ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXX (1993)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ROMAN MURAWSKI (Poznań, Oxford) *

# Rozwój programu Hilberta

Celem tego artykułu jest przedstawienie rozwoju programu Hilberta od pierwszych jego sformułowań na początku tego wieku, poprzez wyniki Gödla o niezupełności (1931) i ich wzmocnienia (koniec lat siedemdziesiątych), aż po powstałe pod ich wpływem uogólniony i zrelatywizowany program Hilberta. Wskażemy też jak wyniki tzw. matematyki odwrotnej przyczyniły się do pokazania, że oryginalny program Hilberta może być częściowo zrealizowany.

**1. Program Hilberta.** Matematyka przełomu XIX i XX wieku charakteryzuje się z jednej strony ogromnym rozwojem, pojawieniem się wielu nowych dyscyplin, wielu ważnych i znaczących wyników — a z drugiej kryzysem swych podstaw. Kryzys ten — zwany w literaturze drugim dla odróżnienia od pierwszego, który miał miejsce w starożytności i związany był głównie z odkryciem niewspółmierności — wiązał się z problemem statusu i roli obiektów abstrakcyjnych. Teoria mnogości stworzona przez Georga Cantora (1845–1918) w ostatniej ćwierci XIX wieku wydawała się otwierać bramy raju dla matematyki i jej podstaw, dając matematyczną teorię zbiorów nieskończonych i wyjaśniając problemy związane z nieskończonością aktualną. Niestety idylla ta została wkrótce zakłócona przez wykrycie antynomii w systemie Cantora. Pewne z nich znał już sam Cantor — na przykład antynomię zbioru wszystkich liczb porządkowych czy antynomię zbioru wszystkich zbiorów. Potrafił je jednak wyeliminować wprowadzając rozróżnienie pomiędzy klasami a zbiorami (por. [38]). Nowe trudności pojawiły się jednak przy okazji podjętej przez Gottloba Fregego (1848–1925) próby redukcji matematyki do logiki. Otóż Bertrand Russell (1872–1970) studiując dzieło Fregego *Grundgesetze der Arithmetik* odkrył, że system logiki, do którego ten ostatni redukuje arytmetykę liczb naturalnych, jest sprzeczny

* Pracę tę napisałem w czasie pobytu w Mathematical Institute w Oxfordzie, gdzie przebywałem jako stypendysta Oxford Hospitality Scheme i jednocześnie gość Merton College. Chciałbym wyrazić wdzięczność wszystkim tym instytucjom. Dziękuję też Fundacji im. Stefana Batorego za grant, który umożliwił mi podróż do Oxfordu.

— można w nim bowiem zbudować antynomię klas niezwrotnych (nazywaną dzisiaj antynomią Russella). To oznaczało rzeczywisty kryzys w podstawach matematyki (podkreślmy: w podstawach matematyki, a nie w samej matematyce, poszczególne jej działy rozwijały się bowiem dalej w sposób raczej niezakłócony).

Podjęto oczywiście rozmaite próby zaradzenia trudnościom proponując różne rozwiązania. Z jednej strony podważano zasadność rozumowań operujących nieskończonością aktualną widząc w tej ostatniej źródło antynomii. W konsekwencji proponowano ograniczenie metod matematyki do bezpiecznych i dobrze ugruntowanych metod skończonych. I tak na przykład Leopold Kronecker (1823–1891) sugerował ograniczenie matematyki do liczb naturalnych (jego poglądy bardzo dobrze streszcza często przytaczane zdanie wypowiedziane przez niego na jednym z zebrań naukowych w Berlinie w roku 1886: *Liczby naturalne stworzył Pan Bóg, wszystko inne jest dziełem ludzkim* (Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk)). Henri Poincaré (1854–1912) dopatrywał się źródła antynomii w niepredykatywności matematyki [1] i żądał ograniczenia się tylko do metod predykatywnych. Jeszcze dalej szły propozycje Luitzena E. J. Brouwera (1881–1966), twórcy intuicjonizmu. Zaproponował on mianowicie pewien radykalny program przebudowy matematyki zmierzający do oparcia jej na pierwotnej intuicji liczby naturalnej. Matematyka to według Brouwera wolna życiowa aktywność umysłu, która może (i powinna) być rozwijana niezależnie od jakiegokolwiek języka. Głosząc ontologiczną zasadę konceptualizmu odrzucał on platonizm Cantora proponując ograniczenie się tylko do metod konstruktywnych i eliminując z matematyki wszelkie dowody niekonstruktywne twierdzeń egzystencjalnych. Te ostatnie bowiem są według niego źródłem antynomii. Konceptualizm Brouwera implikował też odrzucenie nieskończoności nieprzeliczalnej i ograniczenie się tylko do zbiorów przeliczalnych.

Wszystkie te próby zaradzenia trudnościom miały jedną cechę wspólną. Otóż wszystkie one sprowadzały się do rezygnacji z pewnych działów i metod matematyki (zwłaszcza tych operujących nieskończonością aktualną) i prowadziły w konsekwencji do zubożenia matematyki. David Hilbert (1862–1943) był temu zdecydowanie przeciwny. Pisał: *To co robią Weyl i Brouwer to nic innego jak pójście w ślady Kroneckera! Próbują oni uratować matematykę wyrzucając z niej wszystko, co sprawia kłopot... Jeżeli zgodzimy się na*

[1] Definicje niepredykatywne to definicje, w których definiuje się pewien obiekt N przez odwołanie się do pewnego ogółu obiektów E (na przykład za pomocą kwantyfikacji względem E), którego N jest jednym z elementów. Przykładem definicji niepredykatywnej może być definicja następująca: zbiór liczb naturalnych N jest to najmniejszy zbiór zawierający liczbę 0 i zamknięty ze względu na operację następnika. Definiujemy tu bowiem nieznany obiekt N przez odwołanie się do ogółu obiektów, do którego to ogółu obiekt definiowany należy jako element.

*takie propozycje, to ryzykujemy utratę wielu największych naszych skarbów* (por. [45], s. 155). Na innym zaś miejscu z mocą podkreślał: *Z raju, który stworzył nam Cantor, nikt nie powinien móc nas wypędzić* (Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können) (por. [28]).

Hilbert nie ograniczył się oczywiście tylko do protestu przeciw próbom ratowania matematyki przez jej ograniczanie. Zaproponował też pewien program ugruntowania matematyki klasycznej operującej nieskończonością aktualną — program ten nazywa się dziś *programem Hilberta.* Stał on się podstawą nowego kierunku w filozofii matematyki, mianowicie formalizmu (który obok logicyzmu Fregego i Russella oraz intuicjonizmu Brouwera jest jednym z głównych współczesnych kierunków filozofii matematyki [2]).

Pierwszą wzmiankę o tym, co nazywamy programem Hilberta, znajdujemy w wykładzie, jaki wygłosił on na II Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu w 1900 roku. Wśród dwudziestu trzech najważniejszych problemów, które wymagają rozwiązania, wymienił tam pod numerem 2 problem wykazania niesprzeczności aksjomatów arytmetyki (rozumiejąc pod tym terminem teorię liczb i analizę) (por. [27]). Następnie wielokrotnie wracał do sprawy ugruntowania matematyki w swych wykładach i artykułach (zwłaszcza w latach dwudziestych) proponując jednocześnie metodę realizacji tego zadania. Wspomnieć tu trzeba przede wszystkim o jego wykładzie z roku 1901, wygłoszonym na zebraniu Getyngeńskiego Towarzystwa Matematycznego, w którym mówił o problemie zupełności i rozstrzygalności. E. Husserl relacjonuje główny problem postawiony wtedy przez Hilberta tak: *Czy mam prawo powiedzieć, w oparciu o aksjomaty dla liczb naturalnych, że każde zdanie mówiące o tych liczbach jest albo prawdziwe, albo fałszywe?* (por. [32]). W serii wykładów w latach dwudziestych Hilbert dalej precyzował problemy, a jednocześnie relacjonował częściowe wyniki uzyskane przez siebie i swoich uczniów (P. Bernaysa, W. Ackermanna, M. Schönfinkela, J. von Neumanna). Wymienić tu trzeba wykłady w Zurychu (1917), Hamburgu (1922), Lipsku (1922), Monastyrze (Münster) (1925) (por. [28]), drugi wykład w Hamburgu (1927) (por. [29]) i w końcu wykład *Problems der Grundlegung der Mathematik* wygłoszony na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Bolonii (1928) (por. [30]). W tym ostatnim wykładzie wyliczył cztery główne problemy wymagające rozwiązania i związane z kwestią ugruntowania matematyki klasycznej: 1. znalezienie finitystycznego dowodu niesprzeczności analizy, 2. rozszerzenie tego dowodu na rachunki funkcyjne wyższych rzędów, 3. dowód zupełności systemu aksjomatów dla teorii liczb i analizy, 4. dowód pełności systemu reguł logicznych (czyli logiki pierwszego rzędu).

[2] Czytelnika zainteresowanego problemami i kierunkami filozofii matematyki odsyłamy do świetnej pracy T. Batoga [4] oraz do książek R. Murawskiego [40] i [42].

Dodać tu należy, że Hilbert przywiązywał wielką wagę i znaczenie do problemu ugruntowania matematyki klasycznej i że cała sprawa przekraczała według niego ramy samej tylko matematyki. W [28] pisał: *Definitywne wyjaśnienie natury nieskończoności stało się koniecznością nie tylko ze względu na specjalne znaczenie tej kwestii dla tej czy innej nauki, ale także dla uczczenia samego umysłu ludzkiego.*

Program Hilberta opierał się na założeniach kantowskich (por. [13]). Idąc za Kantem twierdził Hilbert, że nieskończoność matematyczna jest ideą czystego rozumu, tzn. jest pojęciem wewnętrznie niesprzecznym, któremu jednak w rzeczywistości zmysłowo poznawalnej nie odpowiada nic. Z drugiej strony pisał: ([28], s. 170–171; przekład polski tej pracy znaleźć można w [40], s. 288–307).

> *Już Kant uczył, że matematyka rozporządza treścią zabezpieczoną niezależnie od wszelkiej logiki i dlatego nigdy nie może być uzasadniona przez samą logikę; z tego właśnie powodu wysiłki Fregego i Dedekinda musiały spełznąć na niczym. Coś musi już być dane w przedstawieniu jako warunek wstępny dla stosowania wnioskowań i wykonywania operacji logicznych: są to mianowicie pewne pozalogiczne konkretne przedmioty, które tam występują poglądowo, jako bezpośrednie przeżycia, przed wszelkim myśleniem. Jeżeli myślenie logiczne ma być pewne, to przedmioty te muszą się dawać całkowicie ogarnąć jednym spojrzeniem we wszystkich ich częściach; a to, że następują jedynie po drugich lub są zestawione jedne obok drugich, jest bezpośrednio poglądowo dane wraz z samymi tymi przedmiotami jako coś, co ani nie da się zredukować do czego innego, ani nie potrzebuje takiej redukcji. Takie jest podstawowe stanowisko filozoficzne, które uważam za potrzebne dla matematyki i w ogóle dla całego naukowego myślenia, rozumienia i porozumiewania się.*

Zgodnie z tym Hilbert wyraźnie rozróżnił finitystyczną część matematyki nie wymagającą żadnych uzasadnień i część infinitystyczną, która potrzebuje ugruntowania. W matematyce finitystycznej mamy do czynienia z tzw. zdaniami *realnymi*, które są w pełni sensowne, bo odwołują się tylko do konkretnych obiektów. Matematyka infinitystyczna operuje tzw. zdaniami *idealnymi* odwołującymi się do wielkości nieskończonych. Hilbert był przekonany, że każde prawdziwe zdanie realne ma dowód finitystyczny. Obiekty i metody infinitystyczne grają tylko pomocniczą rolę. Pozwalają one na budowanie prostszych, krótszych i bardziej eleganckich dowodów — ale każdy taki dowód można zastąpić dowodem finitystycznym. Był też przekonany, że niesprzeczność implikuje istnienie i że każdy dowód istnienia nie podający konstrukcji postulowanych obiektów jest w istocie zapowiedzią takiej konstrukcji.

W żadnej z prac Hilberta nie znajdziemy niestety precyzyjnej definicji pojęcia "finitystyczny". Mamy tam jedynie pewne sugestie, jak on je rozumiał. Stąd różne interpretacje tego kluczowego terminu. Zazwyczaj przyjmuje się, że rozumowanie finitystyczne to rozumowanie pierwotnie rekurencyjne w sensie Skolema, czyli dające się sformalizować w arytmetyce pierwotnie rekurencyjnej PRA [3]. Ale znaleźć można i inne interpretacje. I tak na przykład M. Detlefsen sugeruje, by nawet pewne warianty $\omega$-reguły uznać za finitystyczne (por. [11]), zaś C. Smoryński proponuje, by zamiast dychotomicznego podziału realny/idealny rozważać trychotomię *real/finitary general/ideal* (por. [53]). D. Prawitz (por. [44]) twierdzi, że za zdania realne uznać należy równania pomiędzy liczbami, ich kombinacje boole'owskie (czyli kombinacje otrzymane za pomocą spójników zdaniowych) oraz zdania postaci $\forall x \varphi(x)$, gdzie formuła $\varphi$ jest taka, iż każdy poszczególny przypadek $\varphi(t)$ jest rozstrzygalny. Wszystkie pozostałe zdania zaliczyć należy do idealnych.

Aby ugruntować matematykę infinitystyczną, należało się oprzeć na bezpiecznych i pewnych metodach finitystycznych. Hilbert zaproponował, by uczynić to za pomocą stworzonej przez niego *teorii dowodu* (Beweistheorie). Była to nowa dziedzina, której przedmiotem badań miały być właśnie dowody matematyczne, przy czym obiekty te należało badać metodami matematycznymi. W odniesieniu do głównego problemu należało wykazać, że dowody, w których stosuje się elementy idealne w celu udowodnienia zdań realnych, zawsze prowadzą do poprawnych wyników. Można tu wyróżnić dwa aspekty, a mianowicie problem wykazania *zachowawczości* i problem dowodu *niesprzeczności*. Pierwszy z nich polega na pokazaniu, że każde zdanie realne, które można udowodnić w matematyce infinitystycznej (a więc używając nieskończoności aktualnej), może być w istocie dowiedzione w matematyce finitystycznej, czyli że — jak mówią logicy — matematyka infinitystyczna jest zachowawczym rozszerzeniem matematyki finitystycznej względem zdań realnych. Więcej: należało pokazać, że istnieje finitystyczna metoda transformacji (tłumaczenia) infinitystycznych dowodów zdań realnych na ich dowody finitystyczne. Drugi zaś aspekt, czyli problem niesprzeczności, polegał na wykazaniu (za pomocą środków finitystycznych rzecz jasna), że cała matematyka infinitystyczna (a więc cała matematyka klasyczna) jest niesprzeczna.

Oba te problemy są zresztą — jak to wykazał G. Kreisel — ściśle z sobą powiązane (por. na przykład [50]). Otóż można pokazać, że jeśli $\varphi$ jest $\Pi^0_1$ zdaniem, czyli zdaniem postaci $\forall x \varphi(x)$, gdzie $\varphi$ zawiera formuły atomowe, spójniki i ewentualnie kwantyfikatory ograniczone, oraz $T \vdash \varphi$ (gdzie $T$ jest teorią infinitystyczną), to $S + \mathrm{Con}_T \vdash \varphi$ (gdzie $S$ jest teorią finitystyczną, zaś

[3] Poniżej, w części 4 opiszemy dokładniej ten system.

$\mathrm{Con}_T$ jest zdaniem mówiącym, że teoria $T$ jest niesprzeczna). Jeśli więc teraz utożsamimy zdania realne ze zdaniami klasy $\Pi_1^0$ (por. propozycję Prawitza), to rozwiązanie problemu niesprzeczności daje też rozwiązanie problemu zachowawczości. Istotnie, jeśli bowiem potrafimy udowodnić za pomocą środków finitystycznych (czyli w teorii $S$), że matematyka infinitystyczna (czyli $T$) jest niesprzeczna, to wtedy wiemy, że każde zdanie realne dowodliwe za pomocą metod infinitystycznych (tzn. w $T$) może być też dowiedzione metodami finitystycznymi (czyli w $S$).

W ten sposób zadanie ugruntowania matematyki klasycznej zostało sprowadzone do rozwiązania za pomocą metod finitystycznych problemu niesprzeczności i problemu zachowawczości. Jak to jednak zrobić? Otóż, aby móc sensownie badać dowody matematyczne, należy przede wszystkim dokładnie wiedzieć, co to jest dowód w matematyce. Choć matematycy są na ogół zgodni co do tego, czy dane rozumowanie stanowi dowód danego twierdzenia, czy nie, to jednak samo pojęcie dowodu jest niejasne i nieprecyzyjne. Podjęte przez G. Fregego i B. Russella (z wykorzystaniem prac G. Peano) próby ugruntowania matematyki na bazie systemów sformalizowanych opartych na rachunku predykatów pierwszego rzędu pozwoliły nadać słowu „dowód" ścisłe znaczenie. Wykorzystując te osiągnięcia Hilbert zaproponował przede wszystkim formalizację matematyki, tzn. rekonstrukcję matematyki infinitystycznej jako dużego systemu sformalizowanego (zawierającego takie podstawowe działy jak logika klasyczna, teoria mnogości, arytmetyka liczb naturalnych, analiza). Zabieg ten pozwalał na traktowanie twierdzeń jako formuł, a więc skończonych ciągów napisów, czyli obiektów konkretnych. Dowody stawały się przy takiej rekonstrukcji skończonymi ciągami formuł zbudowanymi według z góry określonych jasnych reguł (odwołujących się tylko do kształtu napisów, a nie do ich treści, sensu czy znaczenia). Stawały się więc skończonymi ciągami skończonych ciągów napisów, a więc znów obiektami konkretnymi, które można badać za pomocą metod finitystycznych. Stawiano wszakże warunek, jeśli chodzi o dobór aksjomatów i reguł wnioskowania. Otóż powinny one być tak dobrane, by wystarczyły do rozwiązania każdego problemu, który można sformułować w języku danej teorii jako zdanie realne, tzn. by można było na ich podstawie rozstrzygnąć każde zdanie realne (logicy mówią tu o *zupełnym* układzie aksjomatów).

To był pierwszy etap realizacji programu Hilberta. Przygotowawszy w ten sposób grunt przez uściślenie pojęcia dowodu i jego rekonstrukcję za pomocą pojęcia dowodu sformalizowanego, mógł przystąpić Hilbert do drugiego etapu, który polegał na wykazaniu zachowawczości matematyki względem zdań realnych oraz na dowodzie niesprzeczności. Zadanie to sprowadzało się do badania dowodów sformalizowanych, a więc skończonych ciągów napisów. Można to było robić za pomocą bezpiecznych i pewnych metod finitystycznych — i to właśnie było głównym celem hilbertowskiej teorii dowodu.

W tym miejscu należy wyjaśnić pewną kwestię. Otóż często twierdzi się, że według Hilberta i formalizmu matematyka to nic innego jak tylko gra symboli, które przekształca się zgodnie z przyjętymi na początku regułami. To fałszywe stwierdzenie powstało zapewne pod wpływem zarzutów, jakie pod adresem Hilberta formułował Brouwer, jak i pod wpływem późniejszych doktryn, zwłaszcza tzw. formalizmu ścisłego H. B. Curry'ego (por. [10]), które wyrosły z formalizmu Hilberta. Otóż trzeba tu zdecydowanie podkreślić, że formalizacja była dla Hilberta tylko zabiegiem metodycznym, narzędziem mającym służyć realizacji programu ugruntowania matematyki klasycznej. Hilbert nigdy nie twierdził, że matematyka jest systemem sformalizowanym. Dla niego była to tylko rekonstrukcja istniejącej matematyki dokonywana w pewnym określonym celu.

**2. Niezupełność arytmetyki a program Hilberta.** Sformułowawszy program ugruntowania infinitystycznej matematyki klasycznej za pomocą środków matematyki finitystycznej, Hilbert i jego uczniowie przystąpili do realizacji tego zadania odnosząc pewne sukcesy. Na przykład W. Ackermann wykazał za pomocą metod finitystycznych (1924) niesprzeczność pewnego fragmentu arytmetyki liczb naturalnych (por. [1] i [2]). Wkrótce jednak miały wydarzyć się rzeczy, które zakłóciły ten obraz.

Otóż w dniach 5–7 września 1930 roku odbywała się w Królewcu II Konferencja Epistemologii Nauk Ścisłych (zorganizowana przez Gesellschaft für Empirische Philosophie). Na konferencji tej w dniu 6 września krótki 20-minutowy komunikat wygłosił matematyk i logik wiedeński Kurt Gödel (1906–1978). Mówił w nim o wynikach zawartych w swojej pracy doktorskiej, a mianowicie o twierdzeniu o pełności. Rezultaty te były w duchu programu Hilberta i pokazywały, że przyjęty jako baza rekonstrukcji matematyki system logiki pierwszego rzędu jest adekwatny. Były więc pozytywnym rozwiązaniem problemu 4 z wykładu Hilberta w Bolonii (patrz wyżej).

Ostatniego dnia konferencji odbyła się sesja dyskusyjna, w której głos zabrał też Gödel. Zaanonsował wtedy najnowsze swe rezultaty na temat niezupełności arytmetyki liczb naturalnych. Te wyniki z kolei wydawały się przeczyć możliwości realizacji programu Hilberta (i sugerowały negatywną odpowiedź na trzy pierwsze problemy z wykładu bolońskiego).

W styczniu 1931 roku w czasopiśmie *Monatshefte für Mathematik und Physik* ukazała się praca Gödla zawierająca twierdzenie o niezupełności zaanonsowane w Królewcu (por. [24]). Miała ona stać się jedną z najbardziej znanych (i chyba najczęściej cytowanych) prac z logiki i podstaw matematyki [4]. Ponieważ istnieje bogata literatura poświęcona tej problematyce, nie

[4] Została ona też przedstawiona 25 czerwca 1932 roku Uniwersytetowi Wiedeńskiemu jako rozprawa habilitacyjna i na jej podstawie Gödel otrzymał *veniam legendi* zostając 11 marca 1933 roku docentem prywatnym (Privatdozent).

będziemy wchodzić tu w szczegóły (odsyłając Czytelnika do odpowiednich pozycji, na przykład do książek E. Mendelsona [35] czy R. Murawskiego [41]). Powiedzmy tylko, że we wspomnianej pracy Gödla znajdujemy twierdzenie, zwane dziś *pierwszym twierdzeniem Gödla o niezupełności*, głoszące, że arytmetyka liczb naturalnych i wszystkie systemy bogatsze są istotnie niezupełne, o ile tylko są niesprzeczne. Oznacza to w szczególności, że istnieją zdania nierozstrzygalne w arytmetyce, czyli takie zdania $\varphi$, że ani $\varphi$, ani $\neg\varphi$ nie są twierdzeniami. Przy tym jedno z nich jest oczywiście prawdziwe. Co więcej, tej cechy niezupełności nie można usunąć, na przykład przez dodanie zdań nierozstrzygalnych jako nowych aksjomatów, gdyż wtedy pojawią się nowe zdania nierozstrzygalne w tej bogatszej już teorii. Wyniki Gödla wskazywały więc na istotną ograniczoność poznawczą metody dedukcyjnej. Pokazywały, że nie można zawrzeć całej matematyki (ba, nawet całości prawd o liczbach naturalnych) w niesprzecznym systemie sformalizowanym. Podawały one przykład zdania realnego (mówiącego o liczbach naturalnych), które można udowodnić za pomocą metod nieskończonych (infinitystycznych), ale które nie ma dowodu finitystycznego.

Gödel zaanonsował też w swej pracy z roku 1931 inne jeszcze twierdzenie, zwane dziś *drugim twierdzeniem Gödla o niezupełności*. Mówiło ono, że w żadnej teorii sformalizowanej zawierającej arytmetykę liczb naturalnych nie można dowieść jej własnej niesprzeczności. Gödel zaanonsował tylko to twierdzenie obiecując podać dowód w części drugiej pracy, która miała się wkrótce ukazać. W rzeczywistości część ta nie została nigdy napisana i Gödel nigdy nie opublikował dowodu swego drugiego twierdzenia (wyjaśniając to potem tym, że w międzyczasie dowód tego twierdzenia stał się znany i w związku z tym nie było już potrzeby publikowania go). Co więcej, wskazówka dotycząca dowodu, jaką podał w [24], okazała się niepoprawna (por. w tej sprawie [14], patrz też [41]). Pierwszy pełny dowód twierdzenia o niedowodliwości niesprzeczności podali D. Hilbert i P. Bernays w drugim tomie monografii *Grundlagen der Mathematik* (por. [31]).

Wyniki Gödla podważyły program Hilberta. Czy go jednak obaliły? Na pytanie to nie można udzielić definitywnej i jednoznacznej odpowiedzi z tego prostego powodu, że sam program został sformułowany nie do końca precyzyjnie. Kluczowe dlań terminy takie jak „realny", „idealny", „finitystyczny" itd. nie są precyzyjne i nigdy nie zostały przez Hilberta ściśle zdefiniowane. W związku z tym formułuje się rozmaite odpowiedzi. Tak więc twierdzi się, że wyniki Gödla obaliły program Hilberta — por. na przykład Smoryński [50], [52], [53]. Z drugiej strony formułuje się przeciwne opinie. Na przykład M. Detlefsen w [11] twierdzi, że drugie twierdzenie Gödla nie pociąga za sobą obalenia propozycji Hilberta, ponieważ zdanie sformalizowanego języka arytmetyki liczb naturalnych orzekające, że jest ona niesprzeczna, nie wyraża w istocie niesprzeczności w takim sensie, w jakim rozumiał ją Hilbert. Podobnie w [12] Detlefsen broni tezy, że pierwsze twierdzenie Gödla

nie pokazuje niemożliwości wykazania zachowawczości. Prowadzono też i nadal się prowadzi rozmaite szczegółowe badania związane z warunkami, jakie nakłada się na formuły, których używa się do formalnego wyrażenia metamatematycznej własności niesprzeczności. Nie możemy tu oczywiście wchodzić w bardzo skomplikowane szczegóły techniczne tych badań. Należy jednak zdecydowanie podkreślić, że program Hilberta w odniesieniu do sformalizowanego systemu arytmetyki nie musi oznaczać jego porażki w odniesieniu do elementarnej teorii liczb w sensie nieformalnym. Nie można bowiem wykluczyć możliwości, że tę ostatnią uda się sformalizować za pomocą systemu, który można ugruntować finitystycznie.

Interesujące jest też w tym kontekście przyjrzenie się reakcji samego Hilberta i Gödla na powstałą sytuację. Otóż Hilbert, obecny wprawdzie na konferencji w Królewcu, nie słyszał wypowiedzi Gödla anonsującej twierdzenie o niezupełności (był zajęty sprawami związanymi z przygotowywanym wystąpieniem w miejscowym radio w związku z nadaniem mu godności honorowego obywatela miasta [5]). Dowiedział się o nich dopiero na początku 1931 roku. I, jak pisze Smoryński: *Był zły z początku, wkrótce jednak zaczął szukać dróg wyjścia* (por. [53]). Zaproponował dołączenie do reguł wnioskowania tzw. *ω-reguły*:

$$\frac{\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n), \ldots \quad (n \in \mathbb{N})}{\forall x \varphi(x)}$$

a więc reguły, która, w odróżnieniu od innych reguł logiki pierwszego rzędu, ma nieskończenie wiele przesłanek, ale która pozwala na wydedukowanie z aksjomatów arytmetyki Peano PA wszystkich prawdziwych zdań arytmetycznych. W przedmowie do [31] pisał: ... *głoszona czasem opinia, że z wyników Gödla wynika niewykonalność mojej teorii dowodu, okazuje się błędna. Z rezultatów tych wynika jedynie, że w bardziej zaawansowanych dowodach niesprzeczności przyjąć trzeba stanowisko finitystyczne w głębszym sensie niż to jest konieczne przy rozważaniu formalizmów elementarnych.*

Gödel zaś w pracy [24] pisał: *Chcę wyraźnie zaznaczyć, że twierdzenie XI (i odpowiednie wyniki dla M i A) nie przeczą formalistycznemu punktowi widzenia Hilberta. Stanowisko to bowiem zakłada tylko istnienie dowodu niesprzeczności, w którym używa się jedynie środków finistycznych, a można przecież wyobrazić sobie, że istnieją dowody finitystyczne, których nie można wyrazić w formalizmie P (czy M czy A)* [6].

[5] Z tej okazji Hilbert wygłosił wykład pt. *Naturerkennen und Logik*, którego wysłuchał Gödel. I był to pierwszy i ostatni raz, gdy Gödel widział Hilberta. Nigdy się poza tym nie spotkali i nigdy z sobą nie korespondowali (por. [55], s. 85).

[6] Twierdzenie XI głosi, że jeżeli $P$ jest niesprzeczne, to niesprzeczności $P$ nie można dowieść w $P$, gdzie $P$ to arytmetyka liczb naturalnych sformalizowana w ramach prostej teorii typów; $M$ oznacza tu teorię mnogości, zaś $A$ analizę klasyczną.

Na spotkaniu Koła Wiedeńskiego dnia 15 stycznia 1931 roku Gödel argumentował, że wątpliwe jest *czy wszystkie intuicjonistycznie poprawne dowody mogą być wyrażone w jednym systemie sformalizowanym* (por. [46]). W [26] Gödel *explicite* sugerował wprowadzenie ciągu coraz silniejszych teorii pozaskończonych, aby otrzymać nowe twierdzenia arytmetyki.

Prawdziwe, ale nierozstrzygalne zdanie arytmetyki wskazane przez Gödla w pracy [24] miało treść metamatematyczną, a nie matematyczną (mówiło ono: „Ja nie jestem twierdzeniem"). Taki też charakter miały inne znalezione później zdania nierozstrzygalne — w szczególności zdania Rossera, Kreisla i Levy'ego, Kenta, Mostowskiego czy Shepherdsona (por. [51]). Choć interesujące dla logików, były one mniej ciekawe dla zwykłych matematyków. To wszystko pomniejszało (filozoficzne i metodologiczne) znaczenie uzyskanych wyników. Ciągle bowiem można było jeszcze żywić nadzieję, że w zakresie zdań matematycznie interesujących (cokolwiek miałoby to znaczyć) matematyka (w szczególności arytmetyka liczb naturalnych) jest zupełna. Powstał więc problem ewentualnego znalezienia prawdziwych, ale nierozstrzygalnych zdań o treści matematycznej, czy lepiej, teoriolicz bowej.

Kwestia ta została rozwiązana przez J. Parisa, L. Harringtona i L. Kirby'ego, którzy podali przykłady prawdziwych, ale nierozstrzygalnych zdań o treści kombinatorycznej (por. [43]) i teoriolicz bowej (por. [34]). Nie będziemy tu wchodzić w szczegóły techniczne tych wyników (odsyłamy Czytelnika na przykład do [39] lub [41]). Powiedzmy tylko, że dają nam one przykłady prawdziwych zdań arytmetycznych, które nie mają „czystych", tzn. arytmetycznych dowodów. Dokładniej, uzyskaliśmy przykłady zdań mówiących o pewnych kombinatorycznych własnościach zbiorów skończonych czy o własnościach ciągów liczb naturalnych, ale naturalne dowody tych zdań używają zbiorów nieskończonych i, co więcej, ponieważ zdania te są niedowodliwe w arytmetyce Peano, więc każdy ich dowód musi zawierać coś, co wykracza poza dziedzinę obiektów skończonych. Są to więc twierdzenia arytmetyczne, które mają tylko dowody „nieczyste", natomiast nie mają „czystych" dowodów arytmetycznych. Zdają się one potwierdzać opinię E. Posta, że *dowód matematyczny jest w istocie wynikiem twórczej aktywności umysłu* i że nie można w związku z tym *a priori* ograniczać inwencji matematyków (każąc im na przykład pracować w takim, a nie innym systemie sformalizowanym).

**3. Uogólniony program Hilberta.** Wyniki Gödla na temat niezupełności arytmetyki i niedowodliwości niesprzeczności wskazały na trudności związane z próbami realizacji programu Hilberta. Naturalną reakcją na te trudności była idea rozszerzenia zasobu dopuszczalnych środków prowadząca do powstania tzw. uogólnionego programu Hilberta. Wydaje się, że Paul Bernays (1888–1977) był jednym z pierwszych, którzy skłonni byli dopuścić nie tylko metody finitystyczne, ale ogólnie metody konstruktywne. Pisał on:

*Stało się oczywiste, że* finite Standpunkt *nie stanowi jedynej alternatywy w stosunku do klasycznych sposobów rozumowania i że nie jest on konieczną konsekwencją idei teorii dowodu. W związku z tym zasugerowano rozszerzenie [zasobu] metod teorii dowodu: zamiast ograniczenia do finitystycznych metod rozumowania żądano tylko, by argumentacja miała charakter konstruktywny, co pozwala na operowanie ogólniejszymi regułami wnioskowania* (por. [5], s. 502).

Jakie były źródła i motywacje tej zmiany poglądów? Jednym z nich mogła być pokazana niezależnie przez K. Gödla i G. Gentzena redukcja arytmetyki Peano PA do intuicjonistycznego systemu HA arytmetyki Heytinga. Pokazali oni mianowicie, że PA jest względnie niesprzeczna z HA, tzn. jeżeli HA jest niesprzeczna, to również PA jest niesprzeczna (por. [25], [22] [7]). Inną motywacją mógł być dowód Gentzena niesprzeczności arytmetyki PA za pomocą indukcji pozaskończonej względem $\varepsilon_0$ (por. [20], [21] [8]).

Nie jest w ogólności jasne, co to znaczy "metody konstruktywne". Wydaje się, że pojęcie to jest równie nieprecyzyjne co pojęcie finitystyczności. Jednak idea dopuszczenia metod konstruktywnych, a nie tylko środków finitystycznych, stała się obowiązującym paradygmatem i w jego ramach prowadzono i nadal prowadzi się szeroko zakrojone badania, które dały wiele interesujących wyników. Charakter tego artykułu nie pozwala na wchodzenie w szczegóły techniczne. Wspomnijmy więc tylko o badaniach opartych na idei Gentzena stosowania indukcji pozaskończonej względem pewnych rekurencyjnych liczb porządkowych, o programie redukcjonistycznym Fefermana czy w końcu o idei Gödla rozszerzenia *finite Standpunkt* za pomocą funkcjonałów pierwotnie rekurencyjnych wyższych typów (przegląd wyników uzyskanych w ramach tych badań znaleźć można w pracy [15]).

Dla nas ważne jest to, że z badań tych wynikają dwa wnioski: 1. klasyczną analizę można rozwijać w zachowawczych rozszerzeniach elementarnej teorii liczb, oraz 2. silne niepredykatywne fragmenty analizy mogą być zredukowane do teorii konstruktywnych, tzn. można podać za pomocą metod konstruktywnych dowody względnej niesprzeczności niepredykatywnych fragmentów arytmetyki II rzędu.

Z filozoficznego i metodologicznego punktu widzenia należy podkreślić jeszcze jedną sprawę. Otóż wszystkie te propozycje rozszerzenia zasobu dopuszczalnych środków istotnie wykraczają poza ramy programu Hilberta.

---

[7] Niemiecka wersja pracy [22] pt. *Über das Verhältniss zwischen intuitionistische und klassische Arithmetik* została przyjęta do druku przez *Mathematische Annalen* w roku 1933, ale została następnie wycofana w związku z publikacją pracy Gödla [25].

[8] Tu znów ciekawostka historyczna. Otóż pierwsza wersja dowodu Gentzena została przesłana do redakcji w roku 1935, ale odrzucona z powodu krytyki, z jaką spotkała się użyta przez niego metoda uznana za zbyt silną. Ta wersja pracy stała się publicznie znana dzięki pracy Bernaysa [6] i została ostatnio opublikowana w imieniu Gentzena, por. [23].

Ten ostatni dopuszczał tylko metody i obiekty finitystyczne, które mają jasny sens fizyczny i są niezbędne w każdym naukowym rozumowaniu i myśleniu. Żadne z proponowanych uogólnień za pomocą metod konstruktywnych nie ma tej cechy i żaden z nowych środków nie może być uznany za finitystyczny (nawet mimo nieprecyzyjności tego terminu). Uzyskane więc w ramach nowych paradygmatów wyniki są zgodne wprawdzie z duchem redukcjonistycznej filozofii Hilberta, ale nie mogą być żadną miarą uznane za wkład w sam program Hilberta.

**4. Zrelatywizowany program Hilberta.** Inną reakcją na trudności w realizacji pragramu Hilberta ujawnione przez twierdzenia o niezupełności jest tzw. *zrelatywizowany program Hilberta.* Zamiast rozszerzać zasób dopuszczalnych środków można postawić sprawę tak: skoro nie można całej klasycznej matematyki infinitystycznej ugruntować na bazie matematyki finitystycznej, to można zapytać, dla jakiej części tej matematyki jest to możliwe? Innymi słowy: jaka część matematyki infinitystycznej może być rozwinięta i zbudowana w systemach sformalizowanych, które są zachowawcze w stosunku do matematyki finitystycznej względem zdań realnych? Badania prowadzone w tym kierunku uzyskały w ostatnich latach silny impuls ze strony tzw. matematyki odwrotnej (ang. *reverse mathematics*); otrzymane w jej ramach rezultaty pokazują, że znaczna część matematyki klasycznej może być finitystycznie ugruntowana.

Zanim opowiemy o tych wynikach, musimy dokonać pewnych uściśleń. Przede wszystkim musimy zdecydować, jak będziemy rozumieli terminy "finitystyczny" oraz "zdanie realne". Za Taitem [54] przyjmiemy, że finityzm Hilberta jest adekwatnie wyrażony za pomocą systemu PRA arytmetyki pierwotnie rekurencyjnej, zwanej też *arytmetyką Skolema.* Jest to system sformalizowany pierwszego rzędu wyrażony w języku zawierającym następujące symbole pozalogiczne: stała 0 (liczba zero), symbol funkcyjny 1-argumentowy $S$ (funkcja następnika) oraz symbol funkcyjny $\mathbf{f}$ dla każdej funkcji pierwotnie rekurencyjnej $f$. Aksjomaty pozalogiczne PRA to aksjomaty dotyczące liczebników $0, S0, SS0, \ldots$ (czyli nazw poszczególnych liczb naturalnych $0, 1, 2, \ldots$), równania definicyjne dla funkcji pierwotnie rekurencyjnych oraz schemat indukcji dla formuł bezkwantyfikatorowych. Teoria PRA jest z pewnością finitystyczna (przy dowolnym rozumieniu tego pojęcia), a z drugiej strony wystarczająco silna, by móc w niej sformalizować wszystkie elementarne rozumowania o liczbach naturalnych i o skończonych ciągach symboli. Drugie kluczowe pojęcie, pojęcie zdania realnego, uściślamy w ten sposób, że zdania realne utożsamiać będziemy ze zdaniami klasy $\Pi^0_1$, czyli ze zdaniami języka arytmetyki Peano PA postaci $\forall x \varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest formułą zawierającą formuły atomowe, spójniki zdaniowe i ewentualnie kwantyfikatory ograniczone.

Okazuje się, że matematykę klasyczną można sformalizować nie tylko w teorii mnogości, ale spore jej fragmenty (takie jak geometria, teoria liczb, analiza, równania różniczkowe, analiza zespolona itd.) mogą być sformalizowane w pewnym znacznie słabszym systemie $A_2^-$ arytmetyki II rzędu (oznaczanym też czasem symbolem $Z_2$). Wydaje się, że jako pierwsi zauważyli to D. Hilbert i P. Bernays. H. Weyl zaś pokazał w [56], że istotna część matematyki może być rozwinięta w pewnym "predykatywnym" fragmencie $A_2^-$ (dopuszczającym $\omega$-iteracje definiowalności arytmetycznej).

Arytmetyka II rzędu jest to system sformalizowany w języku pierwszego rzędu (*sic!*) z dwoma rodzajami zmiennych: $x, y, z, \ldots$ (zmienne przebiegające liczby naturalne) oraz $X, Y, Z, \ldots$ (zmienne przebiegające zbiory liczb naturalnych). Stałe pozalogiczne języka $L(A_2^-)$ arytmetyki $A_2^-$ to: $0, S, +, \cdot, \in$. Aksjomaty pozalogiczne $A_2^-$ są następujące:

1. aksjomaty arytmetyki Peano PA bez schematu indukcji,
2. (aksjomat *ekstensjonalności*) $\forall x(x \in X \equiv x \in Y) \to (X = Y)$,
3. (aksjomat *indukcji*) $0 \in X \;\&\; \forall x(x \in X \to S(x) \in X) \to \forall x(x \in X)$,
4. (aksjomat *wyróżniania*) $\exists X \forall x(x \in X \equiv \varphi(x, \ldots))$, gdzie $\varphi(x, \ldots)$ jest formułą języka $L(A_2^-)$ arytmetyki $A_2^-$, w której zmienna $X$ nie jest wolna (jest to więc schemat nieskończenie wielu aksjomatów; aksjomat ten nazywa się też czasem aksjomatem *istnienia zbiorów*).

Modele teorii $A_2^-$, to struktury postaci $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \in)$, gdzie $\mathcal{M}$ jest modelem arytmetyki Peano PA, a $\mathcal{X}$ jest pewną rodziną podzbiorów universum $M$ modelu $\mathcal{M}$ (obszerne informacje o semantyce arytmetyki II rzędu $A_2^-$ i związanych z nią modelach znaleźć można w pracach [3], [36] i [37]).

Formalizując matematykę w teorii $A_2^-$ unikamy rozmaitych trudności i kłopotów związanych z teorią mnogości, takich na przykład jak kwestia przyjęcia czy odrzucenia tych czy innych aksjomatów dotyczących zbiorów i związanych z tym rozstrzygnięć filozoficznych (dotyczy to zwłaszcza aksjomatu wyboru i aksjomatu zbioru potęgowego). Natrafiamy jednak na inne problemy. Najważniejszy z nich, to problem niepredykatywności arytmetyki $A_2^-$ (przypomnijmy, że Poincaré właśnie w niepredykatywności dopatrywał się źródła wszelkich paradoksów). Otóż aksjomat wyróżniania pozwala na tworzenie zbiorów niepredykatywnych, bowiem występująca w nim formuła $\varphi$ może mieć postać $\forall Y \psi(Y, x, \ldots)$, a zatem definiując zbiór $X$ za pomocą formuły $\varphi$ odwołujemy się do uniwersum wszystkich zbiorów, do którego należy też zbiór $X$ właśnie definiowany. Okazuje się jednak, że trudność tę można wyeliminować. Mianowicie w przypadku formalizacji konkretnych fragmentów matematyki klasycznej wystarczy rozważać tylko fragmenty arytmetyki $A_2^-$, dokładniej, fragmenty otrzymane przez dopuszczenie tylko pewnych postaci aksjomatu wyróżniania. I w ten sposób dochodzimy do matematyki odwrotnej.

*Matematyka odwrotna*, to program badawczy sformułowany przez H. Friedmana na Kongresie Matematyków w Vancouver w 1974 roku (por. [16]). Jego celem jest badanie roli aksjomatu wyróżniania, czyli aksjomatu istnienia zbiorów w matematyce. Główne pytanie można sformułować następująco: niech będzie dane pewne twierdzenie $\tau$, pytamy ile aksjomatu wyróżniania potrzeba, by dowieść $\tau$? Metodę stosowaną w matematyce odwrotnej przy badaniu takich kwestii można opisać tak: Załóżmy, że w pewnym fragmencie $S(\tau)$ arytmetyki $A_2^-$ można udowodnić zdanie $\tau$. Pytamy, czy $S(\tau)$ jest najsłabszym fragmentem $A_2^-$ o tej własności. Aby odpowiedzieć pozytywnie na to pytanie, pokazuje się, że aksjomat wyróżniania teorii $S(\tau)$ jest równoważny (na gruncie pewnej słabszej teorii, która sama nie dowodzi $\tau$) zdaniu $\tau$. W tym dowodzie najtrudniejsza jest zwykle implikacja: jeżeli $\tau$, to aksjomat wyróżniania teorii $S(\tau)$. To wyjaśnia też nazwę "matematyka odwrotna" — wyprowadzamy tu bowiem aksjomat z twierdzenia, czyli postępujemy odwrotnie niż się to zwykło czynić w matematyce.

W ramach matematyki odwrotnej wyodrębniono pewne konkretne fragmenty arytmetyki II rzędu $A_2^-$ i bada się ich moc dowodową oraz znaczenie z punktu widzenia matematyki klasycznej. W szczególności bada się następujące teorie: $\mathrm{RCA_C}$, $\mathrm{WKL_0}$, $\mathrm{ACA_0}$, $\mathrm{ATR_0}$, $\Pi^1_1-\mathrm{CA_0}$. Opiszemy tu dokładniej, ze względu na ich znaczenie dla naszych dalszych rozważań, tylko trzy pierwsze z nich.

System $\mathrm{RCA_0}$ jest to teoria w języku $L(A_2^-)$ oparta na następujących aksjomatach pozalogicznych:

1. $\mathrm{PA}^-$, tzn. aksjomaty arytmetyki Peano PA bez schematu indukcji,

2. schemat indukcji dla formuł $\Sigma^0_1$, czyli formuł postaci $\exists x\varphi(x)$, gdzie $\varphi$ jest formułą mogącą zawierać tylko formuły atomowe, spójniki i ewentualnie kwantyfikatory ograniczone:

$$\varphi(0) \,\&\, \forall x[\varphi(x) \to \varphi(Sx)] \to \forall x\varphi(x),$$

3. (rekurencyjny aksjomat wyróżniania)

$$\forall x[\varphi(x) \equiv \psi(x)] \to \exists X \forall x[x \in X \equiv \varphi(x)],$$

gdzie $\varphi$ jest formułą $\Sigma^0_1$, a $\psi$ — formułą $\Pi^0_1$.

Angielska nazwa aksjomatu 3, najistotniejszego w tym fragmencie $A_2^-$ — *recursive comprehension axiom* — wyjaśnia też skrót $\mathrm{RCA_0}$. Podstawowym modelem teorii $\mathrm{RCA_0}$ jest struktura $(\mathrm{Rec}, \mathcal{N}_0, \in)$, gdzie Rec jest rodziną wszystkich zbiorów rekurencyjnych, a $\mathcal{N}_0$ jest modelem standardowym arytmetyki Peano.

Teoria $\mathrm{WKL_0}$ to teoria w języku $L(A_2^-)$ oparta na następujących aksjomatach pozalogicznych:

1. aksjomaty teorii $\mathrm{RCA_0}$,

2. słaby lemat Königa, tzn., zdanie głoszące, że każde nieskończone drzewo dwójkowe ma gałąź nieskończoną.

Angielska nazwa aksjomatu 2 — *weak König's lemma* — wyjaśnia skrót $\mathrm{WKL}_0$. Teoria $\mathrm{WKL}_0$ jest silniejsza niż $\mathrm{RCA}_0$, struktura $(\mathrm{Rec}, \mathcal{N}_0, \in)$ nie jest modelem $\mathrm{WKL}_0$.

Teoria $\mathrm{ACA}_0$ to system w języku $L(A_2^-)$ oparty na następujących aksjomatych pozalogicznych:

1. aksjomaty $\mathrm{PA}^-$,
2. aksjomat ekstensjonalności,
3. aksjomat indukcji, tzn.

$$0 \in X \ \& \ \forall x[x \in X \to S(x) \in X] \to \forall x(x \in X)$$

4. arytmetyczny schemat wyróżniania, tzn. schemat wyróżniania dla wszystkich formuł arytmetycznych, czyli formuł języka $L(A_2^-)$ nie zawierających kwantyfikatorów wiążących zmienne zbiorowe.

Angielska nazwa aksjomatu 4 — *arithmetic comprehension axiom* — wyjaśnia skrót $\mathrm{ACA}_0$. Teoria $\mathrm{ACA}_0$ jest istotnym rozszerzeniem teorii $\mathrm{WKL}_0$.

Wyróżnione fragmenty arytmetyki II rzędu okazują się adekwatne w stosunku do różnych części matematyki klasycznej. I tak w szczególności w teorii $\mathrm{RCA}_0$ można skonstruować liczby rzeczywiste, zdefiniować pojęcie zbieżności ciągu, pojęcie funkcji ciągłej, całki Riemanna itp. oraz udowodnić szereg pozytywnych wyników analizy rekurencyjnej i algebry rekurencyjnej. W szczególności można udowodnić, że każde ciało przeliczalne ma domknięcie algebraiczne, że każde przeliczalne ciało uporządkowane ma rozszerzenie do ciała domkniętego w sensie rzeczywistym, jak również twierdzenie o wartości pośredniej dla funkcji ciągłych (por. [49]).

Teoria $\mathrm{WKL}_0$ okazuje się bardzo silna. Można w niej udowodnić w szczególności następujące twierdzenia:

— twierdzenie Heinego-Borela o pokryciu (por. [17]),

— każda funkcja ciągła na przedziale $[0, 1]$ jest jednostajnie ciągła (por. [49]),

— każda funkcja ciągła na przedziale $[0, 1]$ jest ograniczona (por. [49]),

— każda funkcja ciągła na przedziale $[0, 1]$ ma supremum (por. [49]),

— każda funkcja jednostajnie ciągła na $[0, 1]$, mająca supremum, osiąga je (por. [49]),

— twierdzenie Hahna-Banacha (por. [8], [9]),

— twierdzenie Cauchy'ego-Peano o istnieniu całki równania różniczkowego (por. [47]),

— każdy przeliczalny pierścień przemienny ma ideał pierwszy (por. [19]),

— każde ciało przeliczalne formalnie rzeczywiste może być uporządkowane (por. (19]),

— twierdzenie Gödla o pełności dla rachunku predykatów (por. [17], [49]).

Co więcej, jeśli $\varphi$ jest jednym z wyżej wymienionych twierdzeń matematyki klasycznej, to teoria $RCA_0 + \varphi$ jest równoważna teorii $WKL_0$, tzn. obie te teorie mają taką samą moc dowodową i dokładnie te same twierdzenia mogą być w nich udowodnione. Oznacza to, że słaby lemat Königa jest konieczny i jednocześnie wystarcza do udowodnienia (na bazie teorii $RCA_0$) każdego z wyżej wymienionych twierdzeń. Z równoważności obu teorii wynika też w szczególności, że (na bazie $RCA_0$) z twierdzenia Hahna-Banacha można wydedukować twierdzenie Peano i na odwrót (podobnie dla innych wymienionych wyżej twierdzeń).

Teoria $ACA_0$ okazuje się jeszcze silniejsza z punktu widzenia matematyki klasycznej. Można w niej udowodnić następujące twierdzenia:

— twierdzenie Bolzano-Weierstrassa (por. [17]),

— każdy ciąg Cauchy'ego liczb rzeczywistych jest zbieżny (por. [49]),

— każdy ciąg ograniczony liczb rzeczywistych ma supremum (por. [17]),

— każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny (por. [17]),

— lemat Arzeli-Ascoliego (por. [49]),

— każda przeliczalna przestrzeń liniowa ma bazę (por. [19]),

— każdy przeliczalny pierścień przemienny ma ideał maksymalny (por. [19]).

I znów, tak jak to było w przypadku teorii $WKL_0$, jeżeli $\varphi$ jest dowolnym z wyżej wymienionych zdań, to teoria $RCA_0 + \varphi$ jest równoważna teorii $ACA_0$. A zatem aksjomat wyróżniania dla formuł arytmetycznych jest konieczny i wystarczający (na bazie teorii $RCA_0$) do udowodnienia każdego z powyższych twierdzeń. I dalej, skoro $RCA_0 + \varphi$ jest równoważna $ACA_0$, to w szczególności (na bazie teorii $RCA_0$) można z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa wydedukować na przykład twierdzenie o istnieniu bazy przestrzeni liniowej (i podobnie dla innych opisanych twierdzeń).

Jakie jest znaczenie tego typu wyników? Otóż przede wszystkim pokazują one jaka część arytmetyki II rzędu $A_2^-$ jest w istocie potrzebna do sformalizowania danego fragmentu matematyki klasycznej, czyli do otrzymania danego, interesującego nas twierdzenia analizy, algebry czy teorii równań różniczkowych. Przy okazji okazuje się więc, że badania z zakresu logiki i podstaw matematyki nie zawsze są oderwane od zwykłej matematyki (jak powszechnie zwykło się sądzić), ale że mają one (przynajmniej czasami) związek z nią i, co więcej, uzyskane wyniki mogą nie być bez znaczenia dla matematyki klasycznej!

Z filozoficznego punktu widzenia bardzo interesujący (żeby nie powiedzieć zastanawiający) jest fakt, że pewne konkretne, dobrze opisane fragmenty $A_2^-$ okazują się adekwatne ze względu na matematyczną praktykę badawczą. Trzeba tu jednak zwrócić uwagę na pewną kwestię. Otóż dowody sformalizowane na gruncie fragmentów arytmetyki II rzędu nie są po prostu

zwykłym tłumaczeniem czy transformacją dowodów wziętych na przykład z analizy czy z algebry. Różnią się one od siebie czasem zasadniczo. W szczególności sformalizowane dowody jedyności są na ogół znacznie trudniejsze i bardziej skomplikowane niż dowody istnienia, podczas gdy w zwykłej praktyce matematycznej jest zazwyczaj odwrotnie: jedyność jest na ogół prostą konsekwencją istnienia [9]. Nie ma też żadnego bezpośredniego związku między złożonością i stopniem skomplikowania klasycznego dowodu danego twierdzenia a piętrem w hierarchii podsystemów arytmetyki II rzędu $A_2^-$, w którym można dowieść jego sformalizowanej wersji. Jako przykład tego fenomenu może służyć twierdzenie głoszące, że każda grupa abelowa ma podgrupę torsyjną, które to twierdzenie jest trywialne w algebrze klasycznej, ale które ma tę własność, że teoria $\mathrm{RCA}_0+$ to twierdzenie jest równoważna teorii $\mathrm{ACA}_0$, a zatem w szczególności rozważanej własności grup abelowych nie można dowieść w słabszej teorii $\mathrm{WKL}_0$.

Dodajmy też, że nie każde twierdzenie matematyki można sklasyfikować w hierarchii Friedmana podsystemów arytmetyki $A_2^-$. Przykładem takiego twierdzenia może być twierdzenie Hilberta o bazie (por. [48]) głoszące, że dla każdego ciała $K$ i dowolnej liczby naturalnej $n$, wszystkie ideały w pierścieniu $K[x_1, \ldots, x_n]$ są skończenie generowane. Twierdzenie to można udowodnić w teorii $\mathrm{ACA}_0$, ale z drugiej strony system $\mathrm{RCA}_0+$ twierdzenie Hilberta o bazie nie jest równoważny żadnemu z rozważanych systemów. Zachodzi przy tym bardzo interesujący z metodologicznego punktu widzenia fenomen. Oznaczmy mianowicie przez $WO(\alpha)$ zdanie głoszące, że liczba porządkowa $\alpha$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym (przez relację $\in$). Otóż można udowodnić w $\mathrm{RCA}_0$, że zdanie $WO(\omega^\omega)$ jest równoważne twierdzeniu Hilberta o bazie. Jednakże zdanie $WO(\omega^\omega)$ jest nieporównywalne z $\mathrm{WKL}_0$. Z drugiej strony, dla każdej danej liczby naturalnej $n$ można udowodnić w $\mathrm{RCA}_0$, że $WO(\omega^n)$ jest równoważna twierdzeniu Hilberta o bazie dla liczby $n$. Co więcej, $WO(\omega^n)$ jest dowodliwe w $\mathrm{RCA}_0$. Mamy więc tu w efekcie analogię z $\omega$-niezupełnością arytmetyki Peano (por. [24], [35], [41]).

Istnieją też oczywiście zdania, których nie można udowodnić nawet w pełnym systemie arytmetyki $A_2^-$, choć można je udowodnić na przykład w teorii mnogości Zermelo-Fraenkla (por. [18]).

Jakie są związki wyników uzyskanych w ramach matematyki odwrotnej z (zrelatywizowanym) programem Hilberta? Aby wyjaśnić tę kwestię, musimy przytoczyć kilka twierdzeń. Otóż na początku lat osiemdziesiątych L. Harrington i Z. Ratajczyk wykazali zachowawczość teorii $\mathrm{WKL}_0$ (żaden z nich nie opublikował swego wyniku; dowód będzie można znaleźć w [49],

[9] Można to uznać za jeszcze jeden argument na rzecz tezy, iż formalizacja jest tylko narzędziem służącym do badania matematyki jako nauki, jest tylko rekonstrukcją matematyki rzeczywiście uprawianej, a nie jest dokładnym opisem czynności badawczych normalnego matematyka.

która to książka będzie najobszerniejszym źródłem informacji o matematyce odwrotnej). Udowodnili oni mianowicie następujące

TWIERDZENIE 4.1. *Jeżeli* $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \in)$ *jest przeliczalnym modelem teorii* $\mathrm{RCA}_0$ *i zbiór* $A \in \mathcal{X}$, *to istnieje rodzina* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(M)$ *taka, że* $A \in \mathcal{Y}$ *oraz* $(\mathcal{Y}, \mathcal{M}, \in)$ *jest modelem dla* $\mathrm{WKL}_0$.

Stąd wynika łatwo następujący

WNIOSEK 4.2. *Teoria* $\mathrm{WKL}_0$ *jest zachowawczym rozszerzeniem teorii* $\mathrm{RCA}_0$ *względem zdań klasy* $\Pi^1_1$, *tzn, każde zdanie klasy* $\Pi^1_1$ *dowodliwe w* $\mathrm{WKL}_0$ *może być też udowodnione w słabszej teorii* $\mathrm{RCA}_0$.

Klasa $\Pi^1_1$ zdań, o której tu mowa, to klasa zdań języka $L(A_2^-)$ arytmetyki $A_2^-$ postaci $\forall X \varphi(X)$, gdzie $\varphi$ jest formułą arytmetyczną, a więc klasa zdań zawierających tylko jeden duży kwantyfikator wiążący zmienną zbiorową oraz, oprócz spójników, dowolną liczbę kwantyfikatorów wiążących zmienne liczbowe.

W roku 1977 H. Friedman uzyskał podobny wynik (nigdy go nie opublikował; znaleźć go można również w [33]). Udowodnił on mianowicie następujące

TWIERDZENIE 4.3. *Teoria* $\mathrm{WKL}_0$ *jest zachowawczym rozszerzeniem systemu arytmetyki Skolema* PRA *względem zdań* $\Pi^0_2$.

Znów wyjaśnienie: zdania $\Pi^0_2$ to zdania języka arytmetyki Peano postaci $\forall x \exists y \psi(x, y)$, gdzie $\psi$ może zawierać formuły atomowe, spójniki i ewentualnie kwantyfikatory ograniczone. Dowód Friedmana używał metod teoriomodelowych. Twierdzenie 4.3 ulepszył W. Sieg podając jego alternatywny dowód za pomocą metod teoriodowodowych w stylu Gentzena oraz pokazując pierwotnie rekurencyjną transformację dowodów zdań $\Pi^0_2$ w teorii $\mathrm{WKL}_0$ w dowody tych zdań w teorii PRA.

Korzystając teraz z twierdzenia 4.3 i jego wzmocnienia pochodzącego od Siega oraz łącząc te wyniki ze wskazanym wcześniej faktem, iż teoria $\mathrm{WKL}_0$ jest teorią silną z punktu widzenia matematyki klasycznej, dochodzimy do wniosku, że duża i znacząca część matematyki klasycznej może być zredukowana do teorii PRA, a więc może być finitystycznie ugruntowana. Część ta wyznaczona jest przez klasę $\Pi^0_2$ zdań. Zauważmy jednak, że bardzo wiele twierdzeń matematyki może być sformułowanych jako zdania $\Pi^0_2$. W ten sposób możemy stwierdzić ostatecznie, że program Hilberta może być częściowo zrealizowany!

Dodajmy też, że opisane wyżej wyniki mają również pewne „praktyczne" konsekwencje. Wskażemy dwie z nich. Otóż często stosowaną w teorii liczb techniką dowodu jest całkowanie po konturze. Z drugiej strony całkowanie to może być sformalizowane w teorii $\mathrm{WKL}_0$. Stąd wniosek, że każde twierdzenie teorii liczb dające się napisać (w języku arytmetyki Peano PA) jako zdanie

$\Pi^0_2$, którego dowodzi się za pomocą całkowania po konturze, daje się też udowodnić elementarnie, tzn. w teorii PRA i, co więcej, można efektywnie (przynajmniej teoretycznie) znaleźć taki dowód elementarny.

Druga uwaga związana jest z twierdzeniem Artina i z siedemnastym problemem Hilberta. Otóż pod numerem 17 Hilbert pytał: *Czy każda dodatnio określona forma* [o dowolnej ilości zmiennych i o współczynnikch rzeczywistych — R. M.] *może być wyrażona jako ułamek sum kwadratów takich form* (por. [27]; patrz też [7]) (przypomnijmy, że forma jest dodatnio określona, jeśli nie jest ujemna dla żadnej wartości zmiennych). W roku 1926 E. Artin odpowiedział pozytywnie na to pytanie. Zauważmy teraz, że twierdzenie Artina można zapisać jako zdanie $\Pi^0_2$. Z drugiej strony wszystkie wyniki teorii ciał domkniętych w sensie rzeczywistym potrzebne w dowodzie Artina są dowodliwe w $\mathrm{WKL}_0$. Stąd, na mocy twierdzeń Friedmana i Siega wynika, że twierdzenie Artina może być też udowodnione w arytmetyce PRA, a więc elementarnie.

Wydaje się, że Hilbert byłby zadowolony z tych wyników. Dochodzimy też do wniosku, że miał on chyba jednak rację twierdząc, że *nie ma żadnego ignorabimus w matematyce* (por. [28]) oraz kończąc swe przemówienie w lokalnym radio w Królewcu we wrześniu 1930 roku pełnymi optymizmu, pewności siebie i wiary w moc matematyki i matematyków słowami: *Wir müssen wissen. Wir werden wissen.*

### Literatura cytowana


[1] W. Ackermann, *Begründung des tertium non datur mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit*, Mathematische Annalen 93 (1924–25), 1–36.

[2] W. Ackermann, *Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie*, Mathematische Annalen 117 (1940), 162–194.

[3] K. R. Apt, W. Marek, *Second order arithmetic and related topics*, Annals of Mathematical Logic 6 (1974), 177–239.

[4] T. Batóg, *Filozofia matematyki*, w: *Filozofia a nauka. Zarys encyklopedyczny*, Ossolineum, Wrocław 1987, 177–186.

[5] P. Bernays, *Hilbert Dawid*, w: P. Edwards (ed.), *Encyclopedia of Philosophy*, vol. 3, Macmillan and Free Press, New York 1967, 496–504.

[6] P. Bernays, *On the original Gentzen consistency proof for number theory*, w: J. Myhill et al., *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1970, 409–417.

[7] F. E. Browder (ed.), *Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XXVIII, Part 1 and 2, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1976.

[8] D. K. Brown, *Functional Analysis in Weak Subsystems of Second-Order Arithmetic*, Ph. D. Thesis, Pennsylvania State University, University Park, Pa., 1987.

[9] D. K. Brown, S. G. Simpson, *Which set existence axioms are needed to prove the separable Hahn-Banach theorem?*, Annals of Pure and Applied Logic 31 (1986), 123–144.

[10] H. B. Curry, *Outlines of a Formalistic Philosophy of Mathematics*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1951.

[11] M. Detlefsen, *On interpreting Gödel's second theorem*, Journal of Philosophical Logic 8 (1979), 297–313.

[12] M. Detlefsen, *On the alleged refutation of Hilbert's program using Gödel's first incompleteness theorem*, Journal of Philosophical Logic 19 (1990), 343–377.

[13] M. Detlefsen, *The kantian character of Hilbert's formalism: Kant's ideas and Hilbert's ideals* (w druku).

[14] S. Feferman, *Arithmetization of metamathematics in a general setting*, Fundamenta Mathematicae 49 (1960), 35–92.

[15] S. Feferman, *Hilbert's program revisited: proof-theoretical and foundational reductions*, Journal of Symbolic Logic 53 (1988), 364–384.

[16] H. Friedman, *Some subsystems of second order arithmetic and their use*, w: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Canadian Mathematical Congress, Vancouver 1974, vol. 1, 235–242.

[17] H. Friedman, *Systems of second order arithmetic with restricted induction* (abstracts), Journal of Symbolic Logic 41 (1976), 557–559.

[18] H. Friedman, *On the necessary use of abstract set theory*, Advances in Mathematics 41 (1981), 209–280.

[19] H. Friedman, S. G. Simpson and R. L. Smith, *Countable algebra and set existence axioms*, Annals of Pure and Applied Logic 25 (1983), 141–181; addendum: ibidem 28 (1985), 319–320.

[20] G. Gentzen, *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, Mathematische Annalen 112 (1936), 493–565.

[21] G. Gentzen, *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie*, Forschung zur Logik und zur Grundlagen der exakten Wissenschaften, New Series, 4 (1938), 19–44.

[22] G. Gentzen, *On the relation between intuitionistic and classical arithmetic*, w: M. E. Szabo (ed.), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1969, 53–67.

[23] G. Gentzen, *Der erste Widerspruchsfreiheitsbeweis für die klassische Zahlentheorie*, Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschungen 16 (1974), 97–112; tłumaczenie angielskie w: M. E. Szabo (ed.), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1969.

[24] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme. I*, Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), 173–198.

[25] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 4 (1933), 34–38.

[26] K. Gödel, *Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on problems in mathematics*, 1–4; Opublikowane po raz pierwszy w: M. Davis (ed.), *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, Hewlett, N.Y., 84–88.

[27] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Archiv der Mathematik und Physik 1 (1901), 44–63 i 213–137. Także w: D. Hilbert: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Springer-Verlag, Berlin 1935.

[28] D. Hilbert, *Über das Unendliche*, Mathematische Annalen 95 (1926), 161–190; tłumaczenie angielskie: *On the Infinite*, w: J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1930*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967, 367–392: przekład polski w [40], 288–307.

[29] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 6 (1927), 65–85. Przedrukowane w: D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, wydanie VII, Leipzig 1930. Tłumaczenie angielskie: *The Foundations of Mathematics*, w: J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1930*, Harvard Univeristy Press, Cambridge, Mass., 1967, 464–479.

[30] D. Hilbert, *Problems der Grundlegung der Mathematik*, Atti del Congresso Internationale dei Mathematici, Bologna 3–10 September 1928, Bologna 1929, vol. I, 135–141; także w: Mathematische Annalen 102 (1930), 1–9.

[31] D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, Bd. I 1934, Bd. II 1939.

[32] E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik*, 1891; także: Husserliana, 1970.

[33] L. Kirby, J. Paris, *Initial segments of models of Peano's axioms*, w: A. Lachlan, M. Srebrny, A. Zarach (eds.): *Set Theory and Hierarchy Theory V. Bierutowice, Poland, 1976*, Springer Verlag, LNM 619, Berlin-Heidelberg-New York 1977, 211–226.

[34] L. Kirby, J. Paris, *Accessible independence results for Peano arithmetic*, Bulletin of the London Mathematical Society 14 (1982), 285–293.

[35] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1970.

[36] R. Murawski, *On expandability of models of Peano arithmetic*, I–III, Studia Logica 35 (1976), 409–419; 35 (1976), 421–431; 36 (1977), 181–188.

[37] R. Murawski, *Expandability of models of arithmetic*, w: G. Wechsung (ed.), *Proceedings of Frege Conference 1984*, Akademie-Verlag, Berlin 1984, 87–93.

[38] R. Murawski, *G. Cantora filozofia teorii mnogości*, Studia Filozoficzne 11–12 (1984), 75–88.

[39] R. Murawski, *Matematyczna niezupełność arytmetyki*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości Matematyczne 26 (1984), 47–58.

[40] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. A. Mickiewicza, Poznań 1986.

[41] R. Murawski, *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. A. Mickiewicza, Poznań 1990 (wydanie I), 1991 (wydanie II).

[42] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, (w druku).

[43] J. Paris, L. Harrington, *A Mathematical incompleteness in Peano arithmetic*, w: J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1977, 1133–1142.

[44] D. Prawitz, *Philosophical aspects of proof theory*, w: G. Fløstad (ed.), *Contemporary Philosophy. A New Survey*, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague-Boston-London 1981, 235–277.

[45] C. Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[46] W. Sieg, *Hilbert's program sixty years later*, Journal of Symbolic Logic 53 (1988), 338–348.

[47] S. G. Simpson, *Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations?*, Journal of Symbolic Logic 49 (1984), 783–802.

[48] S. G. Simpson, *Ordinal numbers and the Hilbert's basis theorem*, Journal of Symbolic Logic 53 (1988), 961–974.

[49] S. G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic* (w druku).

[50] C. Smoryński, *The incompleteness theorems*, w: J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1977, 821–865.
[51] C. Smoryński, *Fifty years of self-reference in arithmetic*, Notre Dame Journal of Formal Logic 22 (1981), 357–374.
[52] C. Smoryński, *Self-Reference and Modal Logic*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo 1985.
[53] C. Smoryński, *Hilbert's programme*, CWI Quarterly 1 (1988), 3–59.
[54] W. W. Tait, *Finitism*, Journal of Philosophy 78 (1981), 524–546.
[55] Hao Wang, *Reflections on Kurt Gödel*, A Bradford Book, The MIT Press, Cambridge, Mass., and London 1988.
[56] H. Weyl, *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Veit, Leipzig 1918.