niespółdzielnych przedstawia nieskończenie wiele liczb pierwszych.* Prace Mat. Fiz. 11 (1900), 194–222.

[7] E. P. Ożigowa, *Razwitije tieorii czisieł w Rosii*, Leningrad 1972.

[8] *Report of the Committee on Algebraic Numbers of the National Research Council*, Washington, 1923.

Bibliografia teorii liczb w Polsce za okres 1851–1950

Wykaz skrótów

AA — Acta Arithmetica
ASPM — Annales de la Société Polonaise des Mathématiques
BAU — Biuletyn Akademii Umiejętności w Krakowie (później Polskiej Akademii Umiejętności); Bulletin International de l'Académie des Sciences et des Lettres, Cracovie, classe des Sciences mathém. et nat., Série A: Sciences mathématiques
CM — Colloquium Mathematicum
JRAM — Journal für die reine und angewandte Mathematik
MA — Mathematische Annalen
MZ — Mathematische Zeitschrift
PMF — Prace Matematyczno-Fizyczne

RAU — Rozprawy Akademii Umiejętności w Krakowie, Wydział Matematyczno-przyrodniczy, Seria 2.

STNW — Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, Warszawa; Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et de Lettres de Varsovie, Classe III

WM — Wiadomości Matematyczne

Z — Zbirnik Sekcii Matematično-Prirodopisno-Lekarskoi Naukovogo Tovaristva imeni Ševčenka, Lwów. (Uwaga: W tomach Zbirnika 1–17 każda praca ma odrębną paginację. Dlatego w opisie bibliograficznym ogłoszonych tam prac podajemy w nawiasie miejsce zajmowane przez pracę w odpowiednim tomie).

Bibliografia nie obejmuje krótkich not, bez pretensji do oryginalności, ogłoszonych w dziale Miscellanea czasopisma Wektor. Nie obejmuje również prac z historii lub dydaktyki teorii liczb. Nie obejmuje wreszcie prac na tematy wchodzące tradycyjnie do kursów algebry, jak elementy teorii Galois.

Kazimierz Abramowicz (1889–1936)

[1] O pewnej podgrupie grupy automorficznej, Prace komisji matem.-przyrodniczej Towarzystwa Przyjaciół Nauk, Poznań Seria A 1 (1921), 84–100.
[2] O pewnej własności grupy automorficznej $(2, 4, 5)$, PMF 32(1922), 17–23.
[3] Transformation des fonctions automorphes, C.R. Acad. Sci. Paris 187 (1928), 801–803.
[4] O pewnej grupie automorficznej, ASPM 8 (1929), 247–256.
[5] Sur les fonctions hyperabeliennes, ibid. 9 (1931), 143–158.
[6] Sur une équation de transformation, ibid 11 (1933), 1–13.

Tadeusz Banachiewicz (1882–1954)

[1] O związku pomiędzy pewnym twierdzeniem matematyków chińskich a formą Fermata na liczby pierwsze, STNW 2 (1909), 7–11.

Antoni Baranowski (1835–1902)

[1] Über die Formeln zur Berechnung der Anzahl der eine gegebene Grenze nicht übersteigende Primzahlen, BAU (1894), 280–281.
[2] O wzorach służących do obliczania liczby liczb pierwszych nie przekraczających danej granicy, RAU 8 (1895), 192–219.

Ludwik Birkenmajer (1855–1929)

[1] O pewnym twierdzeniu z teorii liczb, PMF 7 (1896), 12–14.
[2] O związku twierdzenia Wilsona z teorią reszt kwadratowych, BAU (1917), 296–297.

Zygmunt Butlewski (1907–1980)

[1] A proof that e^m is irrational, CM 1 (1948), 197–198.

Tomasz Ciuropajłowicz = Toma Ciuropajłovič

[1] Wyznaczenie pewnej grupy reszt potęgowych itd. (po ukraińsku), Z 18–19, 107–113.
[2] O pewnym twierdzeniu algebry (po ukraińsku), ibid. 114–116.

Kazimierz Cwojdziński (1878–1948)

[1] Sposoby tworzenia równań kwadratowych o jednym parametrze zmiennym, których wyróżnik ma pierwiastki ujemne, Parametr 1 (1930), 14–18.
[2] O punktach wymiernych na krzywych rzędu drugiego, ibid. 334–338.

Karol Czajkowski (1873–1931)

[1] O mnogości liczb prostych, Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum w Buczaczu za rok szkolny 1901, 1–35.
[2] O mnogości liczb prostych, Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Gimnazjum w Przemyślu za rok szkolny 1904, 1–21.

Mikołaj Czajkowski = Mikoła Čajkovskyj (1887–1970)

[1] Równania metacykliczne i ich grupy (po ukraińsku), Z 14 (1909), 1–144 (m.1)
[2] Studia z teorii kongruencji (po ukraińsku), Z 15 (1910), 1–45 (m. 1)

Samuel Dickstein (1851–1939)

[1] Über die Kennzeichnung der Teilbarkeit, Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht 4 (1873), 404–405.
[2] Metoda wyciągania pierwiastka sześciennego, Przegląd Pedagogiczny 1882, str 122.
[3] Przyczynek do nauki o podzielności liczb, Przegląd Pedagogiczny 1883, str 31.
[4] Notatka o podzielności liczb, Muzeum 2 (1887), 227–229.
[5] Sur les principes de la théorie des nombres de Hoene-Wroński, BAU (1892), 64–65.
[6] Sur la résolution de la congruence $z^n - ay^n \equiv c(\mathrm{mod}\ M)$, BAU (1892), 372–373.
[7] Zasady teorii liczb Wrońskiego, RAU 4 (1893), 73–104.
[8] O rozwiązaniu kongruencji $z^n - ay^n \equiv 0(\mathrm{mod}\ M)$, RAU 6 (1896), 155–159.
[9] O liczbach e i π, Kosmos 20 (1895), 359–363, przedruk w: Pamiętnik VIII Zjazdu Przyrodników i Lekarzy Polskich, Lwów 1897, Sekcja Przyrodnicza, 8–14.
[10] (z B. Niewęgłowskim) Z elementarnej teorii liczb, WM 6 (1902), 252–257.

Placyd Dziwiński (1851–1936)

[1] Prawidła podzielności liczb na podstawie teorii liczb przystających, Sprawozdanie wyższej szkoły realnej we Lwowie 1886, I–XVI.

St. Guzel

[1] Dowód elementarny pewnego twierdzenia z analitycznej teorii liczb, WM 11 (1907), Dodatek: Sprawozdania Koła Matematyczno-Fizycznego w Warszawie za rok 1906/07, 111–119.
[2] O największym dzielniku nieparzystym, WM 14 (1910), 171–180.
[3] O kilku własnościach największego dzielnika nieparzystego, Wektor 2 (1912), 97–107.
[4] O wartości przybliżonej $\sqrt{N}$, Wektor 5 (1915/16), 87–89.
[5] O wyznaczaniu wartości przybliżonej $\sqrt{N}$ przy N całkowitym dodatnim, Przegląd Mat-Fiz. 2 (1924), 61–70.

Stanisław Hartman (1914–1992)

[1] Une généralisation d'un théoréme de M. Ostrowski sur la répartition des nombres mod 1, ASPM 22 (1949), 169–172.
[2] Sur une condition supplémentaire dans les approximations diophantiques, CM 2 (1949), 48–51.

Jakub Intrator

[1] Z badań nad partitio numerorum, Sprawozdania Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego 3 (1949), 137–138.

Kazimierz Jantzen (1885–1940)

[1] O rozwiązywaniu w liczbach całkowitych pewnego równania bilinearnego, Mathesis Polska 7 (1932), 145–154.

Stanisław Kępiński (1867–1908)

[1] Aus der Theorie discontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen, BAU (1892), 219.
[2] Z teorii nieciągłych grup podstawień liniowych posiadających współczynniki rzeczywiste, RAU 26 (1893), 37–66.

S. Kernbaum

[1] O szeregu Fibonacciego i jego współczynnikach, I, WM 24 (1920), 203–217, II, ibid. 25 (1921), 49–66.

Włodzimierz Lewicki = Władimir Lewyckyj (1872–1956)

[1] Grupa modułowa (po ukraińsku), Sprawozdanie Dyrekcji c.k. Akademičnoj Gimnazyi u Lvovi za rok školnyj 1895, stron 10.
[2] O przestępności liczb e i π (po ukraińsku), Z1 (1896), 1–28 (m.1).
[3] Wstęp do teorii funkcji modułowych eliptycznych, PMF 8 (1896), 5–44.
[4] Przyczynek do teorii ułamków łańcuchowych i grupy modułowej (po ukraińsku) Z4 (1899), no 2, 1–8 (m.1).
[4a] Beitrag zur Theorie der Modulgruppe, Mh. Math. Phys. 11 (1900), 118–124 (wersja niemiecka [4]).
[4b] Z teoryi ułamków ciągłych, WM 6 (1900), 52–58 (wersja polska).
[5] Funkcje modułowe eliptyczne (po ukraińsku), Zapyski Naukovogo Tovaristva imeni Ševčenka 7 (1902), 1–28 (m.3).
[6] Krótki zarys teorii funkcji automorficznych (po ukraińsku), Z 7 (1902), no 1, 1–29 (m.1).
[7] Przyczynek do teorii ułamków łańcuchowych i grupy modułowej II (po ukraińsku), Z 7 (1902), no 2, 1–8 (m.5).
[7a] Beitrag zur Theorie der Modulgruppe II, Mh. Math. Phys. 14 (1903), 96–104 (wersja niemiecka [7]).
[8] O miejscach zerowych funkcji $\zeta(s)$, WM 8 (1904), 59–62.
[8a] O miejscach zerowych funkcji $\zeta(s)$ (po ukraińsku), Z10 (1905), 1–3 (m.3).
[9] Pewne typy funkcji należących do grup Fuchsa (po ukraińsku) Z 18–19, 103–105.

Salomon Lubelski (1902–1941)

[1] Über die Teiler der Form $x^2 + Dy^2$, Comptes-Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens de Pays Slaves 1930, 233–243.
[2] Über Kongruenzen mit Idealmoduln, Comptes-Rendus du Premier Congrés des Mathématiciens de Pays Slaves 1930, 246–253.
[3] Zur Theorie der höheren Kongruenzen, IRAM 162 (1930), 65–68.
[4] Über die Teiler der Form $x^2 + Dy^2$, PMF 38 (1931), 41–61.
[5] Beweis und Verallgemeinerung eines Waring–Legendreschen Satzes, MZ 33 (1931), 312–349.
[6] Zadania i twierdzenia z ogólnej teorii liczb, I, WM 34 (1932), 1–111, II, ibidem 35 (1933), 39–113.
[7] Über die Teiler der Form $x^2 + Dy^2$, II, PMF 40 (1932), 69–95.
[8] Studien über den grossen Fermatschen Satz, PMF 42 (1935), 11–44.
[9] Lösung eines Tartakovskischen Problems, PMF 42 (1935), 55–57.
[10] Zur Reduzibilität von Polynomen in der Kongruenztheorie, I, AA 1 (1936), 169–183 oraz PMF 43 (1936), 207–221.
[11] Zur Gaussschen Kompositionstheorie der binären quadratischen Formen, JRAM 176 (1936), 56–60.

[12] Über Klassenzahlrerationen quadratischer Formen in quadratischen Körpern, JRAM 174 (1936), 160–184.
[13] Algorytm Euklidesa, WM 42 (1937), 5–67.
[14] Zur Reduzibilität von Polynomen in der Kongruenztheorie, II, AA 2 (1937), 242–264.
[15] Zur Verallgemeinerung des Galoisschen Kriteriums der algebraischen Auflösbarkeit, AA 3 (1938), 123–131.
[16] Zur Arithmetisierung des Beweises des Minkowskischen Diskriminanten und Kronecker-Weberschen Einbettungssatzes, AA 3 (1939), 235–254.
[17] Zur Erweiterung des Legendreschen Satzes auf algebraische Zahlkörper, Mathematica 15 (1939), 125–134.

Aleksander Łaparewicz (1864–1938)

[1] Zastosowanie form kwadratowych dwójkowych do rozkładu liczb na czynniki pierwsze, PMF 16 (1905), 45–70.
[2] Cecha podzielności Lucasa, WM 11 (1907), 247–256.
[3] Tabelka do pośpiesznego rozkładu liczb na czynniki pierwsze, WM 11 (1907), 257–263 (recenzja).

Antoni Łomnicki (1881–1941)

[1] O wzorach Steina i Sierpińskiego podających rozwiązania pierwiastków kwadratowych na iloczyny nieskończone, Sprawozdania Towarzystwa Naukowego, Lwów 6 (1926), 143–145.

Szolem Mandelbrojt (1899–1983)

[1] Sposób tworzenia liczb pierwszych, Wektor 6 (1917/18), 215–222 (w nagłówku pracy nazwisko autora Mandelbrot).

Konstanty Matulewicz (1894–1983)

[1] Sur les nombres composés satisfaisant à la congruence $2^n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ n)$, ASPM 22 (1949), 291–292.

Franciszek Karol Józef Mertens (1840–1929)

[1] Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, JRAM 77 (1874), 289–338.
[2] Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, JRAM 78 (1874), 46–62.
[3] Zur Lehre von den quadratischen Formen mit positiven Determinanten, JRAM 89 (1880), 332–338.

Jerzy Mihułowicz (1877–1950)

[1] O kątach, których funkcje trygonometryczne są liczbami wymiernymi, Przegląd Mat–Fiz. 3 (1925), 35–40.

Roman Niewiadomski (1863–1944)

[1] Spostrzeżenia nad liczbami szeregu Fibonacci'ego, WM 15 (1911), 225–233.
[2] Badanie nad uogólnionym szeregiem Fibonacci'ego, WM 15 (1911), 235–252.
[3] Nowyj mietod rozłożenija czisieł na pierwonaczalnyje mnożitieli, Moskwa 1912.
[3a] Nowa metoda rozkładu liczb na czynniki pierwsze, Wektor 3 (1913), 193–205.
[4] Calcul d'un terme de la serie de Fibonacci, Intérmédiaire des math. 20 (1913), 53–54.
[5] Sur la série de Lamé, Intérmédiaire des math. 20 (1913), 54–56.
[6] Questions 4160–4164, 4180, 4181, 4194, 4202, 4205. Intérmédiaire des math. 20 (1913), 4–6, 50–51, 76, 78, 98–100.

[6a] Développement d' un polynôme, Intérmédiaire des math. 20 (1913), 111–112.
[7] Przyczynek do analizy liczb wielokątnych, WM 17 (1913), 91–98.
[8] Zur Fermatschen Vermutung, PMF 42 (1935), 1–10.
[9] Rozwiązanie równania nieoznaczonego $x^4+y^4+z^4=2A^2$, WM 39 (1935), 127–133.
[10] O bezwzględnej wielkości i wzajemnym stosunku liczb całkowitych, mogących rozwiązać równanie $x^p+y^p=z^p$, WM 44 (1938), 113–127.
[11] Podzielność trójmianów i dwumianów potęgowych ze współczynnikami przy potęgach, WM 46 (1939), 103–116.

Maria Nosarzewska (1918–)

[1] Evaluation de la difference entre l'aire d'une région plane convexe et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle, CM 1 (1948), 305–311.

Edward Poznański (1855–1905)

[1] Pierwiastki pierwotne liczb pierwszych. Ustęp z teorii liczb. Warszawa 1901, stron 63.

M. Rottenberg

[1] Sposób łatwego wyznaczania dzielników liczby danej, WM 27 (1923), 59–62.

E. Rubinstein

[1] Uogólnione równanie Pella, WM 43 (1937), 169–182.

Juliusz Rudnicki (1881–1948)

[1] O pewnej własności arytmetycznej ciągu iteracji potęgowania, Mathesis Polska, 2 (1927), 73–83.

Stanisław Ruziewicz (1889–1941)

[1] O rozwiązaniach równania $m^n=n^m$, Przegląd Mat-Fiz. 1 (1923), 3–5.
[2] Elementarny dowód istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych w niektórych postępach arytmetycznych, ibid. 3 (1925), 148–151.
[3] Z zagadnień matematyki III. Co wiemy a czego nie wiemy o liczbach całkowitych, Kosmos 53 (1928), no 2, 231–242.
[4] Wybrane działy z Teorii Liczb (skrypt), Lwów 1929, stron 64.
[5] Sur une démonstration du théoréme de M. Borel concernant les probabilités dénombrables, PMF 42 (1934), 45–48.

Stanisław Ruziewicz i Eustachy Żyliński

[1] Wstęp do matematyki I Elementy algebry i teorii liczb, Lwów 1927, stron VII+239.

E. Sanczer

[1] Nowy sposób rozwiązywania równań nieoznaczonych pierwszego stopnia, Kraków 1887, stron 15.

Wacław Franciszek Sierpiński (1882–1969)

[1] O pewnym zagadnieniu z rachunku funkcji asymptotycznych, PMF 17 (1906), 77–118.
[2] Sur le développement de l'expression $\sqrt[n]{a}$ en un produit infini, BAU (1907), 1052–1057.
[3] O sumowaniu szeregu $\sum_{n>a}^{n\leqslant b}\tau(n)f(n)$, gdzie $\tau(n)$ oznacza liczbę rozkładów liczby n na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych, PMF 18 (1908), 1–59.

[4] Uogólnienie pewnego wzoru Sterna, STNW 1 (1908), 136–140.
[5] O wartościach średnich kilku funkcji liczbowych, STNW 1 (1908), 115–122.
[6] O pewnym przypadku błędnego stosowania zasady mnożenia prawdopodobieństw, WM 11 (1909), 77–80.
[7] Wzór analityczny na pewną funkcję liczbową, WM 11 (1908), 225–231.
[8] O rozkładach liczb całkowitych na różnicę dwóch kwadratów, WM 11 (1908), Dodatek: Sprawozdania z posiedzeń Koła Matematyczno-Fizycznego w Warszawie za rok 1906/07, 89–110.
[9] O wymiernych punktach koła, WM 12 (1908), Dodatek: Sprawozdania z posiedzeń Koła Matematyczno-Fizycznego w Warszawie za rok 1907/08, 47–54.
[10] Dowód elementarny pewnego wzoru z analizy, WM 12 (1908), Dodatek: Sprawozdania z posiedzeń Koła Matematyczno-Fizycznego w Warszawie za rok 1907/08, 71–75.
[11] Teoria liczb (skrypt), Lwów 1908, stron 549.
[12] Un théoréme sur les nombres irrationnels, BAU (1909), 725–727.
[13] O systematycznych rozwinięciach liczb na iloczyny nieskończone, PMF 20 (1909), 215–234, Uwaga, ibid. 21, 197–198.
[14] Pewne twierdzenie o liczbach niewymiernych, RAU 49 A (1909), 433–444 (poszerzona wersja polska [12]).
[15] O pewnej sumie potrójnej, STNW 2 (1909), 117–120.
[16] O systematycznych rozwinięciach liczby na iloczyny nieskończone, STNW 2 (1909), 207–209.
[17] O zależnościach między zasadniczymi własnościami symbolu Legendre'a, STNW 2 (1909), 260–272.
[18] O pewnej własności charakterystycznej liczb niewymiernych, STNW 2 (1909), 275–276.
[19] O pewnym twierdzeniu z teorii przybliżeń wymiernych, STNW 2 (1909), 331–334.
[20] O pewnej własności charakterystycznej liczb niewymiernych, STNW 2 (1909), 358–359.
[21] O wyrażaniu liczb za pomocą cyfr przy dowolnej zasadzie numeracji, WM 13 (1909), Dodatek: Sprawozdania z posiedzeń Koła Matematyczno-Fizycznego w Warszawie za rok 1909, 55–58.
[22] Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme, BAU (1910), 9–11.
[23] O pewnej własności charakterystycznej liczb wymiernych, PMF 21 (1910), 1–6 (poszerzona wersja [18]).
[24] Zagadnienia i metody analitycznej teorii liczb, WM 14 (1910), 123–138.
[25] O wartości asymptotycznej pewnej sumy, RAU 50 (1910), 1–10 (poszerzona wersja polska [22]).
[26] Sur un algorithme pour développer les nombres réels en séries rapidement convergentes, BAU (1911), 113–117.
[27] O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi, STNW 4 (1911), 56–77.
[28] O twierdzeniu Waringa, Wektor 3 (1913), 132–133.
[29] Teoria liczb, I wyd. Warszawa 1914, stron XIV + 412, II wyd. Warszawa 1925, stron XII + 410, III wyd. Warszawa–Wrocław 1950, stron VI + 544.
[30] Teoria liczb, Poradnik dla samouków, Wydanie nowe, Tom I Matematyka, Warszawa 1915, 178–190.
[31] Démonstration élémentaire d'un théoréme de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre, Bull. Soc. Math. France 45 (1917), 125–132.

[32] Sur une conséquence du petit théorème de Fermat, BAU (1920), 103–104.
[33] Dowód twierdzenia, że każda liczba całkowita jest sumą sześciu sześcianów liczb całkowitych, Przegląd Mat-Fiz. 1 (1923), 105.
[34] Wstęp do teorii liczb, Lwów-Warszawa 1933, stron 72.
[35] Remarque sur une hypothèse de Chinois concernant les nombres $(2^n - 2)/n$, CM 1 (1947), 9.
[36] Remarque sur la répartition des nombres premiers, CM 1 (1948), 193–194.
[37] Remarques sur la décomposition des nombres en sommes des carrés de nombres impairs, CM 2 (1949), 52–53.
[38] Contributions à l'étude des restes cubiques, ASPM 22 (1949), 269–272.
[39] Sur les puissances du nombre 2, ASPM 23 (1950), 246–251.
[40] Sur la périodicité mod m de certaines suites infinies d'entiers, ASPM 23 (1950), 252–258.
[41] Un théorème sur les nombres premiers, Matematiche (Catania) 5 (1950), 66–67. Rectification ibid. (1951), 138.
[42] O pewnym zagadnieniu Fermata, Matematyka (Wrocław) 3 (1950) no 1, 1–4.
[43] Jeszcze o zadaniu nr 20, Matematyka 3 (1950) no 1, 51.
[44] O pewnych zagadnieniach teorii liczb, Matematyka 3 (1950), no 3, 12–20.

Władysław Smosarski (1876–1960)

[1] Teoria reszt w oświetleniu teorii grup, WM 15 (1911), Dodatek: Sprawozdania z posiedzeń Koła Matematyczno-Fizycznego w Warszawie za rok 1909, 105–115.

E. Snopek

[1] O kongruencji $x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n \equiv 0 \pmod{p}$, PMF 4 (1893), 63–70.

Anna Stamirowska

[1] O pewnym twierdzeniu Ernesto Cesaro, WM 44 (1938), 129–132.

Edward Stamm (1886–1940)

[1] Cribro de Eratostenes, WM 29 (1926), 87–90.

Hugo Steinhaus (1887–1972)

[1] Déterminer la plus petite valeur d'un nombre λ tel que $\lambda N + 1$ soit premier, Intermédiaire des math. 20 (1913), 139–140.
[2] Sur les fonctions independentes. VI, Équirepartition, Studia Math. 9 (1940), 121–132.
[3] Sur un théorème de M. V. Jarnik, CM 1 (1947), 1–5.

Mikołaj Trynkowski

[1] O równaniach dzielczych funkcji eliptycznych, Warszawa 1900, stron IX + 157.

Stanisław Turski (1906–1986)

[1] Sur la décomposition de nombres entiers en sommes de carrés de nombres impairs, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2 (1933), 70–71.
[2] Eine Bemerkurg zur additiven Zahlentheorie, ASPM 15 (1936), 165–167.

Arnold Walfisz (1892–1962)

[1] (z E. Landauem), Über die Nichtfortsetzbarkeit einiger durch Dirichletsche Reihen definierter Funktionen, Rend. Circ. Mat. Palermo 44 (1920), 82–86.

[2] Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1922, stron 56.
[3] (z J. E. Littlewoodem) The lattice points of a circle, Proc. Roy. Soc. A 106 (1924), 478–488.
[4] Zur Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse 1924, 155–158.
[5] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, MZ 19 (1924), 300–307.
[6] Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern, MZ 22 (1925), 153–188.
[7] Über zwei Gitterpunktprobleme, MA 95 (1925), 69–83.
[8] O najnowszych pracach w dziedzinie teorii liczb, WM 29 (1925), 47–71.
[9] Über die Idealfunktion quadratischer Zahlkörper, PMF 34 (1925–1926), 35–47.
[10] Teilerprobleme, MZ 26 (1927), 66–88.
[11] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, II, MZ 26 (1927), 106–124.
[12] (z G. Szegö) Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern, I, MZ 26 (1927), 138–156.
[13] (z G. Szegö) Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern, II, MZ 26 (1927), 467–486.
[14] Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern, II, MZ 26 (1927), 487–494.
[15] Beiträge zur Theorie der Dedekindschen Zetafunktion, I Abschätzung von $\zeta(1+it)$, MA 97 (1927), 624–634.
[16] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, III, MZ 17 (1927), 245–268.
[17] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, MZ 27 (1927), 469–480.
[18] O pewnym zagadnieniu dzielników Ramanujana, PMF 35 (1927–1928), 101–126.
[19] Über einige neuere Ergebnisse der Gitterpunktlehre, PMF 36 (1928–1929), 107–135.
[19a] O některých novějších výsledcich z teorie mřižových bodu, Časopis Pěst. Mat. Fys, 59 (1929), 200–223 (przekład czeski [19]).
[20] Zur elementaren Zahlentheorie, Abh. Math. Sem. Hamburg 7 (1929), 132–133, Berichtigung ibid. 8 (1931), 348–350.
[21] (z V. Jarnikiem) Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, MZ 32 (1930), 152–160.
[22] Ein metrischer Satz über Diophantische Approximationen, Fund. Math. 16 (1930), 361–385.
[23] Referat o "Odczytach z Teorii Liczb" E. Landaua, WM 32 (1931), 1–58.
[24] Über einige trigonometrische Summen, MZ 33 (1931), 564–601.
[25] Teilerprobleme, II MZ 34 (1931), 448–472.
[26] Über eine trigonometrische Summe, Journ. London Math. Soc. 6 (1931), 169–172.
[27] Zur Theorie der diophantischen Näherungen, STNW 24 (1931), 115–121.
[28] (z S. Chowlą) On a trigonometric sum, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 34 (1932), 401–413.
[29] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, IV, MZ 35 (1932), 212–229.
[30] Über einige trigonometrische Summen, II, MZ 35 (1932), 212–229.
[31] Wertevorrat der Dedekindschen Zetafunktion um $\sigma = 1$, Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 42 (1932), 62–68.
[32] Über die Koeffizienten einiger Modulformen, PMF 40 (1933), 149–155.
[33] Über die Koeffizientensummen einiger Modulformen, MA 108 (1933), 75–90.
[34] Teilerprobleme, III, JRAM 169 (1933), 111–130.
[35] (z S. Chowlą) Über eine Riemannsche Identität, AA 1 (1935), 87–112.
[36] Zur additiven Zahlentheorie, AA 1 (1935), 123–160.

[37] Über einige Dirichletsche Reihen, die meromorphen Funktionen darstellen, MZ 39 (1935), 649–659.
[38] Zur additiven Zahlentheorie, II, MZ 40 (1935), 592–607.
[39] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, V, AA 1 (1936), 222–283, oraz PMF 44 (1937), 187–248.
[40] Teilerprobleme, IV, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Serie 2, 5 (1936), 289–298.
[41] Teilerprobleme, V, AA 2 (1936), 80–133 oraz PMF 45 (1937), 127–180.
[42] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, VI, Časopis Pěst. Mat. Fys. 66 (1936), 1–19.

Władysław Edward Wierzbicki

[1] O liczbach Andrego i ich związku z liczbami Bernoulliego i Eulera, Lwów, stron 16.

Witold Wilkosz (1891–1941)

[1] Elementy teorii liczb, Biblioteka Kółka Mat. Fiz. Uczniów U. J. Nr 8, Kraków 1937, stron 70.

K. Wilske

[1] Zur Kreisteilung, Bromberg 1899, stron 25.

Romuald Witwiński (1890–1937)

[1] O warunku arytmetycznym podzielności wielomianów, Nauczanie matematyki i fizyki 1 (1917) no 1, 3–10.
[2] Warunek arytmetyczny podzielności wielomianów, Przegląd Mat.-Fiz. 2 (1924), 30–36.

Zygmunt Zalcwasser (1898–1943)

[1] Sur les polynômes associés aux fonctions modulaires, Studia Math. 7 (1938), 16–35.

Kazimierz Zarankiewicz (1902–1959)

[1] O liczbach trójkątowych, Matematyka 2 (1949), no 4, 1–7, no 5, 1–8.

Eustachy Żyliński (1890–1954)

[1] Ob obłasti racionalnych p-adiczeskich czisieł. Uniwersitietskija Izwiestia 54 (1914), No 6. Dodatek: Otczet i protokoły fiziko-matematiczeskogo obszczestwa pri Impieratorskom Uniwiersitietie sw. Władimira za 1913 god, 49–57.
[2] Zur Theorie der ausserwesentlichen Diskriminantenteiler algebraischer Körper, MA 73 (1913), 273–274.
[3] Über einen Satz der Theorie der algebraischen Zahlen, BAU (1929), 89–91.
[4] Zur Begründung der Idealtheorie, STNW 24 (1932), 87–92.