ISSN: 2080-5519
wm.ptm.org.pl

WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE

Tom 53 Nr 2 2017

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II

Redakcja

Redaktor
Tadeusz Nadzieja
Zastępcy Redaktora
Krzysztof Ciesielski
Krzysztof Pawałowski
Sekretarze
Marcin Borkowski
Paweł Mleczko
Dział Recenzji
Maciej Kandulski
Roman Murawski

Komitet Redakcyjny

Piotr Biler
Aleksander Błaszczyk
Maciej Czarnecki
Roman Duda
Krystyna Jaworska
Rafał Latała
Grzegorz Łysik
Piotr Przytycki
Zbigniew Semadeni
Daniel Simson
Paweł Strzelecki
Michał Szurek
Dariusz Wrzosek

rok zał. 1919 ptm
POLSKIE
TOWARZYSTWO
MATEMATYCZNE

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego zostały utworzone w 1955 roku w celu reaktywowania czasopism założonych w XIX wieku przez Samuela Dicksteina: Prac Matematyczno-Fizycznych, których 48 tomów opublikowano w latach 1888-1951, oraz Wiadomości Matematycznych wydanych w 47 tomach w okresie 1897-1939.

Początkowo Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazywały się w dwóch seriach. Aktualnie wydawane są w następujących sześciu seriach:

Seria I:	Commentationes Mathematicae – od 1955 roku,
Seria II:	Wiadomości Matematyczne – od 1955 roku,
Seria III:	Matematyka Stosowana – od 1973 roku,
Seria IV:	Fundamenta Informaticae – od 1977 roku,
Seria V:	Didactica Mathematicae – od 1981 roku,
Seria VI:	Antiquitates Mathematicae – od 2007 roku.

Seria I, wydawana najpierw jako Prace Matematyczne, swoją obecną nazwę otrzymała w 1969 roku, a Seria V – poprzednio Dydaktyka Matematyki – w 2007 roku.

Sprzedaż i prenumerata

Polskie Towarzystwo Matematyczne
ul. Śniadeckich 8
00-956 Warszawa

Sales and subscription

Polish Mathematical Society
ul. Śniadeckich 8
00-956 Warszawa, Poland

Tel. +48 22 629 9592
E-mail: zgptm@ptm.org.pl

Spis treści

List Redaktora · 211
T. Rolski, W. A. Woyczyński, *Wkład Czesława Ryll-Nardzewskiego do teorii prawdopodobieństwa* · 213
T. Downarowicz, *Wkład Czesława Ryll-Nardzewskiego w rozwój teorii ergodycznej* · 235
G. Plebanek, *Czesław Ryll-Nardzewski i teoria miary* · 245
Z. Lipecki, *Doktorzy wypromowani przez Czesława Ryll-Nardzewskiego* · 256
T. Byczkowski, T. Żak, *Seminarium z teorii potencjału procesów stochastycznych na Politechnice Wrocławskiej* · 257
A. Schinzel, *Prace Andrzeja Rotkiewicza z teorii liczb* · 291
L. Maligranda, J. G. Prytuła, *Uniwersytet we Lwowie w latach 1939–1941. Matematyka, fizyka i astronomia* · 303
A. Matczuk, *Działalność Samuela Dicksteina w zakresie polskiej retrospektywnej bibliografii matematycznej* · 331
Wywiad z Iwoną Ryniewicz, Prezes Zarządu mFundacji · 351
W. Piotrowski, *Matematyka i matematycy na polskich medalach* · 355
K. Ciesielski, *Doczekaliśmy się, czyli o symbolach* · 365

Nowi profesorowie
Marek Niezgódka · 371

Laureaci nagród
Jan Okniński (laureat Nagrody Głównej PTM im. Stefana Banacha za 2015 rok) · 375
Dariusz Wrzosek (laureat Nagrody Głównej PTM im. Hugona Steinhausa za 2015 rok) · 380
Piotr Achinger (laureat Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego za 2016 rok) · 382
Adam Kanigowski (laureat Nagrody PTM dla Młodych Matematyków za 2015 rok, Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego za 2016 rok oraz International Banach Prize za 2016 rok) · 384

Krótkie informacje · 391

Z żałobnej karty
Lech Dubikajtis (1927–2014) · 397
Zdzisław Porosiński (1955–2016) · 401
Krystyna Katulska (1950–2017) · 405
Krzysztof Maurin (1923–2017) · 409
Krystyna Skórnik (1939–2017) · 413

Recenzje
Andrzej Białynicki-Birula, Mariusz Skałba, *Lectures on Number Theory* (rec. M. Radziejewski) · 417
Anna Ludwicka, *Matematyczna pizza* (rec. K. Ciesielski) · 419
Dariusz Łukasiewicz, Ryszard Mordarski (red.), *Kobiety w Szkole Lwowsko-Warszawskiej* (rec. J. Jadacki) · 422
Jerzy Mioduszewski, *Continuity. Eleven sketches from the past of mathematics* (rec. J. Waszkiewicz) · 427

Książki nadesłane · 435
Miscellanea · 244, 302, 330, 390, 396, 400, 404, 408, 416, 434

Contents

A letter of the Editor · 211
T. Rolski, W. A. Woyczyński, *Contributions of Czesław Ryll-Nardzewski to probability theory* · 213
T. Downarowicz, *Contributions of Czesław Ryll-Nardzewski to ergodic theory* · 235
G. Plebanek, *Czesław Ryll-Nardzewski and measure theory* · 245
Z. Lipecki, *Ph.D. students of Czesław Ryll-Nardzewski* · 256
T. Byczkowski, T. Żak, *Seminar on theory of potential for stochastic processes at the Wrocław University of Technology* · 257
A. Schinzel, *Number theory papers of Andrzej Rotkiewicz* · 291
L. Maligranda, J. G. Prytuła, *Lvov University 1939–1941: Mathematics, physics and astronomy* · 303
A. Matczuk, *Contributions of Samuel Dickstein to Polish retrospective mathematical bibliography* · 331
Interview with Iwona Ryniewicz, Chairman of the Board of mBank Foundation · 351
W. Piotrowski, *Mathematics and mathematicians on Polish medals* · 355
K. Ciesielski, *We are finally there. A note on notation* · 365

New professors
Marek Niezgódka · 371

Prize winners
Jan Okniński (winner of the Stefan Banach PTM Award 2015) · 375
Dariusz Wrzosek (winner of the Hugo Steinhaus PTM Award 2015) · 380
Piotr Achinger (winner of the Kazimierz Kuratowski Award 2016) · 382
Adam Kanigowski (winner of the Young Mathematician Award 2015, the Kazimierz Kuratowski Award 2016 and the International Banach Prize 2016) · 384

News and announcements · 391

Obituaries
Lech Dubikajtis (1927–2014) · 397
Zdzisław Porosiński (1955–2016) · 401
Krystyna Katulska (1950–2017) · 405
Krzysztof Maurin (1923–2017) · 409
Krystyna Skórnik (1939–2017) · 413

Reviews
Andrzej Białynicki-Birula, Mariusz Skałba, *Lectures on Number Theory* (rev. M. Radziejewski) · 417
Anna Ludwicka, *Mathematical pizza* (rev. K. Ciesielski) · 419
Dariusz Łukasiewicz, Ryszard Mordarski (red.), *Women in the Lvov-Warsaw school of logic* (rev. J. Jadacki) · 422
Jerzy Mioduszewski, *Continuity. Eleven sketches from the past of mathematics* (rev. J. Waszkiewicz) · 427

Book announcements · 435
Miscellanea · 244, 302, 330, 390, 396, 400, 404, 408, 416, 434

Drodzy Czytelnicy Wiadomości Matematycznych,

Redakcja oraz Komitet Redakcyjny *Wiadomości Matematycznych*, działające w prawie nie zmienionym składzie od 2007 roku, kończą swoją pracę wydaniem zeszytu 53(2). Powołany został nowy redaktor, który tworzy nowy zespół, i pod którego redakcją będą wydawane następne zeszyty.

Jedenaście lat pracy zaowocowało wydaniem tomów 43–53. Od tomu 45 czasopismo wychodzi w dwóch zeszytach w nowej szacie graficznej.

Zmiany nastąpiły w organizacji pracy Redakcji. Powołany został Dział Recenzji odpowiedzialny za dobór recenzowanych pozycji, recenzentów, a także za opracowywanie działu *Książki nadesłane*. Zrezygnowaliśmy z usług firm składających teksty, a obowiązki prac redakcyjnych przejęli sekretarze Redakcji.

Decyzje dotyczące publikacji oraz zmian językowych i merytorycznych w nadesłanych materiałach podejmowano po internetowych i osobistych dyskusjach w gronie wszystkich członków Redakcji, często po zasięgnięciu opinii recenzentów lub członków Komitetu Redakcyjnego. Rola redaktora sprowadzała się do postawienia przysłowiowej „kropki nad i". Uważam, że wypracowanie tej formy podejmowania decyzji było dorobkiem odchodzącej Redakcji i powinna ona stać się tradycją.

Patrząc z perspektywy ostatnich lat sądzę, że udało się, mimo wielu przeciwności, zachować charakter czasopisma. Były publikacje wybitne, czytane przez wielu, ale też takie, które trafiały tylko do wąskiego kręgu czytelników. Były przedsięwzięcia, które, według mojej oceny, w chwili podejmowania decyzji o ich rozpoczęciu, miały nikłe szanse na sukces. Taką inicjatywą było wydanie w języku angielskim zeszytu 48(2) z okazji 6 Europejskiego Kongresu Matematyków w Krakowie w 2012 roku. Pomysł wyszedł od ówczesnego Prezesa PTM Stefana Jackowskiego jesienią 2011 roku i miał być zrealizowany do czerwca 2012 roku. Moje doświadczenia wskazywały, że prace nad każdym zeszytem należy rozpocząć rok przed jego wydaniem. Dodatkową trudnością był fakt, że o większość tekstów poprosiliśmy wybitnych zagranicznych matematyków, których należało przekonać do napisania artykułu lub udzielenia wywiadu. Dzięki wyjątkowej mobilizacji całego zespołu *Wiadomości Matematycznych*, zeszyt wyszedł w terminie i chyba obyło się bez znaczących uchybień redakcyjnych.

Niestety zdarzały się też porażki, tym bardziej bolesne, że zwykle dotyczyły braku tekstów o zmarłych matematykach.

Wiadomości Matematyczne wychodzą już ponad sto lat i to jest sukces, którego nie byłoby, gdyby nie wsparcie środowiska matematycznego, okazane również odchodzącej Redakcji w czasie jej działalności. Za publikacje w *Wiadomościach Matematycznych* nie otrzymuje się punktów, a czas włożony w przygotowanie artykułu, co podkreślało wielu autorów, znacznie przewyższa poświęcony publikacjom w czasopismach punktowanych. Za trud, jaki włożyli autorzy w przygotowanie tekstów dla naszego pisma, składam bardzo serdeczne podziękowania w imieniu swoim, Redakcji i wszystkich Czytelników.

Z Redakcją *Wiadomości Matematycznych* związany jestem od 1995 roku. W latach 1995–2006 byłem zastępcą redaktora, a od 2007 roku redaktorem. W tym czasie wyrosło nowe pokolenie matematyków i prawie odeszło to, z którym byłem bardzo związany. Czas więc oddać stery czasopisma w inne ręce. Przez lata pracy w Redakcji robiłem co mogłem, i jak najlepiej umiałem. Moim następcą został jeden z zastępców redaktora, Krzysztof Ciesielski, któremu życzę wytrwałości i sukcesów w prowadzeniu *Wiadomości Matematycznych* przez następne lata.

Z koleżeńskimi pozdrowieniami

Warszawa

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 213–234
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Tomasz Rolski (Wrocław), Wojbor A. Woyczyński (Cleveland, OH)

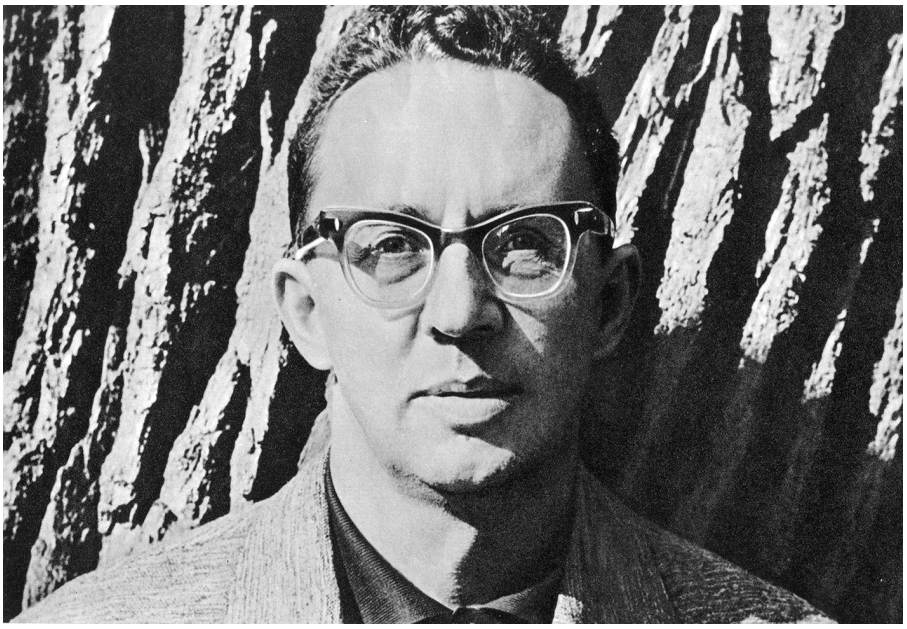
Wkład Czesława Ryll-Nardzewskiego do teorii prawdopodobieństwa

1. Początki

Czesław Ryll-Nardzewski (popularnie zwany CRN-em) był jednym z najbardziej oryginalnych i wszechstronnych matematyków w powojennej Polsce. Jego eleganckie pomysły, dowody i odkrycia w wielu dziedzinach matematyki – m.in. w teorii modeli, teorii miary, teorii prawdopodobieństwa, topologii i analizie funkcjonalnej – powszechnie uznaje się za legendarne. W niniejszym artykule przedstawiamy przegląd jego wkładu do teorii prawdopodobieństwa, zaczynając od procesów punktowych i ciągów de Finnettiego, aż do losowych procesów funkcjonalnych i teorii ergodycznej oraz przedyskutujemy wpływ jego prac na działalność innych matematyków. Czytelnik może znaleźć listę jego publikacji z teorii prawdopodobieństwa na końcu tego tekstu.

W latach pięćdziesiątych XX wieku we Wrocławiu wpływ Hugona Steinhausa i częściowo Edwarda Marczewskiego nakłonił CRN-a do rozpoczęcia badań w teorii prawdopodobieństwa. Lata od 1951 do 1953 były niezaprzeczalnie *anni mirabiles* dla młodego matematyka. Tom dwunasty *Studia Mathematica* z 1951 roku zawierał osiem następujących prac CRN-a [1–8]:

- *Sur les produit de composition* (współautor: J. Mikusiński),
- *On the ergodic theorems I* (*Generalized ergodic theorems*),
- *On the ergodic theorems II* (*Ergodic theory of continued fractions*),
- *Sur les fonctions indépendantes IX* (*Séries des fonctions positives*) (współautor: H. Steinhaus),
- *Sur les suites et les fonctions également réparties*,
- *Sur les séries de Taylor* (współautor: H. Steinhaus),



Czesław Ryll-Nardzewski około 1965 roku

– *Sur l'operateur de translation* (współautor: J. Mikusiński),
– *Certaines théorèmes des moments*.

Ta seria sukcesów była kontynuowana w tomie trzynastym czasopisma z 1953 roku, gdzie znaleźć można następnych siedem prac CRN-a [10–16]:

– *Blackwell's conjecture on power series with random coefficients*,
– *Sur la convergence des séries de puissances de l'opérateur différentiel*,
– *Sur les séries de puissances dans le calcul opératoire*,
– *A theorem on bounded moments* (współautor: J. Mikusiński) ,
– *Un théorème sur le produit de composition de plusieurs variables* (współautor: J. Mikusiński),
– *Remarks on the Poisson stochastic process I* (współautorzy: K. Florek, E Marczewski),
– *Théorèmes abstraits de Kronecker et les fonctions presque périodiques* (współautor: S. Hartman).

2. Procesy punktowe i miary losowe

2.1. *Procesy Poissona.* Zacznijmy od przypomnienia współczesnej definicji procesu Poissona na $(E, \mathcal{E})$, przy czym – jak w książce Daley i Vere Jones [33, str. 34] – E jest zupełną i ośrodkową przestrzenią metryczną, a $\mathcal{E}$ jest bore-

lowską σ-algebrą generowaną przez kule otwarte w E. Oznaczmy przez $\mathcal{N}$ odpowiednio przestrzeń topologiczną lokalnie skończonych miar liczących, to znaczy miar o wartościach w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych uzupełnionych przez punkt $+\infty$, które przyjmują skończone wartości na zbiorach ograniczonych.

Definicja 2.1. *Proces punktowy* jest to mierzalne odwzorowanie $N\colon (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathcal{N}))$. Proces punktowy nazywa się *procesem punktowym Poissona* z lokalnie skończoną miarą λ, jeśli dla dowolnej rodziny rozłącznych ograniczonych zbiorów $B_j \in \mathcal{E}$ $(j = 1, \ldots, m)$ zmienne losowe $N(B_1), \ldots, N(B_m)$ są niezależne oraz dla każdego $B \in \mathcal{E}$, $N(B)$ jest zmienną losową ze średnią $\lambda(B)$.

Termin „procesy punktowe" pojawił się po raz pierwszy w pracy Williama Fellera opublikowanej w 1940 roku, natomiast Ove Lundberg i Conny Palm użyli go w swoich pracach doktorskich z lat 1940 oraz 1943. Dysertacja Palma, napisana po niemiecku, używała terminu *Punktprozesse*.

W latach pięćdziesiątych XX wieku we Wrocławiu dogłębne studia procesów Poissona były zainicjowane przez Edwarda Marczewskiego (zob. [15]) we współpracy z Kazimierzem Florkiem i Ryll-Nardzewskim. W ich badaniach $E = [0, \infty)$ i proces Poissona $\{N(t)\}$ był zdefiniowany jako niemalejący, prawostronnie ciągły proces o wartościach w zbiorze liczb całkowitych i niezależnych i stacjonarnych przyrostach. Obecnie takie procesy są nazywane procesami liczącymi, a ich przyrosty są interpretowane jako liczba losowych punktów zawartych w przedziale $(t, t + s]$. W innej pracy z tego okresu (zob. [50]) Marczewski, wychodząc od pojęcia procesu liczącego $N(t)$, rozszerzył tę interpretację do ilości $N(B)$ punktów losowych w borelowskim zbiorze B (obserwacja tego typu pojawiła się również w pracy Craméra [32]).

Parę lat później, w pionierskiej pracy [17] opublikowanej w 1954 roku w *Studia Mathematica*, Ryll-Nardzewski wprowadził pojęcie niejednorodnego procesu punktowego Poissona w formie używanej do dzisiaj[1]. Rozpatrzył on ustalony borelowski podzbiór E w skończeniewymiarowej przestrzeni euklidesowej i przeliczalną algebrę jego borelowskich podzbiorów $\mathcal{E}_0$ generującą σ-algebrę $\mathcal{E}$ zbiorów borelowskich w E. W tej sytuacji przestrzeń probabilistyczna Ω była przestrzenią rzeczywistych, skończonych, σ-addytywnych funkcji zbiorów na $\mathcal{E}_0$ z miarą probabilistyczną $\mathbb{P}$ zdefiniowaną na σ-algebrze podzbiorów Ω. W pracy zakładał dodatkowo, że:

(a) $\mathcal{E}_0 \ni B \mapsto \omega(B)$ jest $\mathbb{P}$-mierzalne,

[1] Guenter Last zwrócił uwagę, że podobny pomysł zdefiniowania procesu punktowego Poissona był przedstawiony wcześniej w pracach Wienera [54] oraz Wienera i Wintnera [55], który został przeoczony przez matematykow po drugiej wojnie swiatowej.

(b) $\omega(B_1), \ldots, \omega(B_k)$ są niezależne w przypadku, gdy B_j są rozłącznymi zbiorami należącymi do $\mathcal{E}_0$.

W tej pracy punkt $x_0 \in E$ był nazwany *osobliwym*, jeśli

$$\mathbb{P}(\omega(\{x_0\}) \neq 0) > 0,$$

a miara intensywności była zdefiniowana przez wzór $m(B) = \int \omega(B)\, \mathrm{d}\mathbb{P}$. Podstawowym założeniem było, że proces punktowy jest prosty, tzn. $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ dla $\Omega_1 \subset \Omega$ składających się tylko z takich czysto atomowych funkcji zbiorów, że $\omega(x_0) = 1$ dla każdego atomu x_0. Praca zawierała następujący wynik.

Twierdzenie 2.1. *Załóżmy, że m jest miarą skończoną na $\mathcal{E}$. Jeśli $x_0 \in E$ jest atomem dla m (czyli x_0 jest osobliwy), to $\omega(\{x_0\})$ przyjmuje wartości jeden albo zero z prawdopodobieństwem $m(\{x_0\})$ lub $1 - m(\{x_0\})$. Jeśli B nie zawiera punktów osobliwych, to $\omega(B)$ ma rozkład Poissona*

$$\mathbb{P}(\omega(B) = k) = \frac{m(B)^k}{k!} e^{-m(B)}. \tag{1}$$

Reszta pracy rozszerzyła powyższe twierdzenie na przypadek, gdy m jest σ-skończona.

W pracy [18] z 1954 roku, kontynuując serię artykułów o procesach Poissona, CRN zdefiniował proces punktowy zaczynając od losowego przeliczalnego zbioru X liczb rzeczywistych, zdefiniowanego przez ciąg $\{X_j\}$ zmiennych losowych. Dla każdego przedziału $I \subset \mathbb{R}$ wprowadził zmienną losową

$$N(I) = \text{liczba takich indeksów } j, \text{ że } X_j \in I$$

i przyjął następujące założenia:

(a) $\mathbb{P}(X_j \neq X_k) = 1$ dla $j \neq k$,

(b) $\mathbb{P}(\lim_j |X_j| = \infty) = 1$,

(c) $\mathbb{P}(X_j = a) = 0$ dla każdego j i rzeczywistego a.

Jeśli dla każdej rodziny rozłącznych przedziałów $I_1, \ldots, I_k$ zmienne losowe $N(I_1), \ldots, N(I_k)$ są niezależne, to wyniki wcześniejszej pracy CRN-a [17] implikują, że rozkład $\mathbb{P}(N(I) = k)$ jest poissonowski, to znaczy, że dla pewnej σ-skończonej miary m na prostej rzeczywistej równanie (1) jest spełnione.

W artykule [18] był rozpatrywany specjalny przypadek jednorodnego (stacjonarnego) procesu z $m(I) = \lambda|I|$. Warto wspomnieć, że w powyższej pracy CRN był prawdopodobnie pierwszym matematykiem, który odkrył to, co Kingman później nazwał w książce [45] „charakteryzacją procesu Poissona przez procesy Bernoullego".

Lemat 2.2. *Dla danego przedziału $I \subset \mathbb{R}$ warunkowy rozkład prawdopodobieństwa przy danym $N(I) = k$ zbioru k punktów X należących do I jest identyczny z jednostajnym rozkładem k niezależnych punktów należących do I.*

W powyższej pracy wprowadzono również następującą transformatę. Określmy

$$\phi(f) = \mathbb{E} \prod_j (1 + f(X_j)),$$

dla takiej funkcji f zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych, że całka $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t$ jest skończona. Ta transformata może być interpretowana jako rodzaj „funkcjonału charakterystycznego". Korzystając z założenia, że X jest jednorodnym procesem Poissona, przy pomocy powyższego lematu CRN dowiódł, że ten funkcjonał charakterystyczny ma postać

$$\phi(f) = \exp\left(\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \mathrm{d}t\right).$$

Ten wynik powinien być widziany w kontekście bardziej ogólnych probabilistycznych funkcjonałów charakterystycznych zdefiniowanych dla pewnych klas funkcji h (zob. [33, str. 15]), przez formułę $\mathbb{E} \prod_j h(x_j)$, a również w związku z wynikami o funkcjonałach Laplace'a zawartych w książce Olava Kallenberga [41] o miarach losowych.

Dysponując powyższym lematem, CRN był w stanie udowodnić następujące główne twierdzenie pracy.

Twierdzenie 2.3. *Załóżmy, że $\{X_j\}$ jest jednorodnym procesem Poissona z parametrem λ i $\{Y_j\}$ jest niezależnym od niego ciągiem wymienialnych zmiennych losowych. Wtedy proces punktowy $\{X_j + Y_j\}$ jest również jednorodnym procesem Poissona z tym samym parametrem λ.*

Przypomnijmy, że ciąg $\{Y_i\}$ zmiennych losowych jest *wymienialny* (w sensie de Finettiego), jeśli dla każdego k i dowolnej permutacji $i_1, i_2, \ldots, i_k$ indeksów $1, 2, \ldots, k$, wspólny rozkład $Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_k}$ jest niezależny od permutacji. Wrócimy do tego pojęcia w paragrafie 5 tego artykułu.

2.2. *Nowe podejście do procesów punktowych.* W monografii [33] poświęconej procesom punktowym i opublikowanej w 2003 roku podkreśla się, że w pracy [20] z 1961 roku, która ukazała się w sprawozdaniach z czwartego berkeleyowskiego symposium pod tytułem *On processes of calls*, CRN opisał fundamentalne własności procesów punktowych i dostarczył nowych technik analizy tzw. prawdopodobieństw Palma. We wstępie do tej pracy Ryll-Nardzewski napisał:

Teoria procesów połączeń telefonicznych jest dobrze rozwinięta. W niniejszym artykule rozważę pewne pytania, które – wedle mojej opinii – nie zostały jeszcze dostatecznie dobrze przeanalizowane z punktu widzenia teorii miary.

W pracy znajduje się wyjaśnienie i uzupełnienie jego wcześniejszej idei dotyczącej procesów punktowych i streszczonej w poprzednim punkcie. Poniżej Ω zostało zdefiniowane jako klasa wszystkich przeliczalnych podzbiorów prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, które mają skończony przekrój z każdym przedziałem ograniczonym. CRN zdefiniował

$$N(\omega, B) := \mathrm{card}(\omega \cap B)$$

dla każdego $\omega \in \Omega$ i wybrał σ-algebrę wygenerowaną przez wszystkie funkcje $N(\cdot, B)$, przy czym B jest zbiorem borelowskim, jako klasę mierzalnych podzbiorów $\mathcal{F}$. CRN zauważył, że N może być również rozpatrywane jako miara czysto atomowa, skończona na zbiorach ograniczonych. Ta obserwacja ustaliła nowoczesne podejście do procesów punktowych, gdzie jako proces punktowy rozumie się mierzalne odwzorowanie o wartościach w przestrzeni miar atomowych $\mathcal{N}$. Następną ważną obserwacją była uwaga, że $(\Omega, \mathcal{F})$ może być odwzorowane wzajemnie jednoznacznie na przedział $I = [0,1]$ i rodzinę wszystkich borelowskich podzbiorów I, dzięki czemu można było uniknąć trudności związanych z istnieniem regularnych wersji prawdopodobieństw warunkowych.

Jedną z podstawowych kwestii w teorii procesów punktowych w tym czasie było pytanie, jak zdefiniować prawdopodobieństwo warunkowe procesów punktowych przy warunku, który ma prawdopodobieństwo zero. Kluczową trudnością było pełne zrozumienie dwóch typów rozkładów prawdopodobieństwa rozpatrywanych przez Palma i Chinczyna – rozkładu czasu do następnego wydarzenia losowego od ustalonego, ale dowolnego punktu startowego i rozkładu czasu od jednego do następnego wydarzenia losowego. Związek między tymi dwoma rozkładami jest opisany przez równania Palma–Chinczyna, a problem jest dobrze naświetlony przez tzw. paradoks Fellera o czasie oczekiwania (zob. [36, str. 12]).

Podejście Ryll-Nardzewskiego do zdefiniowania tego, co w dzisiejszej terminologii jest zwane rozkładem Palma, było następujące. Załóżmy, że dla ograniczonego zbioru B miara intensywności spełnia warunek $m(B) = \mathbb{E}N(B) < \infty$ i dla każdego losowego wydarzenia $A \in \mathcal{F}$ całka

$$\int_A N(\omega, B)\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega),$$

traktowana jako funkcja zbioru B, jest absolutnie ciągła względem miary m. Wtedy, wykorzystując twierdzenie Radona–Nikodyma, możemy napisać

$$\int_A N(\omega, B)\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_B \mathbb{P}^o(A|t)\,m(\mathrm{d}t), \tag{2}$$

przy czym $\mathbb{P}^o(A|t)$ jest m-mierzalną funkcją t.

Dla każdego ustalonego A pochodna Radona–Nikodyma $\Pi(A|t)$ jest jedyna m-p.w. i możemy zawsze założyć, że jest to jednoznacznie określona miara probabilistyczna zdefiniowana dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$. Wzór (2) może być uogólniony do formuły

$$\int f(\omega) N(\omega, B)\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_B m(\mathrm{d}t) \int f(\omega)\,\Pi(\mathrm{d}\omega|t) \tag{3}$$

dla $\mathbb{P}$-całkowalnych funkcji f. Powyższe argumenty mogą być rozszerzone na przypadek dowolnych zupełnych i ośrodkowych przestrzeni metrycznych E i są one standardowym narzędziem przy definicji rozkładów warunkowych dla niestacjonarnych procesów punktowych.

Dla procesów punktowych na prostej rzeczywistej stacjonarność jest często bardzo ważnym założeniem. Przypomnijmy, że proces punktowy nazywa się *stacjonarnym*, jeśli $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A^t)$ dla każdego t i A, przy czym operator przesunięcia jest zdefiniowany następująco: $\omega^t = \omega + t$ i $\{\omega \in A^t\} = \{\omega^{-t} \in A\}$. Jeżeli $\mathbb{P}(N(\mathbb{R}) = 0) = 0$, to – oznaczając przez α intensywność procesu punktowego – otrzymujemy $m(\mathrm{d}t) = \alpha\,\mathrm{d}t$. Poniższe twierdzenie CRN-a pokazuje istnienie rozkładów Palma dla takich procesów.

Twierdzenie 2.4. *Istnieje jedyna miara probabilistyczna* $\mathbb{P}^o$ *na* $(\Omega, \mathcal{F})$, *dla której miara*

$$\Pi(B|t) = \mathbb{P}^o(B^{-t}),$$

zależąca od parametru t, *spełnia warunek* (2) *dla wszystkich* B *i* A.

W tej sytuacji warunek (3) jest specjalnym przypadkiem tzw. równania Campbella–Meckego

$$\int f(\omega) N(\omega, B)\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \alpha \int \mathbb{P}^o(d\omega) \int_B f(\omega^t)\,\mathrm{d}t.$$

Warto zauważyć, że $\mathbb{P}^o(\Omega_0) = 1$ dla $\Omega_0 = \{\omega : 0 \in \omega\}$. Można wówczas dla $j \in \mathbb{Z}$ zdefiniować na $(\Omega_0, \Omega_0 \cap \mathcal{F}, \mathbb{P}^o)$ zmienne losowe η_j jako odległości między punktami losowymi. Załóżmy, że η_0 jest odległością między zerem i najbliższym punktem losowym po prawej stronie. Głównym wynikiem CRN-a był następujący rezultat.

Twierdzenie 2.5. *Przy powyższych założeniach*
(a) $\eta_j > 0$,
(b) $\mathbb{E}^o \eta_j = \alpha^{-1}$,
(c) $\{\eta_j\}$ *tworzy ciąg stacjonarny.*
Na odwrót, każdy ciąg zmiennych losowych $\{\eta_j\}$ *spełniających warunki* (a–c) *może być otrzymany w ten sposób. Co więcej, istnieje jednoznaczna relacja między* $\mathbb{P}$ *i* $\mathbb{P}^o$*, która jest zdefiniowana przez następujące równanie*

$$\int f(\omega)\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \alpha \int_{\Omega_0} \mathbb{P}^o(\omega) \int_0^{\eta_0} f(\omega^{-t})\,\mathrm{d}t.$$

2.3. *Najstarsza osoba i miary losowe na algebrach Boole'a.* Fundamentalne wyniki Ryll-Nardzewskiego, które opisujemy poniżej wywarły ogromny wpływ na następne pokolenie probabilistów. Kingman w pracy [44] napisał:

> Zalety używania pojęcia miary losowej są oczywiste, gdy przestrzeń jest bardziej skomplikowana niż linia prosta. Na przykład, w przypadku procesu punktowego w wielu wymiarach byłoby trudno pracować używając pojęcia $X(t)$ (procesu liczącego), ale jest łatwo i naturalnie rozpatrzyć taką miarę losową Φ, że $\Phi(B)$ jest liczbą punktów procesu w zbiorze B.

Takie podejście jest zawarte *implicite* w pracy Ryll-Nardzewskiego [20][2] o miarach losowych, a Kallenberg (zob. [41]) uznaje ogromny wpływ CRN-a na tę teorię.

Osiągnięcia Ryll-Nardzewskiego w teorii miar losowych miały również decydujący wpływ na następne pokolenie matematyków pracujących w tej dziedzinie. Podamy tutaj tylko dwa przykłady cytując nasze własne prace. W 1970 roku Domokos Szász i Wojbor A. Woyczyński udowodnili w pracy [56] następujący wynik.

Twierdzenie 2.6. *Niech* $\mathcal{B}$ *będzie* σ*-algebrą booleowską, a* $\mathcal{N}$ *oznacza przestrzeń nieujemnych zmiennych losowych o wartościach całkowitych. Jeśli* $X\colon \mathcal{B} \to \mathcal{N}$ *jest miarą losową o wartościach niezależnych na elementach rozłącznych, to dla każdego* $b \in \mathcal{B}$ *z prawdopodobieństwem jeden*

$$X(b) = \sum_{a_i \leqslant b} X(a_i) + \sum_{m=1}^{\infty} m X^{(m)}(b),$$

[2] Chociaż w tej pracy CRN rozpatrywał tylko procesy na prostej, jego podejście było równie pożyteczne w przypadku wielowymiarowych procesów punktowych.

przy czym $X^{(m)}$ *dla* $m = 1, 2, \ldots$ *są poissonowskimi miarami losowymi na* $\mathcal{B}$. *Co więcej, wszystkie zmienne losowe* $X(a_i)$ *i odwzorowania* $X^{(m)}$ *są wzajemnie niezależne.*

Powyższy wynik był również umotywowany przez poprzednie rezultaty Chinczyna [43], Renyi'ego [52] i Prekopy [51], ale dowody używały technik zapożyczonych z prac CRN-a i autorzy osobiście dziękowali mu za pomoc w udoskonaleniu pracy. Ryll-Nardzewski również przedstawił pracę [56] do druku w Biuletynie Akademii jako członek Polskiej Akademii Nauk.

W 1987 roku Tomasz Rolski opublikował wspólną z Ryll-Nardzewskim pracę [27], w której znajdujemy odpowiedź na intrygujące pytanie o prawdopodobieństwo śmierci najstarszej osoby w danej populacji. Problem był modelowany poprzez stacjonarny proces Poissona z intensywnością λ na $\mathbb{R}$ czasów urodzin. Do każdego z tych punktów została dołączona długość życia i te zmienne losowe były niezależne, identycznie rozłożone z rozkładem G i niezależne od oryginalnego procesu Poissona urodzin. Oznaczając przez $Y(t)$ wiek najstarszego osobnika w populacji w czasie t, w pracy wykazano, że prawdopodobieństwo jego śmierci jest równe

$$\int_0^\infty e^{-\lambda \int_t^\infty (1-G(u)\,du)}\,\mathrm{d}G(t).$$

W pracy tej również badano sam proces $Y(t)$, a dowody używały pojęć związanych z niejednorodnym procesem Poissona na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

3. Szeregi losowe

3.1. *Losowe procesy potęgowe i brzeg naturalny.* CRN przedstawił szereg problemów badawczych w *Nowej Księdze Szkockiej* (zob. [28]) które wzbudziły duże zainteresowanie w międzynarodowej społeczności matematycznej. Dobrym przykładem jest opublikowane w *Colloquium Mathematicum* poniższe zagadnienie.

Problem (Problem 194, 2 lipca 1952 roku)**.** Jeśli współczynniki rozwinięcia funkcji zespolonej danej wzorem $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ spełniają warunek $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$, to czy jest prawdą, że $|f(x)|$ ma bezwzględnie zbieżny szereg Fouriera?

Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna, a wynik ten został dowiedziony przez francuskiego matematyka Jeana-Pierre'a Kahane'a w artyku-

le [39]. Kariera Kahane'a w teorii szeregów funkcji losowych, ukoronowana publikacją znanej monografii [40], została zapoczątkowana tą właśnie pracą.

Pomysł studiowania szeregów losowych funkcji wyszedł oryginalnie w 1896 roku od Emila Borela, ale pierwszym znaczącym wynikiem w tej dziedzinie było następujące twierdzenie udowodnione przez Hugona Steinhausa w 1930 roku.

Twierdzenie 3.1. *Jeśli* $\{r_n\}$ *jest ciągiem liczb dodatnich spełniających warunek*

$$0 < \limsup r_n^{1/n} < \infty$$

a ω_n *są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładem jednostajnym na* $[0,1]$, *to funkcja określona wzorem*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n e^{2\pi i \omega_n} z^n$$

ma z prawdopodobieństwem jeden swój okrąg zbieżności jako brzeg naturalny.

Przypomnijmy, że jeśli szereg potęgowy ma promień zbieżności r i definiuje funkcję analityczną f wewnątrz dysku o tym promieniu, to punkt na okręgu zbieżności, dla którego istnieje otoczenie, w którym f ma analityczne rozszerzenie, jest nazywany *punktem regularnym*. W przeciwnym przypadku, punkt jest nazwany *punktem osobliwym*. Okrąg jest nazywany *brzegiem naturalnym* (*analityczności*), jeśli wszystkie jego punkty są osobliwe. W 1932 roku Paley i Zygmund rozszerzyli wynik Steinhausa na szeregi losowe postaci

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pm r_n z^n,$$

przy czym ± jest ciągiem Rademachera.

W 1947 roku, w rozmowie z Hugonem Steinhausem, David Blackwell sformułował przypuszczenie, że szereg losowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n$$

z niezależnymi współczynnikami X_n albo ma okrąg zbieżności jako brzeg naturalny, albo można do niego dodać taki deterministyczny szereg Taylora, że nowy szereg Taylora ma większy okrąg zbieżności, który jest jego brzegiem naturalnym. Tak jest w prostym przypadku szeregu losowego

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n \pm 1) z^n,$$

który ma promień zbieżności równy $\frac{1}{2}$. Ale po odjęciu deterministycznego szeregu Taylora $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ od $F(z)$, pozostały szereg potęgowy z losowymi, niezależnymi i symetrycznymi współczynnikami Bernoullego ±1 ma promień zbieżności jeden, co wynika z klasycznej nierówności Kołmogorowa (zob. [48]). W opublikowanej w 1953 roku pracy [10] CRN udowodnił, że hipoteza Blackwella jest prawdziwa. Dokładniej, twierdzenie Ryll-Nardzewskiego (szeroko cytowane i używane w wielu pracach i monografiach, na przykład [40]), może być sformułowane jak poniżej.

Twierdzenie 3.2. *Dla danego $r_F > 0$ albo $|z| = r_F$ jest prawie wszędzie brzegiem naturalnym dla $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n$, albo istnieje taka deterministyczna funkcja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, że $|z| = r_{F-f} > r_F$ jest prawie wszędzie brzegiem naturalnym dla $F(z) - f(z)$.*

Pomysłowa metoda dowodu użyta przez CRN-a posłużyła mu w otrzymaniu paru innych wyników w tej dziedzinie, włączając analogiczny rezultat dla szeregów Dirichleta

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n e^{-\lambda_n s},$$

przy czym $\lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > 0$, a X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach zespolonych oraz s jest liczbą zespoloną, Dowiódł on również – wykorzystując omawianą metodę – twierdzenia Cartana–Thullena o tym, że wielomianowo wypukły zbiór otwarty jest obszarem holomorficznym. Przypomnijmy, że zbiór otwarty H w $\mathbb{C}^m$ nazywa się *wielomianowo wypukły*, jeśli dla dowolnego punktu $(a_1, \ldots, a_m)$ we wnętrzu H istnieje taki wielomian $P(z_1, \ldots, z_m)$, że $|P| < 1$ na H i $|P(a_1, \ldots, a_m)| > 1$ (zob. na przykład [40, str. 37]).

3.2. *Zbieżność wektorowych szeregów losowych w przestrzeniach nieskończeniewymiarowych.* W połowie lat siedemdziesiątych XX wieku, w serii prac [23–25] (zob. również *Appendix* w [48], w którym zawarte są wyniki systematycznie streszczone w tym punkcie), CRN i jego współpracownicy powrócili do problemów związanych z szeregami losowymi, ale w kontekście zmiennych losowych o wartościach w podprzestrzeniach Banacha i innych przestrzeniach nieskończonego wymiaru.

Rozpatrzmy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ zdefiniowanych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ z wartościami w przestrzeni Banacha F.

Następujące fakty są dobrze znane.

Twierdzenie 3.3. *Jeśli rozważymy* $\sum X_k$ *jako szereg w zupełnej liniowej przestrzeni metrycznej* $\mathbb{E}$ (*powiedzmy, podprzestrzeni* $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{F})$), *to następujące warunki są równoważne:*

(a) *szereg* $\sum X_k$ *jest bezwarunkowo zbieżny, tzn. szereg jest zbieżny w* $\mathbb{E}$ *po dowolnej permutacji jego składników,*

(b) *wszystkie szeregi* $\sum X_{k_i}$ *złożone z podciągów* $X_{k_1}, X_{k_2}, \ldots, (k_1 < k_2 < \cdots)$ *są zbieżne w* $\mathbb{E}$,

(c) *dla dowolnego ciągu* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots = \pm 1$, *szereg* $\sum \varepsilon_k X_k$ *jest zbieżny w* $\mathbb{E}$.

Jeśli $\mathbb{E}$ *jest przestrzenią Banacha* (*powiedzmy, składającą się że zmiennych losowych o wartościach w* $\mathbb{F}$, *na przykład* $\mathbb{E} = \mathcal{L}^p(\mathbb{F})$, $p \geqslant 1$), *to dodatkowo* (a), (b) *i* (c) *są równoważne następującemu warunkowi:*

(d) *dla każdego ograniczonego ciągu* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{R}$ *szereg* $\sum \lambda_k X_k$ *jest zbieżny w* $\mathbb{E}$.

Chociaż w przypadku ogólnej przestrzeni metrycznej zdanie (a) nie implikuje (d), to w specjalnym przypadku, gdy $\mathbb{E} = \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{F}) = \mathcal{L}^0(\mathbb{F})$, to znaczy jest przestrzenią wszystkich zmiennych losowych o wartościach w $\mathbb{F}$, z metryką indukowaną przez topologię zbieżności według prawdopodobieństwa, to w dalszym ciągu mamy równoważności (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d), które są konsekwencjami następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.4. *Niech* (X_k) *będzie ciągiem elementów* $\mathcal{L}^0(\mathbb{F})$, *przy czym* $\mathbb{F}$ *jest przestrzenią Banacha. Wtedy szereg* $\sum X_k$ *jest bezwarunkowo zbieżny w* $\mathcal{L}^0(\mathbb{E})$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ograniczonego ciągu* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{R}$ *szereg* $\sum \lambda_k X_k$ *jest zbieżny w* $\mathcal{L}^0(\mathbb{F})$.

W dowodzie powyższego twierdzenia istotną rolę odgrywa następujący elegancki lemat, z zaskakującymi stałymi uniwersalnymi, dotyczący uogólnionych zmiennych losowych Bernoullego.

Lemat 3.5. *Niech* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ *będzie ciągiem liczb rzeczywistych o wartościach bezwzględnych nie przekracających jedności i niech* ϖ_λ *będzie takim uogólnionym rozkładem Bernoullego na* $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, *że zmienne losowe* $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}} \ni (\varepsilon_k) \mapsto \varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, 2, \ldots$, *są niezależne oraz* $\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \varepsilon_j \mathrm{d}\varpi_\lambda = \lambda_j$. *Wtedy dla dowolnego ciągu* $x_1, x_2, \ldots$ *elementów przestrzeni Banacha* $\mathbb{F}$ *i dla dowolnego* $n \in \mathcal{N}$ *zachodzi nierówność*

$$\varpi\left\{(\varepsilon_k) : \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\right\| \geqslant \tfrac{1}{8}\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\|\right\} \geqslant \tfrac{1}{8},$$

przy czym $\varpi = \frac{1}{2}(\varpi_0 + \varpi_\lambda)$.

Ostatnia nierówność implikuje, że dla każdego $c > 0$ zachodzi inkluzja

$$\left\{c : \tfrac{1}{c} \max_{\varepsilon_k = \pm 1} P\Big\{\omega : \Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k X_k(\omega)\Big\| > c\Big\} \leqslant 1\right\} \subset$$
$$\subset \left\{\tfrac{1}{8}c : \tfrac{1}{c} P\Big\{\omega : \Big\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k(\omega)\Big\| > c\Big\} \leqslant 1\right\}$$

i że powyższa relacja zawierania oraz definicja quasinormy

$$\|X\|_\bullet := \min\Big\{c : c^{-1} P\{\omega : \|X(\omega)\| > c\} \leqslant 1\Big\},$$

na $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{F})$ dają nam również następujący zaskakujący rezultat.

Twierdzenie 3.6. *Niech* $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{L}^0(\mathbb{F})$ *i* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{R}$, $|\lambda_k| \leqslant 1$ *dla* $k = 1, 2, \ldots$ *Wtedy dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi nierówność*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\Big\|_\bullet \leqslant 8 \max_{\varepsilon_k = \pm 1} \Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k X_k\Big\|_\bullet.$$

Problem zbieżności prawie wszędzie w tym kontekście był również przedyskutowany w powyższym artykule.

Będziemy mówić, że szereg zmiennych losowych $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ *jest zbieżny bezwarunkowo prawie wszędzie*, jeśli każda permutacja (X_k) daje szereg zbieżny prawie wszędzie.

Dla takiej (niemetrycznej!) zbieżności sytuacja jest kompletnie inna niż opisana na początku tego punktu. Po pierwsze, okazuje się, że warunek zbieżności prawie wszędzie wszystkich szeregów $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k X_k$, przy czym $\varepsilon_k = \pm 1$ dla $k = 1, 2, \ldots$, nie jest wystarczający dla bezwarunkowej zbieżności prawie wszędzie szeregu $\sum X_k$ (nawet w przypadku rzeczywistych zmiennych losowych X_k, o czym niżej). Niemniej, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.7. *Jeśli* $(X_k) \subset \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{F})$ *i szereg* $\sum X_k(\omega)$ *jest zbieżny bezwarunkowo prawie wszędzie, to dla każdego ograniczonego ciągu* $(\lambda_k) \subset \mathbb{R}$ *szereg* $\sum_{\lambda_k} X_k(w)$ *jest zbieżny bezwarunkowo prawie wszędzie*

Dowód wynika wprost z następujących lematów, z których pierwszy może być nazwany wynikiem o „jednostajności w zbieżności prawie wszędzie".

Lemat 3.8. *Jeśli szereg* $\sum X_k(\omega)$ *jest zbieżny bezwarunkowo prawie wszędzie dla każdego ciągu* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots = \pm 1$, *to szereg* $\sum \varepsilon_k X_k(\omega)$ *jest zbieżny bezwarunkowo prawie wszędzie.*

Lemat 3.9. *Jeśli szereg* $\sum \varepsilon_k X_k(\omega)$ *jest zbieżny prawie wszędzie dla każdego ciągu* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots = \pm 1$*, to szereg* $\sum \lambda_k X_k(\omega)$ *jest zbieżny prawie wszędzie dla każdego ograniczonego ciągu* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{R}$.

Lemat 3.10. *Załóżmy, że liczby* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{R}$ *spełniają warunek* $|\lambda_k| \leqslant 1$ *dla* $k = 1, 2, \ldots$ *i że* $x_1, x_2, \ldots$ *jest ciągiem elementów w przestrzeni Banacha* $\mathbb{F}$*. Wtedy*

$$\varpi\left\{(\varepsilon_i) : \lim_{n\to\infty} \sup_{n\leqslant p\leqslant q} \left\| \sum_{k=p}^{q} \varepsilon_k x_k \right\| \geqslant \tfrac{1}{8} \lim_{n\to\infty} \sup_{n\leqslant p\leqslant q} \left\| \sum_{k=p}^{q} \lambda_k x_k \right\| \right\} \geqslant \tfrac{1}{8},$$

z miarą ϖ *zdefiniowaną na początku tego rozdziału.*

Powyższy wynik został zastosowany w dowodach wielu twierdzeń. Jako przykład zacytujemy tutaj wynik Hu, Nam, Rosalsky'ego i Volodina z artykułu [38], gdzie autorzy użyli go, by udowodnić twierdzenie dla szeregów ogonów ważonych sum losowych elementów w przestrzeniach Banacha.

4. Teoria ergodyczna

Odkrycia Ryll-Nardzewskiego w teorii ergodycznej były szeroko stosowane i również stały się kanonicznymi narzędziami w teorii prawdopodobieństwa. W dziewiątym rozdziale słynnej monografii [49], opublikowanej w 1962 roku, Michael Loève wielokrotnie użył wyników CRN-a i jego współpracowników zawartych w pracach [2, 3, 10]. Również Patrick Billingsley w swojej książce [29] z 1965 roku z teorii ergodycznej i teorii informacji zamieścił ergodyczne twierdzenia CRN-a o ułamkach łańcuchowych. W często używanym podręczniku teorii prawdopodobieństwa [31, str. 128], Leo Breiman napisał:

> Dobry opis teorii procesów punktowych i dowodów bardziej ogólnych wersji [twierdzeń ergodycznych dla procesów punktowych] oraz ergodycznych własności czasów rekurencji można znaleźć w pracy Ryll-Nardzewskiego [20].

Opublikowana niedawno książka Richarda Durretta [35] zawiera twierdzenie ergodyczne CRN-a dla ułamków łańcuchowych. Obszerna monografia Ulricha Krengela [47] o twierdzeniach ergodycznych również zawiera wyniki CRN-a w tej dziedzinie. W niniejszym podrozdziale dajemy przegląd wyników CRN-a w teorii ergodycznej udowodnionych w artykułach [2, 3].

Rozważmy zbiór $\mathcal{X}$ z σ-skończoną miarą μ zdefiniowaną na σ-algebrze $\mathcal{M}$ podzbiorów $\mathcal{X}$. Oznaczmy przez $\varphi\colon \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$ takie odwzorowanie, że $\varphi^{-1}E \in \mathcal{M}$ dla $E \in \mathcal{M}$ oraz $\mu(\varphi^{-1}E) = 0$, jeśli $\mu(E) = 0$.

Z klasycznych twierdzeń ergodycznych Birkhoffa i von Neumanna wynika, że jeżeli φ zachowuje miarę (innymi słowy, $\mu(\varphi^{-1}E) = \mu(E)$), to dla każdego $f \in L_1(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$ istnieje takie $g \in L_1(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$, że

$$\tfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi^i(x)) \to g(x), \quad \text{gdy } n \to \infty$$

na zbiorze miary pełnej μ i w $L_1(\mu)$ (ten ostatni wynik jest prawdziwy przy dodatkowym założeniu, że miara μ jest skończona).

W pracy [2] CRN udowodnił następujący rezultat.

Twierdzenie 4.1. *Wynik Birkhhoffa o punktowym twierdzeniu ergodycznym jest równoważny z każdym z następujących trzech warunków:*

(a) *dla każdego zbioru A i każdego zbioru Y spełniającego warunek $\mu(Y) < \infty$ zachodzi nierówność*

$$\lim_n M_n(A, Y) \leqslant K\mu(A),$$

przy czym K jest stałą rzeczywistą oraz

$$M_n(A, Y) := \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(Y \cap \varphi^{-k}A),$$

(b) *dla każdego zbioru A i każdego zbioru Y spełniającego warunek $\mu(Y) < \infty$ zachodzi nierówność*

$$\limsup_n M_n(A, Y) \leqslant K\mu(A),$$

(c) *istnieje taki rosnący ciąg zbiorów $\{Y_j\}$, że $X = \bigcup_j Y_j$ oraz warunek*

$$M_n(A, Y) := \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(Y \cap \varphi^{-k}A)$$

jest spełniony dla $Y = Y_j$, $j = 1, 2, \ldots$ i każdego zbioru A.

W kontekście twierdzenia ergodycznego dla średnich CRN udowodnił następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.2. *Ergodyczne twierdzenie von Neumanna dla średnich jest równoważne z następującym warunkiem*

$$\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(\varphi^{-k}E) \leqslant K\mu(E)$$

dla każdego $E \in \mathcal{M}$ oraz $n = 1, 2, \ldots$

Na dalszych stronach tomu dwunastego *Studia Mathematica* (zob. [3]), CRN rozważa, nowy wtedy, problem ergodycznego zachowania transformacji związanych z ułamkami łańcuchowymi, który został postawiony przez Edwarda Marczewskiego.

Marczewski zdefiniował transformację, która liczbie niewymiernej

$$x = \cfrac{1}{\lfloor c_1 \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor c_2 \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor c_3 \rfloor + \cdots}}}$$

przyporządkowuje liczbę

$$\delta(x) := \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \cfrac{1}{\lfloor c_2 \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor c_3 \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor c_4 \rfloor + \cdots}}}$$

Ta transformacja jest nierozkładalna ze względu na miarę Lebesgue'a, tzn. wszystkie niezmiennicze zbiory są albo miary zero albo jeden, ale transformacja nie zachowuje miary Lebesgue'a. Ten nietrywialny fakt jest cytowany w artykule [3] (twierdzenie 1) i jego odkrycie jest przypisane Knoppowi (zob. [46]). Jednakże dowód CRN-a był nowy i oryginalny. Zaskakującym było to, że Ryll-Nardzewski znalazł inną miarę, która była niezmiennicza przy transformacji δ i udowodnił następujące twierdzenie ergodyczne.

Twierdzenie 4.3. *Miara*

$$\nu(E) = \frac{1}{\log 2} \int_E \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

zdefiniowana dla wszystkich mierzalnych podzbiorów $\mathcal{X}$ jest niezmiennicza przy transformacji δ. Co więcej, klasy wszystkich zbiorów miary zero i wszystkich funkcji całkowalnych są identyczne dla ν i dla miary Lebesgue'a. Również dla każdej funkcji f całkowalnej względem miary Lebesgue'a

$$\tfrac{1}{n}\left[f(x)+f(\delta(x))+\cdots+f(\delta^{n-1}(x))\right] \to \frac{1}{\log 2} \int_0^1 f(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{1+x} \quad \textit{prawie wszędzie.}$$

5. Ciągi wymienialne de Finettiego, selektory i rozkłady warunkowe

W tym paragrafie opiszemy parę wyników Ryll-Nardzewskiego, które nie były częścią jego kompletnych i bogatych teorii probabilistycznych, ale miały znaczący i trwały wpływ w wielu dziedzinach matematyki i jej zastosowań.

5.1. *Ciągi wymienialne de Finettiego.* W punkcie 2.1 przypomnieliśmy definicje ciągów wymienialnych de Finettiego. W pracy [19] z 1957 roku CRN przeprowadził dogłębne studia innego pojęcia symetrii, które okazało się równoważne z pojęciem wymienialności. Zaczął od rozważania przestrzeni produktowej $X = \mathbb{R}^\infty$ ciągów $x = (x_1, x_2, \dots)$, oznaczając przez $\mathcal{B}$ σ-algebrę borelowskich podzbiorów X, a przez $\mathcal{M}$ klasę miar probabilistycznych na $(X, \mathcal{B})$.

W tym kontekście $\xi(x) = x_n$ jest zmienną losową i dla $\mu \in \mathcal{M}$

$$F_k(t_1, \dots, t_k) = \mu(x_1 < t_1, \dots, x_k < t_k)$$

jest k-wymiarową dystrybuantą odpowiadającą rozkładowi μ. Mówimy, że $\mu \in \mathcal{M}$ jest *stacjonarna* i piszemy $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{st}}$, jeśli

$$\mu(E) = \mu(\phi^{-1}E)$$

dla każdego $E \in \mathcal{B}$, przy czym operator przesunięcia ϕ jest określony wzorem $\phi(x) := (x_2, x_3, \dots)$. Zbiór B jest *niezmienniczy* (symbolicznie $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{inv}}$), jeśli $B = \phi^{-1}B$. Miara μ jest *nierozkładalna*, (we współczesnej terminologii: ergodyczna, symbolicznie $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ind}}$), jeśli miara dowolnego zbioru niezmienniczego wynosi albo 0, albo 1.

W pracy [19] przeanalizowano następujące trzy różne pojęcia symetrii.

– Miara $\mu \in \mathcal{M}$ jest *symetryczna* ($\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{sym}}$), jeśli dla każdego rosnącego ciągu liczb całkowitych $(n_1 < n_2 < \cdots)$ i każdej μ-całkowalnej funkcji f zachodzi równość

$$\int f(x_1, x_2, \dots)\, \mathrm{d}\mu = \int f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)\, \mathrm{d}\mu.$$

– Miara $\mu \in \mathcal{M}$ jest *mocno symetryczna* ($\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ssym}}$), jeśli dla każdego ciągu (niekoniecznie rosnącego!) rożnych liczb całkowitych $(n_1, n_2, \dots)$ i każdej μ-całkowalnej funkcji f jest prawdą, że

$$\int f(x_1, x_2, \dots)\, \mathrm{d}\mu = \int f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)\, \mathrm{d}\mu.$$

– Miara μ jest *miarą produktową* ($\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{pr}}$), jeśli jest ona stacjonarna oraz

$$\int f_1(x_1) f_2(x_2), \dots) f_k(x_k)\, \mathrm{d}\mu = \\ = \int f_1(x_1)\, \mathrm{d}\mu \int f_2(x_2)\, \mathrm{d}\mu \dots \int f_k(x_k)\, \mathrm{d}\mu,$$

dla wszystkich $k = 1, 2, \dots$ i wszystkich ciągów μ-całkowalnych funkcji f_j, $j = 1, 2, \dots$

Miary produktowe są nierozkładalne i są związane z ciągami niezależnych i identycznie rozłożonych zmiennych losowych. Dodatkowo, z lematu 1 w ar-

tykule [19] wynika, że każda miara produktowa jest symetryczna w mocnym sensie, a z twierdzenia 2 otrzymuje się, że każda symetryczna i nierozkładalna miara jest miarą produktową.

W końcówce pracy wprowadzone jest pojęcie miary warunkowej $\mu(E|\mathcal{B}_{\text{inv}})$ ze względu na $\mathcal{B}_{\text{inv}}$, zdefiniowane jest regularne prawdopodobieństwo warunkowe $\mu(E|x)$ i udowodnione są następujące fakty:

- jeśli $\mu \in \mathcal{M}_{\text{sym}}$, to $\mu(\cdot|x) \in \mathcal{M}_{\text{sym}}$,
- jeśli $\mu \in \mathcal{M}_{\text{st}}$, to $\mu(\cdot|x) \in \mathcal{M}_{\text{st}}$,
- jeśli $\mu \in \mathcal{M}_{\text{st}}$, to $\mu(\cdot|x) \in \mathcal{M}_{\text{ind}}$.

Główny wynik pracy jest zawarty w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 5.1. *Załóżmy, że $\mu \in \mathcal{M}_{\text{sym}}$, a $\mu(E|x)$ oznacza miarę warunkową ze względu na $\mathcal{B}_{\text{inv}}$. Wtedy*

1° *$\mu(\cdot)$ jest miarą produktową μ-p.w.,*

2° *$\mu(E) = \int \mu(E|x)\,\mathrm{d}\mu$, $E \in \mathcal{B}$,*

3° *μ jest symetryczna w mocnym sensie.*

Idee rozwinięte w pracach [19, 20] miały szeroki wpływ na niedawną literaturę w tym temacie i okazały się ważne na przykład w jedenastym rozdziale monografii o teorii prawdopodobieństwa [42] napisanej przez Olava Kallenberga.

5.2. *Rozkłady warunkowe.* W 1963 roku, CRN powrócił do fundamentalnych problemów związanych z rozkładami warunkowymi we wspólnej pracy z Davidem Blackwellem. Rozważyli oni następującą sytuację. Załóżmy, że Ω jest borelowskim podzbiorem zupełnej i ośrodkowej przestrzeni metrycznej, $\mathcal{B}$ jest klasą borelowskich podzbiorów Ω, a P jest miarą probabilistyczną na Ω. Niech f będzie rzeczywistą zmienną losową na Ω i $\mathcal{A}$ będzie σ-algebrą generowaną przez f. W standardowych podręcznikach teorii prawdopodobieństwa (zob. [35]) można znaleźć twierdzenia pokazujące istnienie regularnych prawdopodobieństw warunkowych $Q(\omega, B)$ przy danym f, które spełniają następujące warunki:

- $Q(\omega, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną na $\mathcal{B}$ dla każdego $\omega \in \Omega$,
- $Q(\omega, B)$ jest $\mathcal{A}$-mierzalne dla każdego $B \in \mathcal{B}$,
- dla dowolnych $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ zachodzi równość

$$\int_A Q(\omega, B)\, P(\mathrm{d}\omega) = P(A \cap B).$$

Rozkład warunkowy Q nazywa się *właściwy*, jeśli $Q(\omega, A) = 1$ dla $\omega \in A \in \mathcal{A}$. Jest dobrze znanym faktem, że rozkład warunkowy, który jest właściwy dla

prawie wszystkich punktów Ω (tzn. poza wyjątkowym zbiorem N) zawsze istnieje. Blackwell i Ryll-Nardzewski wykazali w pracy [21], że na ogół tego wyjątkowego zbioru nie można się pozbyć. W szczególności zaobserwowali, że tak jest w przypadku, gdy zbiór wartości f nie jest borelowski.

5.3. *Twierdzenie o selektorach.* Jednym z najczęściej cytowanych wyników CRN-a (według *Mathematical Reviews*) jest tzw. twierdzenie Kuratowskiego–Ryll-Nardzewskiego o selektorach udowodnione w pracy [22]. Choć to twierdzenie nie jest wynikiem czysto probabilistycznym, znalazło ono rozmaite zastosowania w statystyce, geometrii stochastycznej, grach losowych, sterowaniu stochastycznym i również w ekonomii, deterministycznej i stochastycznej optymalizacji dynamicznej i innych dziedzinach (zob. na przykład [37]). Twierdzenie to jest fundamentalne dla teorii funkcji wielowartościowych, twierdzeń o losowych punktach stałych dla wielowartościowych odwzorowań kontrakcyjnych i teorii martyngałów w przestrzeniach Banacha. Odgrywa ono również podstawową rolę w geometrii stochastycznej, ponieważ pozwala zdefiniować na przykład wartość oczekiwaną zbioru losowego. Nieoczekiwane zastosowanie zostało odkryte w dowodzie uogólnienia twierdzenia Choqueta–Bishopa–de Leeuwa w pracy Gerry'ego Edgara. Diestel i Uhl, opisując ten wynik w książce [34] (str. 145) stwierdzili, że „dowód jest piękną kombinacją metod martyngałowych, indukcji pozaskończonej, twierdzenia o selektorach Kuratowskiego i Ryll-Nardzewskiego z [...]".

W twierdzeniu Kuratowskiego i Ryll-Nardzewskiego o selektorach rozważa się dwa zbiory X, Y i funkcję na zbiorze X, której wartości są podzbiorami Y. Selektor jest zdefiniowany jako dowolny element produktu kartezjańskiego $\prod_{x\in X} F(x)$. W następnym kroku rozważa się algebrę $\mathcal{L}$ podzbiorów X oraz przeliczalnie addytywną rodzinę $\mathcal{S}$ generowaną przez $\mathcal{L}$.

Twierdzenie 5.2. *Niech Y będzie zupełną i ośrodkową przestrzenią metryczną i niech $F\colon X \to 2^Y$ będzie takim odwzorowaniem, że $\{x : F(x) \cap G \neq \varnothing\} \in \mathcal{S}$, o ile $G \subset Y$ jest zbiorem otwartym. Wtedy istnieje taki selektor $f\colon X \to Y$, że $f^{-1}(G) \in \mathcal{S}$, jeśli tylko $G \subset Y$ jest otwarty.*

Jeżeli $\mathcal{L}$ jest σ-algebrą, to selektor $f\colon X \to Y$ nazywa się *$\mathcal{L}$-mierzalnym*, jeśli dla każdego zbioru otwartego $G \subset Y$ mamy $f^{-1}(G) \in \mathcal{L}$. Kuratowski i CRN udowodnili następujący wynik dotyczący selektorów mierzalnych.

Twierdzenie 5.3. *Jeśli Y jest zupełną i ośrodkową przestrzenią metryczną i $F\colon X \to 2^Y$ jest $\mathcal{L}$-mierzalna, to istnieje selektor $\mathcal{L}$-mierzalny.*

Podziękowania. Autorzy dziękują Stanisławowi Kwapieniowi za sugestie dotyczące opisu twierdzenia Kuratowskiego i Ryll-Nardzewskiego, a w szczególności za wskazanie pozycji [34]. Jan Rosiński dokładnie przejrzał angielską wersję tego artykułu i jesteśmy wdzięczni za pomoc w jego ulepszeniu.

Cytowane prace Czesława Ryll-Nardzewskiego[3]

[1] *Sur les produit de composition*, Studia Math. 12 (1951), 51–57 (współautor: J. Mikusiński).
[2] *On the ergodic theorems I* (*Generalized ergodic theorems*), Studia Math. 12 (1951), 65–73.
[3] *On the ergodic theorems II* (*Ergodic theory of continued fractions*), Studia Math. 12 (1951), 74–79.
[4] *Sur les fonctions indépendantes. IX. Séries des fonctions positives*, Studia Math. 12 (1951), 102–107 (współautor: H. Steinhaus).
[5] *Sur les suites et les fonctions également réparties*, Studia Math. 12 (1951), 143–144.
[6] *Sur les séries de Taylor*, Studia Math. 12 (1951), 159–165 (współautor: H. Steinhaus).
[7] *Sur l'operateur de translation*, Studia Math. 12 (1951), 205–207 (współautor: J. Mikusiński).
[8] *Certaines théorèmes des moments*, Studia Math. 12 (1951), 225–226.
[9] *Théorèmes ergodiques et leurs applications*, Colloquium Math. 2 (1951), 109–123 (współautorzy: S. Hartman, E. Marczewski).
[10] *D. Blackwell's conjecture on power series with random coefficients*, Studia Math. 13 (1953), 30–36.
[11] *Sur la convergence des séries de puissances de l'opérateur différentiel*, Studia Math. 13 (1953), 37–40.
[12] *Sur les séries de puissances dans le calcul opéraoire*, Studia Math. 13 (1953), 41–47.
[13] *A theorem on bounded moments*, Studia Math. 13 (1953), 51–55 (współautor: J. Mikusiński).
[14] *Un théorème sur le produit de composition de plusieurs variables*, Studia Math. 13 (1953), 62–68 (współautor: J. Mikusiński).
[15] *Remarks on the Poisson stochastic process. I.*, Studia Math. 13 (1953), 122–129 (współautorzy: K. Florek, E. Marczewski).
[16] *Théorèmes abstraits de Kronecker et les fonctions presque périodiques*, Studia Math. 13 (1953), 296–311 (współautor: S. Hartman).
[17] *On the non-homogeneous Poisson process. I*, Studia Math. 14 (1954), 124–128.
[18] *Remarks on the Poisson stochastic process. III* (*On a property of the homogeneous Poisson process*), Studia Math. 14 (1954), 314–318.
[19] *On stationary sequences of random variables and the de Finetti's equivalence*, Colloq. Math. 4 (1957), 149–156.

[3] W pierwszej części bibliografii umieściliśmy listę cytowanych prac CRN-a w porządku chronologicznym. Reszta prac cytowanych w artykule znajduje się poniżej i wypisana jest w porządku alfabetycznym.

[20] *Remarks on processes of calls*, Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., Vol. II, Univ. California Press, Berkeley 1961, 455–465.

[21] *Non-existence of everywhere proper conditional distributions*, Ann. Math. Statist. 34 (1963), 223–225 (współautor: D. Blackwell).

[22] *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), 397–403 (współautor: K. Kuratowski).

[23] *Convergence presque sûre des séries aléatoires vectorielles à multiplicateurs bornés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 279 (1974), 225–228 (współautorzy: K. Musiał, W. A. Woyczyński).

[24] *Convergence en mesure des séries aléatoires vectorielles à multiplicateur borné*, [w:] Séminaire Maurey–Schwartz (1973–1974), Espaces L_p, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, Annexe, Centre de Math., École Polytech., Paris 1974 (współautor: W. A. Woyczyński).

[25] *Bounded multiplier convergence in measure of random vector series*, Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975), 96–98 (współautor: W. A. Woyczyński).

[26] *Cylindrical measures on topological groups*, Probab. Math. Statist. 6 (1985), 167–172 (współautor: J. Rosiński).

[27] *Is the dying individual the oldest?*, Stochastic Process. Appl. 24 (1987), nr 1, 133–142 (współautor: T. Rolski).

Pozostałe cytowane prace

[28] P. Biler, P. Krupski, G. Plebanek, W. A. Woyczyński, *Lwów of the West*, [w:] The Scottish Book. Mathematics from The Scottish Café, with Selected Problems from The New Scottish Book, wyd. 2 (R. D. Mauldin, red.), Springer–Birkhäuser 2016, 291–296.

[29] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney 1965.

[30] E. Borel, *Sur les séries de Taylor*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 123 (1896), 1051–1052.

[31] L. Breiman, *Probability*, Addison-Wesley, Reading, MA 1968.

[32] H. Cramér, *A contribution to the theory of stochastic processes*, [w:] Proceedings of the second Berkeley Symposium 1951, 329–340.

[33] D. J. Daley, D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes. Volume I: Elementary Theory and Methods*, Springer, Nowy Jork 2003.

[34] J. Diestel, J. J. Jr. Uhl, *Vector Measures*, AMS, Providence 1977.

[35] D. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press, Cambridge 2010.

[36] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, t. 2, Wiley, New York 1971.

[37] K. Hinderer, U. Rieder, M. Stieglitz, *Dynamic Optimization. Deterministic and Stochastic Models*, Springer-Verlag 2016.

[38] T. C. Hu, E. Nam, A. I. Volodin, *An application of the Ryll-Nardzewski–Woyczyński theorem to a uniform weak law for tail series of weighted sums of random elements in Banach spaces*, Statistics and Probability Letters 48 (2000), 369–374.
[39] J.-P. Kahane, *Sur les fonctions sommes de séries trigonométriques absolument convergentes*, C.R. Acad. Sci. Paris 240 (1955), 36–37.
[40] J.-P. Kahane, *Some Random Series of Functions*, D. C. Heath and Co, Lexington 1968.
[41] O. Kallenberg, *Random Measures*, Akademie-Verlag and Academic Press, Berlin–London 1983.
[42] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer, Nowy Jork 2002.
[43] A. Ja. Chinczyn, *Potoki słuczajnych sobytij bez posliediejstwija*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 1 (1956), 3–17.
[44] J. F. C. Kingman, *Completely random measures*, Pacific J. Math. 21 (1967), 59–78.
[45] J. F. C. Kingman, *Poisson Processes*, Clarendon Press, Oxford 1993.
[46] K. Knopp, *Mengentheoretiche Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfinetten Wahrscheinlichkeiten*, Mathematische Annalen 95 (1926), 409–426.
[47] U. Krengel, *Ergodic Theorems*, W. de Gruyter, Berlin-New York 1985.
[48] S. Kwapień, W. A. Woyczyński, *Random series and Stochastic Integras: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston 1992.
[49] M. Loéve, *Probability Theory*. *Foundations, Random Sequences*, Van Nostrand, New York 1955.
[50] E. Marczewski, *Remarks on the Poisson stochastic process* (*II*), Studia Mathematica 13 (1953), 130–136.
[51] A. Prékopa, *On secondary processes generated by a random point distribution of Poisson type*, Ann. Univ. Sci. Budapest 1 (1958), 153–170.
[52] A. Rènyi, *Remarks on the Poisson process*, Studia Sci. Math. Hung. 2 (1967), 119–123.
[53] H. Steinhaus, *Über die Wahrscheinlichkeit dafúr, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natúrlich grenze ist*, Math. Z, 31 (1930), 408–416.
[54] N. Wiener, *The homogeneous chaos*, Amer. J. Math. 60 (1938), 897–936.
[55] N. Wiener, A. Wintner, *The discrete chaos*, Amer. J. Math. 65 (1943), 279–298.
[56] D. Szász, W. A. Woyczyński, *Poissonian random measures and linear processes with independent pieces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 18 (1970), 475–482.

Tomasz Rolski
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wroclawski
rolski@math.uni.wroc.pl

Wojbor A. Woyczyński
Department of Mathematics,
Applied Mathematics and Statistics
Case Western Reserve University
waw@case.edu

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 235–243
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Tomasz Downarowicz (Wrocław)

Wkład Czesława Ryll-Nardzewskiego w rozwój teorii ergodycznej

W tym przeglądzie postaram się przedstawić, w jaki sposób Czesław Ryll-Nardzewski przyczynił się bezpośrednio lub pośrednio do rozwoju teorii ergodycznej. Za bezpośredni wkład uznałem twierdzenia i prace dotyczące wprost zagadnień z teorii ergodycznej, natomiast za wkład pośredni – zastosowania do teorii ergodycznej (przez innych autorów) jego twierdzeń o charakterze bardziej ogólnym. Wspomnę też wyniki, które co prawda nie korzystają z twierdzeń Ryll-Nardzewskiego, ale zostały po części zainspirowane jego pytaniem, a w efekcie doprowadziły do uzyskania rezultatów wręcz przełomowych w teorii ergodycznej i nie tylko. Nie jest przy tym jasne, na ile pytanie Ryll-Nardzewskiego było rzeczywistym bodźcem do podjęcia tych badań, gdyż mogły one rozwinąć się całkiem niezależnie. Niemniej jednak związek niewątpliwie istnieje i warto go omówić.

1. Prace bezpośrednio dotyczące teorii ergodycznej

Omówię tu pokrótce sześć prac [1–6]. Pierwsza praca ma charakter przeglądowy. Zawiera ona zapowiedzi wyników artykułów [2, 4], jako będących w przygotowaniu.

Praca [2] zawiera uogólnienia twierdzeń ergodycznych Birkhoffa i von Neumanna na przypadek miary niesingularnej,[1] zarówno skończonej, jak i sigma-skończonej. Oznaczmy przez (B) warunek zbieżności prawie wszędzie średnich

[1] W układzie dynamicznym *miara niesingularna* określona jest jako miara, w której przeciwobrazy zbiorów miary zero mają miarę zero. Twierdzenia Birkhoffa i von Neumanna dotyczą miary niezmienniczej.

Cesàro (od Birkhoffa), a przez (N) – ich zbieżności w L^1 (od von Neumanna). Dunford i Miller podali warunek na ewolucję miar zbiorów, który implikuje warunek (N), a nawet jest mu równoważny. W omawianej pracy podano nowy dowód tego twierdzenia. Przede wszystkim jednak wykazano, że inny warunek, wprowadzony przez S. Hartmana, jest równoważny z (B). Wreszcie podano przykład (z miarą skończoną) na to, że (B) nie implikuje (N). Badania w tym kierunku były kontynuowane w pracy S. Gładysza [28], a nieco później przez P. O. Salvadora w artykule [46] i R. Sato w pracy [47, 48]. Artykuł [2] jest cytowany w licznych opracowaniach książkowych.

Praca [3] jest w tym zestawieniu chyba najważniejsza. Rozważane jest w niej przekształcenie znane jako *transformacja Gaussa*[2] $x \mapsto \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$, które jest tożsame z przesunięciem w lewo ciągu ilorazów częściowych w rozwinięciu w ułamek łańcuchowy liczby $x \in [0,1]$. Opierając się na wyniku Knoppa z 1926 roku opublikowanym w pracy [34], który w języku teorii ergodycznej oznacza ergodyczność tej transformacji względem (niezachowywanej) miary Lebesgue'a, wywnioskowano jej ergodyczność względem (zachowywanej) miary Gaussa, czego dalszą konsekwencją jest spełnianie tez twierdzenia Chinczyna (wzór na granicę średnich geometrycznych ilorazów częściowych) i Lévy'ego (o częstości występowania ilorazów częściowych). Trzeba tu wyraźnie zaznaczyć, że o ile ułamki łańcuchowe były badane od stuleci, a tacy matematycy, jak Gauss, Lévy, Kuzmin, Knopp, czy wreszcie Chinczyn uzyskiwali znaczące wyniki, to właśnie wrocławski zespół z Hartmanem, Marczewskim i Ryll-Nardzewskim zastosował do ich badania metody teorii ergodycznej.[3] Przykładowo, miara Gaussa była wcześniej znana w kontekście częstości występowania liczb w ciągu ilorazów częściowych, ale nie jako miara niezmiennicza (i ergodyczna) transformacji Gaussa. Tak więc, o ile wyniki Ryll-Nardzewskiego (a zwłaszcza płynące z nich wnioski) są pokrewne twierdzeniom wcześniejszym, to stosowana metodologia jest o wiele bardziej nowoczesna. Ten postęp jest zauważony i ładnie omówiony w książce P. Billingsleya [16]. Wyniki z prac [2, 3] zostały zacytowane i uzupełnione w opublikowanej w tym samym tomie *Studia Mathematica* pracy Hartmana [30] oraz w przeglądowym artykule Marczewskiego [40]. Praca [3] jest cytowana w niemal każdej książce poruszającej tematykę ułamków łańcuchowych.

Praca [4] poświęcona jest losowym układom dynamicznym, tzn. sytuacji, gdy składane są kolejno różne, wybierane losowo i niezależnie, transformacje

[2] Sam Gauss nie zdefiniował tego przekształcenia, a nazwa została nadana znacznie później. Ryll-Nardzewski podaje, że jest to przekształcenie wprowadzone przez Marczewskiego.

[3] *De facto*, pierwsze takie zastosowanie znajdujemy w pracy Doeblina [21], jednak wydaje się, że polscy autorzy nie znali tej pracy, gdyż ani razu jej nie cytują.

zachowujące miarę (współcześnie powiedzielibyśmy, że układ taki to produkt skośny nad procesem Bernoulliego). Praca zawiera nowy, bardziej bezpośredni dowód twierdzenia ergodycznego Kakutaniego (analogicznego do twierdzenia Birkhoffa), nie wymagający odwracalności transformacji, oraz fakt, że z prawdopodobieństwem jeden funkcja graniczna nie zależy od kolejności losowanych przekształceń. S. Gładysz w pracy [27] kontynuował te badania, podając jeszcze inny dowód, wciąż jednak oparty na metodzie Ryll-Nardzewskiego. Uogólnienia na przypadek operatorowy otrzymali R. Cairoli w artykule [17] i J. Woś w pracy [51]. Artykuł [4] również doczekał się licznych cytowań w książkach i materiałach przeglądowych.

Praca [5] jest poniekąd kontynuacją artykułu [4], ale widać w niej, jak poszukiwania warunków na istnienie średniej w losowym układzie dynamicznym naprowadziły autora na jego późniejsze słynne twierdzenie o punkcie stałym. W pracy [7] (patrz niżej) tak podsumował on artykuł [5] (tłumaczenie moje, numeracja prac jak w niniejszym artykule):

> W szczególności, twierdzenie 5 w pracy [5] jest pośrednie pomiędzy twierdzeniem Kakutaniego a twierdzeniem 3 z obecnej pracy [*chodzi właśnie o twierdzenie Ryll-Nardzewskiego o punkcie stałym – przyp. TD*]. Artykuł [5] jest zapowiedzią (niektóre dowody są tam tylko naszkicowane), a pełny dowód nie został nigdy opublikowany. Później autor zauważył, że najbardziej interesująca część pracy [5], czyli twierdzenie 5, może być uogólnione przy pomocy bardziej bezpośredniej metody, niezależnej od teorii ergodycznej, i to jest tutaj zaprezentowane.

Na koniec praca [6] bada tzw. średnie ergodyczne z wagami, albo inaczej wzdłuż podciągów. Twierdzenie Bluma–Hansona orzeka, że każda taka średnia zbiega do stałej, jeżeli układ jest mieszający. W pracy są podane inne warunki zbieżności (nałożone na ciągi wag), istotną rolę odgrywają tzw. ciągi Bezikowicza. Choć ma ona charakter przeglądowy, jest to praca cytowana wielokrotnie w teorii ergodycznej, na przykład przez J. Olsena w artykułach [43, 44], M. Lina, J. Olsena i A. Tempelmana w pracy [39], A. Bellow i V. Loserta w artykule [11], czy niedawno przez A. Tempelmana w pracy [49]. Odnośniki do niej również występują w wielu opracowaniach książkowych.

2. Zastosowania twierdzenia o punkcie stałym

Słynne twierdzenie Ryll-Nardzewskiego o punkcie stałym pochodzi z artykułu [7]. Jest ono, można powiedzieć, wersją wcześniejszego twierdzenia Hahna (a właściwie Kakutaniego), ale o istotnie osłabionych założeniach. W twierdzeniu Hahna zwartość, ciągłość i dystalność są w tej samej topologii, natomiast

Ryll-Nardzewski zakłada słabą zwartość zbioru wypukłego i słabą ciągłość przekształceń działającej na nim półgrupy, ale jej mocną dystalność (co jest warunkiem słabszym niż słaba dystalność). W tezie mamy oczywiście istnienie punktu stałego dla tego działania. Istotne dla nas będą te tylko zastosowania w teorii ergodycznej, które nie dają się uzyskać przy pomocy wcześniejszych twierdzeń. Przede wszystkim, jak już powiedzieliśmy, sam autor doszedł do sformułowania twierdzenia poprzez teorię ergodyczną, dowodząc w pracy [5] istnienia niezmienniczej średniej na przestrzeni funkcji słabo prawie okresowych na dowolnej (niekoniecznie średniowalnej) grupie. Twierdzenie w tej wersji znalazło liczne zastosowania w teorii reprezentacji słabo prawie okresowych. V. Bergelson i J. Rosenblatt wykazali przy pomocy twierdzenia Ryll-Nardzewskiego kilka twierdzeń o słabym mieszaniu dla działań grup dowolnych, patrz artykuł [14].[4] M. Besbes w artykule [15] dowiódł przy jego pomocy twierdzenia ergodycznego dla pewnych działań kontrakcji liniowych. M. Lin i J. Olsen w pracy [38] uzyskali wynik podobny do twierdzenia Ryll-Nardzewskiego o punkcie stałym, ale dla nieco innego typu średnich w działaniach grup abelowych lokalnie zwartych. E. Glasner i M. Megrelishvili w artykule [25] uogólnili omawiane twierdzenie na algebrę funkcji Asplunda (która zawiera funkcje słabo prawie okresowe) i wykorzystali je do badania pojęcia wrażliwości i chaosu układu dynamicznego. Inne współczesne zastosowanie (choć może nieco bardziej odległe od teorii ergodycznej) znajdziemy też w pracy U. Badera, T. Gelandera i N. Monoda [9]. Twierdzenie Ryll-Nardzewskiego stanowiło motywację do *stricte* teorioergodycznego pytania, jakie V. Bergelson sformułował w książce *Guido's Book of Conjectures* [19, Question 11.8].

3. Zastosowania twierdzenia o selektorach

Twierdzenie o selektorach znajduje się w pracy [8].[5] Skrótowo rzecz ujmując, mówi ono o możliwości wybrania funkcji mierzalnej z takiej mierzalnej multifunkcji o wartościach domkniętych, że każdy zbiór otwarty U w przeciwdziedzinie ma mierzalny „przeciwobraz", czyli zbiór punktów, których obrazy niepusto przecinają U. Jest to najczęściej cytowana praca Ryll-Nardzewskiego.

[4] W pracy tej nie ma bezpośredniego odnośnika do Ryll-Nardzewskiego, ale powołują się oni na pracę [20], gdzie jest istotnie użyte twierdzenie o punkcie stałym.

[5] W późniejszych latach zauważono, że bardzo podobne twierdzenie sformułował Rochlin w pracy [45] już w 1949 roku. Jednak w dowodzie Rochlina jest błąd, poprawiony znacznie później przez Joffego. Ponadto nieco mniej ogólne twierdzenie opublikował równolegle z Kuratowskim i Ryll-Nardzewskim Ch. Castaing w artykule [18]. Więcej szczegółów historycznych na ten temat znajdzie czytelnik w pracach przeglądowych [32, 50].

Jednak tylko nieliczne cytowania można zakwalifikować jako dotyczące teorii ergodycznej. Skupię się na kilku przykładach.

M. Mentzen w pracy [41] stosuje twierdzenie o selektorach w dowodzie ciekawego faktu o rozszerzeniach izometrycznych nad obrotem grupy monotetycznej zwartej (są one naturalnymi faktorami rozszerzeń grupowych). Tematyka ta (nadal z wykorzystaniem twierdzenia o selektorach) jest rozwijana dalej w pracach M. Lemańczyka (i współautorów) [23, 37],[6] gdzie uzyskano charakteryzację najmniejszej naturalnej rodziny faktorów dla automorfizmu Bernoulliego. Temat ten jest badany również przez E. Glasnera w pracy [24]. A. Lasota i J. Myjak w artykule [36] zbadali fraktalną strukturę atraktorów i semiatraktorów dla różnych typów multifunkcji, a twierdzenie o selektorach legło u podstaw ich rozważań. W pracy R. Kaufmana [33] znajdujemy kolejne zastosowanie, tym razem do badania analityczności zbioru tych homeomorfizmów zwartej przestrzeni metrycznej, dla których istnieje mieszająca miara niezmiennicza. Jeszcze nowsze cytowanie występuje w pracy P. Barbarskiego [10], gdzie twierdzenie o selektorach odgrywa kluczową rolę w dowodzie pewnej wersji twierdzenia Szarkowskiego dla losowych układów dynamicznych na odcinku.

Jak widać z przykładów podanych w dwóch powyższych paragrafach, a z pewnością nie jest to lista kompletna, twierdzenia Ryll-Nardzewskiego przyczyniły się i niewątpliwie nadal będą się przyczyniać w istotny sposób do rozwoju szeroko rozumianej teorii ergodycznej. Podane powyżej zastosowania są bardzo różnorodne, co wynika z ogólnego charakteru tych twierdzeń i niezbicie dowodzi ich matematycznej mocy.

4. Historia pewnego pytania

O wnikliwości Czesława Ryll-Nardzewskiego może świadczyć historia pewnego pytania, które zadał mi w połowie lat dziewięćdziesiątych w trakcie jednego z seminariów. Pytanie dotyczyło transformacji T zachowującej miarę probabilistyczną (i być może ergodyczną) μ i dowolnego zbioru A miary dodatniej. Chodziło o niepustość zbioru czasów n, dla których

$$\mu\big(A \cap T^{-n}(A) \cap T^{-2n}(A)\big) > \mu(A)^3 - \varepsilon.$$

Było to *de facto* pytanie o wzmocnienie twierdzenia Furstenberga (orzekającego, że zbiór czasów, dla których miara powyższego przekroju jest dodatnia, jest niepusty) w kierunku twierdzenia Chinczyna (o tym, że analogiczny zbiór dla

[6] Początkowo w artykule [23] cytowany był Ryll-Nardzewski, później jednak autorzy uznali za bardziej trafne cytowanie starszej pracy K. Kungui [35].

jednej tylko iteracji transformacji T^n, czyli $\{n : \mu(A \cap T^{-n}(A)) > \mu(A)^2 - \varepsilon\}$, jest nie tylko niepusty, ale i syndetyczny, tzn. z ograniczonymi lukami). Co prawda w naszym zespole zajmowaliśmy się zjawiskiem wielokrotnego powracania, ale w zupełnie innej wersji, tak więc pytanie to wydawało mi się całkowicie zaskakujące i trudne. Przekazałem je V. Bergelsonowi, który już w owych czasach interesował się podobnymi zagadnieniami i przez jakiś czas pośredniczyłem nawet w wymianie korespondencji pomiędzy nim a Ryll-Nardzewskim. Bergelson miał na swym koncie między innymi wynik analogiczny do twierdzenia Chinczyna dla poczwórnych przekrojów specjalnego typu:

$$\mu\big(A \cap T^{-n}(A) \cap T^{-m}(A \cap T^{-n}(A))\big) > \mu(A)^4 - \varepsilon$$

(wykazał on w artykule [12] syndetyczność w $\mathbb{Z}^2$ odpowiednich par (n, m)). Pytanie Ryll-Nardzewskiego trafiało więc w nurt najnowszych badań dotyczących wielokrotnego powracania. Na początku jednej z kolejnych prac Bergelsona (ze współautorami) [13] pojawia się wyrażenie identyczne jak w pytaniu Ryll-Nardzewskiego z tym, że z udziałem k iteracji transformacji T^n (w miejsce dwóch) i pytanie o syndetyczność zbioru odpowiednich czasów n. Od razu zapowiedziana jest też dość zaskakująca odpowiedź, jaką uzyskano w tej pracy – jest ona pozytywna przy założeniu ergodyczności dla $k = 2, 3$, natomiast w innych przypadkach przekrój ten może być nawet pusty. Warto wspomnieć, że o ile tego typu wyniki mają charakter „przemienny" (iteracje tej samej transformacji komutują ze sobą), techniki zastosowane w pracy [13] używają aparatu niekomutatywnego, mianowicie własności układów dynamicznych na nil-rozmaitościach. Rozwijająca się w tych czasach teoria nil-systemów, w połączeniu z metodami teorii ergodycznej, zaowocowała najgłośniejszymi wynikami z teorii liczb: jej elementy były stosowane m.in. w dowodzie Greena i Tao z artykułu [29] występowania dowolnie długich postępów arytmetycznych wśród liczb pierwszych. Dziś trudno jest ustalić, na ile pytanie Ryll-Nardzewskiego miało wpływ na rozwój tej teorii. Prawdopodobnie powstałaby ona niezależnie, gdyż niektóre wstępne wyniki istniały już wcześniej, a poza tym pytanie to nie dotarło do większości cytowanych powyżej matematyków. Niemniej jednak z pewnością wzmocniło ono zainteresowanie zagadnieniami związanymi z niekonwencjonalnymi średnimi ergodycznymi, a poza tym świadczy o niezwykłej intuicji naukowej jego autora. Wzmianka o pytaniu Ryll-Nardzewskiego nie występuje jawnie w pracach Bergelsona, jednak obecnie on sam przyznaje, że jest to niedopatrzenie i powołuje się na polskiego matematyka przy okazji referatów i wystąpień konferencyjnych.

5. Podziękowania

Gorąco dziękuję Vitalemu Bergelsonowi i Mariuszowi Lemańczykowi za konsultacje merytoryczne, jak też Zbigniewowi Lipeckiemu i Jackowi Serafinowi za uwagi, uzupełnienia i korekty.

Omawiane prace Czesława Ryll-Nardzewskiego

[1] *Théorèmes ergodiques et leurs applications*, Colloq. Math. 2 (1951), 109–123 (współautorzy: S. Hartman, E. Marczewski).
[2] *On the ergodic theorems I. Generalized ergodic theorems*, Studia Math. 12 (1951), 65–73.
[3] *On the ergodic theorems II. Ergodic theory of continued fractions*, Studia Math. 12 (1951), 74–79.
[4] *On the ergodic theorems III. The random ergodic theorem*, Studia Math. 14 (1954), 298–301.
[5] *Generalized random ergodic theorems and weakly almost periodic functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 10 (1962), 271–275.
[6] *Topics in ergodic theory*, [w:] Proc. Fourth Winter School, Lecture Notes in Math., t. 472, Springer, Karpacz 1975, 131–156.
[7] *On fixed points of semigroups of endomorphisms of linear spaces*, [w:] Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability. I, t. II, Berkeley 1965/66, 55–61.
[8] *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), 397–403 (współautor: K. Kuratowski).

Inne cytowane prace

[9] U. Bader, T. Gelander, N. Monod, *A fixed point theorem for L^1 spaces*, Invent. Math. 189 (2012), 143–148.
[10] P. Barbarski, *The Sharkovskiĭ Theorem for spaces of measurable functions*, J. Math. Anal. Appl. 373 (2011), 414–421.
[11] A. Bellow, V. Losert, *The weighted pointwise ergodic theorem and the individual ergodic theorem along subsequences*, Trans. Amer. Math. Soc. 288 (1985), 307–345.
[12] V. Bergelson, *The multifarious Poincaré Recurrence Theorem*, [w:] Descriptive set theory and dynamical systems (M. Foreman i in., red.), Lecture Note Series, t. 277, London Math. Soc. 2000, 31–57.
[13] V. Bergelson, B. Host, B. Kra, *Multiple recurrence and nilsequences*, Invent. Math. 160 (2005), 261–303.
[14] V. Bergelson, J. Rosenblatt, *Mixing actions of groups*, Illinois J. Math. 32 (1988), 65–80.

[15] M. Besbes, *Points fixes et théorèmes ergodiques dans les espaces $L^1(E)$*, Studia Math. 103 (1992), 79–97.
[16] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley & Sons Inc., Nowy Jork 1965.
[17] R. Cairoli, *Sur le théorème ergodique aléatoire*, Bull. Sci. Math. 88 (1964), 31–37.
[18] C. Castaing, *Sur les multi-applications mesurables*, C. R. Acad. Sci. Paris 260 (1965), 3838–3841.
[19] *Guido's Book of Conjectures*, zebrała Indira Chatterji, L'Enseignement Mathématique 54 (2008), nr 2, fasc. 1–2.
[20] C. Chou, *Weakly almost periodic functions and Fourier–Stieltjes algebras of locally compact groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), 141–157.
[21] W. Doeblin, *Remarques sur la théorie métrique des fractions continues*, Compos. Math. 7 (1940), 353–371.
[22] J. Dugundji, A. Granas, *A proof of the Ryll-Nardzewski fixed point theorem*, J. Math. Anal. Appl. 97 (1983), 301–305.
[23] P. Gabriel, M. Lemańczyk, K. Schmidt, *Extensions of cocycles for hyperfinite actions, and applications*, Monatsh. Math. 123 (1997), 209–228.
[24] E. Glasner, *For Bernoulli transformations the smallest natural family of factors consists of all factors*, [w:] Proceedings of the Conference on Ergodic Theory and its Connection with Harmonic Analysis, Alexandria, Egypt, May 1993, Cambridge University Press, Nowy Jork 1995, 291–297.
[25] E. Glasner, M. Megrelishvili, *On fixed point theorems and nonsensitivity*, Israel J. Math. 190 (2012), 289–305.
[26] S. Gładysz, *A random ergodic theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci. 15 (1955), 158–173.
[27] S. Gładysz, *Über den stochastischen Ergodensatz*, Studia Math. 15 (1955), 158–173.
[28] S. Gładysz, *Ergodische Funktionale und individueller ergodischer Satz*, Studia Math. 19 (1960), 177–185.
[29] B. Green, T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. Math. 167 (2008), 481–547.
[30] S. Hartman, *Quelques propriétés ergodiques des fractions continues*, Studia Math. 12 (1951), 271–278.
[31] B. Host, B. Kra, *Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds*, Ann. Math. 161 (2005), 397–488.
[32] A. D. Ioffe, *Survey of measurable selection theorems: Russian literature suplement*, SIAM J. Control Optim. 16 (1978), 728–732.
[33] R. Kaufman, *Mixing and descriptive set theory*, Illinois J. Math. 50 (2006), 541–545.
[34] K. Knopp, *Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten*, Math. Ann. 95 (1926), 409–426.
[35] K. Kungui, *Sur un problème de M. E. Szpilrajn*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 16 (1940), 70–108.
[36] A. Lasota, J. Myjak, *Attractors of multifunctions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 48 (2000), 319–334.

[37] M. Lemańczyk, *Cohomology groups, multipliers and factors in ergodic theory*, Studia Math. 122 (1997), 275–288.
[38] M. Lin, J. Olsen, *Besicovitch functions and weighted ergodic theorems for LCA group actions*, [w:] Convergence in Ergodic Theory and Probability (V. Bergelson i in., red.), Ohio State Research Institute Publications, t. 5, de Gruyter, Berlin––Nowy Jork 1996.
[39] M. Lin, J. Olsen, A. Tempelman, *On modulated ergodic theorems for Dunford––Schwartz operators*, Illinois J. Math. 43 (1999), 542–567.
[40] E. Marczewski, *Théorème ergodique; généralisations et applications*, [w:] Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens Hongrois, Akadémiai Kiadó, Budapeszt 1952, 125–127.
[41] M. Mentzen, *Ergodic properties of group extensions of dynamical systems with discrete spectra*, Studia Math. 101 (1991), 19–31.
[42] I. Namioka, E. Asplund, *A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 443–445.
[43] J. Olsen, *The individual weighted ergodic theorem for bounded Besicovitch sequences*, Canad. Math. Bull. 25 (1982), 468–471.
[44] J. Olsen, *Calculation of the limit in the return times theorem for Dunford–Schwartz Operators*, [w:] Proceedings of the Conference on Ergodic Theory and its Connection with Harmonic Analysis, Alexandria, Egypt, May 1993, Cambridge University Press, Nowy Jork 1995, 359–367.
[45] W. A. Rochlin, *Selected topics from the metric theory of dynamical systems*, Uspiekhi Mat. Nauk 4 (1949), 57–128, przekład angielski: Amer. Math. Soc. Transl., 49 (1966), 171–240.
[46] P. O. Salvador, *Convergence of the averages and finiteness of ergodic power functions in weighted L^1 spaces*, Publ. Mat. 35 (1991), 465–473.
[47] R. Sato, *Pointwise ergodic theorems for functions in Lorentz spaces L_{pq} with $p \neq \infty$*, Studia Math. 109 (1994), 209–216.
[48] R. Sato, *Pointwise ergodic theorems in Lorentz spaces $L(p, q)$ for null preserving transformations*, Studia Math. 114 (1995), 227–236.
[49] A. Tempelman, *Pointwise ergodic theorems for bounded Lamperti representations of amenable groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 4989–5004.
[50] D. H. Wagner, *Survey of measurable selection theorems*, SIAM J. Control Optim. 15 (1977), 859–903.
[51] J. Woś, *Random ergodic theorems for sub-Markovian operators*, Studia Math. 74 (1982), 191–212.

Tomasz Downarowicz
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
downar@pwr.edu.pl



W pierwszym rzędzie od lewej: Władysław Orlicz, CRN, Stanisław Hartman, Roman Sikorski
Zdjęcie zrobiono podczas konferencji z analizy funkcjonalnej w Jabłonnej w 1960 roku



Od lewej: Stanisław Hartman, CRN, Andrzej Hulanicki, Kazimierz Urbanik, Edward Marczewski.
Zdjęcie zrobiono około 1962 roku

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 245–255
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Grzegorz Plebanek (Wrocław)

Czesław Ryll-Nardzewski i teoria miary*

Czesław Ryll-Nardzewski opublikował ponad sto artykułów o niespotykanej w dzisiejszych czasach tematycznej różnorodności. CRN (w środowisku wrocławskim ten skrót był dość powszechnie stosowany jako remedium na długie nazwisko Profesora) pisał o zagadnieniach analizy, teorii procesów stochastycznych, analizy funkcjonalnej, układów dynamicznych aż po topologię ogólną, teorię mnogości i logikę. Pewna istotna część dorobku naukowego CRN-a dotyczy teorii miary i o tym traktuje niniejszy artykuł. Poniższy wybór prac nie jest w pełni reprezentatywny nawet w tak ograniczonym zakresie. Pragnę przede wszystkim wspomnieć o wcześniejszych pracach Profesora z okresu jego pierwszego pobytu we Wrocławiu, na początku lat pięćdziesiątych, będących rezultatem współpracy z Edwardem Marczewskim. Inne prace, które choćby pobieżnie wspominam, zostały wybrane na przykład dlatego, że doskonale ilustrują następującą opinię Stanisława Hartmana (*Nauka Polska* 3, 1972).

> U Ryll-Nardzewskiego rzadko można spotkać dowody obciążone długimi rachunkami lub mozolną techniką; prawie zawsze rozumowania są lekkie i błyszczące, oparte na twierdzeniach, które przenikliwość i erudycja autora pozwalają znaleźć w rozmaitych dziedzinach matematyki i efektownie zastosować do rozwiązania badanego problemu.

Wpływ Ryll-Nardzewskiego na matematykę i teorię miary w szczególności jest daleko większy niż prosta suma jego publikacji i przedstawionych w nich

* Dziękuję bardzo koledze Zbigniewowi Lipeckiemu za pomoc w zgromadzeniu danych o charakterze historycznym, wykorzystanych w części czwartej poniżej oraz za krytyczną lekturę wcześniejszej wersji artykułu i wiele cennych uwag.

wyników. Profesor często wolał raczej dzielić się spostrzeżeniami niż publikować samemu. Dawno temu natknąłem się na jego nazwisko, czytając znaną pracę Kelleya [17] o miarach na algebrach Boole'a. Kelley podał w niej kombinatoryczną charakteryzację algebr $\mathfrak{A}$ posiadających skończenie addytywną skończoną miarę ściśle dodatnią, czyli miarę znikającą tylko w 0. Warunkiem koniecznym i dostatecznym jest istnienie rozkładu

$$\mathfrak{A} \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n,$$

gdzie $I(\mathcal{G}_n) > 0$. Tutaj $I(\mathcal{G})$ oznacza wprowadzoną przez Kelleya liczbę przecięć (*intersection number*); przypomnijmy, że na przykład dla rodziny zbiorów $\mathcal{G}$, warunek $I(\mathcal{G}) \geqslant 1/2$ oznacza, że w każdym skończonym ciągu z $\mathcal{G}$ przynajmniej połowa zbiorów ma niepusty przekrój (licząc z powtórzeniami).

W *Addendum* do pracy Kelley cytuje uwagi przekazane mu przez Romana Sikorskiego, który w swoim liście zreferował następujące spostrzeżenie Ryll-Nardzewskiego:

> Jeżeli w charakteryzacji Kelleya zażądać dodatkowo, że rodziny $\mathcal{G}_n$ są zamknięte na suprema ciągów rosnących, to otrzymamy opis tych algebr $\mathfrak{A}$, które posiadają ściśle dodatnią miarę *przeliczalnie* addytywną.

Charakteryzacja jest elegancka, a dowód jest stosunkowo prosty... jak już się go przeczyta.

1. Miary doskonałe i miary zwarte

Jak się powszechnie uważa, pojęcie miary doskonałej zostało wprowadzone przez Gniedienkę i Kołmogorowa [10], ale podobne koncepcje można znaleźć we wcześniejszej pracy Halmosa i von Neumanna [14] i w pracach Rochlina, zob. na przykład pracę [31].

Niech (X, Σ, μ) będzie skończoną przestrzenią miarową. Miara μ jest *doskonała* (*perfect*), jeżeli dla dowolnej funkcji mierzalnej $f\colon X \to \mathbb{R}$ i takiego zbioru $E \subseteq \mathbb{R}$, że $f^{-1}[E] \in \Sigma$, istnieje taki zbiór borelowski $B \subseteq E$, że $\mu(f^{-1}[B]) = \mu(f^{-1}[E])$. Ta definicja pozwala na uniknięcie wielu patologii przy rozważaniu miar abstrakcyjnych, w oderwaniu od kontekstu topologicznego. Pożytki z doskonałości miary nie są od razu widoczne – opiszemy je pokrótce poniżej, opierając się na pracach Marczewskiego i Ryll-Nardzewskiego.

Marczewski [19] wprowadził pojęcie miary zwartej zdefiniowane następująco. Rodzina $\mathcal{C}$ podzbiorów X jest *zwarta*, jeżeli dla dowolnego ciągu $(C_n)_n$ w $\mathcal{C}$, warunek $\bigcap_n C_n = \varnothing$ implikuje, że $\bigcap_{n\leqslant k} C_n = \varnothing$ dla pewnego k. Jeżeli (X, Σ, μ)

jest skończoną przestrzenią miarową, to miara μ jest *zwarta* (*compact*), jeżeli istnieje taka zwarta rodzina $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$, że μ jest wewnętrznie $\mathcal{C}$-regularna, to znaczy

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq A\},$$

dla każdego $A \in \Sigma$. W istocie definicja może być zastosowana do miary skończenie addytywnej μ określonej na pewnym ciele $\mathcal{F}$ zbiorów. Taka miara jest zwarta, jeżeli dla pewnej zwartej rodziny $\mathcal{C}$ zachodzi warunek, że dla każdego $A \in \mathcal{F}$ i $\varepsilon > 0$ istnieją takie $C \in \mathcal{C}$ i $A_0 \in \mathcal{F}$, że $A_0 \subseteq C \subseteq A$ i $\mu(A \setminus A_0) < \varepsilon$ (tutaj nie zakładamy, że $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$). Takie uogólnienie pozwala sformułować następujący rezultat.

Twierdzenie 1.1 (Marczewski)**.** *Jeżeli skończenie addytywna funkcja zbioru μ jest zwarta na ciele $\mathcal{F}$, to jest przeliczalnie addytywna i rozszerza się jednoznacznie do zwartej miary na σ-ciało $\sigma(\mathcal{F})$ generowane przez $\mathcal{F}$.*

W swojej pracy [33] Ryll-Nardzewski przeanalizował związki pomiędzy zwartością i doskonałością miary, nawiązując też do koncepcji Rochlina abstrakcyjnego pojęcia miary „typu Lebesgue'a".

Twierdzenie 1.2 (Ryll-Nardzewski)**.** *Dla dowolnej skończonej przestrzeni miarowej (X, Σ, μ) następujące warunki są równoważne*:

(a) *miara μ jest doskonała*,
(b) *miara $\mu|_{\Sigma_0}$ jest zwarta dla każdego σ-ciała $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ generowanego przez przeliczalną rodzinę zbiorów.*

W szczególności Ryll-Nardzewski wykazał w ten sposób, że dla miar na σ-ciałach przeliczalnie generowanych pojęcia zwartości w sensie Marczewskiego, doskonałości oraz koncepcja Rohlina abstrakcyjnej przestrzeni Lebesgue'a pokrywają się. Opierając się na twierdzeniu 1.2 łatwo można podać przykład miary, która nie jest zwarta: wystarczy rozważyć miarę Lebesgue'a λ na $[0,1]$ i dołączyć do zbiorów borelowskich w $[0,1]$ jeden zbiór niemierzalny, rozszerzając λ do miary na tym większym σ-ciele.

Swoje pomysły Marczewski i Ryll-Nardzewski rozwijali w pracach [20, 21], w szczególności prezentując zastosowanie pojęcia zwartości do miar na produktach, mających zadane rozkłady brzegowe.

Twierdzenie 1.3 (Marczewski i Ryll-Nardzewski)**.** *Niech (X, Σ, μ) i (Y, Θ, ν) będą skończonymi przestrzeniami miarowymi. Załóżmy, że miara μ jest zwarta i rozważmy dowolną nieujemną skończenie addytywną funkcję zbioru π określoną na ciele podzbiorów $X \times Y$ generowanym przez mierzalne prostokąty $A \times B$, przy czym $A \in \Sigma, B \in \Theta$.*

Jeżeli π spełnia warunki $\pi(A \times Y) = \mu(A)$ i $\pi(X \times B) = \nu(B)$ dla dowolnych $A \in \Sigma$ i $B \in \Theta$, to π jest przeliczalnie addytywna.

Pojęcie miary doskonałej pozwala na przykład sformułować abstrakcyjną wersję klasycznego twierdzenia Kołmogorowa, zob. artykuł [19, 6(viii)].

Twierdzenie 1.4. *Niech (X_t, Σ_t) będzie przestrzenią mierzalną dla każdego $t \in T$ oraz dla dowolnego $S \subseteq T$ oznaczmy $X_S = \prod_{t\in S} X_t$ i $\Sigma_S = \bigotimes_{t\in S} \Sigma_t$.*

Załóżmy, że dany jest zgodny system miar probabilistycznych μ_S na Σ_S, przy czym S przebiega rodzinę skończonych podzbiorów T. Jeżeli miara $\mu_{\{t\}}$ jest doskonała dla każdego $t \in T$, to istnieje (jedyna i doskonała) miara μ na $\bigotimes_{t\in T} \Sigma_t$ mająca dla skończonych $S \subseteq T$ zadane rozkłady μ_S.

Warto tu przypomnieć, że dowód takiej wersji twierdzenia o rozkładach zgodnych można szybko wywieść z powyższych rezultatów Marczewskiego i Ryll-Nardzewskiego. Warunek zgodności pozwala jednoznacznie zdefiniować skończenie addytywną funkcję μ na ciele generowanym przez wszystkie skończenie wymiarowe kostki mierzalne w $\prod_{t\in T} X_t$ i teraz wystarczy sprawdzić, że taka miara μ jest przeliczalnie addytywna. Ponieważ warunek przeliczalnej addytywności dotyczy rodzin przeliczalnych, bez zmniejszenia ogólności można założyć, że miara μ_t jest zwarta dla każdego $t \in T$ (na mocy twierdzenia 1.2). Jeżeli $\mathcal{C}_t \subseteq \Sigma_t$ jest stosowną rodziną zwartą, to łatwo można wskazać zwartą rodzinę w X, która aproksymuje μ. Dlatego μ jest przeliczalnie addytywna na mocy twierdzenia 1.1. Podobne argumenty działają przy definiowaniu granic odwrotnych doskonałych przestrzeni miarowych, zob. artykuł [25].

Wspomniane powyżej wyniki Marczewskiego i Ryll-Nardzewskiego doczekały się wielu omówień, zob. na przykład prace [18, 29, 30]. Poniżej wspominamy kilka wątków, które znalazły interesujące kontynuacje.

Twierdzenie Ryll-Nardzewskiego 1.2 sugeruje naturalne pytanie, czy istnieją miary doskonałe, które nie są zwarte. Przykłady takich miar zostały znalezione dopiero w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku przez Vinokurova i Mahkamova oraz Musiała, zob. artykuł [23]. Istnieje nawet doskonała miara niezwarta μ, mająca ośrodkową przestrzeń $L_1(\mu)$. Konstrukcja takiej miary zaprezentowana w pracy [28] wymaga wszakże pewnych dodatkowych założeń teoriomnogościowych.

Ciekawą kontynuację miało twierdzenie 1.3. Jak pokazał Pachl w pracach [26, 27], zwartość miary μ daje się scharakteryzować przez pewną własność miar w produkcie $X \times Y$ mających pierwszy rozkład μ (chodzi o istnienie dezintegracji, stosownego rozkładu warunkowego). Dzięki temu Pachl udowodnił, że

jeżeli miara μ jest zwarta na σ-ciele Σ, to jest też zwarta na każdym mniejszym σ-ciele. To pozornie proste stwierdzenie do dziś nie ma bezpośredniego (konstruktywnego) dowodu, zob. artykuł [8]. Dalsze zastosowania twierdzenia 1.3 można znaleźć w pracach Iwanika, zob. na przykład pracę [15].

Fremlin [9] badał własności miar związane z doskonałością i zwartością, które nawiązują do teorii gier nieskończonych. Jego praca zwróciła uwagę na ciągle otwarty, „oczywisty" i zapewne rozważany wcześniej we Wrocławiu problem: czy każda miara probabilistyczna na dowolnym σ-ciele $\Sigma \subseteq \mathrm{Bor}[0,1]$ jest zwarta? Częściowe odpowiedzi można znaleźć w artykułach [3, 9].

2. Warunkowe rozkłady prawdopodobieństwa

Przypomnimy tutaj główny rezultat z pracy Blackwella i Ryll-Nardzewskiego [1], która powstała w czasie, gdy CRN przebywał w Berkeley.

Niech $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, gdzie Ω jest zbiorem borelowskim w przestrzeni polskiej, a $\mathcal{B}$ jest σ-ciałem borelowskim na Ω. Ustalmy też pewne przeliczalnie generowane σ-ciało $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. *Warunkowym rozkładem prawdopodobieństwa* względem $\mathcal{A}$ nazywamy taką rzeczywistą funkcję Q określoną na produkcie $\Omega \times \mathcal{B}$, że

1° dla każdego $\omega \in \Omega$ funkcja $Q(\omega, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną na $\mathcal{B}$,
2° dla każdego $B \in \mathcal{B}$ funkcja $Q(\cdot, B)$ jest $\mathcal{A}$-mierzalna,
3° dla każdego $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}$ zachodzi wzór

$$\int_A Q(\omega, B)\, \mathrm{d}P = P(A \cap B).$$

Autorzy nazywają Q *rozkładem właściwym* (*proper*) w punkcie $\omega_0 \in \Omega$, jeżeli warunek $\omega_0 \in A \in \mathcal{A}$ pociąga za sobą $Q(\omega_0, A) = 1$.

Jak wiadomo, istnieje zawsze taki rozkład Q, który jest właściwy w prawie wszystkich punktach $\omega \in \Omega$. Blackwell i Ryll-Nardzewski udowodnili, że słowa *prawie* nie można tutaj pominąć – ich główny wynik pokazuje, że istnienie właściwego w każdym punkcie rozkładu Q implikuje, że dla każdej $\mathcal{A}$-mierzalnej funkcji $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zbiór $g[\Omega]$ jest borelowski.

Przypomnijmy, że (przy powyższych założeniach) taki zbiór jest analityczny (jest ciągłym obrazem przestrzeni liczb niewymiernych), ale nie musi być borelowski. Prowadzi to do przykładów, w których warunkowy wszędzie właściwy rozkład Q nie istnieje.

Dowód głównego wyniku opiera się na innym twierdzeniu, które (w uproszczeniu, przy powyższych założeniach o Q) orzeka, że jeżeli zbiór $S \subseteq \Omega \times \Omega$

jest $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-mierzalny i $Q(\omega, S_\omega) > 0$ dla $\omega \in \Omega$, to S dopuszcza $\mathcal{A}$-mierzalną uniformizację.

Wątki z omawianej pracy były rozwijane zarówno z probabilistycznego punku widzenia (artykuły [6, 35]), jak i w kontekście deskryptywnej teorii mnogości (artykuły [22, 36]).

3. Inne prace

W późniejszym okresie Ryll-Nardzewski regularnie publikował prace poświęcone teorii miary i jej związkom z przeróżnymi dziedzinami matematyki. Były one efektem współpracy z licznym zastępem współpracowników. Poniższe proste wyliczenie pozwoli jedynie ocenić zakres tematyczny tych artykułów.

1. Praca [34] z Rastislavem Telgárskim dotyczy (nie)istnienia uniwersalnych miar niezmienniczych na grupach.
2. Praca [13] napisana z Andrzejem Hulanickim prezentuje jednolite podejście do znanych uprzednio sposobów konstruowania niezmienniczych rozszerzeń miary Haara na grupie zwartej.
3. Dwa artykuły [11, 12] napisane z Edwardem Grzegorkiem zajmują się klasycznym pojęciem zbiorów absolutnie mierzalnych w przestrzeniach polskich.
4. Wraz z całą grupą matematyków wrocławskich Ryll-Nardzewski opublikował dwa artykuły o istnieniu zbiorów niemierzalnych związanych z partycjami przestrzeni polskich – artykuł [5] nawiązuje tematycznie do pracy [4], zawierającej znane *twierdzenie czterech Polaków*.
5. Praca z Janem Rosińskim [32] dyskutuje zagadnienie rozszerzania miar cylindrycznych (baire'owskich) zdefiniowanych na grupach lokalnie zwartych do miar Radona.
6. Artykuł [2] powstał przy okazji wizyty Andreasa Blassa we Wrocławiu i dotyczy różnych co do własności rozszerzeń gęstości asymptotycznej do miary skończenie addytywnej, określonej dla wszystkich podzbiorów liczb naturalnych.
7. Praca [7] poświęcona jest topologicznym własnościom przestrzeni miar probabilistycznych, związanym ze strukturą przestrzeni Banacha funkcji ciągłych.

Napiszę szerzej o artykule Musiała i Ryll-Nardzewskiego [24], który dotyczył burzliwie rozwijającej się w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych ubiegłego wieku teorii miar wektorowych i całek funkcji o wartościach wektorowych, a w szczególności własnościom Radona–Nikodyma przestrzeni Banacha. Te zagadnienia były często obecne na poniedziałkowym seminarium Profesora,

jako że znajdowały się w kręgu zainteresowań niektórych uczestników tego seminarium.

W pracy [24] rozważa się przestrzeń Banacha X, jej podprzestrzeń Y oraz skończenie addytywną miarę $\nu\colon \mathcal{A} \to Y^*$ o wahaniu skończonym. Powstaje pytanie o istnienie *liftingu*, czyli pytanie, czy ν daje się „podnieść" do takiej miary $\mu\colon \mathcal{A} \to X^*$, że $I^*\mu = \nu$ (tutaj I^* jest operatorem dualnym do włożenia $I\colon Y \to X$, a $\mathcal{A}$ oznacza dowolną algebrę Boole'a). Autorzy dowodzą na dwa różne sposoby, że taki *lifting* zachowujący wahanie faktycznie istnieje. Pierwsze podejście polega na zauważeniu, że problem daje się rozwiązać dla każdej algebry skończonej $\mathcal{A}$ i zbudowaniu, w przypadku ogólnym, stosownego zbieżnego ciągu uogólnionego miar. Drugi dowód opiera się na spostrzeżeniu, że ν można utożsamić z funkcjonałem na przestrzeni Y-wartościowych funkcji ciągłych na przestrzeni Stone'a S algebry $\mathcal{A}$, i zastosowaniu klasycznego twierdzenia Hahna–Banacha. Wynik uogólnia się do stwierdzenia o istnieniu analogicznych *liftingów* dla operatorów określonych na L-przestrzeniach.

Jednym z zastosowań jest twierdzenie o słabej własności Radona–Nikodyma. Przestrzeń Banacha X ma taką własność, jeżeli każda X-wartościowa miara o wahaniu skończonym, absolutnie ciągła względem rzeczywistej miary μ, daje się wyrazić przez całkę Pettisa z odpowiedniej gęstości. Autorzy wykazali w szczególności, że jeśli X^* ma słabą własność Radona–Nikodyma, to X nie zawiera izomorficznych kopii przestrzeni ℓ_1. Warto dodać, że Janicka udowodniła później (w pracy [16]) implikację przeciwną.

4. Seminarium z teorii miary i doktoranci

Czesław Ryll-Nardzewski prowadził przez wiele lat poniedziałkowe seminarium z teorii miary, które było kontynuacją seminarium Marczewskiego. Spotkania odbywały się do połowy lat osiemdziesiątych w Instytucie Matematycznym UWr, później zostały przeniesione do Instytutu Matematyki PWr, jeszcze w czasach, gdy mieścił się on w skromnym budynku, zwanym pieszczotliwie barakiem. Oprócz samej teorii miary i funkcji rzeczywistych, wiele odczytów poświęconych było miarom i całkom wektorowym, topologii i geometrii przestrzeni Banacha, kratom liniowym, teoriomnogościowym aspektom analizy czy teorii Gowersa i Maureya dziedzicznie nierozkładalnych przestrzeni Banacha i probabilistyce teoretycznej.

Seminarium odbywało się bardzo regularnie aż do roku 2005 czy 2006. W ciągu kilku dziesięcioleci przez seminarium przewinęła się dość znaczna liczba uczestników, w spotkaniach regularnie uczestniczyły (w różnych okresach) następujące osoby: Bohdan Aniszczyk, Tadeusz Bednarski, Piotr Borodulin-

-Nadzieja, Jacek Cichoń, Ryszard Frankiewicz, Magdalena Grzech, Edward Grzegorek, Wojciech Herer, Anzelm Iwanik, Liliania Janicka, Tasos Kamburelis, Ryszard Komorowski, Jacek Kuiński, Zbigniew Lipecki, Bogusław Merdas, Krzysztof Mieloch, Jolanta Misiewicz, Michał Morayne, Kazimierz Musiał, Marek Pieńkowski, Grzegorz Plebanek, Robert Rałowski, Witold Seredyński, Andrzej Spakowski, Piotr Urbaniec, Bogdan Węglorz, Marek Wilhelm, Marek Wójtowicz, Szymon Żeberski.

Czesław Ryll-Nardzewski wypromował osiemnaścioro doktorów matematyki. Ta lista obejmuje siedem osób, które napisały rozprawy poświęcone teorii miary lub zagadnieniom pokrewnym.

1. Wojciech Herer, *Rozszerzanie miar o wartościach w grupach topologicznych*, 1971;
2. Kazimierz Musiał, *Granice projektywne doskonałych przestrzeni miarowych i regularne prawdopodobieństwa warunkowe*, 1971;
3. Zbigniew Lipecki, *Rozszerzanie miar i quasi-miar nieliczbowych i uogólnione przestrzenie funkcji całkowalnych*, 1973;
4. Dinh Quang Luu, *On the Radon–Nikodym property of the Banach cartesian and the Banach tensor products*, 1977;
5. Liliana Janicka, *Własności typu Radona–Nikodyma dla przestrzeni Banacha*, 1979;
6. Bohdan Aniszczyk, *O dopełnialności, antyatomowości i innych problemach teorii σ-ciał zbiorów*, 1981;
7. Michał Morayne, *O pewnych zagadnieniach związanych z różniczkowalnością funkcji wektorowych*, 1987.

5. Pożegnanie

Pozwolę sobie na koniec napisać kilka zdań natury osobistej. Byłem regularnym uczestnikiem, a później i sekretarzem seminarium Profesora z teorii miary przez ostatnie dwadzieścia pięć lat działalności tegoż seminarium. Moja edukacja matematyczna dokonywała się przede wszystkim w czasie tych spotkań – wiele z nich poświęconych było analizowaniu trudnej i bardzo ciekawej monografii Talagranda [37], która znacząco ukształtowała moje gusta i zainteresowania matematyczne.

Jakże często dziwiłem się w duchu, że Profesor, który zdawał się nie śledzić bieżącego rozwoju interesujących mnie zagadnień, tak szybko i głęboko potrafił zrozumieć naturę omawianego problemu, skomentować przedstawiony na tablicy dowód lub zasugerować inną drogę do celu. Dziś myślę, że Profesor ciągle dostrzegał prawdziwe jądro matematyki jako całości, ową mityczną *złotą*

gałąź, z której, niczym liście, wyrastają wszystkie pojęcia i teorie, przesłaniając nam obraz całości.

Profesor, jak każdy, miał pewne wady. Z mojego punktu widzenia najbardziej widoczną była jego wielka łagodność czy też delikatność, która nie pozwalała mu na choćby odrobinę krytyki, na bardziej stanowcze oceny moich dokonań.

Profesor czasami chwalił – pamiętam dobrze, jak otrzymałem od niego kopię mojego doktoratu z naniesionymi ołówkiem uwagami. Przy dowodzie jednego, zresztą dość technicznego lematu dopisał na marginesie: *Ładne!* To był dowód, który sam mi zasugerował, wysłuchawszy na seminarium moich przydługich wywodów.

Bibliografia

[1] D. Blackwell, C. Ryll-Nardzewski, *Non-existence of everywhere proper conditional distributions*, Ann. Math. Statist. 34 (1963), 223–225.

[2] A. Blass, R. Frankiewicz, G. Plebanek, C. Ryll-Nardzewski, *A note on extensions of asymptotic density*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 3313–3320.

[3] P. Borodulin-Nadzieja, G. Plebanek, *On compactness of measures on Polish spaces*, Illinois J. Math. 49 (2005), 531–545.

[4] J. Brzuchowski, J. Cichoń, E. Grzegorek, C. Ryll-Nardzewski, *On the existence of nonmeasurable unions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 27 (1979), 447–448.

[5] J. Cichoń, M. Morayne, R. Rałowski, C. Ryll-Nardzewski, S. Żeberski, *On nonmeasurable unions*, Topology Appl. 154 (2007), 884–893.

[6] L. E. Dubins, D. Heath, *With respect to tail sigma fields, standard measures possess measurable disintegrations*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), 416–418.

[7] R. Frankiewicz, G. Plebanek, C. Ryll-Nardzewski, *Between Lindelöf property and countable tightness*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 97–103.

[8] D. H. Fremlin, *Compact measure spaces*, Mathematika 46 (1999), 331–336.

[9] D. H. Fremlin, *Weakly α-favourable measure spaces*, Fund. Math. 165 (2000), 67–94.

[10] B. V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow-Leningrad 1949.

[11] E. Grzegorek, C. Ryll-Nardzewski, *A remark on absolutely measurable sets*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 28 (1980), 229–232.

[12] E. Grzegorek, C. Ryll-Nardzewski, *On universal null sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 613–617.

[13] A. Hulanicki, C. Ryll-Nardzewski, *Invariant extensions of the Haar measure*, Colloq. Math. 42 (1979), 223–227.

[14] P. R. Halmos, J. von Neumann, *Operator methods in classical mechanics II*, Ann. Math. 43 (1942), 332–350.

[15] A. Iwanik, *Representation of operators on L^1-spaces by nondirect product measures*, Colloq. Math. 47 (1982), 91–95.
[16] L. Janicka, *Some measure-theoretical characterization of Banach spaces not containing ℓ_1*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 27 (1979), 561–565.
[17] J. L. Kelley, *Measures on Boolean algebras*, Pacific J. Math. 9 (1959), 1165–1177.
[18] G. Koumoullis, *On perfect measures*, Trans. Amer. Math. Soc. 264 (1981), 521–537.
[19] E. Marczewski, *On compact measures*, Fund. Math. 40 (1953), 113–124.
[20] E. Marczewski, C. Ryll-Nardzewski, *Projections in abstract sets*, Fund. Math. 40 (1953), 160–164.
[21] E. Marczewski, C. Ryll-Nardzewski, *Remarks on the compactness and non direct products of measures*, Fund. Math. 40 (1953), 165–170.
[22] R. D. Mauldin, *Borel parametrizations*, Trans. Amer. Math. Soc. 250 (1979), 223–234.
[23] K. Musiał, *Inheritness of compactness and perfectness of measures by thick subsets*, [w:] Measure theory (Proc. Conf. Oberwolfach, 1975), Lecture Notes in Math, t. 541, Springer, Berlin 1976, 31–42.
[24] K. Musiał, C. Ryll-Nardzewski, *Liftings of vector measures and their applications to RNP and WRNP*, [w:] Vector space measures and applications (Proc. Conf., Univ. Dublin, Dublin, 1977), II, Lecture Notes in Math., t. 645, Springer, Berlin 1978, 162–171.
[25] K. Musiał, *Projective limits of perfect measure spaces,* Fund. Math. 110 (1980), 163–189.
[26] J. K. Pachl, *Disintegration and compact measures*, Math. Scand. 43 (1978/79), 157–168.
[27] J. K. Pachl, *Two classes of measures*, Colloq. Math. 42 (1979), 331–340.
[28] G. Plebanek, *A separable perfect noncompact measure*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 49 (2001), 285–289.
[29] D. Ramachandran, *Perfect measures. Part I. Basic theory*, ISI Lecture Notes, t. 5, Macmillan Co. of India, Ltd., New Delhi 1979.
[30] D. Ramachandran, *Perfect measures. Part II. Special topics*, ISI Lecture Notes, t. 7, Macmillan Co. of India, Ltd., New Delhi 1979.
[31] V. A. Rohlin, *On the fundamental ideas of measure theory*, Mat. Sbornik 25 (1949), nr 67, 107–150.
[32] J. Rosiński, C. Ryll-Nardzewski, *Cylindrical measures on topological groups*, Probab. Math. Statist. 6 (1985), 167–172.
[33] C. Ryll-Nardzewski, *On quasi-compact measures*, Fund. Math. 40 (1953), 125–130.
[34] C. Ryll-Nardzewski, R. Telgársky, *The nonexistence of universal invariant measures*, Proc. Amer. Math. Soc. 69 (1978), 240–242.
[35] T. Seidenfeld, M. J. Schervish, J. B. Kadane, *Improper regular conditional distributions*, Ann. Probab. 29 (2001), 1612–1624.
[36] V. V. Srivatsa, *Measure and category approximations for C-sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 278 (1983), 495–505.

[37] M. Talagrand, *Pettis integral and measure theory*, Mem. Amer. Math. Soc. 51 (1984), nr 307.

Grzegorz Plebanek
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
grzes@math.uni.wroc.pl

Doktorzy wypromowani przez Czesława Ryll-Nardzewskiego

1. Barbara Rokowska, *Pewne nowe konstrukcje systemów Steinera*, Uniwersytet Wrocławski, 1966
2. Leszek Pacholski, *O przeliczalnie zwartych produktach zredukowanych*, Instytut Matematyczny PAN, 1970
3. Rastislav Telgársky, *C-dispersed spaces and topological product of paracompact spaces*, Instytut Matematyczny PAN, 1970
4. Wojciech Herer, *Rozszerzanie miar o wartościach w grupach topologicznych*, Instytut Matematyczny PAN, 1971
5. Kazimierz Musiał, *Granice projektywne doskonałych przestrzeni miarowych i regularne prawdopodobieństwa warunkowe*, Instytut Matematyczny PAN, 1971
6. Agnieszka Wojciechowska-Węglorz, *O liczbach Hellinga*, Uniwersytet Wrocławski, 1971
7. Jan Waszkiewicz, *O teorii produktów uogólnionych systemów relacyjnych*, Instytut Matematyczny PAN, 1972
8. Zbigniew Lipecki, *Rozszerzanie miar i quasi-miar nieliczbowych i uogólnione przestrzenie funkcji całkowalnych*, Instytut Matematyczny PAN, 1973
9. Anzelm Iwanik, *Punktowe realizacje półgrup transformacji*, Politechnika Wrocławska, 1974
10. Wacław Timoszyk, *Własności gaussowskich procesów Markowa*, Uniwersytet Wrocławski, 1974
11. Henryk Kotlarski, *O modelach dobrze uporządkowanych*, Uniwersytet Wrocławski, 1976
12. Halina Byczkowska, *Zasada niezmienniczości na grupach lokalnie zwartych*, Politechnika Wrocławska, 1977
13. Janusz Górniak, *Dylatacje operatorowych funkcji dodatnio określonych w przestrzeniach liniowych*, Politechnika Wrocławska, 1977
14. Dinh Quang Luu, *On the Radon–Nikodym property of the Banach cartesian and the Banach tensor products*, Uniwersytet Wrocławski, 1977
15. Liliana Janicka, *Własności typu Radona–Nikodyma dla przestrzeni Banacha*, Uniwersytet Wrocławski, 1979
16. Przemysław Kajetanowicz, *Funkcjonały ekstremalne na algebrach Banacha*, Politechnika Wrocławska, 1980
17. Bohdan Aniszczyk, *O dopełnialności, antyatomowości i innych problemach teorii σ-ciał zbiorów*, Politechnika Wrocławska, 1981
18. Michał Morayne, *O pewnych zagadnieniach związanych z różniczkowaniem funkcji wektorowych*, Uniwersytet Wrocławski, 1987

opracował Zbigniew Lipecki (Wrocław)

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 257–290
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Tomasz Byczkowski, Tomasz Żak (Wrocław)

Seminarium z teorii potencjału procesów stochastycznych na Politechnice Wrocławskiej

1. Wstęp

Po wojnie Wrocław stał się ważnym ośrodkiem matematycznym w Polsce. Osiedlili się tutaj nestorzy matematyki z ośrodka lwowskiego – Bronisław Knaster, Hugo Steinhaus, Władysław Ślebodziński. Po pewnym czasie środowisko matematyczne zasilił profesor Czesław Ryll-Nardzewski, który w późniejszym okresie odegrał decydującą rolę w budowaniu ośrodka badawczego w Instytucie Matematyki Politechniki Wrocławskiej.

Matematyka politechniczna w okresie przed 1968 rokiem miała głównie charakter „usługowy", czyli zorientowany na kształcenie inżynierów – aktywni naukowo matematycy pracowali na Uniwersytecie. Na Politechnice brakowało wykwalifikowanej kadry prowadzącej badania naukowe, a badaniom nie sprzyjał podział matematyków na cztery katedry. Sytuacja uległa radykalnej zmianie z chwilą powstania najpierw Studium, a wkrótce potem Wydziału Podstawowych Problemów Techniki (WPPT), założonego przez Stanisława Gładysza. WPPT pozwolił na powołanie Instytutu Matematyki i wkrótce pojawili się nowi pracownicy, między nimi Tomasz Byczkowski, Anzelm Iwanik i Aleksander Weron. Priorytetem prof. Gładysza były badania naukowe. Postawił on na współpracę z Uniwersytetem Wrocławskim i na dużą skalę korzystał z wielkiego doświadczenia i wiedzy wybitnych matematyków wrocławskich, organizując wykłady monograficzne i seminaria, w których uczestniczyli nie tylko uzdolnieni studenci wyższych lat studiów matematycznych, ale także młodsi pracownicy Instytutu. Profesorowi Gładyszowi udało się wkrótce pozyskać profesora Czesława Ryll-Nardzewskiego, wybitnego matematyka, który

przeszedł do nas z Uniwersytetu Wrocławskiego. Profesor Ryll-Nardzewski miał w dorobku niezwykle różnorodne dokonania naukowe. To była wielka osobowość. Był autorytetem w dziedzinie podstaw matematyki i analizy harmonicznej na grupach abelowych, ale miał też znaczące dokonania w dziedzinie probabilistyki, m.in. dotyczące procesów Poissona i punktowych oraz teorii ergodycznej (zob. [47, 84]).

Gładysz i Ryll-Nardzewski zorganizowali seminarium o tematyce związanej z szeroko rozumianą probabilistyką. W jednym z pierwszych wystąpień na tym seminarium, prof. Ryll-Nardzewski zreferował nieopublikowany jeszcze preprint, zawierający dowód ważnego twierdzenia, nazywanego teraz nierównością Landaua–Sheppa dla miar gaussowskich. Stało się to impulsem do badań w dziedzinie probabilistyki na przestrzeniach liniowych. Spora część młodych pracowników, m.in. T. Byczkowski i A. Weron, mieli w dalszej perspektywie udział w tych badaniach. W nieco późniejszym okresie pojawiła się na tym seminarium tematyka związana z teorią ergodyczną – kolejna dziedzina, w której Ryll-Nardzewski wiele dokonał. Było to punktem wyjścia do badań, a potem stworzenia przez Iwanika zespołu zajmującego się tą dziedziną.

Kolejny etap rozwoju naukowego polegał na wykształceniu utalentowanych matematycznie absolwentów WPPT i wciągnięciu ich do badań w wybranych dziedzinach. Z pewnym uproszczeniem można powiedzieć, że powstały w Instytucie trzy główne grupy badawcze, prowadzone przez następujące osoby:

- T. Byczkowskiego, zajmująca się probabilistyką na przestrzeniach liniowych i grupach,
- A. Iwanika, zajmująca się algebrami ogólnymi, teorią miary, a później teorią ergodyczną,
- A. Werona, zajmująca się teorią prognozy, teorią prawdopodobieństwa na przestrzeniach Banacha, fizyką matematyczną i zastosowaniami matematyki.

Każda z tych grup miała swoje korzenie w seminarium Gładysza i Ryll-Nardzewskiego, ale ścisła specjalizacja wymagała zorganizowania seminariów, poświęconych bardziej konkretnej tematyce. Naszym zadaniem będzie zrelacjonowanie dokonań i drogi badawczej pierwszej z wyżej wymienionych grup.

Odpowiednie seminarium zostało zorganizowane przy współudziale Tomasza Żaka, który był wychowankiem Stanisława Kwapienia, wybitnego matematyka z ośrodka warszawskiego, specjalizującego się w probabilistyce na przestrzeniach Banacha.

Niniejszy artykuł, napisany w czterdziestym roku istnienia tego seminarium, poświęcony jest podsumowaniu osiągnięć jego uczestników.

Zacznijmy od liczb: w ciągu niemal czterdziestolecia odbyło się ponad tysiąc posiedzeń seminarium (licząc skromnie dwadzieścia pięć na rok). Lista referatów wygłoszonych począwszy od roku akademickiego 2001/2002 znajduje się na stronie internetowej seminarium http://prac.im.pwr.edu.pl/~kwasnicki/seminar/index.php?lang=pl.

Pięciu uczestników seminarium uzyskało habilitacje, a następnie tytuł profesora. Są to (w kolejności uzyskania tytułu) Tomasz Byczkowski, Krzysztof Bogdan, Piotr Graczyk (pracujący obecnie w Angers we Francji), Michał Ryznar i Tadeusz Kulczycki. Siedem osób uzyskało stopień doktora habilitowanego: Tomasz Żak, Tomasz Jakubowski, Paweł Sztonyk, Mateusz Kwaśnicki, Bartłomiej Dyda, Jacek Małecki i Tomasz Grzywny, a dziesięć osób stopień doktora: Teresa Litwin-Jurlewicz, Maciej Lewandowski, Krzysztof Michalik, Andrzej Stós (obecnie w Clermont-Ferrand we Francji), Kamil Kaleta, Tomasz Luks (obecnie w Paderborn w Niemczech), Bartłomiej Siudeja (obecnie w Eugene w stanie Oregon w USA), Grzegorz Serafin, Karol Szczypkowski, Andrzej Pyć. Promotorem dziesięciu spośród wyżej wymienionych osób był Tomasz Byczkowski, a promotorami pozostałych były osoby, które swoje doktoraty napisały pod kierunkiem T. Byczkowskiego.

Tylko w latach 2000–2017 uczestnicy seminarium opublikowali ponad sto osiemdziesiąt artykułów. Szczegółową, automatycznie aktualizowaną listę sporządzoną na podstawie *Mathematical Reviews*, można znaleźć na stronie internetowej seminarium.

Wiele osiągnięć uczestników seminarium zostało nagrodzonych najważniejszymi polskimi nagrodami matematycznymi.

Tomasz Byczkowski otrzymał Nagrodę III Wydziału Polskiej Akademii Nauk w 1977 roku, Wielką Nagrodę PTM im. Stefana Banacha w 1984 roku oraz dwie Nagrody Ministra za osiągnięcia naukowe (w latach 1977 i 1990). Krzysztof Bogdan otrzymał Nagrodę im. Wacława Sierpińskiego III Wydziału PAN w 2000 roku oraz Nagrodę IM PAN za wybitne osiągnięcia naukowe w zakresie matematyki w 2011 roku. W 2012 roku Tadeusz Kulczycki otrzymał Nagrodę im. Wacława Sierpińskiego Wydziału III PAN, a Mateusz Kwaśnicki i Kamil Kaleta są laureatami Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego (w latach 2012 i 2014 odpowiednio), która jest uważana za najbardziej prestiżową z polskich nagród dla młodych matematyków. Ponadto trzech uczestników seminarium otrzymało stypendia Fundacji Aleksandra von Humboldta – Paweł Sztonyk (w latach 2006–2008), Tomasz Grzywny (w latach 2011–2013) oraz Kamil Kaleta (w latach 2016–2017), ponadto Paweł Sztonyk w latach 2008–2009, a Tomasz Grzywny w latach 2014–2015 otrzymali granty powrotowe fundacji Humboldta. W początkowym okresie, gdy uczestników seminarium intereso-

wała głównie teoria prawdopodobieństwa na przestrzeniach liniowych, Michał Ryznar otrzymał nagrodę Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego za pracę doktorską (w 1987 roku), a kilku uczestników seminarium otrzymało zespołową Nagrodę Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Kilku młodych członków naszego zespołu otrzymało stypendia dla młodych naukowców Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego: M. Kwaśnicki (dwukrotnie), T. Jakubowski, J. Małecki (dwukrotnie), oraz stypendia START przyznawane przez Fundację na rzecz Nauki Polskiej.

Liczbę uzyskanych grantów trudno zliczyć; jako wykonawcy uczestniczyli w nich wszyscy członkowie zespołu. Były to granty zarówno krajowe (MNiSW, KBN, NCN), jak i międzynarodowe (na przykład granty Unii Europejskiej czy rządu francuskiego). Wymieńmy tylko kilka najważniejszych.

T. Byczkowski był kierownikiem w ponad dziesięciu grantach KBN i MNiSW. K. Bogdan był kierownikiem czterech grantów: Departamentu Badań Naukowych 2005–2008, MNiSW 2009–2012 (grant realizowany przez dziewięcioosobowy zespół z pięciu instytucji naukowych, w tym dwóch zagranicznych), NCN Opus 2013–2016 (grant realizowany przez pięciosobowy zespół z czterech instytucji naukowych, w tym jednej zagranicznej), NCN Harmonia 2015–2018 (grant realizowany przez dziewięcioosobowy zespół z pięciu instytucji naukowych, w tym dwóch zagranicznych). T. Kulczycki uczestniczył w ośmiu grantach, z tego cztery razy był wykonawcą w grantach KBN i MNiSW, raz był wykonawcą w grancie Unii Europejskiej i trzy razy był kierownikiem w grantach MNiSW i NCN. M. Kwaśnicki kierował dwoma grantami NCN: Sonata (2012–2015) i Opus (2016–2019), był też wykonawcą w trzech innych. M. Ryznar kierował grantem NCN OPUS (2016–2019), był wykonawcą w dziewięciu innych grantach, w tym w grancie Unii Europejskiej. T. Jakubowski był kierownikiem trzech grantów MNiSW i NCN (między innymi Sonata Bis 2016–2021) oraz wykonawcą w siedmiu innych (w tym grantu rządu francuskiego). T. Grzywny był kierownikiem grantu NCN OPUS (2017–2020), a jako wykonawca uczestniczył w pięciu grantach. Kamil Kaleta otrzymał grant Fuga 1 na sfinansowanie trzyletniego stażu naukowego, który odbył w latach 2012–2015 na Uniwersytecie Warszawskim, ponadto był wykonawcą w pięciu innych grantach MNiSW i NCN.

Bardzo intensywne rozwija się współpraca naukowa uczestników seminarium z ośrodkami zagranicznymi. Wymieńmy tu dla przykładu kilka najważniejszych ośrodków: w USA – *Purdue University* (R. Bañuelos), *University of Tennessee* (B. Rajput, J. Rosiński), *Washington University* (K. Burdzy), *Michigan State University* (R. LePage, S. Levental), *University of Illinois at Urbana-Champaign* (R. Song); w Japonii – *Kyoto University* (T. Kumagai); w Kanadzie – Toronto (A. Kuznetsov); we Francji – *Universitè d'Angers* (L. Chaumont, P. Gra-

czyk), *Universitè Clermond-Ferrand* (A. Stós); w Niemczech – *Universität Bielefeld* (W. Hansen, M. Kassmann), *Technische Universität Dresden* (R. Schilling); w Wielkiej Brytanii – *University of Warwick* (L. Alili), *Loughborough University* (J. Lörinczi); w Korei Południowej – *Seul University* (P. Kim); w Singapurze – NTU (N. Privault); w Rosji – St. Petersburg (N. Kuźniecow), w Irlandii – *University of Limerick* (E. Mayerhofer).

2. Tematyka seminarium w latach 1978–1994 – teoria prawdopodobieństwa na przestrzenich liniowych i grupach

Przypomnijmy pokrótce, jakie zagadnienia interesowały matematyków pracujących w – bardzo popularnej w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XX wieku – teorii prawdopodobieństwa na przestrzeniach liniowych.

Można określać różne typy rozkładów wektorów losowych o wartościach w przestrzeniach liniowych na kilka sposobów. Na przykład, wektor losowy X o wartościach w przestrzeni liniowej E ma symetryczny rozkład normalny (gaussowski), jeżeli dla każdego funkcjonału liniowego $x^* \in E^*$ zmienna losowa $x^*(X)$ ma rozkład normalny o średniej zero na prostej. Jest to jedna z wielu równoważnych definicji rozkładu normalnego w przestrzeni liniowej. Szczególnie przydatna w przestrzeniach liniowych jest następująca definicja: wektor X ma symetryczny rozkład normalny, jeżeli dla X_1 oraz X_2, dwóch niezależnych kopii X, oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b istnieje taka liczba c, że rozkład wektora $aX_1 + bX_2$ jest identyczny z rozkładem wektora cX, gdzie $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ta definicja jest równoważna pierwszej, o ile E ma dostatecznie wiele funkcjonałów ciągłych. Można definiować rozkład normalny jeszcze ogólniej, na przykład na grupie addytywnej G, korzystając z tzw. własności Bernsteina wektorów gaussowskich: funkcja losowa $X\colon \Omega \to G$ o wartościach w grupie G ma rozkład normalny, jeżeli dla X_1 oraz X_2 – niezależnych kopii funkcji X – funkcje $X_1 + X_2$ oraz $X_1 - X_2$ są niezależne.

Zauważmy, że rozważanie miar probabilistycznych na przestrzeniach wektorowych ma wiele wspólnego z procesami stochastycznymi. Mianowicie, na proces stochastyczny można patrzeć jak na miarę na przestrzeni funkcji (trajektorii tego procesu). Na przykład, startujący z zera proces Wienera $(W(t)_{0\leqslant t<\infty})$ to nic innego jak miara Wienera na przestrzeni $C([0,\infty))$ tych funkcji ciągłych, które w zerze mają wartość zero. Każda informacja o takiej mierze ma swój odpowiednik w języku procesu. Rozważmy na przykład klasyczne prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera. Orzeka ono, że dla prawie wszystkich trajektorii $\limsup_{t\to\infty} W_t/\sqrt{2t\ln\ln t} = 1$. Jego daleko idącym uogólnieniem,

sformułowanym w języku analizy funkcjonalnej, jest udowodnione w 1964 roku przez V. Strassena następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Dla* $\lambda > 3$ *określmy proces przeskalowany* $W_\lambda(t) = \frac{W(\lambda t)}{\sqrt{\lambda \ln \ln \lambda}}$. *Ustalmy dowolną chwilę czasową, na przykład* $t = 1$, *i rozważmy* $(W(t), t \in [0,1])$. *Dla prawie wszystkich trajektorii* $W(\cdot)$ *zbiór* $\{W_\lambda(\cdot), \lambda \geqslant 3\}$ *jest zbiorem zwartym, a jego punkty skupienia tworzą zbiór zwarty* $K = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant 1\}$.

Stąd już dość łatwo wyprowadzić klasyczne prawo iterowanego logarytmu (zob. na przykład [94]).

W 1970 roku udowodniono bardzo ciekawe twierdzenia, dotyczące wektorów gaussowskich. Kilku autorów niezależnie (Fernique, Skorochod oraz Landau z Sheppem) wykazali, że, tak samo jak na prostej, wektor gaussowski w przestrzeni liniowej ma skończone momenty eksponencjalne.

Twierdzenie. *Jeżeli* X *jest wektorem gaussowskim w przestrzeni liniowej, to istnieje takie* $\alpha > 0$, *że* $\mathbb{E}e^{\alpha\|X\|^2} < \infty$.

Innym rezultatem dotyczącym miary gaussowskiej było udowodnione przez Kallianpura prawo zero-jedynkowe.

Twierdzenie. *Jeśli* X *jest wektorem gaussowskim o wartościach w przestrzeni liniowej* E, *a* F *jest mierzalną addytywną podgrupą* E, *to* $P(X \in F) = 0$ *lub* 1.

Zaczęto także badać, czy analogiczne własności mają inne miary, ważne dla zastosowań, na przykład miary stabilne. I rzeczywiście, Dudley i Kanter udowodnili w 1974 roku prawo zero-jedynkowe dla wektorów o rozkładach stabilnych. Zachodzi oczywiście pytanie: co to jest wektor losowy o rozkładzie stabilnym w przestrzeni liniowej? Naturalna wydaje się definicja, będąca analogią drugiej z przytoczonych powyżej definicji miary gaussowskiej, ze zmianą wykładnika 2 na $\alpha \in (0,2]$: wektor X ma symetryczny rozkład α-stabilny, jeżeli dla X_1 oraz X_2, dwóch niezależnych kopii X, oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b, rozkład wektora $aX_1 + bX_2$ jest identyczny z rozkładem wektora $(|a|^\alpha + |b|^\alpha)^{1/\alpha} X$. Oczywiście natychmiast pojawia się pytanie, czy jeśli dla każdego funkcjonału ciągłego x^* zmienna losowa $x^*(X)$ ma rozkład stabilny na prostej, to można przyjąć, że X ma rozkład stabilny w sensie opisanym powyżej? W 1983 roku okazało się (zob. [77]), że te definicje są równoważne w przypadku miar symetrycznych lub gdy $\alpha \geqslant 1$, natomiast nawet na płaszczyźnie dla $\alpha < 1$ istnieje taki wektor losowy X, którego rozkład nie jest stabilny, ale po złożeniu z dowolnym ciągłym funkcjonałem liniowym daje jednowymiarową zmienną

losową o rozkładzie stabilnym. Jak widać, zagadnienie rozszerzenia na inne klasy miar wyników, znanych dla miary gaussowskiej, nie było zadaniem trywialnym.

Dodatkowo, w latach siedemdziesiątych XX wieku okazało się, że wiele rezultatów klasycznego rachunku prawdopodobieństwa (na przykład nierówność Kołmogorowa czy też prawo wielkich liczb) ma swoje odpowiedniki tylko w niektórych przestrzeniach Banacha. Przestrzenie te muszą bowiem mieć pewne własności geometryczne (odpowiedni tzw. typ lub kotyp). Co więcej, metody probabilistyczne okazały się bardzo owocne w badaniach lokalnej geometrii przestrzeni Banacha (zob. na przykład [82]).

2.1. *Początki.* Nasze seminarium rozpoczęło działalność w październiku 1978 roku. Kilka początkowych referatów wygłosił T. Byczkowski, omawiając artykuły A. de Acosty [1, 2] poświęcone całkowalności wektorów losowych o rozkładach stabilnych w przestrzeniach liniowych. Zaowocowało to pierwszą ważną pracą [26], powstałą na tym seminarium, w której udowodniliśmy następujące twierdzenie, opisujące surogat miary Lévy'ego w tak abstrakcyjnym kontekście.

Twierdzenie. *Jeśli q jest mierzalną półnormą na mierzalnej przestrzeni liniowej $(E, \mathcal{B})$, a $(\mu_t)_{t>0}$ jest q-ciągłą półgrupą miar probabilistycznych, to istnieje taka nierosnąca funkcja θ, określona na $(0, \infty)$, że w każdym punkcie ciągłości θ mamy $\lim_{t\to 0+}(1/t)\mu_t\{x : q(x) > s\} = \theta(s)$. Gdy (μ_t) jest półgrupą gaussowską, to $\theta \equiv 0$.*

W latach 1978–1994 badania uczestników seminarium koncentrowały się na rachunku prawdopodobieństwa w przestrzeniach liniowych i – bardziej ogólnie – na grupach lub półgrupach. Warto tu wymienić następujące tematy szczegółowe i najważniejsze prace uczestników seminarium, poświęcone tej tematyce.

2.2. *Zbieżność iloczynów zmiennych losowych na półgrupach.* Ta tematyka, podjęta jeszcze przed rozpoczęciem działalności seminarium, zaowocowała dwiema pracami [30, 33] T. Byczkowskiego z J. Wosiem. Obie prace dotyczyły nieskończonych iloczynów niezależnych zmiennych losowych o wartościach w półgrupach metrycznych. Warto podkreślić, że były to pierwsze, pionierskie prace poświęcone rachunkowi prawdopodobieństwa na półgrupach. Mimo że pojęcie półgrupy jest bardzo ogólne, to jednak udało się udowodnić równoważność różnych rodzajów zbieżności iloczynów losowych, przy założeniu braku miar idempotentnych na półgrupie. Badania w dziedzinie miar na półgrupach były w owym czasie bardzo aktualne, w związku z identyfikacją miar idempotentnych (odpowiednik miary Haara podgrup zwartych).

2.3. *Badanie absolutnej ciągłości rozkładów norm.* Jak już wspomnieliśmy, na miarę probabilistyczną na przestrzeni liniowej – na przykład w $C([0,\infty))$ – można patrzeć jak na rozkład pewnego procesu stochastycznego o trajektoriach w tej przestrzeni. W szczególności badanie absolutnej ciągłości rozkładu normy procesu to badanie rozkładu normy względem miary wyznaczonej przez ten proces. W 1975 roku Cirel'son w pracy [42] wykazał, że rozkład normy procesu gaussowskiego może mieć jeden atom (w punkcie startu dystrybuanty), ale pozostała część dystrybuanty jest już funkcją absolutnie ciągłą. Na przykład taką własność ma rozkład $\sup_n |X_n/a_n|$, gdzie (X_n) jest dowolnym ciągiem zmiennych losowych o łącznym rozkładzie normalnym, a (a_n) takim ciągiem liczbowym, dla którego $P(\sup_n |X_n/a_n| < \infty) = 1$.

Później, w 1979 roku, ukazała się praca [55], w której autorzy wykazali między innymi, że dystrybuanta rozkładu takiej normy jest funkcją logarytmicznie wklęsłą, zatem, oprócz skoku w punkcie startu, musi być absolutnie ciągła. Pojawiło się więc naturalne pytanie, czy podobnie jest w przypadku miar stabilnych. Rezultatem studiowania tej pracy na naszym seminarium była praca [31] T. Byczkowskiego i K. Samotija, w której autorzy udowodnili następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Niech E będzie rzeczywistą liniową przestrzenią polską, X symetrycznym wektorem o rozkładzie α-stabilnym, a q półnormą dolnie półciągłą. Wtedy zmienna losowa $q(X)$ ma rozkład absolutnie ciągły poza być może jednym atomem. Jeśli $0 < \alpha < 1$, to rozkład ten jest absolutnie ciągły albo skupiony w zerze.*

W związku z wyżej opisanymi badaniami, powstało kilka prac poświęconych zbieżności szeregów losowych o wartościach w mierzalnych przestrzeniach liniowych. Tym tematem zajmowali się T. Byczkowski, T. Inglot oraz M. Ryznar (prace [25, 27–29]). W ostatniej z tych prac autorzy udowodnili najbardziej ogólną wersję tzw. twierdzenia Itô–Nisio. W dużym uproszczeniu twierdzenie to podaje warunki na to, aby ze zbieżności szeregu losowego w słabszej topologii (na przykład zbieżności punktowej losowego szeregu Fouriera) wynikała zbieżność w mocniejszej topologii (na przykład zbieżność w normie supremum). W pracy [29] wykazano, że twierdzenie Itô–Nisio zachodzi dla tzw. norm (półnorm) mierzalnych. Ma to ważne konsekwencje już dla szeregów losowych w przestrzeni ciągów, gdzie możemy mieć do czynienia z brakiem ośrodkowości przestrzeni. Warto dodać, że w sytuacji nieośrodkowej istnieją przykłady szeregów losowych (na przykład gaussowskich) zbieżnych w normie supremum, dla których miara wyznaczona przez szereg znika na kulach o pewnym promieniu.

2.4. *Związki rozkładów wektorów stabilnych o wartościach w przestrzeniach Banacha z geometrią tych przestrzeni.* Michał Ryznar badał zachowanie dystrybuanty wektora losowego o rozkładzie stabilnym w otoczeniu zera. W tym przypadku okazało się, że to zachowanie jest związane z tak zwanym stabilnym typem przestrzeni liniowej (definicja podana jest na przykład w książce [82]). W 1986 roku w pracy [85] M. Ryznar podał charakteryzację przestrzeni stabilnego typu α poprzez opis zachowania w otoczeniu zera dystrybuanty wektora X o dowolnym symetrycznym rozkładzie α-stabilnym.

Twierdzenie. *Dla $\alpha \in [1,2)$ przestrzeń ma stabilny typ α wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie stałe $t_0 > 0$ oraz $\rho > 0$, że dla $t \in (0, t_0)$ zachodzi nierówność $P(\|X\| \leqslant t) \geqslant \exp(t^{-\rho})$. Jeżeli $0 < \alpha < 1$, to oszacowanie takiego typu zachodzi zawsze.*

2.5. *Procesy stochastyczne o wartościach w grupach Liego i przestrzeniach symetrycznych.* T. Byczkowski i A. Hulanicki (z Uniwersytetu Wrocławskiego) udowodnili w pracy [34] dość zaskakujące w swej ogólności, prawo zero-jedynkowe dla miar gaussowskich dla podgrup mierzalnych. Wynika z niego na przykład, że proces gaussowski o wartościach w grupie ma trajektorie o wartościach w podgrupie mierzalnej z prawdopodobieństwem 0 lub 1. Jest to najbardziej ogólne twierdzenie tego typu nawet dla procesu Wienera o wartościach w grupie lokalnie zwartej; uogólnia ono znany wynik orzekający, że proces gaussowski ma z prawdopodobieństwem 0 lub 1 trajektorie w konkretnej podprzestrzeni liniowej (na przykład L_p). Twierdzenie to zyskało duże uznanie wśród specjalistów.

W swojej pracy doktorskiej P. Graczyk zajął się rachunkiem Malliavina dla procesów stabilnych na grupach nilpotentnych, w tym na grupie Heisenberga. Ten kierunek badań był związany z wynikami P. Głowackiego z Uniwersytetu Wrocławskiego. Najpierw P. Graczyk w pracy [50], stosując tzw. rachunek Malliavina, udowodnił następujące twierdzenie P. Głowackiego.

Twierdzenie. *Jeśli miara spektralna miary Lévy'ego półgrupy stabilnej na jednorodnej grupie nilpotentnej jest gładka, to odpowiadające miary stabilne w tej półgrupie mają gładkie gęstości.*

Następnie P. Graczyk i T. Byczkowski w pracy [32] wykazali więcej.

Twierdzenie. *Jeśli miara spektralna miary Lévy'ego półgrupy stabilnej na jednorodnej grupie nilpotentnej jest klasy C^k, to miary stabilne w tej półgrupie mają gęstości klasy C^{2k-4}.*

Wywiązało się wtedy swoiste współzawodnictwo między analitykami harmonicznymi z Uniwersytetu Wrocławskiego i probabilistami z Politechniki Wrocławskiej. Kilka tygodni po tym wyniku inny dowód – uzyskany metodami analitycznymi – przedstawili J. Dziubański i J. Zienkiewicz. Do dzisiaj matematycy obu tych uczelni intensywnie komunikują się i często współpracują.

3. Zmiana tematyki seminarium

Badając własności miar na przestrzeniach trajektorii zwykle nie mamy dostępu do bardziej subtelnych własności procesu, jak na przykład rozkład czasu dojścia do ustalonego zbioru czy rozkład punktu, w który proces uderzy, wskakując do tego zbioru. Na takie pytania możemy jednak odpowiedzieć za pomocą teorii potencjału procesów stochastycznych. Od połowy lat dziewięćdziesiątych XX wieku nasze seminarium poświęcone jest głównie probabilistycznej teorii potencjału.

3.1. *Czym zajmuje się teoria potencjału procesów stochastycznych?* Niech $(X_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem o wartościach w $\mathbb{R}^d$, mającym mocną własność Markowa i niech D będzie ustalonym zbiorem otwartym. Określmy moment pierwszego wyjścia procesu ze zbioru D:

$$\tau_D = \inf\{t : X_t \notin D\}.$$

Niech

$$P_D(x, A) = P(X_{\tau_D} \in A \mid X_0 = x)$$

oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że startując z punktu $x \in D$ i wychodząc ze zbioru D, proces trafi w zbiór $A \subset \mathbb{R}^d \setminus D$.

Miarę $P_D(x, \cdot)$ nazywamy miarą harmoniczną, a jej gęstość $P_D(x, y)$ – jądrem Poissona dla procesu (X_t) i zbioru D. Oprócz wspomnianych wielkości niezmiernie ważną rolę w teorii potencjału procesów stochastycznych pełni funkcja Greena $G_D(x, y)$ zbioru D. Probabilistyczna definicja funkcji Greena całej przestrzeni $\mathbb{R}^d$ jest krótka: $G(x, y) = \int_0^\infty p_t(x, y)\,\mathrm{d}t$, gdzie $p_t(x, y)$ jest gęstością prawdopodobieństwa przejścia procesu (X_t). Ponieważ $p_t(x, y)$ są funkcjami nieujemnymi, całka ta jest albo zbieżna, albo równa plus nieskończoności. Jeśli jest zbieżna, to proces jest tranzytywny, czyli z prawdopodobieństwem 1 w końcu wychodzi z każdego zbioru zwartego i nigdy już do niego nie wraca. W takim przypadku $G(x, y)$ można interpretować jako „gęstość czasu przebywania" w punkcie y procesu, startującego z x. Zauważmy jednak, że nie jest to gęstość w sensie probablistycznym (nie całkuje się do 1).

W celu probabilistycznego określenia funkcji Greena zbioru D musimy wprowadzić pojęcie procesu zabitego przy wyjściu ze zbioru D. Do zbioru stanów procesu (na przykład do $\mathbb{R}^d$) dołączamy izolowany „punkt w nieskończoności" oznaczany ∂ i gdy proces opuszcza zbiór D, to wskakuje do stanu ∂ i pozostaje już w nim na zawsze. Proces zabity przy wyjściu ze zbioru D oznaczamy (X_t^D), jego prawdopodobieństwa przejścia opisane są wzorem Hunta:

$$p_t^D(x,y) = p_t(x,y) - \mathbb{E}(p_{t-\tau_D}(X_{\tau_D}, y) | t > \tau_D, X_0 = x),$$

w którym dokładne obliczenie wartości oczekiwanej jest niestety zwykle niemożliwe. Używając procesu zabitego, możemy zdefiniować funkcję Greena zbioru D wzorem $G_D(x,y) = \int_0^\infty p_t^D(x,y)\,\mathrm{d}t$.

Wszystkie określone powyżej wielkości, τ_D, $P_D(x,y)$ oraz $G_D(x,y)$, mają ważne zastosowania praktyczne. Wyobraźmy sobie na przykład, że proces (X_t) modeluje cenę pewnych akcji, które kupiliśmy, gdy kosztowały x złotych. Jeśli mamy zamiar sprzedać te akcje, gdy ich cena osiągnie lub przekroczy poziom d, to chcemy wiedzeć, jak długo przyjdzie nam na to czekać, czyli chcemy znać $P(\tau_{(d,\infty)} > t \mid X_0 = x)$.

Niech (X_t) będzie procesem z mocną własnością Markowa i niech operator $\mathcal{A}$ będzie generatorem półgrupy prawdopodobieństw przejścia tego procesu. Klasycznym przykładem takiej sytuacji jest ruch Browna o wartościach w $\mathbb{R}^d$ i jego generator, którym jest operator Laplace'a Δ (lub $\frac{1}{2}\Delta$). Ustalmy zbiór otwarty D i niech $x \in D$ będzie punktem startu procesu, tzn. $X_0 = x$. Wówczas, korzystając z własności wartości średniej funkcji harmonicznych oraz stosując mocną własność Markowa, łatwo sprawdzić, że $P_D(x,y)$ oraz $G_D(x,y)$ są funkcjami harmonicznymi zmiennej $x \in D$, tzn. $\mathcal{A}_x P_D(x,y) = 0$ oraz $\mathcal{A}_x G_D(x,y) = 0$ dla $x \in D \setminus \{y\}$. Wartość średnia czasu wyjścia procesu ze zbioru D jest funkcją nadharmoniczną dla tego procesu, tzn. jeśli określimy $h(x) = \mathbb{E}^x(X_{\tau_D} \mid \tau_D < \infty)$, to $\mathcal{A}h(x) = -1$ dla $x \in D$. Wiele ważnych własności procesu opisanych jest za pomocą funkcji nadharmonicznych lub harmonicznych. Badanie tego typu funkcji jest jednym z głównych zadań teorii potencjału procesów stochastycznych.

Warto zwrócić w tym miejscu uwagę na fakt, że określona powyżej funkcja Greena dla ruchu Browna jest tym samym obiektem, co funkcja Greena definiowana w teorii równań różniczkowych cząstkowych dla operatora Laplace'a.

Gęstości prawdopodobieństw przejścia d-wymiarowego ruchu Browna $p_t(x,y)$ spełniają równanie, zwane równaniem ciepła:

$$\partial_t p_t(x,y) = \tfrac{1}{2}\Delta_x p_t(x,y)$$

i są opisane funkcjami elementarnymi $p_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-|y-x|^2/(2t)}$. W przy-

padku procesu Markowa o generatorze $\mathcal{A}$, analogiczne gęstości spełniają równanie

$$\partial_t p_t(x, y) = \mathcal{A} p_t(x, y),$$

ale są to zwykle funkcje nielementarne (na przykład dla procesów α-stabilnych przy $\alpha \notin \{1, 2\}$). Funkcję dodatnią o całce równej jeden, która spełnia powyższe równanie zwyczajowo nazywa się „jądrem ciepła" dla operatora $\mathcal{A}$ (monografia [45] poświęcona takim zagadnieniom nosi tytuł *Heat kernels and spectral theory*). W przypadku, gdy jądro ciepła nie jest funkcją elementarną, bardzo ważnym zadaniem jest podanie jego dokładnych oszacowań.

Klasyczny ruch Browna w $\mathbb{R}^d$ jest bardzo dobrze zbadanym procesem i wszystkie wielkości opisane powyżej (prawdopodobieństwa przejścia, czas dojścia procesu do zbioru, jądro Poissona, funkcja Greena) są od dawna dobrze znane i w wielu przypadkach opisane za pomocą jawnych wzorów, zawierających jednak często funkcje specjalne – tak jest na przykład, gdy zbiór D jest kulą. W przypadku bardziej ogólnych, ale dość regularnych zbiorów – na przykład takich, których brzeg opisany jest lokalnie funkcją lipschitzowską – podane są bardzo dokładne górne i dolne oszacowania tych wielkości. Niewyczerpanym źródłem wiadomości o jednowymiarowym ruchu Browna i ściśle związanych z nim innych procesów (na przykład Bessela) jest książka Borodina i Salminena [24].

Ze względu jednak na eksponencjalnie szybki zanik ogona dystrybuanty rozkładu normalnego w $\mathbb{R}^d$, w wielu modelach w fizyce, ekonomii lub biologii dużo bardziej odpowiednie wydają się rozkłady o tzw. *ciężkich ogonach* (tzn. takich, dla których ogon dystrybuanty maleje wolniej niż wykładniczo). A od czasu opublikowania w 1982 roku słynnej książki Mandelbrota *The fractal geometry of nature* szczególnie chętnie używa się do modelowania rozkładów stabilnych, bo są one samopodobne (więcej na temat procesów samopodobnych w paragrafie 4.13).

4. Tematyka seminarium po 1994 roku – teoria potencjału procesów stochastycznych

Od połowy lat dziewięćdziesiątych nastąpiła zmiana tematyki seminarium – z teorii prawdopodobieństwa na przestrzeniach liniowych i grupach na teorię potencjału procesów o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Zmiana ta dokonywała się stopniowo i wymagała od uczestników wielkiej pracy. W pocie czoła zapoznawaliśmy się z monografią R. M. Blumenthala i R. K. Getoora *Markov processes and potential theory*. Większość badań światowych w owym czasie

koncentrowała się wokół uogólniania teorii potencjału procesów Markowa, wprowadzonej w pionierskich pracach G. A. Hunta, na coraz ogólniejsze klasy procesów Markowa (*Ray processes*, *right processes* itd.). Nasze podejście było diametralnie różne – interesowały nas głównie konkretne procesy. Naturalnym i podstawowym obiektem był tzw. izotropowy (czyli niezmienniczy na obroty) proces α-stabilny w $\mathbb{R}^d$. W zakresie procesów stabilnych (miar stabilnych na przestrzeniach liniowych) mieliśmy już pewne doświadczenie z poprzednich badań miar na przestrzeniach liniowych, jednak w teorii potencjału niezbędne było podejście analityczne, w zasadzie obce probabilistom. W tę dziedzinę wprowadził nas Krzysztof Samotij, który w cyklu wykładów, w niezwykle przystępny i precyzyjny sposób, wyłożył nam szczegóły przekształcenia Kelvina dla miar stabilnych w $\mathbb{R}^d$ oraz pokazał, jak stąd otrzymać jądro Poissona kul dla takich miar. Pewną inspiracją do naszych dalszych badań była próba uogólnienia na proces stabilny teorii wycieczek ruchu Browna, zastosowanej w 1986 roku przez K. Burdzego do udowodnienia dość głębokich twierdzeń analitycznych. Duży udział miał tutaj Rafał Rudowicz, który otrzymał interesujące wyniki w zakresie wycieczek stabilnych. Rudowicz bardzo dokładnie zapoznał się także z cytowaną wcześniej monografią Blumenthala i Getoora i z dużym poświęceniem zapoznawał nas z subtelnymi szczegółami teorii potencjału procesów Markowa. Dość jednak szybko okazało się, że barierą dla dalszych badań jest brak tzw. brzegowej zasady Harnacka (BHP, *Boundary Harnack Principle*) dla funkcji harmonicznych względem ruchu stabilnego (tzn. funkcji α-harmonicznych). Główny problem polegał na tym, że teoria potencjału ruchu stabilnego *nie jest lokalna*! To znaczy, że własności funkcji α-harmonicznych na jakimś ustalonym obszarze ograniczonym zależą od wartości, które funkcja przyjmuje na całym $\mathbb{R}^d$. Natomiast BHP dla ruchu Browna jest twierdzeniem lokalnym. Wielką zasługą Krzysztofa Samotija było sformułowanie tej zasady. Samotij od początku wierzył, że jest prawdziwa, nawet w większej ogólności, niż w przypadku ruchu Browna (tzn. w przypadku klasycznych funkcji harmonicznych). Zasada BHP w klasycznym wariancie jest trudnym twierdzeniem analitycznym i została udowodniona dość późno. Przez długi czas dreptaliśmy w miejscu. Nikt z nas nie miał pojęcia, jak się do tego zabrać, ani nawet czy tak ogólna zasada dla ruchu stabilnego ma szansę być prawdziwa. Dowód tego twierdzenia był dużym wyzwaniem dla analityka – probabiliści mieli małe szanse w tej dziedzinie. Przełom nastąpił, gdy w naszym zespole pojawił się Krzysztof Bogdan, wychowanek K. Samotija. Otrzymał on za zadanie udowodnienie BHP i zastosowanie tej zasady do badania wycieczek stabilnych.

Dla uproszczenia zacznijmy od sformułowania klasycznej brzegowej zasady Harnacka dla ruchu Browna (tzn. dla operatora Laplace'a) i odpowiednio

regularnego obszaru $D \subset \mathbb{R}^d$ (na przykład obszaru, którego brzeg jest lokalnie wykresem funkcji lipschitzowskiej). Ustalmy punkt brzegowy $x_0 \in \partial D$ oraz promień $r > 0$. Jak udowodnili w latach 1977–1978 w niezależnie napisanych artykułach [4, 44] A. Ancona oraz B. Dahlberg, istnieje stała $C > 0$ o następującej własności: jeśli dwie dodatnie funkcje f, g harmoniczne w obszarze D mają granicę zero w każdym punkcie wycinka brzegu $B(x_0, 2r) \cap \partial D$, to $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant C\frac{f(y)}{g(y)}$ dla wszystkich $x, y \in B(x_0, r) \cap D$. Innymi słowy, iloraz f/g jest w przybliżeniu stały w otoczeniu punktu x_0. Co ważne, stała C zależy tylko od charakterystyki obszaru D w otoczeniu punktu x_0. Oczywiście wkrótce pojawiły się uogólnienia tej nierówności na inne operatory różniczkowe (na przykład eliptyczne, czyli na procesy dyfuzyjne) oraz na ogólniejsze obszary. Jednak wiadomo, że jeżeli obszar D jest odpowiednio nieregularny, to BHP może nie zachodzić.

Tu mała dygresja. O ile dość łatwo sprawdzić, czy dana funkcja jest harmoniczna względem ruchu Browna, gdyż wystarczy rozstrzygnąć, czy laplasjan tej funkcji jest zerem, to w przypadku generatora procesu stabilnego, który to generator jest operatorem pseudoróżniczkowym, sprawdzenie harmoniczności funkcji różnej od stałej jest zadaniem niebanalnym. Przypomnijmy definicję: gdy (X_t) jest procesem α-stabilnym o wartościach w $\mathbb{R}^d$ i niezmienniczym na obroty, to generator $\mathcal{A}$ tego procesu opisany jest wzorem

$$\mathcal{A}f(x) = c_{\alpha,d} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| > \varepsilon\}} \frac{f(y) - f(x)}{|y-x|^{\alpha+d}} \, \mathrm{d}y, \tag{1}$$

dla tych funkcji borelowskich $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, dla których powyższa granica istnieje. Termin „pseudoróżniczkowy" pochodzi stąd, że na prostej rzeczywistej analogiczny wzór opisuje pochodne ułamkowe, zadane operatorem Riemanna–Liouville'a, a w języku transformaty Fouriera w $\mathbb{R}^d$ mamy dla operatora Laplace'a $\widehat{-\Delta f}(\xi) = |\xi|^2 \hat{f}(\xi)$, natomiast $\widehat{-\mathcal{A}f}(\xi) = |\xi|^\alpha \hat{f}(\xi)$. Znaki minus w tych wyrażeniach pojawiają się po to, aby operatory były dodatnie. Jak widzimy, z formalnego punktu widzenia $\mathcal{A} = -(-\Delta)^{\alpha/2}$. Dlatego generator niezmienniczego na obroty procesu α-stabilnego nazywa się często „laplasjanem ułamkowym". Poprawne oznaczenie tego generatora z użyciem dwóch znaków minus $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ jest jednak bardzo niewygodne, dlatego dla prostoty zapisu będziemy pomijać znaki minus, pisząc $\Delta^{\alpha/2}$.

4.1. *Brzegowa zasada Harnacka dla laplasjanu ułamkowego.* Jak już wspominaliśmy, pierwsze rezultaty w tym kierunku uzyskał w 1997 roku Krzysztof Bogdan (w pracy [5]).

Twierdzenie. *Niech D będzie obszarem o brzegu lipschitzowskim w $\mathbb{R}^d$, V zbiorem otwartym oraz niech u oraz v będą funkcjami nieujemnymi w $\mathbb{R}^d$. Dla każdego zbioru zwartego $K \subset V$ istnieje taka stała dodatnia $C = C(\alpha, D, V, K)$, że jeżeli u oraz v są ciągłe na V, α-harmoniczne na $D \cap V$, znikają na $D^c \cap V$ i $u(x_0) = v(x_0) > 0$ dla pewnego $x_0 \in D \cap K$, to*

$$C^{-1}u(x) \leqslant v(x) \leqslant Cu(x) \quad \text{dla } x \in D \cap K.$$

Ten pierwszy dowód dla skokowych, niezmienniczych na obroty procesów stabilnych naśladował podejście klasyczne i wymagał odpowiedniej regularności brzegu obszaru D. Alternatywny dowód probabilistyczny pojawił się we wspólnej pracy K. Bogdana i T. Byczkowskiego [7].

Nieco modyfikując dowód K. Bogdana, w 1999 roku R. Song i J. M. Wu uogólnili w pracy [89] twierdzenie na dowolne zbiory otwarte, lecz ze stałą C istotnie zależącą od charakterystyki zbioru D. W 2008 roku w artykule [19] K. Bogdan, T. Kulczycki i M. Kwaśnicki wykazali, że w przypadku procesów stabilnych brzegowa nierówność Harnacka zachodzi ze stałą, zależną tylko od wymiaru przestrzeni. Co ciekawe, ten dowód był dużo prostszy, niż w przypadku klasycznym (tzn. dla laplasjanu). Pozwoliło to na dalsze rozszerzenie nierówności Harnacka. W 2015 roku K. Bogdan, T. Kumagai i M. Kwaśnicki [20] wykazali, że brzegowa zasada Harnacka zachodzi dla stosunkowo ogólnej klasy procesów Markowa. Najtrudniejszym krokiem w tym uogólnieniu było oszacowanie supremum funkcji harmonicznych w kuli: jeśli f jest nieujemną funkcją harmoniczną w kuli $B(x_0, 2r)$, to $\sup\{f(x) : x \in B(x_0, r)\} \leqslant C \int_{(B(x_0,r))^c} f(y)\,\mathrm{d}y$, ze stałą C zależącą w odpowiedni sposób od procesu X oraz promienia $r > 0$.

4.2. *Teoria potencjału operatora Schrödingera opartego na laplasjanie ułamkowym.* Przypomnijmy, że w przypadku klasycznym, tj. laplasjanu Δ, operator Schrödingera postaci $\Delta f(x) - v(x)f(x)$, przy czym v jest dodatnią funkcją borelowską, jest generatorem takiego ruchu Browna, którego trajektorie są zabijane zgodnie z rozkładem wykładniczym o intensywności v. Gdy v przyjmuje wartości ujemne, to występuje kreacja dodatkowej masy, zatem ten operator nie ma bezpośredniej interpretacji probabilistycznej, ale generuje półgrupę operatorów, zwaną półgrupą Feynmana–Kaca. Funkcję v tradycyjnie nazywa się potencjałem, a rozwiązanie równania ciepła dla tego operatora dane jest wzorem Feynmana–Kaca. Teorię potencjału dla operatora $\Delta f(x) - v(x)f(x)$ opisali Chung i Zhao w monografii [43].

Rezultatem współpracy K. Bogdana i T. Byczkowskiego było stworzenie brzegowej teorii potencjału operatora Schrödingera opartego na laplasjanie

ułamkowym, tzn. operatora $\Delta^{\alpha/2} - v(x)$. Tę teorię przedstawili w cyklu dwóch prac [9, 10]. Główny wynik, jaki został udowodniony w pierwszej z prac, to tzw. *Conditional Gauge Theorem* (CGT). Było to trudne technicznie twierdzenie, pozwalające jednak na przeniesienie teorii potencjału dla laplasjanu ułamkowego na operator Schrödingera oparty na laplasjanie ułamkowym. *Gauge* to w wolnym przekładzie tzw. funkcja próbkowa, której odpowiednie warunkowanie w sensie Dooba (czyli za pomocą h-transformaty) pozwala na przeprowadzenie powyższej procedury.

Badania w tym kierunku kontynuowane były przez K. Kaletę i T. Kulczyckiego w pracy [59], w której wykazano, że w przypadku izotropowego procesu stabilnego, którego trajektorie są zabijane losowo przez potencjał schrödingerowski, (tzn. $v(x) \geqslant 0$), funkcja próbkowa kuli porównuje się ze średnim czasem przeżycia procesu w tej kuli jednostajnie ze względu na potencjał lokalnie ograniczony w przestrzeni. Wynik ten został następnie zastosowany do udowodnienia charakteryzacji mocnej ultrakontraktywności oraz znalezienia dokładnych oszacowań funkcji własnej stanu podstawowego stowarzyszonego operatora ułamkowego Schrödingera.

4.3. *Gradientowe perturbacje laplasjanu ułamkowego.* W przypadku klasycznym operator Laplace'a jest generatorem ruchu Browna, omówiony powyżej operator Schrödingera z dodatnią funkcją v generuje proces z zabijanymi trajektoriami, a gdy do laplasjanu dodamy zaburzenie gradientowe, otrzymamy ruch Browna z dryfem. W najprostszym przypadku jednowymiarowym generator postaci $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}$ opisuje proces $(W_t + bt)$, gdzie (W_t) jest procesem Wienera, a b jest ustaloną liczbą. Oczywiście współczynnik $b(x)$ może być funkcją. Procesy tego typu są od dawna dość dobrze zbadane. Pojawia się naturalne pytanie, jakie właściwości będzie miał proces, którego generatorem jest laplasjan ułamkowy z zaburzeniem gradientowym, i dla jakich zaburzeń $b(x)$ taki proces w ogóle istnieje?

K. Bogdan i T. Jakubowski zbadali własności półgrupy operatorów, której generatorem jest operator $\Delta^{\alpha/2} + b(x) \cdot \nabla_x$. Z probabilistycznego punktu widzenia operator ten opisuje zwykły proces α-stabilny o generatorze $\Delta^{\alpha/2}$, zanurzony w przestrzeni, w której działa na niego pole wektorowe $b(x) \cdot \nabla_x$. Zasadniczym pytaniem jest tu oczywiście, dla jakich funkcji $b(x)$ opisany operator generuje półgrupę prawdopodobieństw przejścia. W 2007 roku w pracy [12] opisana została konstrukcja takiej półgrupy i podane oszacowania jądra ciepła dla tego generatora, gdy funkcja $b(x)$ należy do odpowiedniej klasy Kato (definicję klasy Kato można znaleźć na przykład w monografii [43]). W 2011 roku T. Jakubowski w pracy [56] uogólnił metodę konstrukcji takiej półgrupy, dowodząc, że

funkcja $b(x)$ może należeć do szerszej klasy, zwanej klasą Morreya. Jak widać choćby z tytułu czasopisma, w którym ukazała się pierwsza z tych prac (*Communications in Mathematical Physics*), zagadnienia tego typu żywo interesują fizyków teoretyków.

Gradientowymi perturbacjami laplasjanu ułamkowego zajmowali się też T. Jakubowski i K. Szczypkowski w pracach [57, 58].

4.4. *Proces relatywistyczny i potencjały Bessela.* Oznaczmy przez $\Delta^{\alpha/2}$ generator euklidesowego, niezmienniczego na obroty procesu α-stabilnego. W fizyce rozważa się bardzo podobny operator: niech $m > 0$ będzie ustaloną liczbą i określmy operator $mI - (m^{2/\alpha} I - \Delta)^{\alpha/2}$. Jest to generator α-stabilnego procesu relatywistycznego. Zauważmy, że gdy $m = 0$, to otrzymujemy zwykły proces stabilny (pamiętajmy o umowie, że pomijamy dwa znaki minus). Fizycy używali głównie relatywistycznego procesu Cauchy'ego, tzn. badali przypadek $\alpha = 1$. Jednak dla każdego $\alpha \in (0, 2]$ taki operator generuje pewien proces o wartościach w $\mathbb{R}^d$. W 2002 roku ukazała się praca M. Ryznara [86], pierwsza z prac dotyczących teorii potencjału procesu relatywistycznego. Autor podał w niej dokładne oszacowania jądra Poissona i funkcji Greena dla ograniczonych zbiorów gładkich oraz pewne oszacowania jądra ciepła dla tego procesu. Okazało się, że w małej skali czasowej proces zachowuje się jak zwykły proces α-stabilny, a w dużej skali jak ruch Browna. Przykładowo, jądra Poissona kul są porównywalne dla procesu stabilnego i relatywistycznego. W dalszym ciągu okazało się, że istnieją ścisłe związki procesu relatywistycznego, a dokładniej jego teorii potencjału, z ważnymi zagadnieniami analizy harmonicznej. Konkretnie, m-rezolwenta procesu z parametrem $m > 0$ to znany obiekt analityczny, a mianowicie tzw. potencjał Bessela. Jeśli położymy dla uproszczenia $m = 1$, to otrzymamy następującą postać tego potencjału (z dokładnością do stałej multiplikatywnej): $K_{(d-\alpha)/2}(|x|)|x|^{(\alpha-d)/2}$. Tutaj K_β oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela o indeksie β (funkcja Macdonalda), d jest wymiarem przestrzeni, α zaś indeksem stabilności procesu. Probabilistycznie, potencjał Bessela jest potencjałem procesu relatywistycznego zabijanego wykładniczo z intensywnością $m = 1$.

Potencjały Bessela są bezpośrednio związane z przestrzeniami Sobolewa i były wcześniej intensywnie badane przez analityków w latach siedemdziesiątych. Jak już wspomnieliśmy, probabilistycznie są związane z operatorem $I - (I - \Delta)^{\alpha/2}$ (dla parametru $m = 1$). Z punktu widzenia analizy harmonicznej jest ważne, aby znać związek między tym ostatnim operatorem a laplasjanem ułamkowym. We wspomnianej już pracy M. Ryznar otrzymał bardzo bezpośredni wzór opisujący tego rodzaju związek, mianowicie udowodnił, że istnieje

taka miara probabilistyczna σ_α, że $(I-\Delta)^{\alpha/2} = \sigma_\alpha + I + \Delta^{\alpha/2}$. Warto podkreślić, że wcześniejszy, mniej jawny, opis tej zależności został otrzymany za pomocą dość zaawansowanych metod przez E. M. Steina (zob. książkę [90]).

Teoria potencjału izotropowego procesu stabilnego zawiera tak użyteczne narzędzia, jak jawne wzory na jądro Poissona czy funkcję Greena kuli oraz półprzestrzeni. Chociaż wydawało się, że uzyskanie jawnych wzorów w przypadku relatywistycznym jest zadaniem niewykonalnym, w pracy [39] udało się udowodnić odpowiednie wzory dla półpłaszczyzny, w przypadku operatora $-(m^{2/\alpha}I-\Delta)^{\alpha/2}$, czyli generatora procesu zabijanego z intensywnością m.

Twierdzenie. *Rozważmy zbiór* $\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\}$ *oraz m-jądro Poissona* $P^m_{\mathbb{H}}(x,y)$, *przy czym* $x \in \mathbb{H}$, $y \in \overline{\mathbb{H}}^c$. *Dla* $x_d > 0$ *oraz* $y_d < 0$ *zachodzi wzór*

$$P^m_{\mathbb{H}}(x,y) = c_{\alpha,d}\, m^{\frac{d}{2\alpha}} \left(\frac{x_d}{-y_d}\right)^{\alpha/2} \frac{K_{d/2}(m^{1/\alpha}|x-y|)}{|x-y|^{d/2}}.$$

Następnie T. Grzywny i M. Ryznar w pracy [53] zbadali funkcję Greena półprzestrzeni dla procesu relatywistycznego, otrzymując jej dokładne dwustronne oszacowania. Był to pierwszy tego typu rezultat dla zbioru nieograniczonego. Temat optymalnych oszacowań dla procesów relatywistycznych ciągle nie jest zamknięty – do dziś nie są znane optymalne oszacowania dla funkcji Greena dopełnień kul.

4.5. *Generatory a formy Dirichleta.* Każdy proces Markowa opisany jest półgrupą prawdopodobieństw przejścia $P_t f(x) = \mathbb{E}_x f(X_t)$. Własność półgrupowa operatorów P_t wynika z własności Chapmana–Kołmogorowa. Z kolei każda taka półgrupa jest wyznaczona przez pewien operator, zwany jej generatorem. Na przykład wspominany tu wielokrotnie ruch Browna (jednowymiarowy) jest generowany przez operator $\mathcal{G} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$. Problem w tym, że operator to nie tylko wzór, ale i jego dziedzina. I tak $\mathcal{G}$ rozważany z dziedziną $\{f \in C_b^2(\mathbb{R}) \mid \mathcal{G}f \in C_b(\mathbb{R})\}$ generuje ruch Browna na $\mathbb{R}$, jeśli zaś rozważymy $\mathcal{G}$ z dziedziną $\{f \in C^2([0,\infty)) \mid f(0+) = 0\}$, to otrzymamy ruch Browna zabity w zerze. A przecież istnieje jeszcze ruch Browna, którego trajektorie są odbijane w zerze lub taki, którego trajektorie są w zerze zatrzymywane. I cała ta informacja o procesie zawarta jest w opisie dziedziny jego generatora. Dodajmy jeszcze, że trudno w sposób jawny opisać dziedzinę generatora wielowymiarowego ruchu Browna (nawet „wolnego", tzn. takiego, którego trajektorie nie są w żaden sposób modyfikowane – ani nie są zabijane, ani zatrzymywane, ani odbijane itp.).

Z tego względu znacznie wygodniejszy jest opis procesu za pomocą jego formy Dirichleta. Dla przykładu, porównajmy formę Dirichleta z generatorem niezmienniczego na obroty procesu α-stabilnego w $\mathbb{R}^d$. Generator podany był wzorem (1), a jego forma Dirichleta to

$$\mathcal{E}(f,g) = \tfrac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{(f(y)-f(x))(g(y)-g(x)}{|y-x|^{d+\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

z dziedziną $D_\varepsilon = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(f(y)-f(x))^2}{|y-x|^{d+\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty\}$.

Przestrzeń D_ε to ułamkowa przestrzeń Sobolewa $H^{\alpha/2}(\mathbb{R}^d) = W^{\alpha/2,2}(\mathbb{R}^d)$. Przestrzenie Sobolewa na obszarach pojawiają się jako dziedziny procesu odbijanego lub cenzurowanego w obszarze (zob. pracę [8]). Z ogólnej teorii form Dirichleta wiadomo, że tranzytywność procesu jest równoważna istnieniu takiej ściśle dodatniej funkcji $g \in L^1(D) \cap L^\infty(D)$, że

$$\int\limits_D |u(x)|\, g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\mathcal{E}(u,u)},$$

dla wszystkich funkcji u z dziedziny formy. Ten fakt był początkową motywacją do badania ułamkowej nierówności Hardy'ego (mimo że tranzytywność bądź rekurencyjność dla procesu cenzurowanego została rozstrzygnięta już w pracy [8]). Badania w tym zakresie przeprowadził Bartłomiej Dyda, a znaleziony dowód pozwolił otrzymać tę nierówność dla ogólniejszych przestrzeni Sobolewa $W^{s,p}(D)$ (p odpowiada tu wykładnikowi w przestrzeni L^p, przypadek form Dirichleta odpowiada $p = 2$), w szczególności też dla form Dirichleta, w których skoki procesu cenzurowanego ograniczone są do kierunków z pewnego ustalonego stożka. To pozwoliło podać warunki wystarczające na tranzytywność takich procesów cenzurowanych. Nierówności Hardy'ego (zob. [11]) z najlepszą stałą pozwalają na przykład badać krytyczne zaburzenia schrödingerowskie laplasjanu ułamkowego.

4.6. *Teoria spektralna i zagadnienie Dirichleta.* W niektórych modelach mechaniki kwantowej ważną rolę odgrywają pewne operatory pseudoróżniczkowe, zwane hamiltonianami relatywistycznymi. W artykule [67] T. Kulczycki i B. Siudeja rozwinęli teorię spektralną operatorów Schrödingera postaci $H_0^\alpha - V$, gdzie $H_0^\alpha = mI - (m^{2/\alpha} I - \Delta)^{\alpha/2}$, przy czym $\alpha \in (0,2)$, natomiast V jest pewnym potencjałem. Głównym wynikiem pracy jest podanie warunków na to, aby półgrupa Feynmana–Kaca generowana przez ten operator była mocno ultrakontraktywna (definicję tego pojęcia i jego omówienie można znaleźć na przykład w pracy [46]). Dodatkowo podano dokładne oszacowania pierw-

szej funkcji własnej tego operatora. Praca okazała się przełomowa także z innych względów – jako środek dowodu głównego twierdzenia autorzy otrzymali pewne oszacowania jądra ciepła dla relatywistycznego hamiltonianu na obszarach.

Badania nad teorią spektralną tzw. nielokalnych operatorów Schrödingera (opartych na generatorach procesów Lévy'ego z tzw. własnością pojedynczego dalekiego skoku) kontynuowane były w serii prac K. Kalety wspólnych z J. Lörinczim (zob. m.in. [61, 62]), w których zaproponowano nowe, efektywne metody znajdowania dokładnych oszacowań funkcji własnych tych operatorów w nieskończoności. Następnie uzyskane w ten sposób oszacowania odpowiednich funkcji własnych stanu podstawowego zastosowano do szczegółowego zbadania własności mocnej ultrakontraktywności i hiperkontraktywności. Wprowadzono też pojęcie tzw. dominacji przez stan podstawowy. Pewne zastosowania i interpretacje tych wyników, które wydają się interesujące z punktu widzenia fizyki matematycznej, przedyskutowane zostały w późniejszej pracy Kalety i Lörinczieg o [63]).

Zagadnienie Dirichleta dla obszaru D i operatora $\Delta^{\alpha/2}$ to następujący problem: należy znaleźć taką funkcję φ, aby dla $x \in D$ zachodziła równość $\Delta^{\alpha/2}\varphi(x) = -1$, a dla $x \in D^c$ był spełniony warunek $\varphi(x) = 0$. Jak już wspomnieliśmy, φ jest wtedy wartością średnią czasu wyjścia ze zbioru D, gdy proces startuje z $x \in D$. Ostatnio T. Kulczycki wykazał (zob. [68]), że w przypadku, gdy D jest wypukłym obszarem na płaszczyźnie, to funkcja φ jest wklęsła. Jest to rozwiązanie problemu postawionego dziesięć lat wcześniej przez R. Bañuelosa. Metoda polega na rozszerzeniu harmonicznym funkcji φ do przestrzeni o jeden wymiar większej, co przenosi problem z operatora nielokalnego w $\mathbb{R}^2$ do laplasjanu w $\mathbb{R}^3$, następnie korzysta się z głębokich wyników Hansa Lewy'ego, dotyczących macierzy Hessego dla klasycznych funkcji harmonicznych.

Tadeusz Kulczycki wraz z Mateuszem Kwaśnickim rozwinęli też teorię spektralną dla problemu Stiekłowa w obszarach w $\mathbb{R}^3$. Problem Neumanna–Stiekłowa w obszarach w $\mathbb{R}^3$ to matematyczny model opisujący drgania cieczy w zbiornikach w warunkach grawitacji. To klasyczny model hydrodynamiki, badany w ogromnej liczbie prac, zapoczątkowanych przez Eulera, Poissona, Rayleigha i Poincarégo. Kulczycki i Kwaśnicki skupili się na takich obszarach (zbiornikach cieczy), które są bryłami obrotowymi.

Główny wynik ich pracy [69] to dowód faktu, że przy odpowiednich naturalnych założeniach pierwsza funkcja własna jest antysymetryczna. Autorzy podali też opis geometrycznych własności pierwszej funkcji własnej. W interpretacji hydrodynamicznej jest to opis własności geometrycznych wolnej powierzchni cieczy drgającej w zbiorniku.

Warto dodać, że efekty tych drgań można zaobserwować i sfotografować, przeprowadzając odpowiedni eksperyment. Opis tego eksperymentu i zdjęcia powierzchni cieczy są opublikowane przez T. Kulczyckiego, M. Kwaśnickiego i B. Siudeję (wraz z innymi współautorami) w artykule [70].

We współpracy z Alexeyem Kuznetsovem z *York University* w Kanadzie, Bartłomiej Dyda i Mateusz Kwaśnicki badali funkcje i wartości własne laplasjanu ułamkowego w kuli, a więc rozwiązania zagadnienia własnego $\Delta^{\alpha/2}\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$ dla x z kuli jednostkowej, przy warunku $\varphi(x) = 0$ poza kulą jednostkową. Gdy $\alpha = 2$, tj. w przypadku klasycznym, rozwiązania tego zagadnienia są opisane w prosty sposób za pomocą funkcji Bessela. Jawne wzory nie są jednak znane, gdy $\alpha < 2$. W tym przypadku wiedza o funkcjach własnych φ jest bardzo uboga. Wiadomo, że pierwsza funkcja własna (a więc funkcja własna o najmniejszej wartości własnej λ) jest niezmiennicza ze względu na obroty i ma stały znak. Kilkanaście lat temu Tadeusz Kulczycki wysunął hipotezę dotyczącą kształtu drugiej funkcji własnej – tak, jak w przypadku klasycznym, należy spodziewać się, że będzie ona antysymetryczna.

Aby częściowo rozstrzygnąć tę hipotezę, wyżej wymienieni autorzy znaleźli rozwiązania zmodyfikowanego zagadnienia własnego $(1-|x|^2)^{\alpha/2}\Delta^{\alpha/2}\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$. Okazuje się, że rozwiązania wyrażają się w łatwy sposób za pomocą wielomianów Jacobiego. Przy okazji uzyskano bogatą rodzinę jawnych wzorów z laplasjanem ułamkowym – wyniki te zawarte są w artykule [48]. Wartości własne oryginalnego zagadnienia własnego można oszacować za pomocą rozwiązań zagadnienia zmodyfikowanego, wykorzystując metodę Rayleigha–Ritza do oszacowań z góry i metodę zagadnień pośrednich Weinsteina–Aronszajna do oszacowań z dołu. Dzięki temu udało się rozstrzygnąć pozytywnie hipotezę T. Kulczyckiego w wymiarze $d = 1$ oraz $d = 2$, a także gdy $d \leqslant 9$ w przypadku $\alpha = 1$. Wynik ten został opublikowany w artykule [49].

4.7. *Teoria potencjału hiperbolicznego ruchu Browna i hiperbolicznych procesów α-stabilnych.* Pod koniec XX wieku rozpoczęto badnia ruchu Browna i procesów stabilnych o wartościach w przestrzeniach hiperbolicznych. Przestrzenie te są klasycznym przykładem przestrzeni o ujemnej (w tym przypadku stałej) krzywiźnie i stanowią naturalny krok w wielu uogólnieniach ważnych zagadnień z $\mathbb{R}^d$ na przypadek bardziej ogólnych struktur geometrycznych. Zakrzywienie przestrzeni skutkuje na przykład tym, że najkrósza droga między dwoma punktami wiedzie często po łuku okręgu, suma zaś kątów w trójkącie jest mniejsza niż 180°. Warto podkreślić, że przestrzenie hiperboliczne służą do modelowania czasoprzestrzeni w teorii względności Alberta Einsteina.

Odpowiednikiem operatora Laplace'a Δ w $\mathbb{R}^d$ jest w przestrzeni hiperbolicznej tzw. operator Laplace'a–Beltramiego. Jest on generatorem hiperbolicznego ruchu Browna, dość intensywnie badanego od lat osiemdziesiątych XX wieku. Jądro ciepła operatora Laplace'a–Beltramiego (czyli prawdopodobieństwa przejścia hiperbolicznego ruchu Browna) było badane z punktu widzenia analizy. Okazało się, że w wymiarach nieparzystych jądro ciepła opisane jest za pomocą funkcji elementarnych, w wymiarach parzystych są to funkcje nieelementarne, ale podano bardzo dokładne ich oszacowania (na przykład w książce E. B. Daviesa [45]).

W 2001 roku H. Matsumoto opisał w artykule [78] funkcję Greena całej przestrzeni w przypadku hiperbolicznego ruchu Browna (czyli operatora Laplace'a–Beltramiego). Podkreślmy jednak, że chodziło o całą przestrzeń, czyli rozważany hiperboliczny ruch Browna nie był zabijany. Oczywiście pojawiło się pytanie, jak wyglądają funkcje Greena mniejszych zbiorów, na przykład półprzestrzeni lub kul. Aby obliczyć te funkcje dla obszaru D, musimy rozważyć proces zabity przy wyjściu ze zbioru D.

Badając ruch Browna w przestrzeni hiperbolicznej można używać różnych modeli tej przestrzeni, jednak gęstość prawdopodobieństw przejścia tego procesu z punktu x do y nie zależy od konkretnych punktów, a tylko od ich wzajemnej odległości, więc otrzymane rezultaty nie zależą od modelu przestrzeni.

Wydawało się, że najwygodnej będzie badać zachowanie hiperbolicznego ruchu Browna w modelu półprzestrzeni Poincarégo $\mathbb{H}_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\}$, gdy proces ten będzie wychodził ze zbioru $D = \{x \in \mathbb{H}_d \mid x_d > a\}$, przy czym $a > 0$. Już to zadanie okazało się niełatwe, ale zostało rozwiązane przez T. Byczkowskiego, P. Graczyka i A. Stósa w pracy [35], w której podano opis jądra Poissona tego zbioru. Kolejnym zbiorem była kula. W tym przypadku problem opisu funkcji Greena i jądra Poissona w przypadku rzeczywistej przestrzeni hiperbolicznej został rozwiązany przez T. Byczkowskiego i J. Małeckiego w pracy [36], a w przypadku zespolonej przestrzeni hiperbolicznej przez T. Żaka w pracy [95]. Warto podkreślić, że badania obiektu tak abstrakcyjnego, jak hiperboliczny ruch Browna, mogą mieć bardzo konkretne zastosowania praktyczne – ostatnia składowa hiperbolicznego ruchu Browna w $\mathbb{H}_d$ to tak zwany geometryczny ruch Browna, stosowany w ekonomii do modelowana cen akcji. Poza tym, w wyżej opisanych badaniach zastosowano nowe metody, które pozwoliły na dokładniejsze zbadanie procesów Bessela oraz Browna–Bessela (piszemy o tym dokładniej w następnym rozdziale). Hiperboliczny ruch Browna był badany także przez G. Serafina w pracy [88], a hiperboliczny proces Bessela przez A. Pycia w pracy [83].

Kolejnym naturalnym krokiem jest badanie procesów stabilnych w przestrzeni hiperbolicznej. Hiperboliczne procesy α-stabilne otrzymuje się z hiperbolicznego ruchu Browna przez podporządkowanie: jeśli (X_t) jest hiperbolicznym ruchem Browna, a (T_t) jest ściśle rosnącym procesem $\alpha/2$-stabilnym (tzw. *subordynatorem*), niezależnym od (X_t), to proces (X_{T_t}) jest hiperbolicznym procesem α-stabilnym. Badania podstawowych obiektów teorii potencjału dla tego typu procesów rozpoczęły się na naszym seminarium niedawno – praca Ryznara i Żaka [87], poświęcona czasom wyjścia takiego procesu z półprzestrzeni lub kuli, ukazała się w 2016 roku.

4.8. *Procesy Bessela.* Ruch Browna (W_t) o wartościach w $\mathbb{R}^d$, startujący ze środka kuli o promieniu $r > 0$, wychodzi z tej kuli w momencie, gdy odległość (W_t) od środka tej kuli przekracza poziom r. Odległość (W_t) od punktu startu to tak zwany d-wymiarowy proces Bessela. Przy okazji badania czasów wyjścia procesów hiperbolicznych okazało się, że można powiedzieć coś nowego o tak klasycznym obiekcie, jak proces Bessela. W 2006 roku, w pracy [40], Byczkowski i Ryznar podali wzór całkowy na gęstość rozkładu punktu pierwszego trafienia procesu Bessela w zadany poziom $a > 0$ przy starcie procesu z poziomu $x > a$.

Następnie w pracy T. Byczkowskiego, J. Małeckiego i M. Ryznara [37] zbadano rozkłady trafienia w różne zbiory dla dyfuzji Browna–Bessela. Wyniki z tej pracy można zastosować do badania procesów związanych z operatorem Bessela $-(I-\Delta)^{\alpha/2}$. Tematykę rozkładów czasów trafienia dla procesu Bessela kontynuowano w pracy [38], w której wyżej wymienieni autorzy podali dokładne obustronne oszacowania gęstości czasu pierwszego trafienia procesu Bessela w zadany poziom $a > 0$ przy starcie procesu z poziomu $x > a$. Kulminacją tego typu wyników jest poniższe twierdzenie o oszacowaniach półgrupy przejścia procesu Bessela zabijanego po wyjściu z półprostej, udowodnione w pracy [22] przez K. Bogusa i J. Małeckiego.

Twierdzenie. *Niech $p_a^{(\mu)}(t,x,y)$ będzie gęstością prawdopodobieństw przejścia procesu Bessela zabitego przy wyjściu z półprostej (a,∞). Dla $\mu \neq 0$ zachodzi*

$$p_a^{(\mu)}(t,x,y) \overset{\mu}{\approx} \left[1\wedge\frac{(x-a)(y-a)}{t}\right]\left(1\wedge\frac{xy}{t}\right)^{|\mu|-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right)$$

dla wszystkich $x, y > a$ oraz $t > 0$.

Zapis $f(t,x,y) \overset{\mu}{\approx} g(t,x,y)$ oznacza istnienie takich stałych $C_1, C_2 > 0$ zależnych tylko od indeksu μ, że $C_1 g(t,x,y) \leqslant f(t,x,y) \leqslant C_2 g(t,x,y)$ dla wyszczególnionych x, y i t. Warto zauważyć, że czynniki wykładnicze wystę-

pujące w oszacowaniu dolnym i górnym są identyczne. Wyróżnia to powyższy wynik spośród większości oszacowań jąder ciepła dla operatorów eliptycznych, w których zmienna czasowa t występująca w czynnikach eksponencjalnych jest skalowana przez stałe, które są różne w oszacowaniu dolnym i górnym. Oszacowania w przypadku $\mu = 0$ są bardziej skomplikowane ze względu na logarytmiczne zachowanie gęstości $p_a^{(0)}(t, x, y)$, a dokładne obustronne oszacowania w pełnym zakresie parametrów zostały uzyskane w artykule [23].

4.9. *Teoria potencjału niesymetrycznych procesów stabilnych.* Kolejnym krokiem była próba przeniesienia rozwiniętej wcześniej teorii potencjału na procesy α-stabilne, które nie są niezmienicze ze względu na obroty, a dalej na możliwie ogólną klasę skokowych procesów Lévy'ego (tzn. takich, których trajektorie mają skoki). Dla zilustrowania otrzymanych wyników wymieńmy dwie prace. W pracy [18] z 2007 roku K. Bogdan i P. Sztonyk otrzymali oszacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia i jądra potencjału także dla tych procesów stabilnych w $\mathbb{R}^d$, które nie są niezmiennicze ze względu na obroty. Otrzymane oszacowania pozwalają na charakteryzację tej klasy procesów stabilnych, dla której spełniona jest nierówność Harnacka. W pracach [64, 65] K. Kaleta i P. Sztonyk podali oszacowania gęstości i ich pochodnych dla dużo szerszej klasy procesów Lévy'ego. Obejmuje ona m.in. procesy, których miara Lévy'ego ma podeksponencjalny lub eksponencjalny zanik w nieskończoności.

4.10. *Procesy unimodalne.* Omawiane wcześniej izotropowy proces stabilny i proces relatywistyczny są szczególnymi przykładami tak zwanych *subordynowanych ruchów Browna*. Mianowicie, niech $B(t)$ będzie ruchem Browna w $\mathbb{R}^d$, a T_t niezależnym od niego subordynatorem, czyli procesem Lévy'ego o nieujemnych i niemalejących trajektoriach. Tworzymy teraz nowy proces, wybierając tylko część trajektorii ruchu Browna, zamieniając czas, tzn. definiujemy proces $X(t) = B(T_t)$. Oprócz wspomnianych procesów bardzo ważnym, z powodu zastosowań w fizyce i w matematyce finansowej, przykładem podporządkowanego ruchu Browna jest proces geometrycznie stabilny, tzn. proces o generatorze $\ln(1 - \Delta^{\alpha/2})$. Operator ten jest także bardzo ciekawy z punktu widzenia teorii równań różniczkowych cząstkowych, ponieważ jest przykładem operatora rzędu zero. Dla tego operatora T. Grzywny i M. Ryznar udowodnili w pracy [53] na prostej rzeczywistej niezmieniczą na skalowania nierówność Harnacka. Był to pierwszy tego typu rezultat dla operatorów rzędu zero, który został następnie uogólniony przez matematyków zagranicznych na szerszą klasę procesów podporządkowanych. Obecnie najmocniejszym znanym wynikiem tego typu obejmującym dużą klasę operatorów rzędu zero jest rezultat T. Grzyw-

nego i M. Kwaśnickiego z artykułu [54] dla procesów unimodalnych. Procesy te są uogólnieniem podporządkowanych ruchów Browna. Proces $B(T_t)$ ma bardzo ważną własność, mianowicie jego rozkład w każdej chwili $t > 0$ jest absolutnie ciągły na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ i jego gęstość jest funkcją radialną i radialnie nierosnącą. Procesy, które mają tę własność nazywamy procesami unimodalnymi. Badania nad tą klasą procesów uczestnicy seminarium rozpoczęli w 2012 roku i zaowocowały one wieloma wynikami. Oprócz wspomnianej nierówności Harnacka uzyskano ostre oszacowania gęstości przejścia w pracy [14], oszacowania średniego czasu przebywania w ograniczonym zbiorze przed jego pierwszym opuszczeniem dla dowolnych punktów startu w artykule [15], ograniczenie górne na gradient funkcji harmonicznych w pracy [71] oraz oszacowania na jądra ciepła procesu zabitego w artykule [16]. Te ostatnie uogólniały na szeroką klasę procesów wyniki uzyskane wcześniej dla procesu stabilnego w pracy [13] i orzekające, że

$$p_D(t,x,y) \approx P^x(\tau_D > t)p(t,x,y)P^y(\tau_D > t).$$

4.11. *Rozkłady supremów procesów Lévy'ego.* Rozkłady supremów procesów, oprócz wartości teoretycznej, są niezwykle ważne dla zastosowań. W działalności seminarium do 1995 roku badaliśmy rozkłady supremów. Udało się wtedy udowodnić, że dla miar (czyli procesów) stabilnych dystrybuanta jest absolutnie ciągła (oprócz możliwego skoku na początku, gdy $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$). Metodami teorii potencjału można dla pewnych klas procesów otrzymać dużo dokładniejsze wyniki. W szczególności, dla symetrycznych procesów Lévy'ego, M. Kwaśnickiemu, J. Małeckiemu i M. Ryznarowi w pracy [72] udało się podać optymalne oszacowania dystrybuanty supremum takiego procesu.

Twierdzenie. *Niech X_t będzie jednowymiarowym symetrycznym procesem Lévy'ego o funkcji charakterystycznej $Ee^{i\xi X_t} = e^{-t\psi(\xi)}$. Istnieje taka stała absolutna C, że dla dowolnych $t, r > 0$,*

$$C^{-1}\min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{t\psi(1/r)}}\right\} \leqslant P(sup_{s\leqslant t}X_s \leqslant r) \leqslant C\min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{t\psi(1/r)}}\right\}.$$

Ponadto, dla procesów podporządkowanych ruchowi Browna, ci sami autorzy otrzymali w pracy [72] oszacowania gęstości takiej dystrybuanty i jej wyższych pochodnych.

4.12. *Procesy na fraktalach.* Po przełomie, jakim było udowodnienie brzegowej zasady Harnacka dla laplasjanu ułamkowego, naturalne stało się pytanie, jak

można uogólnić kontekst geometryczny tego twierdzenia. Andrzej Stós podjął badania teorii potencjału procesów stabilnych na przestrzeniach fraktalnych. W tym kontekście pierwszym krokiem jest samo zdefiniowane naturalnego laplasjanu ułamkowego. Zostało to zrobione przez zidentyfikowanie dziedziny odpowiedniej formy Dirichleta podporządkowanego ruchu Browna i przez analizę związanych z tym przestrzeni funkcyjnych (zob. [91]). Metoda probabilistyczna pozwoliła otrzymać podstawowe wyniki teorii potencjału, w tym nierówność Harnacka i oszacowania funkcji Greena kuli, a także udowodnić brzegową zasadę Harnacka dla odpowiednika zbiorów lipschitzowskich na trójkącie Sierpińskiego (zob. [17]). Następnie pewne wersje BHP na trójkącie i na dywanie Sierpińskiego otrzymali K. Kaleta, M. Kwaśnicki i A. Stós w artykułach [60, 92]. Ostatecznym zwieńczeniem wątku geometrycznej ogólności BHP była wzmiankowana już praca K. Bogdana, T. Kumagai i M. Kwaśnickiego [20], gdzie udowodniono to twierdzenie dla dowolnych zbiorów otwartych w abstrakcyjnych przestrzeniach miarowo-metrycznych.

Kierunek badań fraktalnych zaowocował także współpracą Kamila Kalety i Andrzeja Stósa z Katarzyną Pietruską-Pałubą z Uniwersytetu Warszawskiego. Powstały ich wspólne prace [66, 81] dotyczące nierówności Poincarégo na fraktalach „komórkowych" oraz spektralnych własności operatorów Schrödingera opartych na laplasjanie ułamkowym i losowym potencjale poissonowskim na trójkącie Sierpińskiego.

Prace nad probabilistyczną teorią potencjału procesów stabilnych były również prowadzone w kontekście geometrii przestrzeni symetrycznych, gdzie P. Graczyk i A. Stós otrzymali w artykule [51] oszacowania jądra ciepła dla podporządkowanego ruchu Browna. Jako ciekawostkę odnotujmy, że podejście użyte w tych przestrzeniach, które są rozmaitościami różniczkowalnymi, okazało się również skuteczne do badania procesów stabilnych na grafach (drzewach jednorodnych), które są przestrzeniami dyskretnymi (zob. [93]).

4.13. *Transformata Kelvina i procesy samopodobne.* Gdy zbiór D jest nieograniczony, na przykład D jest dopełnieniem kuli jednostkowej, to badanie zachowania funkcji Greena oraz innych funkcji harmonicznych w nieskończoności stwarza istotne kłopoty. W klasycznej analizie harmonicznej problem ten rozwiązał już w XIX wieku lord Kelvin, stosując inwersję. Inwersja to przekształcenie $T\colon \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ zadane wzorem $T(x) = \frac{x}{|x|^2}$. Zauważmy, że T przeprowadza zewnętrze kuli jednostkowej na jej wnętrze (i na odwrót), a po uzwarceniu $\mathbb{R}^d$ poprzez dołączenie punktu w nieskończoności T przeprowadza ten punkt na zero. Twierdzenie Kelvina pokazuje, jak przekształcenie T działa na funkcje harmoniczne względem operatora Laplace'a: funkcja harmoniczna $h(x)$

przechodzi na (zwykle nieharmoniczną) funkcję $h(T(x))$, która jednak po pomnożeniu jej przez $|x|^{2-d}$ staje się znów harmoniczna. Jak zauważył M. Riesz w 1938 roku, w przypadku funkcji radialnych, określonych na $\mathbb{R}^d$ i harmonicznych względem operatora określonego wzorem $\mathcal{A}f(x) = c_{\alpha,d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)-f(x)}{|y-x|^{\alpha+d}}\,\mathrm{d}y$, po złożeniu z inwersją pozostają one harmoniczne, o ile tylko pomnoży się je przez $|x|^{\alpha-d}$.

Jeśli więc chcemy badać zachowanie procesu α-stabilnego w otoczeniu nieskończoności, możemy przenieść problem na otoczenie zera, o ile tylko będziemy wiedzieć, jak proces zachowuje się po inwersji. Badaniu tego problemu na naszym seminarium poświęcone były trzy prace [6, 9, 21]. W szczególności, w ostatniej z tych trzech prac, autorstwa K. Bogdana i T. Żaka, *On Kelvin Transformation*, udowodniono następujący rezultat.

Twierdzenie. *Niech (X_t) będzie niezmienniczym ze względu na obroty procesem stabilnym o wartościach w $\mathbb{R}^d$, a $T(x) = x/|x|^2$ inwersją $\mathbb{R}^d$. Wówczas proces $T(X_t)$ jest h-procesem, warunkowanym w sensie Dooba funkcją $h(x) = |x|^{\alpha-d}$, i z losowo zmienionym czasem. Jeżeli $G_D(x, y)$ oznacza funkcję Greena zbioru D, to dla każdego otwartego D nie zawierającego zera*

$$G_{TD}(x, y) = |x|^{\alpha-d}|y|^{\alpha-d}G_D(Tx, Ty) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Od czasu ukazania się tej pracy wielu matematyków zaczęło stosować inwersję do badania bardziej ogólnych klas procesów stabilnych (niekoniecznie niezmienniczych ze względu na obroty $\mathbb{R}^d$). W szczególności Kyprianou i jego współpracownicy zastosowali tę metodę do badania ogólnych jednowymiarowych procesów stabilnych, procesów startujących z nieskończoności oraz tych procesów stabilnych na płaszczyźnie, których trajektorie okrążają początek układu współrzędnych. Ponieważ przekształcenie trajektorii procesów za pomocą inwersji okazało się tak przydatne, Kyprianou w pracy [73] nazwał je transformatą Riesza–Bogdana–Żaka.

M. Ryznar i K. Michalik wykazali w pracy [79] analogon powyższego twierdzenia dla obszarów regularnych. Następnie okazało się, że można zastosować inwersję nie tylko do procesów stabilnych, ale – dużo ogólniej – do jednowymiarowych dyfuzji i do procesów samopodobnych. Proces stochastyczny $(X_t, X_0 = x)$, o wartościach w $\mathbb{R}^d$ jest *samopodobny o indeksie* α, jeżeli dla każdego $a > 0$ proces $(aX_{a^{-\alpha}t}, X_0 = a^{-1}x)$ ma identyczne rozkłady skończeniewymiarowe, jak proces wyjściowy. Oczywiście każdy proces α-stabilny jest samopodobny. Znaczenie tych procesów wynika między innymi z faktu – widocznego wprost z definicji samopodobieństwa – że można je skalować. W la-

tach siedemdziesiątych J. Lamperti podał opis wszystkich samopodobnych procesów o wartościach dodatnich – są to eksponenty procesów Lévy'ego ze zmienionym czasem. Kilka lat temu udało się podać analogiczny opis dla procesów samopodobnych o wartościach rzeczywistych (zob. [41]), ale ważnym problemem pozostawał opis takich procesów o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Ostatnio, przy okazji próby zastosowania inwersji do przekształcenia procesów samopodobnych, w pracy [3] udało się nam otrzymać między innymi daleko idące uogólnienie reprezentacji Lampertiego na szeroką klasę procesów samopodobnych o wartościach w $\mathbb{R}^d$.

4.14. *Inne tematy.* W krótkim artykule nie jest możliwe omówienie wszystkich tematów badanych przez uczestników seminarium. Wymagałoby to raczej dużej monografii, do napisania której wielokrotnie już przekonywano nas podczas różnych konferencji. Do tej pory udało się tylko namówić kilku uczestników seminarium (K. Bogdan, T. Byczkowski, T. Kulczycki i M. Ryznar) do opublikowania w 2009 roku w tomie *Lecture Notes in Mathematics 1980* kilku artykułów przeglądowych, podsumowujących dokonania członków seminarium w latach 1995–2006. Ponadto, w 2013 roku, opublikowane zostały w postaci skryptu wykłady T. Byczkowskiego *Potential theory of subordinated Brownian motions*. Zawierają one przystępne wprowadzenie do teorii potencjału procesu stabilnego i relatywistycznego oraz podporządkowanych ruchów Lévy'ego i dostępne są pod adresem http://ssdnm.mimuw.edu.pl/pliki/wyklady/skrypt_T.Byczkowski_UWr.pdf.

Wymieńmy jeszcze kilka tematów, którymi zajmowali się uczestnicy seminarium, a których nie omówiliśmy powyżej.

- M. Lewandowski (we współpracy z Wernerem Linde z Jeny) badali w pracy [74] problem równości miar, spełniających pewne warunki na momenty, a w artykule [75] M. Lewandowski, M. Ryznar i T. Żak udowodnili nierówność typu Andersona dla miar stabilnych.
- K. Michalik i M. Ryznar badali w pracy [80] zbieżność niestyczną funkcji α-harmonicznych w obszarach Lipschitza.
- T. Luks badał w artykule [76] graniczne własności funkcji α-harmonicznych oraz (we współpracy z P. Graczykiem i Margit Rösler z Paderborn) funkcję Greena i jądro Poissona kuli dla procesu Dunkla w pracy [52].

4.15. *Kształcenie kadry.* Często spotykamy się z pytaniem, skąd bierzemy tylu młodych ludzi, zainteresowanych tematyką, którą uprawiamy. Odpowiedź jest bardzo prosta – wszystkim studentom, którzy chcą z nami współpracować, zapewniamy jak najlepszą opiekę naukową. Oprócz rzeczy tak oczywistych jak

wyznaczanie na prace magisterskie tematów związanych z aktualnie prowadzonymi na świecie badaniami i nasza ciągła gotowość do dyskusji matematycznych, nie szczędzimy też naszego prywatnego czasu, wygłaszając (poza naszym oficjalnym pensum) dodatkowe cykle jednosemestralnych wykładów monograficznych (często dla dwóch–trzech słuchaczy) lub prowadząc proseminaria na tematy, których brak w programie studiów. Dość powiedzieć, że w ciągu ostatnich dwudziestu lat wygłosiliśmy kilkanaście takich jednosemestralnych kursów. Obecnie (w 2017 roku) w seminarium regularnie uczestniczy sześcioro doktorantów (nie tylko z Politechniki Wrocławskiej).

Jak już wspomnieliśmy, szczegółowa bibliografa prac uczestników seminarium znajduje się na stronie seminarium. W poniższej bibliografii umieściliśmy tylko te prace powstałe w naszym zespole, które cytowane są w powyższym tekście oraz prace autorów niezwiązanych z naszym seminarium, ale dotyczące tematyki uprawianej przez nas.

Bibliografia

[1] A. de Acosta, *Stable measures and seminorms*, Ann. Probab. 3 (1975), 865–875.

[2] A. de Acosta, *Asymptotic behavior of stable measures*, Ann. Probab. 5 (1977), 494–499.

[3] L. Alili, L. Chaumont, P. Graczyk, T. Żak, *Inversion, duality and Doob h-transforms for self-similar Markov processes*, Electron. J. Probab. 22 (2017), paper no. 20.

[4] A. Ancona, *Principe de Harnack à la frontière et theorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien*, Ann. Inst. Fourier 28 (1978), 169–213 (French, with English summary).

[5] K. Bogdan, *The boundary Harnack principle for the fractional Laplacian*, Studia Math. 123 (1997), 43–80.

[6] K. Bogdan, *Representation of α-harmonic functions in Lipschitz domains*, Hiroshima Math. J. 29 (1999), 227–243.

[7] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Probabilistic proof of boundary Harnack principle for α-harmonic functions*, Potential Anal. 11 (1999), 135–156.

[8] K. Bogdan, K. Burdzy, Z-Q. Chen, *Censored stable processes*, Probab. Theory Related Fields 127 (2003), 89–152.

[9] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Potential theory for the α-stable Schrd̈inger operator on bounded Lipschitz domains*, Studia Math. 133 (1999), 53–92.

[10] K. Bogdan, T. Byczkowski, *Potential theory of Schrödinger operator based on fractional Laplacian*, Probab. Math. Statist. 20 (2000), 293–335.

[11] K. Bogdan, B. Dyda, P. Kim, *Hardy inequalities and non-explosion results for semigroups*, Potential Anal. 44 (2016), 229–247.

[12] K. Bogdan, T. Jakubowski, *Estimates of heat kernel of fractional Laplacian perturbed by gradient operators*, Comm. Math. Phys. 271 (2007), 179–198.
[13] K. Bogdan, T. Grzywny, M. Ryznar, *Heat kernel estimates for the fractional Laplacian with Dirichlet conditions*, Ann. Probab. 38 (2010), 1901–1923.
[14] K. Bogdan, T. Grzywny, M. Ryznar, *Density and tails of unimodal convolution semigroups*, J. Funct. Anal. 266 (2014), 3543–3571.
[15] K. Bogdan, T. Grzywny, M. Ryznar, *Barriers, exit time and survival probability for unimodal Lévy processes*, Probab. Theory Related Fields 162 (2015), 155–198.
[16] K. Bogdan, T. Grzywny, M. Ryznar, *Dirichlet heat kernel for unimodal Lévy processes*, Stoch. Proc. Appl. 124 (2014), 3612–3650.
[17] K. Bogdan, A. Stós, P. Sztonyk, *Harnack inequality for stable processes on d-sets*, Studia Math. 158 (2003), 163–198.
[18] K. Bogdan, P. Sztonyk, *Estimates of potential kernel and Harnack's inequality for anisotropic fractional Laplacian*, Stud. Math. 181 (2007), 101–123.
[19] K. Bogdan, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, *Estimates and structure of α-harmonic functions*, Probab. Theory Related Fields 140 (2008), 345–381.
[20] K. Bogdan, T. Kumagai, M. Kwaśnicki, *Boundary Harnack inequality for Markov processes with jumps*, Transactions AMS 367 (2015), 477–517.
[21] K. Bogdan, T. Żak, *On Kelvin Transformation*, J. Theor. Probab. 19 (2006), 89–120.
[22] K. Bogus, J. Małecki, *Sharp estimates of transition probability density for Bessel process in half-line*, Potential Anal. 43 (2015), 1–22.
[23] K. Bogus, J. Małecki, *Heat kernel estimates for the Bessel differential operator in half-line*, Math. Nachr. 289 (2016), 2097–2107.
[24] A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook on Brownian Motion: Facts and Formulae*, Birkhäuser, Basel 2001.
[25] T. Byczkowski, *Norm convergent expansion for L^p valued Gaussian random elements*, Studia Math. 64 (1979), 87–95.
[26] T. Byczkowski, T. Żak, *Asymptotic properties of semigroups of measures on vector spaces*, Ann. Probab. 9 (1981), 211–220.
[27] T. Byczkowski, T. Inglot, *Gaussian random series on metric vector spaces*, Math. Zeitschr. 196 (1987), 39–50.
[28] T. Byczkowski, *Random series and seminorms*, [w:] Proc. First World Congress of Bernoulli Soc., VNU Science Press, Utrecht 1987, 771–774.
[29] T. Byczkowski, M. Ryznar, *Series of independent vector valued random variables and absolute continuity of seminorms*, Math. Scandinavica 62 (1988), 59–74.
[30] T. Byczkowski, J. Woś, *On infinite products of independent random elements on metric semigroups*, Coll. Math. 37 (1977), 271–285.
[31] T. Byczkowski, K. Samotij, *Absolute continuity of stable seminorms*, Ann. Probability 14 (1986), 299–312.
[32] T. Byczkowski, P. Graczyk, *Malliavin calculus for stable processes on Heisenberg group*, Probab. Math. Statist. 13 (1992), 277–292.
[33] T. Byczkowski, J. Woś, *Equivalence theorems for infinite products of independent random elements on metric semigroups*, Coll. Math. 37 (1977), 287–293.

[34] T. Byczkowski, A. Hulanicki, *Gaussian measure of normal subgroups*, Ann. Probab. 11 (1983), 685–691.
[35] T. Byczkowski, P. Graczyk, A. Stós, *Poisson kernels of half-spaces in real hyperbolic spaces*, Revista Matemática Iberoamericana 23 (2007), 85–126.
[36] T. Byczkowski, J. Małecki, *Poisson kernel and Green function of the ball in real hyperbolic spaces*, Potential Anal. 27 (2007), 1–26.
[37] T. Byczkowski, J. Małecki, M. Ryznar, *Hitting half-spaces by Bessel-Brownian diffusions*, Potential Anal. 33 (2010), 47–83.
[38] T. Byczkowski, J. Małecki, M. Ryznar, *Hitting Times of Bessel Processes*, Potential Anal. 38 (2013), 753–786.
[39] T. Byczkowski, J. Małecki, M. Ryznar, *Bessel potentials, hitting distributions and Green functions*, Transactions AMS 361 (2009), 4871–4900.
[40] T. Byczkowski, M. Ryznar, *Hitting distributions of geometric Brownian motion*, Studia Math. 173 (2006), 19–38.
[41] L. Chaumont, H. Panti, V. Rivero, *The Lamperti representation of real-valued self-similar Markov processes*, Bernoulli 9 (2013), 2494–2523.
[42] B. S. Cirel'son, *The density of the distribution of the maximum of a Gaussian process*, Teor. Verojatnost. Primenen. 20 (1975), 567–575 (po rosyjsku).
[43] K-L. Chung, Z. Zhao, *From Brownian Motion to Schrödinger's Equation*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, t. 312, Springer, New York 1995.
[44] B. Dahlberg, *Estimates of harmonic measure*, Arch. Rational Mech. Anal. 65 (1977), 275–288.
[45] E. B. Davies, *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1989.
[46] E. B. Davies, B. Simon, *Ultracontracive semigroups and some problems in analysis* (J.A. Barros, red.), Aspects of Mathematics and its Applictions, Elsevier 1986.
[47] T. Downarowicz, *Wkład Czesława Ryll-Nardzewskiego w rozwój teorii ergodycznej*, Wiad. Mat. 53 (2017), nr 2.
[48] B. Dyda, A. Kuznetsov, M. Kwaśnicki, *Fractional Laplace operator and Meijer G-function*, Constructive Approximation 45 (2017), 427–448.
[49] B. Dyda, A. Kuznetsov, M. Kwaśnicki, *Eigenvalues of the fractional Laplace operator in the unit ball*, Journal of the London Mathematical Society 95 (2017), 500–518.
[50] P. Graczyk, *Malliavin calculus for stable processes on homogeneous groups*, Studia Math. 100 (1991), 183–205.
[51] P. Graczyk, A. Stós, *Transition density estimates for stable processes on symmetric spaces*, Pacific Journal of Math. 217 (2004), 87–100.
[52] P. Graczyk, T. Luks, M. Rösler, *On the Green function and Poisson integrals of the Dunkl Laplacian*, Potential Anal. (2017).
[53] T. Grzywny, M. Ryznar, *Two-sided optimal bounds for Green functions of half-spaces for relativistic α-stable process*, Potential Anal. 28 (2008), 201–239.
[54] T. Grzywny, M. Kwaśnicki, *Potential kernels, probabilities of hitting a ball, harmonic functions and the boundary Harnack inequality for unimodal Lévy processes*, Stochastic Process. Appl. 128 (2018), nr 1, 1–38.

[55] J. Hoffmann-Jorgensen, R. M. Dudley, L. Shepp, *On the Lower Tail of Gaussian Seminorms*, Ann. Probab. 7 (1979), 319–342.

[56] T. Jakubowski, *Fractional Laplacian with singular drift*, Studia Math. 207 (2011), 257–273.

[57] T. Jakubowski, K. Szczypkowski, *Time-dependent gradient perturbations of fractional Laplacian*, Journal of Evolution Equations 10 (2010), 319–339.

[58] T. Jakubowski, K. Szczypkowski, *Estimates of gradient perturbation series*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 389 (2012), 452–460.

[59] K. Kaleta, T. Kulczycki, *Intrinsic ultracontractivity for Schrödinger operators based on fractional Laplacians*, Potential Anal. 33 (2010), 313–339.

[60] K. Kaleta, M. Kwaśnicki, *Boundary Harnack Inequality for α-harmonic functions on the Sierpiński triangle*, Probab. Math. Stat. 30 (2010), 353–368.

[61] K. Kaleta, J. Lörinci, *Pointwise eigenfunction estimates and intrinsic ultracontractivity-type properties of Feynman-Kac semigroups for a class of Lévy processes*, Ann. Probab. 43 (2015), 1350–1398.

[62] K. Kaleta, J. Lörinci, *Fall-off of eigenfunctions for nonlocal Schrödinger operators with decaying potentials*, Potential Anal. 46 (2017), 647–688.

[63] K. Kaleta, J. Lörinci, *Transition in the decay rates of stationary distributions of Lévy motion in an energy landscape*, Physical Review E 93 (2016).

[64] K. Kaleta, P. Sztonyk, *Estimates of transition densities and their derivatives for jump Lévy processes*, J. Math. Anal. Appl. 431 (2015), 260–282.

[65] K. Kaleta, P. Sztonyk, *Small time sharp bounds for kernels of convolution semigroups*, Journal d'Analyse Mathématique 132 (2017), 355–394.

[66] K. Kaleta, K. Pietruska-Pałuba, *Integrated density of states for Poisson-Schrödinger perturbations of subordinate Brownian motions on the Sierpiński gasket*, Stoch. Proc. Appl. 125 (2015), 1244–1281.

[67] T. Kulczycki, B. Siudeja, *Intrinsic ultracontractivity of the Feynman-Kac semigroup for relativistic stable processes*, Transactions AMS 358 (2006), 5025–5057.

[68] T. Kulczycki, *On concavity of solutions of the Dirichlet problem for the equation $(-\Delta)^{1/2}\phi = 1$ in convex planar regions*, Journal of the European Mathematical Society 19 (2017), 1361–1420.

[69] T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, *On high spots of the fundamental sloshing eigenfunctions in axially symmetric domains*, Proc. London Math. Soc. 105 (2012), 921–952.

[70] N. Kuznetsov, T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, A. Nazarov, S. Poborchi, I. Polterovich, B. Siudeja, *The legacy of Vladimir Andreevich Steklov*, Notices Amer. Math. Soc. 61 (2014), nr 1, 9–22.

[71] T. Kulczycki, M. Ryznar, *Gradient estimates of harmonic functions and transition densities for Lévy processes*, Transactions AMS 368 (2016), 281–318.

[72] M. Kwaśnicki, J. Małecki, M. Ryznar, *Suprema of Lévy processes*, Ann. Probab. 41 (2013), 2047–2054.

[73] A. Kyprianou, *Deep factorization of stable processes*, Electr. J. Probability 21 (2016), nr 23.

[74] M. Lewandowski, W. Linde, *Real translates of complex measures*, Probab. Th. on Vector Spaces IV, Springer Lecture Notes in Math., t. 1391 1989.
[75] M. Lewandowski, M. Ryznar, T. Żak, *Anderson inequality is strict for stable measures*, Proc. AMS 123 (1995), 3875–3880.
[76] T. Luks, *Boundary behavior of $\alpha-$harmonic functions on the complement of the sphere and hyperplane*, Potential Anal. 39 (2013), 29–67.
[77] D. J. Marcus, *Non-stable laws with all projections stable*, Z. Wahr. verw. Gebiete 64 (1983), 139–156.
[78] H. Matsumoto, *Closed form formulae for the heat kernels and the Green functions for the Laplacians on the symmetric spaces of rank one*, Bulletin des Sciences Mathématiques 125 (2001), 553–581.
[79] K. Michalik, M. Ryznar, *Kelvin transform for $\alpha-$harmonic functions in regular domains*, Demonstratio Mathematica 45 (2012), 361–376.
[80] K. Michalik, M. Ryznar, *Relative Fatou theorem for α-harmonic functions in Lipschitz domains*, Illinois J. Math. 48 (2004), 977–998.
[81] K. Pietruska-Pałuba, A. Stós, *Poincaré inequality and Hajłasz–Sobolev spaces on nested fractals*, Studia Math. 218 (2013), nr 1, 1–26.
[82] G. Pisier, *Probabilistic Methods in the Geometry of Banach Spaces*, Université Paris 1985.
[83] A. Pyć, T. Żak, *Transition density of a hyperbolic Bessel process*, Electron. Commun. Probab. 21 (2016), nr 50.
[84] T. Rolski, W. A. Woyczyński, *Wkład Czesława Ryll-Nardzewskiego do teorii prawdopodobieństwa*, Wiad. Mat. 53 (2017), nr 2.
[85] M. Ryznar, *Asymptotic behaviour of stable measures near the origin*, Ann. Probab. 14 (1986), 287–298.
[86] M. Ryznar, *Estimates of Green function for relativistic α-stable process*, Potential Anal. 17 (2002), 1–23.
[87] M. Ryznar, T. Żak, *Exit Time of a Hyperbolic α-Stable Process from a Halfspace or a Ball*, Potential Anal. 45 (2016), 83–107.
[88] G. Serafin, *Potential theory of hyperbolic Brownian motion in tube domains*, Colloq. Math. 135 (2014), 27–52.
[89] R. Song, J. M. Wu, *Boundary Harnack principle for symmetric stable processes*, Journal of Funct. Analysis 168 (1999), 403–427.
[90] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton 1970.
[91] A. Stós, *Symmetric stable processes on d-sets*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 48 (2000), 237–245.
[92] A. Stós, *Boundary Harnack principle for fractional powers of Laplacian on the Sierpiński carpet*, Bull. Sci. Math. 130 (2006), 580–594.
[93] A. Stós, *Stable semigroups on homogeneous trees and hyperbolic spaces*, Illinois Journal of Mathematics 55 (2011), 1437–1454.
[94] S. R. S. Varadhan, *Strassen's Law of the Iterated Logarithm*, dostępne pod adresem https://math.nyu.edu/faculty/varadhan/LDP/Spring2010.5.pdf.

[95] T. Żak, *Poisson kernel and Green function of balls for complex hyperbolic Brownian motion*, Studia Math. 183 (2007), 161–193.

Tomasz Byczkowski
Instytut Matematyczny PAN
Tomasz.Byczkowski@pwr.edu.pl

Tomasz Żak
Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej
tomasz.zak@pwr.edu.pl

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 291–301
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Andrzej Schinzel (Warszawa)

Prace Andrzeja Rotkiewicza z teorii liczb

Dorobek Andrzeja Rotkiewicza w teorii liczb obejmuje dziewięćdziesiąt cztery prace badawcze, jedną książkę [56] i osiem artykułów [A99–A103, A105, A106, 58]. Współautorzy prac wspólnych to (w porządku alfabetycznym) H. Halberstam, A. Mąkowski, A. Paszkiewicz, A. Schinzel, W. Sierpiński, A. J. van der Poorten, R. Wasén, K. Ziemak, W. Złotkowski.

Prace można podzielić według tematyki na trzy grupy:

1. liczby pseudopierwsze (siedemdziesiąt prac: [2, 3, 6, 14, 15, 18–25, 27–34, 36–38, 40–55, 57, 59–66, 68, 72, 77–94, 96] i książka [56]),
2. liczby Lucasa i Lehmera (dwanaście prac: [4, 8–11, 13, 16, 17, 39, 70, 71, 95]),
3. równania diofantyczne (trzynaście prac: [1, 5, 7, 12, 26, 35, 67, 69, 70, 73–76]),

przy czym praca [70] występuje w grupach 2 i 3.

Liczby pseudopierwsze są to takie liczby złożone n, że $n|2^n - 2$. Pierwszy przykład liczby pseudopierwszej, $n = 341$, podał Sarrus w 1819 roku (zob. [C3, str. 92]), a Jeans dowiódł w 1898 roku, że takich liczb jest nieskończenie wiele (zob. [C3, str. 93; 86]). *Liczby pseudopierwsze dla danej liczby całkowitej a* to są takie liczby złożone n, że $n|a^n - a$. *Liczby bezwzględnie pseudopierwsze* lub, obecnie częściej używany termin, *liczby Carmichaela*, są to takie liczby złożone n, że $n|a^n - a$ dla każdego całkowitego a. Pierwszy przykład takiej liczby, $n = 561$, podał Carmichael w 1912 roku (zob. [C3, str. 94]), a dowód, że takich liczb jest nieskończenie wiele, podali Alford, Granville i Pomerance w [C2] z 1994 roku. Liczby te mają znaczenie w kryptologii, które zostało teoretycznie zmniejszone przez odkrycie w 2004 roku w pracy Agrawala, Kayala i Saxena [C1], że sprawdzenie, czy liczba n jest pierwsza, wymaga czasu $O((\log n)^{12})$ (zob. Pomerance [C7]).

Liczby silnie pseudopierwsze dla danej liczby całkowitej a są to takie liczby złożone nieparzyste n, że $n-1=2^s d$, $(2,d)=1$, $a^d \equiv 1 \pmod n$ lub dla pewnego całkowitego r zachodzą warunki $0 \leqslant r < s$ i $a^{2^r d} \equiv -1 \pmod n$.

Liczby Lucasa to są wyrazy ciągu $U_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, przy czym $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - Px + Q$, P i Q całkowite i $D = P^2 - 4Q \neq 0$. *Liczby n pseudopierwsze dla ciągu Lucasa* U_n to są takie liczby złożone n, że $n|U_{n-(D|n)}$, przy czym $(D|n)$ jest symbolem Kroneckera.

Liczby Lehmera, stanowiące uogólnienie liczb Lucasa, są to wyrazy ciągu $P_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^{(n,2)}-\beta^{(n,2)}}$, przy czym $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - L^{1/2}x + M$, przy czym $L > 0$, M całkowite i $K = L - 4M \neq 0$. *Liczby pseudopierwsze dla ciągu Lehmera* P_n to są takie liczby złożone nieparzyste n, że $n|P_{n-(KL|n)}$, przy czym $(KL|n)$ jest symbolem Jacobiego. *Liczby silnie pseudopierwsze* dla ciągu Lehmera $P_n(\alpha,\beta)$ są to takie liczby złożone n, że $n-(KL|n) = 2^s d$, $(d,2)=1$ i $P_d(\alpha,\beta) \equiv 0 \pmod n$ lub $\frac{\alpha^d+\beta^d}{\alpha+\beta} \equiv 0 \pmod n$, lub dla pewnego całkowitego r zachodzą warunki $0 < r < s$, $\alpha^{2^r d} + \beta^{2^r d} \equiv 0 \pmod n$.

Po tym wstępie – do pojęć w nim wprowadzonych będziemy się dalej odwoływać – przechodzimy do omówienia wyżej wymienionych grup prac Rotkiewicza.

§ 1.

W [19] autor dowiódł analogonu twierdzenia Dirichleta o postępie arytmetycznym: *dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c i d, przy czym $c > 0$ i $(c,d)=1$, istnieje nieskończenie wiele takich liczb złożonych n, że $n|a^{n-1} - b^{n-1}$, $n \equiv d \pmod c$*.[1] Dla c będącego liczbą pierwszą lub $c \leqslant 3$, $b = 1$ można zastąpić założenie $(c,d)=1$ przez $(a,c)=1$ (zob. [57]).[2] Następnie w [47] opublikował bardziej elementarny dowód poprzedniego wyniku i zastosował go w pracy [48] wspólnej z Halberstamem do dowodu następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1.1. *Niech a i b będą liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, $b < a$. Dla każdego $D > 0$ i $x > x_0(a,D)$ istnieje co najmniej jedna liczba pseudopierwsza $P \equiv b \pmod a$, spełniająca warunek $x < P < x \exp(\frac{\log x}{(\log\log x)^D})$.*

W [23] Rotkiewicz wyprowadził z twierdzenia z [19] m.in. następujący wniosek, który podaję w równoważnym sformułowaniu.

---

[1] Szczególne przypadki rozważane były w [18, 21, 22, 25, 45].

[2] Szczególne przypadki można znaleźć w [3, 6, 14, 91], zastąpienie $a^{n-1} - b^{n-1}$ przez $a^n b - ab^n$ w [3, 79, 84].

Wniosek. *Jeżeli $q_1 < q_2 < \cdots$ jest ciągiem rosnącym wszystkich liczb pseudopierwszych, to*

$$\liminf_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{q_n - q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n+1} - q_n}\Big) = 0.$$

Z twierdzenia udowodnionego w [48] wynika, że dla każdego $\epsilon > 0$ i $x > x_0(\epsilon)$ istnieje liczba pseudopierwsza między x i $x^{1+\epsilon}$ (zob. [38]) oraz że dla każdego D i $x > x_0(D)$ liczba $P(x)$ liczb pseudopierwszych mniejszych lub równych x jest co najmniej $(\log x)(\log\log x)^D$.[3]

W [55] znajduje się wynik pracy [19] udowodniony dla liczb pseudopierwszych ze względu na ciągi Lehmera z $K > 0$ (szczególny przypadek dla ciągu Fibonacciego z [72]). W [52] Rotkiewicz wyprowadził oszacowanie dla najmniejszej liczby pseudopierwszej w postępie arytmetycznym $cx + d$, przy czym $c > d > 0$, $(c, d) = 1$. W [68] znajduje się podobny wynik, jak w [55] dla liczb silnie pseudopierwszych ze względu na ciąg Lehmera z $K > 0$, w [78] dla $K < 0$.[4]

W [80] Rotkiewicz dowiódł m.in. następujące twierdzenie.[5]

Twierdzenie 1.2. *Niech $ax^2 + bxy + cy^2$ będzie pierwotną formą kwadratową (dodatnią lub nieokreśloną) z wyróżnikiem podstawowym $d = b^2 - 4ac$ i należącą do rodzaju głównego. Jeżeli α, β w definicji ciągu Lucasa $U_n(\alpha, \beta)$ są różne od 0, $(P, Q) = 1$, $\langle P, Q\rangle \neq \langle 1, 1\rangle$ i $2 \nmid d$ lub $2|d$ i $2|\alpha\beta$, to istnieje nieskończenie wiele liczb pseudopierwszych dla ciągu $U_n(\alpha, \beta)$ postaci $ax^2 + bxy + cy^2$.*

Wiadomo, że istnieją dowolnie długie ciągi arytmetyczne złożone z liczb pierwszych. Rotkiewicz udowodnił w [63], że istnieje nieskończenie wiele ciągów arytmetycznych złożonych z $k = 4$ liczb pseudopierwszych (w [33; 56, str. 61–74; 64; 83; 93] znajdują się podobne wyniki dla $k = 3$). Dla $k = 5$ problem jest otwarty, a w [56, str. 66] podane są jedyne dwa ciągi arytmetyczne pięciu liczb pseudopierwszych mniejszych niż 10^8. Znaczące wyniki przedstawione w książce [56] były otrzymane w pracach badawczych lub zostały wzmiankowane wcześniej. Jednakże zawiera ona listę pięćdziesięciu ośmiu otwartych problemów (problemy 22–24, 42 zostały później rozwiązane) oraz listę dwudziestu przypuszczeń postawionych najczęściej przez autora.

[3] Słabszy wynik został udowodniony w książce [56], znacznie mocniejszy wynika z pracy Harmana [C4].

[4] Szczególny przypadek udowodniono w [60], pewną zaś modyfikację w [88].

[5] Szczególny przypadek można znaleźć w [28], oszacowanie w książce [56, str. 92–110], a pewne uogólnienie w [89].

Na tym kończą się podobieństwa liczb pierwszych i pseudopierwszych. Takie liczby pseudopierwsze n, że nk jest również liczbą pseudopierwszą (k ustalone) są rozpatrywane w [27] (liczba $k = 23$ jest najmniejszą, przy której istnieją).

W [46] autor sformułował hipotezę H_1, przypominającą hipotezę H niżej podpisanego, ale istotnie różną.

Hipoteza H_1. Jeżeli $f_1, f_2, \dots, f_s$ są wielomianami o współczynnikach całkowitych i najwyższym współczynniku dodatnim, spełniającymi warunki $(f_i, f_j) = 1$ dla $i \neq j$ oraz $f_1(x)f_2(x)\dots f_s(x)$ nie ma dzielników stałych większych niż 1, to istnieje nieskończenie wiele naturalnych x, dla których $f_r(x)$ $(1 \leqslant r \leqslant s)$ są wszystkie pseudopierwsze.

Wielomiany f_r mogą być przywiedlne i takie przypadki są rozpatrywane w [30–32; 41; 53; 56, str. 75–78; 59]. Zgodnie z H_1 istnieją dowolnie długie ciągi arytmetyczne i geometryczne (zob. [34; 56, str. 79–88]), złożone z liczb pseudopierwszych. Również inne przypadki z $s > 2$ są rozpatrywane w [43].

Liczby pseudopierwsze złożone dokładnie z s czynników pierwszych i liczby pseudopierwsze o szczególnych własnościach w pracach [2; 20; 24; 29; 36; 37; 40; 42; 44; 49; 51; 56, str. 89–91; 61; 81; 92; 94].

§ 2.

Do tej grupy zaliczyliśmy również prace o $a^n \pm b^n$, gdzie a, b całkowite, które nie są na ogół liczbami Lucasa lub Lehmera, ale są z nimi ściśle związane. Jest w tej grupie nowy dowód (zob. [4]) twierdzenia Zsigmondy'ego z 1892 roku o dzielnikach pierwotnych, odkrytego ponownie w 1904 roku przez Birkhoffa i Vandivera (zob. [C3, str. 386 i 388]). Z tego twierdzenia wyprowadził Rotkiewicz podzielność $n^{\sigma(n)/2} | \phi(a^n - b^n)$ w [11], a także istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych postaci $nk + 1$ (n ustalone) w [8].

Udowodnił, że liczby $\frac{(4k+1)^{4k+1}-1}{4k}$ i $\frac{(4k+3)^{4k+3}+1}{4k+4}$ są złożone (zob. [9]), co zostało następnie uogólnione przez autora artykułu na $a^n - b^n$ (zob. [C8]). Uogólnienie na ciągi Lucasa z $M > 0$ i $Q > 0$ [13] zostało rozszerzone na ciągi Lehmera z M i K dowolnego znaku (zob. [C9; C10; C11, str. 1046–1065 – wersja poprawiona]). [39] zawiera dowód, że dla dowolnego całkowitego $a > 1$ istnieje nieskończenie wiele takich naturalnych n, że $n | a^n + 1$.

[70] zawiera najczęściej cytowany (dziewiętnaście razy do 2016 roku) następujący wynik Rotkiewicza.

Twierdzenie 2.1. *Dla dowolnych liczb całkowitych L i M, przy $L > 0$, $M > 0$, $k > 0$, mamy*

$$\left(\frac{P_n}{P_m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right), \quad gdy\ 4|L, \quad M \equiv 1 \pmod 4, \quad \left(\frac{L}{M}\right) = 1;$$
$$\left(\frac{P_n}{P_m}\right) = 1, \quad gdy\ 4|L, \quad M \equiv -1 \pmod 4, \quad \left(\frac{L}{M}\right) = 1;$$
$$\left(\frac{P_n}{P_m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right), \quad gdy\ 4|M, \quad L \equiv -1 \pmod 4, \quad \left(\frac{M}{L}\right) = 1;$$
$$\left(\frac{P_n}{P_m}\right) = 1, \quad gdy\ 4|M, \quad L \equiv 1 \pmod 4, \quad \left(\frac{M}{L}\right) = 1;$$
$$\left(\frac{P_n}{P_m}\right) = (-1)^{\lambda}, \quad gdy\ 2\|M, \quad L \equiv 1 \pmod 4, \quad \left(\frac{M}{L}\right) = 1,$$

przy czym λ jest liczbą ogniw w rozwinięciu łańcuchowym normalnym

$$\frac{n}{m} = a_1 + \cfrac{1}{a_2} + \cdots + \cfrac{1}{a_\lambda}.$$

(Jest to niepełne twierdzenie 2 z [70], w twierdzeniu 1 i w lemacie 2 brak założenia, że $(L, M) = 1$).

W [71] autor dowiódł istnienia nieskończenie wielu takich liczb naturalnych n, że $n|2^{n-2} - 1$. Odpowiednie twierdzenie dla podzielności $n|a^{n-k} - b^{n-k}$ udowodnił McDaniel w [C6].

§ 3.

W [35] autorzy udowodnili, że równanie $2^x - xy = x$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, w którym x i y są pierwsze, żadnego rozwiązania, w którym x jest złożone, a y pierwsze, i nieskończenie wiele rozwiązań, w których y jest złożone.

W [69] autor wykazał, że równanie $x^p + y^p = z^2$ nie ma takich rozwiązań całkowitych, że $p|z$, $2 \nmid z$, lub $p \nmid z$, $2|z$.

Z twierdzenia 2.1 przytoczonego wyżej autor [70] wywnioskował o niemożliwości równań diofantycznych $P_n(\alpha, \beta) = \square$ i $P_n(\alpha, \beta) = n\square$ pod pewnymi warunkami na α, β i n, otrzymując nowe dowody twierdzeń Ko z [C5] i Terjaniana z [C13]. Użyta przez niego metoda znana jest w literaturze jako metoda Ko–Terjaniana–Rotkiewicza [C12].

Spis publikacji Andrzeja Rotkiewicza recenzowanych w czasopismach referencyjnych (*Mathematical Reviews Database, Zentralblatt MATH*)[6]

[1] *Sur l'équation* $x^z - y^t = a^t$, *où* $|x - y| = a$, Ann. Polon. Math. 2 (1956), 7–8.

[2] *Sur les nombres composés n que divisent* $a^{n-1} - b^{n-1}$, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 8 (1959), 115–116.

[3] *Sur les nombres pairs n pour lesquels les nombres* $a^n b - ab^n$, *respectivement* $a^{n-1} - b^{n-1}$, *sont divisibles par n*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 8 (1959), 341–342.

[4] *Elementarny dowód istnienia dzielnika pierwotnego*, Prace Mat. 4 (1960), 21–28.

[5] *Sur le problème de Catalan*, Elem. Math. 15 (1960), 121–124.

[6] *Sur les nombres pairs n qui divisent* $(a+2)^{n-1} - a^{n-1}$, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 9 (1960), 78–80.

[7] *Une remarque sur le dernier théorème de Fermat*, Mathesis 69 (1960), 135–140.

[8] *Démonstration arithmétique de l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme* $nk + 1$, Enseignement Math. (2) 7 (1961), 277–280 (1962).

[9] *Liczby postaci* $\frac{(4k+1)^{4k+1}-1}{4k}$, $\frac{(4k+3)^{4k+3}+1}{4k+4}$, Prace Mat. 5 (1961), 95–99.

[10] *O własnościach wyrażenia* $a^n \pm b^n$, Prace Mat. 6 (1961), 1–20.

[11] *On the numbers* $\phi(a^n \pm b^n)$, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 419–421.

[12] *Sur le probléme de Catalan. II*, Elem. Math. 16 (1961), 25–27.

[13] *On Lucas numbers with two intrinsic prime divisors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 10 (1962), 229–232.

[14] *Sur les nombres premiers p et q tels que* $pq|2^{pq} - 2$, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 11 (1962), 280–282.

[15] *Sur quelques généralisations des nombres pseudopremiers*, Colloq. Math. 9 (1962), 109–113.

[16] *Remarque sur les nombres parfaits pairs de la forme* $a^n \pm b^n$, Elem. Math. 18 (1963), 76–78.

[17] *Sur les chiffres initiaux et finals des nombres* a^n *et* $a^n \pm b^n$, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 12 (1963), 150–154.

[18] *Sur les diviseurs composés des nombres* $a^n - b^n$, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 32 (1963), 191–195.

[19] *Sur les nombres composés n de la forme* $cx + d$ *pour lesquels* $n|a^{n-1} - b^{n-1}$, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 32 (1963), 823–829.

[20] *Sur les nombres composés tels que* $n|2^n - 2$ *et* $n \nmid 3^n - 3$, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 15 (1963), 7–11.

[21] *Sur les nombres pseudopremiers de la forme* $ax + b$, C. R. Acad. Sci. Paris 257 (1963), 2601–2604.

[6] Redakcja *Wiadomości Matematycznych*, zmieniając układ publikacji przyjęty przez A. Rotkiewicza, uporządkowała publikacje w porządku chronologicznym, a w ramach jednego roku – alfabetycznie według tytułów.

[22] *Sur les nombres psuedopremiers relativement à un nombre naturel a contenus dans les progressions arithmétiques*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 32 (1963), 456–458.
[23] *Quelques conséquences de l'existence d'une infinité des nombres pseudopremiers de la forme* $ax + b$, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 4 (18) (1964), 139–140.
[24] *Remarque sur un théorème de F. Proth*, Mat. Vesnik 1 (16) (1964), 244–245.
[25] *Sur les formules donnant des nombres pseudopremiers*, Colloq. Math. 12 (1964), 69–72.
[26] *Sur les nombres a la fois triangulaires, carrés et pentagonaux*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 33 (1964), 518–519.
[27] *Sur les nombres naturels n et k tels que les nombres n et nk sont à la fois pseudopremiers*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 36 (1964), 816–818.
[28] *Sur les nombres pseudopremiers de la forme* $ax^2 + bxy + cy^2$, C. R. Acad. Sci. Paris 258 (1964), 3617–3620 (współautor: A. Schinzel).
[29] *Sur les nombres pseudopremiers n tels que* $n|2^{(n-1)/k} - 1$, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 13 (1964), 154–156.
[30] *Sur les nombres pseudopremiers pentagonaux*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 33 (1964), 261–263.
[31] *Sur les nombres pseudopremiers triangulaires*, Elem. Math. 19 (1964), 82–83.
[32] *Sur les polynômes en x qui pour une infinité de nombres naturels x donnent des nombres pseudopremiers*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 36 (1964), 136–140.
[33] *Sur les progressions arithmétiques et géométriques formées de trois nombres pseudopremiers distincts*, Acta Arith. 10 (1964), 325–328.
[34] *Sur les progressions géométriques formées de k nombres pseudopremiers distincts*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 13 (1964), 369–372.
[35] *Sur l'équation diophantienne* $2^x - xy = 2$, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 4 (18) (1964), 135–137 (współautor: W. Sierpiński).
[36] *Une formule explicite pour un nombre pseudopremier par rapport à un nombre entier donné* $a > 1$, Elem. Math. 19 (1964), 36.
[37] *Une généralisation d'un théorème de Cipolla*, Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Društvo Mat. Fiz. Hrvatske 19 (1964), 187–188.
[38] *Les intervalles contenants les nombres pseudopremiers*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 14 (1965), 278–280.
[39] *O podzielności liczby* $a^n + 1$ *przez n*, Wiadom. Mat. (2) 8 (1965), 141–144 (1965).
[40] *Sur les nombres de Mersenne dépourvus de diviseurs carrés et sur les nombres naturels n, tels que* $n^2|2^n - 2$, Mat. Vesnik 2 (17) (1965), 78–80.
[41] *Sur les nombres pseudopremiers carrés*, Elem. Math. 20 (1965), 39–40.
[42] *Sur les nombres pseudopremiers de la forme* $M_p M_q$, Elem. Math. 20 (1965), 108–109.
[43] *Sur les polynômes en x du premier degré qui, pour une infinité de valeurs de x donnent des nombres pseudopremiers*, Mat. Vesnik 2 (17) (1965), 157–161.
[44] *On pseudoprime numbers of the form* $M_p M_t$, Elem. Math. 21 (1966), 133–134 (współautor: A. Mąkowski).

[45] *Sur les nombres pseudopremiers de la forme* $nk + 1$, Elem. Math. 21 (1966), 32–33.
[46] *On pseudoprime numbers*, Publ. Math. Debrecen 14 (1967), 69–74.
[47] *On the pseudoprimes of the form* $ax + b$, Proc. Cambridge Philos. Soc. 63 (1967), 389–392.
[48] *A gap theorem for pseudoprimes in arithmetic progressions*, Acta Arith. 13 (1967/1968), 395–404 (współautor: H. Halberstam).
[49] *On the prime factors of the number* $2^{p-1} - 1$, Glasgow Math. J. 9 (1968), 83–86.
[50] *On arithmetical progressions formed by k different pseudoprimes*, J. Math. Sci. 4 (1969), 5–10.
[51] *On pseudoprime numbers of special form*, Colloq. Math. 20 (1969), 269–271 (współautor: A. Mąkowski).
[52] *On a problem of W. Sierpiński*, Elem. Math. 27 (1972), 83–85.
[53] *On some problems of W. Sierpiński*, Acta Arith. 21 (1972), 251–259.
[54] *On the number of pseudoprimes* $\leqslant x$, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Math. Fiz. 381-409 (1972), 43–45.
[55] *On the pseudoprimes of the form* $ax + b$ *with respect to the sequence of Lehmer*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20 (1972), 349–354.
[56] *Pseudoprime numbers and their generalizations*, Student Association of the Faculty of Sciencies, University of Novi Sad, Novi Sad 1972.
[57] *Un problème sur les nombres pseudo-premiers*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **75**=Indag. Math. 34 (1972), 86–91.
[58] *W. Sierpiński's works on the theory of numbers*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 21 (1972), 5–24.
[59] *On pyramidal numbers of order* 4, Elem. Math. 28 (1973), 14–16.
[60] *On the pseudoprimes with respect to the Lucas sequences*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 21 (1973), 793–797.
[61] *On a theorem of Cipolla*, Elem. Math. 30 (1975), nr 6, 128–129 (współautor: R. Wasén).
[62] *On a number theoretical series*, Publ. Math. Debrecen 26 (1979), nr 1-2, 1–4 (współautor: R. Wasén).
[63] *The solution of W. Sierpiński's problem*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 28 (1979), nr 1, 62–64.
[64] *Arithmetical progressions formed from three different Euler pseudoprimes for the odd base* α, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 29 (1980), nr 3, 420–426 (1981).
[65] *Lehmer's numbers*, Acta Arith. 36 (1980), nr 3, 203–217 (współautor: R. Wasén).
[66] *On strong pseudoprimes in arithmetic progressions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 29 (1980), nr 3, 316–321 (współautor: A. J. van der Poorten).
[67] *On Fermat's equation with exponent* $2p$, Colloq. Math. 45 (1981), nr 1, 101–102.
[68] *On Euler Lehmer pseudoprimes and strong Lehmer pseudoprimes with parameters L, Q in arithmetic progressions*, Math. Comp. 39 (1982), nr 159, 239–247.
[69] *On the equation* $x^p + y^p = z^2$, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 30 (1982), nr 5-6, 211–214.

[70] *Applications of Jacobi's symbol to Lehmer's numbers*, Acta Arith. 42 (1983), nr 2, 163–187.
[71] *On the congruence* $2^{n-2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n)$, Math. Comp. 43 (1984), nr 167, 271–272.
[72] *Problems on Fibonacci numbers and their generalizations*, Fibonacci numbers and their applications (Patras, 1984), Math. Appl., t. 28, Reidel, Dordrecht, 1986, 241–255.
[73] *Note on the Diophantine equation* $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = y^m$, Elem. Math. 42 (1987), nr 3, 76.
[74] *On the Diophantine equation* $x^p + y^{2p} = z^2$, Colloq. Math. 53 (1987), nr 1, 147–153 (współautor: A. Schinzel).
[75] *On the Diophantine equation* $1 + p^{\alpha_1} + p^{\alpha_2} + \cdots + p^{\alpha_k} = y^2$, Number theory, Vol. II (Budapest, 1987), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, t. 51, North-Holland, Amsterdam, 1990, 917–937 (współautor: W. Złotkowski).
[76] *On the Diophantine equation* $x^{2p} + y^{2p} = z^p$, Colloq. Math. 62 (1991), nr 1, 15–19.
[77] *Arithmetical progressions formed by k different Lehmer pseudoprimes*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 43 (1994), nr 3, 391–402 (1995).
[78] *On strong Lehmer pseudoprimes in the case of negative discriminant in arithmetic progressions*, Acta Arith. 68 (1994), nr 2, 145–151.
[79] *On even pseudoprimes*, Fibonacci Quart. 33 (1995), nr 2, 123–125 (współautor: K. Ziemak).
[80] *On Lucas pseudoprimes of the form* $ax^2 + bxy + cy^2$, Applications of Fibonacci numbers, Vol. 6 (Pullman, WA, 1994), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, 409–421.
[81] *On the theorem of Wójcik*, Glasgow Math. J. 38 (1996), nr 2, 157–162.
[82] *Arithmetical progressions formed by Lucas pseudoprimes*, Number theory (Eger, 1996), de Gruyter, Berlin, 1998, 465–472.
[83] *There are infinitely many arithmetical progressions formed by three different Fibonacci pseudoprimes*, Applications of Fibonacci numbers, Vol. 7 (Graz, 1996), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, 327–332.
[84] *Periodic sequences of pseudoprimes connected with Carmichael numbers and the least period of the function* l_x^C, Acta Arith. 91 (1999), nr 1, 75–83.
[85] *Solved and unsolved problems on pseudoprime numbers and their generalizations*, Applications of Fibonacci numbers, Vol. 8 (Rochester, NY, 1998), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 293–306.
[86] *Arithmetic progressions formed by pseudoprimes*, Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis 8 (2000), nr 1, 61–74.
[87] *Lucas pseudoprimes*, Funct. Approx. Comment. Math. 28 (2000), 97–104 (Dedicated to Włodzimierz Staś on the occasion of his 75th birthday).
[88] *On Lucas pseudoprimes with a prescribed value of the Jacobi symbol*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 48 (2000), nr 1, 77–80 (współautor: A. Schinzel).
[89] *On Lucas pseudoprimes of the form* $ax^2 + bxy + cy^2$ *in arithmetic progression* $AX + B$ *with a prescribed value of the Jacobi symbol*, Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis 10 (2002), nr 1, 103–109.

[90] *Lucas and Frobenius pseudoprimes*, Ann. Math. Sil. 17 (2003), 17–39.
[91] *On a problem of H. J. A. Duparc*, Tatra Mt. Math. Publ. 32 (2005), 15–32 (współautor: A. Paszkiewicz).
[92] *On pseudoprimes having special forms and a solution of K. Szymiczek's problem*, Acta Math. Univ. Ostrav. 13 (2005), nr 1, 57–71.
[93] *On Lucas numbers, Lucas pseudoprimes and a number theoretical series involving Lucas pseudoprimes and Carmichael numbers*, Ann. Math. Sil. 21 (2007), 49–60 (2008).
[94] *On pseudoprimes of the form $a^n - a$*, Proceedings of the Eleventh International Conference on Fibonacci Numbers and their Applications, 2009, 191–197 (współautor: A. Paszkiewicz).
[95] *On Jacobi's symbol $(\frac{P_n}{P_m})$ of Lehmer's numbers in the case of negative discriminant*, Congr. Numer. 201 (2010), 289–295.
[96] *On Lucas cyclotomic pseudoprimes having special forms*, Congr. Numer. 200 (2010), 239–244.

Spis publikacji A. Rotkiewicza nierecenzowanych w czasopismach referencyjnych

[A1] *Uwagi o rozwiązywaniu równań trygonometrycznych*, Matematyka 12 (1959), nr 3, 99–102.
[A2] *Rozwiązanie zadania nr 73 z podręcznika W. Janowskiego dla klasy II LO*, Matematyka 26 (1973), nr 4, 253–255 (współautor: M. Mancewicz).
[A3] *O „wielkim twierdzeniu Fermata"*, Delta 10 (1974), 1–3.
[A4] *Zagadnienie Catalana*, Delta 8 (1975), 12–13.
[A5] *Uwagi do artykułu „O rozkładzie wyrażenia $a^n \pm b^n$"*, Matematyka 30 (1977), nr 2, 71–73.
[A6] *O największej znanej liczbie pierwszej*, Delta 2 (1977), 6–7.
[A7] *O wielkich problemach teorii liczb w sposób elementarny*, [w:] Szkoła dydaktyki matematyki w Karpaczu 1977, IKNiBO, Warszawa 1979, 83–91.
[A8] *Profesor Sierpiński i rok 1920*, Biuletyn Informacyjny NSZZ „Solidarność", Region Białystok 37 (12.08.1981).
[A9] *Jeszcze raz o równaniu $x^k + y^k = z^k$*, Matematyka 36 (1983), 256.
[A10] *Wybrakowany klucz*, Matematyka 45 (2002), 20–22.

Prace cytowane

[C1] M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena, *PRIMES is in P*, Ann. of Math. 160 (2004), nr 2, 781–793.

[C2] W. R. Alford, A. Granville, C. Pomerance, *There are infinitely many Carmichael numbers*, Ann. of Math. (2) 139 (1994), nr 3, 703–722.
[C3] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, t. I, Reprint Chelsea, New York 1952.
[C4] G. Harman, *Watt's mean value theorem and Carmichael numbers*, Int. J. Number Theory 4 (2008), nr 2, 241–248.
[C5] C. Ko, *On the Diophantine equation* $x^2 = y^n + 1$, $xy \neq 0$, Scientia Sin. 14 (1965), 457–460.
[C6] W. L. McDaniel, *The existence of solutions of the generalized pseudoprime congruence* $a^{f(n)} \equiv b^{f(n)} \pmod{n}$, Colloq. Math. 59 (1990), 177–190.
[C7] C. Pomerance, *Primality testing: variations on a theme of Lucas*, Congr. Numer. 201 (2010), 301–312.
[C8] A. Schinzel, *On primitive prime factors of* $a^n - b^n$, Proc. Cambridge Philos. Soc. 58 (1962), 555–562.
[C9] A. Schinzel, *On primitive prime factors of Lehmer numbers. I*, Acta Arith. 8 (1962/1963), 213–223.
[C10] A. Schinzel, *On primitive prime factors of Lehmer numbers. II*, Acta Arith. 8 (1962/1963), 251–257.
[C11] A. Schinzel, *Selecta*, Heritage of European Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich 2007 (Elementary, analytic and geometric number theory, Henryk Iwaniec, Władysław Narkiewicz, Jerzy Urbanowicz (red.))
[C12] Q. Sun, *Some results on Diophantine equations*, Number theory and its applications in China, Contemp. Math., t. 77, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, 113–126.
[C13] G. Terjanian, *Sur l'équation* $x^{2p} + y^{2p} = z^{2p}$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B 285 (1977), A973–A975.

Andrzej Schinzel
Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk
schinzel@impan.pl



Teoria Chaosu (fot. Artur Magdziarz).
Pierwsza nagroda w konkursie Matematyka w obiektywie w 2017 roku (http://mwo.usz.edu.pl)

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 303–329
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Lech Maligranda (Luleå), Jarosław G. Prytuła (Lwów)

Uniwersytet we Lwowie w latach 1939–1941. Matematyka, fizyka i astronomia

1. Wstęp

Szukając danych o Mironie Zaryckim, przy pisaniu naszej wspólnej pracy [16], drugi z autorów znalazł w 2012 roku w dokumentacji [4] spis artykułów przeznaczonych do *Zapisków Wydziału Fizyczno-Matematycznego* (krótko *Zapisków WFM*). Wkrótce potem znalazł się też drugi spis (późniejszy), który zawierał dokładny opis zawartości osiemnastu artykułów na stu pięćdziesięciu ośmiu stronach do pierwszego tomu *Zapisków WFM* (łącznie z numerami stron).

To niespodziewane znalezisko stało się motywacją do bliższego zajęcia się tematem, planujemy opublikować także spis znalezionych artykułów oraz informacje o matematykach, fizykach i astronomach tego okresu związanych z Uniwersytetem Lwowskim w latach 1939–1941.

Prace historyczne dotyczące każdego uniwersytetu zwykle omawiają bardzo pobieżnie matematykę, fizykę i astronomię – zob. na przykład książkę [9]. Z tego też powodu rozpoczniemy pierwszą część artykułu opisem Uniwersytetu Lwowskiego w szczególnym okresie lat 1939–1941 oraz wydziału związanego z matematyką, fizyką i astronomią. Wydział ten miał dwie nazwy: Wydział Matematyczno-Przyrodniczy (do listopada 1939 roku) i Wydział Fizyczno-Matematyczny (od 1 grudnia 1939 roku).

Po zajęciu miasta, najpierw przez wojska niemieckie, a następnie przez wojska radzieckie we wrześniu 1939 roku, Uniwersytet Jana Kazimierza we Lwowie (UJK) i Politechnika Lwowska (PL) zostały zamknięte. Wkrótce jednak uruchomiono na ich miejsce uniwersytet i politechnikę, lecz w zmodyfikowanej formie, już jako uczelnie radzieckie.

Przypomnijmy więc, że uniwersytet lwowski w omawianym okresie zmieniał nazwę trzy razy. W okresie od 8 listopada 1919 roku do października 1939 roku był to Uniwersytet Jana Kazimierza, by od 1 grudnia 1939 roku do stycznia 1940 roku nosić nazwę Lwowski Państwowy Uniwersytet ZSRR. Jednak już w styczniu 1940 roku przyjął nazwę Lwowski Państwowy Uniwersytet im. Iwana Franki[1] i pod tą nazwą funkcjonował do sierpnia 1941 roku, kiedy to został zamknięty przez Niemców. Politechnikę zaś przemianowano na Lwowski Instytut Politechniczny.

W trzeciej części tego artykułu zostaną podane szczegółowe losy dotyczące Wydziału Fizyczno-Matematycznego w tym okresie. Wszystko zostało opisane na podstawie dostępnych dokumentów, bądź opisu świadków wydarzeń tego okresu.

Niniejszy artykuł jest poszerzoną wersją odczytu *Wydział Fizyczno-Matematyczny Uniwersytetu Lwowskiego w latach 1919–1941* wygłoszonego na *XXX Konferencji z Historii Matematyki* w Będlewie (5–8 maja 2017).

2. Uniwersytet we Lwowie w latach 1939–1941

Przedwojenny Lwów był silnym ośrodkiem akademickim. Były tutaj cztery wyższe uczelnie: Uniwersytet Jana Kazimierza, Politechnika Lwowska, Akademia Handlu Zagranicznego oraz Akademia Medycyny Weterynaryjnej.

W przeddzień wybuchu wojny UJK składał się z pięciu wydziałów: Teologicznego, Prawa, Lekarskiego, Humanistycznego i Matematyczno-Przyrodniczego oraz stu czterech katedr. W 1939 roku studiowało na UJK ponad pięć tysięcy studentów, w tym na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym około siedmiuset, a pracowało kilkaset pracowników naukowych. W wielu dziedzinach uczeni lwowscy należeli do czołówki europejskiej. Do najbardziej znanych w świecie lwowskich szkół, oprócz matematycznej, należały zoologiczna z Józefem Nusbaumem-Hilarowiczem, którego następcą został Rudolf Weigl – wynalazca metody produkcji szczepionki przeciw tyfusowi plamistemu, zgłaszanemu do nagrody Nobla, antropologiczna z Janem Czekanowskim (rektor UJK w latach 1934–1936), filozoficzna z Kazimierzem Twardowskim (rektor UL w okresie 1914–1917) – twórcą lwowsko-warszawskiej szkoły filozoficznej i biochemiczna z Jakubem Parnasem. Z Uniwersytetem związanych było wielu pisarzy, poetów i polonistów, jak na przykład Tadeusz Boy-Żeleński (od października 1939 do lipca 1941 roku kierownik Katedry Historii Literatury UL), Jan Kasprowicz (od 1888 roku

[1] Iwan Franko (1856–1916), ukraiński pisarz, tłumacz, publicysta, uczony i działacz społeczno-polityczny.

we Lwowie, gdzie pracował m.in. w redakcjach *Kuriera Lwowskiego* i *Słowa Polskiego*, a w latach 1909–1925 profesor UJK i w roku akademickim 1921/1922 jego rektor), Juliusz Kleiner (w latach 1920–1939 profesor UJK i 1939–1941 UL) i Witold Taszycki (w latach 1929–1941 profesor UJK i 1944–1945 profesor UL).

Po wybuchu II wojny światowej, w dniu 12 września oddziały niemieckie wkroczyły do Lwowa. Jednak, ku zdziwieniu mieszkańców, 19 września wieczorem radzieckie czołgi dotarły do miasta zastępując oddziały niemieckie, które odstąpiły od oblężenia. Lwów skapitulował 22 września po południu. Jak wspomina Eugeniusz Rybka (zob. [28, str. 21]):

> Po południu 17 września miałem możność wysłuchania komunikatu radiowego z Moskwy. W komunikacie tym Mołotow złożył oświadczenie, że rząd polski nie panuje już nad sytuacją na terenie zamieszkałym przez Białorusinów i Ukraińców, co upoważnia Związek Radziecki do wkroczenia na wschodnią część Polski. Ostrzeliwanie Lwowa przez artylerię niemiecką ustało 21 września, a nazajutrz weszły do Lwowa wojska radzieckie. Najpierw wjechały czołgi, a pod wieczór weszła piechota. Znaleźliśmy się pod panowaniem radzieckim.

Inwazja Związku Radzieckiego na Polskę oraz wcielenie Kresów Południowo-Wschodnich do ZSRR, a dokładniej do Ukraińskiej SRR, tzn. pierwsza okupacja radziecka, trwała od 22 września 1939 roku do 27 czerwca 1941 roku.

We wrześniu 1939 roku Uniwersytet Jana Kazimierza we Lwowie i Politechnika Lwowska zostały zamknięte, ale zajęcia dydaktyczne z matematyki i fizyki na starszych latach trwały do grudnia, a początek sesji egzaminacyjnej zaplanowano na 15 grudnia 1939 roku. U Rybki czytamy (zob. [28, str. 22]):

> Z Kijowa przyjechał przedstawiciel partii Korniejczuk,[2] który zorganizował 28 września w Collegium Maximum Uniwersytetu mityng, na którym oświadczył nam, że oba narody, ukraiński i polski mają prawo do uczenia się we własnym języku, że każdy inteligent powinien pracować przy pomnażaniu kultury własnego narodu. Wypowiedział się też za tym, aby we Lwowie powstały dwa uniwersytety – polski i ukraiński.

Hugo Steinhaus wspominał w książce [29, str. 170]:

> [...] zapewnił nas pan Korniejczuk, że uniwersytet nasz pozostanie polski, a w razie potrzeby założy się we Lwowie drugi ukraiński. (...) Najciekawsze było dla mnie szerokie i beztroskie stanowisko sowieckich notablów wobec spraw uważanych za trudne. Język wykładowy może być polski, rosyjski, ukraiński, żydowski. To wszystko jedno. Prace naukowe będzie się publikować wagonami (dosłownie). Wszystkie przeszkody usunięte są za jednym zamachem. Przyj-

[2] Aleksander (Ołeksandr) Kornijczuk (1905–1972), ukraiński dramatopisarz i działacz komunistyczny, trzeci mąż Wandy Wasilewskiej.

> mować się będzie na uniwersytet wszystkich! Nauczanie jest bezpłatne. W razie braku miejsca założy się we Lwowie drugi, trzeci lub i czwarty uniwersytet. Koszty nie grają roli.

Z kolei Lanckorońska napisała (zob. [5, str. 76; 14, str. 23]):

> Tego samego dnia wieczorem Kornijczuk wygłosił drugą porywającą mowę, ale na spotkaniu z Ukraińcami. Opluwał „pańską Polskę" i obiecał wykluczenie elementów polskich z Uniwersytetu Lwowskiego.

Na wyżej wspomnianym zebraniu komendant Lwowa (a według ówczesnej prasy sekretarz Centralnego Komitetu Leninowskiego Komunistycznego Związku Młodzieży Ukrainy, J. O. Chomenko stwierdził m.in., że „[u]niwersytet odtąd służyć będzie kształceniu nie panów, lecz ludu".

Dnia 18 października 1939 roku zmieniono wybranego demokratycznie rektora Uniwersytetu Jana Kazimierza profesora Romana Longchams de Bériera, najpierw na trzydziestosiedmioletniego Ukraińca Michajło Iwanowicza Marczenkę – zwolennika pełnej ukrainizacji uniwersytetu, z antypolskimi fobiami – by 23 września 1940 roku zastąpić go innym Ukraińcem, Hryhorijem Stepanowyczem Byczenką.[3] W listopadzie 1939 roku uruchomiono na miejsce UJK uniwersytet ukraiński i nastąpiła sowietyzacja lwowskich wyższych uczelni. W czasopiśmie *Wolna Ukraina* z 6 października 1939 roku G. Antoniuk stwierdził, że „uniwersytet ukraiński we Lwowie musi stać się potężnym ośrodkiem nauki, jako wzór dla obecnego uniwersytetu polskiego, i w jakiś sposób od metod naukowych właściwych burżuazyjnemu społeczeństwu przechodzić na nowy światopogląd – światopogląd tych, którzy stworzyli wzorzec budowy nowego państwa jakim jest ZSRR" (zob. też [9, str. 170]).

---

[3] Michajło (Mychajło, Mykhailo) Iwanowicz Marczenko (Marchenko) (1902–1983), Grigorij (Hryhorij, Heorhij, Jurij) Stepanowicz Byczenko (1900–1942), historyk, kierownik Katedry Państw Kolonialnych i Podbitych. Krótkie ich życiorysy można znaleźć w książce Drausa [5, str. 76–77 i 81], a więcej szczegółów, zwłaszcza o Marczence, w książce Hnatiuk [9, Rozdział 4]. W niektórych źródłach znajdujemy informację, że Marczenko był partyjnym aparatczykiem bez tytułu naukowego (zob. [5, str. 76; 24, str. 580]), a w innych, że profesorem Uniwersytetu Kijowskiego (zob. [28, str. 22]). Z książki [9, str. 240] dowiadujemy się, że Marczenko w połowie października 1939 roku objął posadę rektora, będąc od 1937 roku do września 1939 roku kierownikiem sekcji Historii Feudalizmu w Instytucie Historii Akademii Nauk USRS w Kijowie. Faktycznie nie miał tytułu naukowego, gdyż w 1939 roku miał ukończyć doktorat *Porażka interwencji szlacheckiej Polski w 1664 roku* (zob. [9, str. 262]). Jednak dopiero w maju 1940 roku, jako rektor UL, obronił doktorat *Walka Rosji i Polski o Ukrainę w pierwszym dziesięcioleciu po przyłączeniu Ukrainy do Rosji, 1654–1664* (zob. [9, str. 251]). Habilitację z historii uzyskał w 1961 roku na Uniwersytecie Leningradzkim. Spis publikacji, jakie ukraińscy historycy poświęcili Marczence, znajdujemy w [9, str. 598–599].

W okresie od października do grudnia 1939 roku przeprowadzono reorganizację uniwersytetu według wzorów radzieckich. Określenie tych zmian mianem ukrainizacji lwowskich wyższych uczelni nie jest całkiem właściwe, gdyż czynnikiem sprawczym nie byli Ukraińcy, lecz władze ZSRR. We Lwowie mieliśmy więc ukrainizację w wydaniu sowieckim. Cechą charakterystyczną radzieckiej wersji ukrainizacji była fasadowość. Proces ten, jak głosiła sławetna formuła, był „narodowy w formie i socjalistyczny w treści". Dodajmy, że przebieg sowietyzacji był ściśle kontrolowany i reglamentowany przez Moskwę (zob. [12, str. 16]).

Językiem urzędowym stał się ukraiński, a od listopada 1939 roku przymusowym lektoratem języka ukraińskiego objęto profesorów i wykładowców (zob. [5, str. 76 i 78]). Jak pisze Popławski o Politechnice Lwowskiej (zob. [21, str. 275]):

> Wszyscy pracownicy byli obowiązani do uczęszczania na naukę języka rosyjskiego lub ukraińskiego (do wyboru) oraz historii Wszechzwiązkowej Partii Komunistycznej (bolszewików) w oddzielnych grupach: profesorów, docentów, asystentów, laborantów i personelu administracyjnego oraz pomocniczego.

Hnatiuk w swojej książce potwierdza powyższą tezę o kontroli radzieckiej, broniąc przy tym trochę rektora Marczenki (zob. [9, str. 282]):

> Wbrew opinii pamiętnikarzy polskich, sowiecki rektor starał się zapobiec totalnej czystce polskiej kadry. Tej prowadzonej przez NKWD nie mógł przeciwdziałać, ale starał się osłabić skutki polityki oświatowej – unifikacji z systemem sowieckim. Bardziej radykalnych działań, w tym zwolnienia polskich profesorów, żądał od niego w szczególności zastępca ludowego komisarza oświaty USRS Iwan Kirsa.

W maju 1940 roku zarzucono mu „niezadowalający stopień ukrainizacji uniwersytetu" i wytknięto prowadzenie wykładów w języku polskim, zobowiązując go do wyegzekwowania od nowego roku akademickiego wykładów po ukraińsku. W książce [9, str. 286] czytamy:

> Oficjalnym powodem zwolnienia Marczenki z funkcji rektora były uchybienia polegające na zbyt opieszałym wprowadzeniu języka ukraińskiego i zbyt małej liczbie studentów narodowości ukraińskiej.

Realizowano uchwały Zgromadzenia Ludowego z 28 października 1939 roku, przeprowadzając nacjonalizację fabryk, przedsiębiorstw przemysłowych, banków, sklepów i domów mieszkalnych. Rozpoczęto akcję usuwania ludności, przede wszystkim polskiej, z zajmowanych mieszkań i już w listopadzie 1939 roku przekazano różnym zakładom ponad tysiąc mieszkań dla przybyszów z ZSRR.

Dnia 29 listopada 1939 roku Prezydium Rady Najwyższej ZSRR przyjęło dekret, w myśl którego obywatele polscy zamieszkujący wschodnią połowę II Rzeczypospolitej, tzw. „zachodnie obwody Ukrainy i Białorusi", automatycznie stawali się obywatelami ZSRR. Wiosną 1940 roku przeprowadzono tak zwaną „paszportyzację", czyli przymus posiadania paszportów wewnętrznych ZSRR przez obywateli II RP, którzy w wyniku wojny znaleźli się na tamtych terenach. Wprowadzone nowe „paszporty" wydawane były na pobyt stały lub trzymiesięczny (zob. [19, str. 39]). Przez paszport należy tu oczywiście rozumieć wewnętrzny dowód osobisty, czyli dokument identyfikacyjny. Władze ogłosiły z dnia na dzień obowiązek wyrobienia sobie takiego dokumentu. Polacy podporządkowali się temu, gdyż nie mieli innego wyjścia. Odmowa była równoznaczna z deportacją i dlatego nie można było się nie zgodzić.

Dnia 1 grudnia 1939 roku Wszechzwiązkowy Komitet do Spraw Szkół Wyższych przy Radzie Komisarzy Ludowych ZSRR zmienił nazwę UJK na Lwowski Państwowy Uniwersytet ZSRR. Zachowano pięć wydziałów: Filologiczny, Historyczny, Przyrodniczy, Fizyczno-Matematyczny i Prawny, a likwidacji uległ Wydział Teologiczny, natomiast z Wydziału Lekarskiego utworzono Lwowski Państwowy Instytut Medycyny.

Oficjalnie, do wigilii 1939 roku, polska złotówka równała się radzieckiemu rublowi. Jednak 21 grudnia 1939 roku bez żadnego ostrzeżenia, w ciągu jednej nocy polska waluta została unieważniona. Nie przyjmowano jej i nie wymieniano na ruble. Olesiak wspomina (zob. [19, str. 39]):

> Przed samymi Świętami 21 grudnia, wydane zostało zarządzenie o unieważnieniu będącej do tego czasu w obiegu waluty polskiej – naiwnie nie przewidywaliśmy tego. Pamiętam, że na Wigilię u nas w domu rolę ryby odgrywało parę jaj w sosie cebulowym, zostaliśmy bowiem nagle pozbawieni pieniędzy.

Aby zgnębić Polaków, w nocy z 23 na 24 grudnia 1939 roku wprowadzono we Lwowie czas moskiewski, a na początku 1940 roku wprowadzono radziecki kalendarz, kasując wszystkie dotychczasowe święta i wprowadzając podział roku na sześciodniówki (wolne od pracy było 5 dni miesiąca: 6, 12, 18, 24 i 30). Sześciodniówka nie przetrwała długo, gdyż po niecałym roku powrócono do normalnego tygodnia z wolną niedzielą (zob. [8, str. 49]).

Dnia 3 stycznia 1940 roku uchwalono nadanie uniwersytetowi imienia Iwana Franki, a 8 stycznia 1940 roku nazwa ta została zatwierdzona przez Prezydium Rady Najwyższej Ukraińskiej SSR (RN USSR). Odtąd uniwersytet nosił nazwę Lwowskiego Państwowego Uniwersytetu im. Iwana Franki,[4] a politechnika już

[4] W dniu 11 października 1999 roku uniwersytet otrzymał status narodowego i przyjął nazwę Lwowski Uniwersytet Narodowy im. Iwana Franki.

od października 1939 roku – Lwowskiego Instytutu Politechnicznego. Rektor Marczenko przy podpisywaniu zarządzeń do września 1940 roku dodawał w nazwie uniwersytetu „ukraiński", choć nie było tego przymiotnika na pieczątce uniwersytetu.

Pisownię nazw ulic zmieniono na ukraińską, niekiedy zmieniono też same nazwy. Zniknęły polskie szyldy na sklepach i przedsiębiorstwach. Z kilkupokojowych mieszkań usuwano mieszkańców i albo pozwalano im zająć jeden pokój, albo musieli oni sami znaleźć sobie dach nad głową. Bo wtedy nie miało znaczenia, kto był właścicielem – mieszkaniec albo mógł dostać łaskawą zgodę na jeden pokój, albo szedł na ulicę.

Rybka wspomina (zob. [28, str. 23]):

> 3 stycznia 1940 roku w Collegium Maximum odbyło się ogólne zebranie pracowników Uniwersytetu, na którym uchwalono nazwanie Uniwersytetu imieniem Iwana Franko. Około 10 osób wstrzymało się od głosowania. Przewodniczący zebrania rektor Marczenko wezwał te osoby do złożenia oświadczenia, dlaczego nie oddały głosu. W odpowiedzi tylko jeden wstrzymujący się Polak, magister Adam Ostrowski wypowiedział się uzasadniając wstrzymaniem się od głosu tym, że w wypowiedzi Korniejczuka wyrażona została potrzeba istnienia we Lwowie dwóch uniwersytetów, polskiego i ukraińskiego. Spotkało się to z bardzo ostrą repliką Marczenki, który oświadczył, że we Lwowie może być tylko jeden uniwersytet, a mianowicie ukraiński.

Władze lwowskie w styczniu 1940 roku wydały polecenie, aby polscy profesorowie w ciągu tygodnia przeszli na język ukraiński. Stalin, po interwencji Wandy Wasilewskiej, wyraził zgodę na to, aby Polacy nieznający języka ukraińskiego mogli wykładać po polsku.

Zwolnienie rektora Marczenki 22 września 1940 roku przyjęto z ulgą, choć polityka rektora Byczenki nie różniła się od tej prowadzonej przez jego poprzednika. Dawna kadra profesorska uznała Marczenkę za skrajnie antypolskiego, natomiast jego następcę za osobę przychylną Polakom (zob. [9, str. 241]). Rektor Byczenko 5 marca 1941 roku ostrzegł profesurę polską, że jeśli do września 1941 roku nie przejdą na język ukraiński, to stracą pracę. Pomimo tych gróźb polscy nauczyciele akademiccy aż do roku 1941 prowadzili zajęcia po polsku (zob. [10, str. 131]). Na ogół odmowa wykładania w języku ukraińskim nie powodowała istotnych problemów. Niektórzy profesorowie uczęszczali na kursy języka ukraińskiego tylko po to, by mieć dowód nieznajomości tego języka.

Atmosfera jednak była ponura. Plagą były niekończące się spotkania i reorganizacje. Ponadto wszystkim groziły nieoczekiwane aresztowania, uwięzienia i wywózki. Dnia 10 lutego 1940 roku, w czasie największych mrozów, dokonano

pierwszej masowej deportacji na Syberię i na stepy Kazachstanu tzw. „wrogiego elementu", w tym około 70% Polaków. Kolejne dwie wielkie deportacje miały miejsce w nocy z 12 na 13 kwietnia i z 28 na 29 czerwca 1940 roku. Ostatnia, czwarta deportacja rozpoczęła się 22 maja i trwała do 20 czerwcu 1941 roku (zob. [5, str. 74]). Większość ludzi ze Lwowa zsyłano do Wschodniego Kazachstanu, a transporty z innych rejonów kierowano na Syberię i do Północnego Kazachstanu. Transport ten trwał od dwóch do sześciu tygodni!

Dnia 13 kwietnia 1940 roku wywieziono do Kazachstanu Helenę Kaczmarzową z jej dwiema córkami Krystyną i Zbysławą, prawdopodobnie z powodu donosu ukraińskiego dozorcy, który przekręcił słowo „adiunkt" na „adiutant" (zob. [15, str. 32]; pierwszy z autorów otrzymał osobiście tę informację od Krystyny, córki Kaczmarza). Mąż jej, matematyk, Stefan Kaczmarz po wybuchu II wojny światowej otrzymał 2 września 1939 roku przydział do Warszawy jako porucznik rezerwy. Następnego dnia wyjechał pociągiem w mundurze do Warszawy. Przed wyjazdem poprosił swojego dobrego kolegę Eugeniusza Rybkę, by ten się zaopiekował jego rodziną (zob. [15, str. 37]). Kaczmarz i Rybka byli przyjaciółmi z czasów Legionów Polskich. Rybka pisze (zob. [28, str. 24–25]):

> Kaczmarz był moim starym przyjacielem, postanowiłem więc w miarę możliwości spowodować powrót jego rodziny do Lwowa. Szukałem więc poparcia u wpływowych czynników uniwersyteckich, pisałem do Kukarina, wreszcie zainicjowałem napisanie odpowiedniej petycji do Lwowskiego Obkomu.

Listy do kancelarii Stalina i do Obkom KPU (Lwowskiego Obwodowego Komitetu Komunistycznej Partii Ukrainy), pisane po rosyjsku, z wyjaśnieniami o omyłkowej wywózce rodziny Kaczmarza (podkreślając, że Kaczmarz był wybitnym matematykiem lwowskim i nie był oficerem zawodowym, a do wojska został powołany jako oficer rezerwy) z prośbą o możliwość powrotu jego rodziny z Semipałatyńska, w imieniu zespołu matematyków, fizyków i astronomów lwowskich, profesorów Uniwersytetu i Instytutu Politechnicznego podpisali Banach, Mazur, Łomnicki, Rubinowicz i Rybka (zob. [15, str. 32]). Starania te odniosły skutek i 25 października 1940 roku Kaczmarzowa z córkami wróciła do Lwowa.

W sumie, w ciągu dwudziestu dwóch miesięcy radzieckiej okupacji, w wyniku masowych i brutalnych czterech deportacji na wschód trafiło ponad milion osób. Dokładna liczba (głównie kobiet i dzieci) nie jest znana. Ludzie żyli pod terrorem, w ciągłym strachu.

W 1940 roku była wyjątkowo mroźna zima, a transparenty informowały, że zaczęło się nowe, szczęśliwe życie pod przywództwem towarzysza Stalina. Stale dały się odczuć poważne trudności w zaopatrzeniu w podstawowe pro-

dukty. Pojawiły się kolejki – składnik życia i handlu radzieckiego, funkcjonującego w warunkach gospodarki niedoboru. Wprowadzono więc ograniczenia w ilości sprzedawanych jednej osobie artykułów. W niektórych sklepach w oknach wystawowych, zamiast towarów, stały jedynie portrety Stalina, Lenina i Mołotowa.

Banach pytany w 1940 roku, jak się czuje pod radziecką okupacją, odparł „przyzwyczaiłem się do życia pod Stryjem, to potrafię żyć i pod Ojcem". Stryj to miasteczko koło Lwowa, Ojcem w ZSRR nazywano Stalina.

Głównym organizatorem propagandy prosowieckiej i terroru intelektualnego we Lwowie była Wanda Wasilewska. Każdy pracownik uczelni musiał należeć do Związku Zawodowego Pracowników Uniwersytetu – „profspiłki", jednak wstąpienie do niego nie było łatwe. Nieprzyjęcie do Związku – a nie wszystkich starających się o to przyjęto – groziło utratą pracy, odmową wydania paszportu i deportacją. Można tu wspomnieć o pewnym oryginalnym zdarzeniu. Ada Halpern pracowała we Włoszech jako aktuariusz, tzn. matematyk ubezpieczeniowy, w *Assicurazioni Generali* i nie przyjęto jej do „profspiłki" na uniwersytecie, a zarzutem przeciwko niej było uważanie jej za „akcjonariusza" tej spółki (zob. [7, str. 15]).

Depolonizacja uniwersytetu wiodła nie tylko przez nową politykę kadrową, ale także przez politykę przyjęć na studia. Wprowadzono limity przyjęć i preferencje, co spowodowało odpływ polskich studentów z uczelni na rzecz Ukraińców i Żydów. Polska młodzież nie chciała studiować na uniwersytecie, gdzie odbywała się indoktrynacja ideologiczna, tzn. nauka powiązana z filozofią marksistowską, a dydaktyka z propagandą partyjną.

Na uniwersytecie około połowy zajęć nie było bezpośrednio związanych z programem studiów. Wśród nich były przedmioty ideologiczne, takie jak marksizm-leninizm, ekonomia polityczna, historia narodów ZSRR oraz język rosyjski, literatura ukraińska, wychowanie sportowe i przygotowanie wojskowe oraz – do wyboru – historia sztuki lub etnologia (zob. [10, str. 132]).

Rektorami innych radzieckich uczelni zostali Rosjanie bądź Ukraińcy. W sumie w roku akademickim 1940/1941 funkcjonowało we Lwowie osiem wyższych uczelni, kształcących około dziesięć tysięcy studentów. Wśród studentów prawie 46% stanowili Żydzi. Na Uniwersytecie wśród profesorów było pięćdziesięciu dwóch Polaków, dwudziestu dwóch Ukraińców i ośmiu Żydów. Na Politechnice pracowało sześćdziesięciu dziewięciu polskich profesorów i trzech ukraińskich (zob. [10, str. 130]).

Jedną z form integracji naukowej młodego Uniwersytetu Lwowskiego z ośrodkami naukowymi ZSRR były wyjazdy naukowe profesorów do Moskwy, Leningradu, Kijowa i Charkowa. Oficjalnie nazywano to pomocą dla zacofanych

naukowo środowisk polskich ze strony przodującej nauki radzieckiej. Wyjazdy te zapoczątkowane zostały w lecie 1940 roku.

Na przełomie sierpnia i września 1940 roku Wszechzwiązkowy Komitet do Spraw Szkół Wyższych zaprosił polskich uczonych z lwowskich uczelni do zwiedzenia Moskwy i jej placówek naukowych. Pobyt osiemnastu profesorów lwowskich w Moskwie trwał pięć dni i miał na celu wymianę doświadczeń, zapoznanie się oraz poznanie dorobku naukowego gospodarzy. Wśród zaproszonych jedynym humanistą był Boy-Żeleński. Pozostali reprezentowali nauki ścisłe. Zaskoczeniem było, że nie znaleźli się wśród nich dwaj uczeni o orientacji lewicowej: Leon Chwistek (1884–1944) – logik oraz Jakub Parnas (1884–1949) – biochemik i fizyk. Z Uniwersytetu byli: Boy-Żeleński, Seweryn Krzemieniewski, Stanisław Kulczycki, Stanisław Loria, Julian Tokarski, a z Instytutu Politechnicznego: Włodzimierz Burzyński, Janusz Groszkowski, Marian Kamieński, Witold Minkiewicz, Stanisław Ochęduszko, Stanisław Piłat, Romuald Rosołoński, Kasper Weigel oraz z Instytutu Medycznego: Antoni Cieszyński, Jan Grek, Stanisław Laskownicki, Witold Nowicki i Tadeusz Ostrowski. Są opinie, że wizyta profesorów w Moskwie miała jakoby wpłynąć na odwołanie rektora Uniwersytetu Lwowskiego, „nieprzychylnego dla Polaków". Dnia 27 września 1940 roku ukazały się w *Czerwonym Sztandarze* wypowiedzi na temat tej podróży profesorów: Minkiewicza, Nowickiego, Bartla, Kulczyńskiego, Cieszyńskiego, Ochęduszki, Piłata, Rosłońskiego i Boy-Żeleńskiego, gdzie opisują swoje wrażenia (zob. [23]), co zostało następnie zebrane, łącznie z ustaleniem listy uczestników tej podróży, przez Władysława Żeleńskiego w artykule [31]. Oczywiście była to podróż agitacyjna.

Szczególną okazję do zbliżenia polsko-ukraińskiego w dziedzinie kultury dała obchodzona uroczyście osiemdziesiąta piąta rocznica śmierci Adama Mickiewicza. Obchody rozpoczęły się 23 listopada i trwały trzy dni. Dnia 25 listopada 1940 roku odbyła się akademia oraz uroczysty wieczór mickiewiczowski w Teatrze Opery i Baletu i w Teatrze Polskim we Lwowie z udziałem świata kulturalnego i naukowego, na które zjechali czołowi profesorowie literatury z różnych ośrodków ZSRR. Pisarze polscy, ukraińscy, rosyjscy i żydowscy przeszli na Plac Mariacki, gdzie pod pomnikiem Adama Mickiewicza złożyli wieńce. Na akademii przemawiał Boy-Żeleński i goście z ZSRR. Kiedy delegat Związku Pisarzy Radzieckich z Moskwy, poeta Paweł Antokolski powiedział „[j]ak nieśmiertelna jest poezja Mickiewicza, tak nieśmiertelny jest i naród polski", na sali zapanował nieopisany entuzjazm. Profesor Jakóbiec, który był obecny na tej akademii, twierdził, że okrzyk brzmiał: *Niech żyje Polska*.

Wobec szkolnictwa polskiego i ukraińskiego III Rzesza przedsięwzięła na okupowanych od 1939 terytoriach II RP odmienne koncepcje, dające pozycję

relatywnie uprzywilejowaną ludności ukraińskiej Generalnego Gubernatorstwa w stosunku do Polaków. W kontynuacji tej polityki po ataku Niemiec na ZSRR w czerwcu 1941 utworzonych zostało m.in. dwanaście ukraińskich szkół gimnazjalnych w nowo utworzonym Dystrykcie Galicja oraz została przyznana możliwość kontynuowania przez Ukraińców nauki na poziomie szkół wyższych w całej III Rzeszy. Ukraińcy uzyskali również możliwość tworzenia własnych narodowych kuratoriów oświaty dla szkół.

Wraz z wybuchem wojny niemiecko-radzieckiej 22 czerwca 1941 roku skończył się etap „pierwszych sowietów" w historii Lwowa, jego uczelni i szkół. W dniu 30 czerwca 1941 roku Lwów został zajęty przez Niemców, witanych kwiatami, głównie przez nacjonalistów ukraińskich, którzy liczyli na wolną Ukrainę.

Przed opuszczeniem miasta przez Armię Czerwoną i radziecką administrację NKWD wymordowało kilka tysięcy więźniów politycznych, a także częściowo niepolitycznych, przetrzymywanych we lwowskich więzieniach w Brygidkach, na Łąckiego i Zamarstynowie, których nie ewakuowano z powodu chaosu, a których nie chciano uwolnić. Po strasznych rządach i mordach sowieckich, po okrutnych wywózkach na Sybir panowało złudzenie, że Niemcy będą lepsi.

Ukraińcy współpracujący z Niemcami chcieli utworzyć państwo ukraińskie ze stolicą we Lwowie, jednak Niemcy nie pozwolili na to aresztując liderów ukraińskich.

Dnia 18 czerwca 1941 roku rektor Byczenko i prorektor Chrapływyj pojechali do Kijowa; 27 czerwca ten pierwszy wrócił do Lwowa. W czasie okupacji Steinhaus spotkał Byczenkę we Lwowie (zob. [29, str. 217]). Byczenko jeszcze w lipcu 1941 roku był we Lwowie. Po wejściu do Lwowa Niemców jako p.o. rektora występował wobec nowych władz profesor Wasyl Simowycz. Natomiast w okresie czerwiec–lipiec 1941 roku przewodniczący zarządu miejskiego, tzn. burmistrz Lwowa, którym został docent uniwersytetu Jurij Polanskyj, podjął próbę otwarcia Ukraińskiego Uniwersytetu pod patronatem Niemiec. Na stanowisko rektora powołano Wasyla Simowycza; pojawiła się nawet pieczątka z nazwą uniwersytetu po niemiecku (zob. [24, str. 583]). Zabiegi Polańskiego, Simonowycza i Krypjakiewicza w celu utrzymania uniwersytetu nie przyniosły efektu, gdyż 1 lipca 1941 roku uniwersytet został zamknięty (w [24, str. 583] czytamy, że ostateczne zamknięcie uniwersytetu nastąpiło pod koniec sierpnia). Dokument o zamknięciu podpisał właśnie Simowycz na podstawie nakazu władz okupacyjnych (zob. [4]). Po likwidacji, Simowycz został komisarycznym zarządcą uniwersytetu z prawem wydawania zaświadczeń oraz opieki nad majątkiem uniwersytetu. Jeszcze w styczniu 1942 roku to on podpisywał wszelkie

dokumenty, ale już w kwietniu takie dokumenty podpisywał inny komisaryczny zarządca, docent dr Puschkar (zob. [4]).

Okupant niemiecki prowadził politykę eksterminacji inteligencji polskiej. Trzy dni po wkroczeniu do Lwowa wojsk hitlerowskich rozpoczęto akcję przeciwko polskim pracownikom naukowym. Na początku lipca 1941 roku zostali aresztowani i rozstrzelani profesorowie lwowscy, a wśród nich matematycy: Kazimierz Bartel, Antoni Łomnicki, Stanisław Ruziewicz, Włodzimierz Stożek z dwoma synami i Kazimierz Vetulani.

Tragiczny dla polskiego lwowskiego środowiska naukowego lipiec 1941 roku dopełniony został zamknięciem, a następnie likwidacją Uniwersytetu i pozostałych po okupacji radzieckiej instytutów. We wrześniu 1941 roku zapowiedziano otwarcie we Lwowie wyższych szkół zawodowych bez uprawnień akademickich, dostępnych dla Ukraińców i Polaków. Jednak dopiero w następnym roku w kwietniu uruchomiono instytuty we Lwowie i w maju tzw. Państwowe Kursy Zawodowe, by obniżyć rangę tytularną instytutów.

3. Wydział Matematyczno–Przyrodniczy i Fizyczno–Matematyczny w latach 1939–1941

Z dniem 1 listopada 1939 roku z funkcji dziekana Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego zwolniono Augusta Zierhoffera („z powodu niepunktualności" jak stwierdza Steinhaus [29, str. 171]), mianując w jego miejsce lwowskiego Ukraińca dra Stefana Biskupskiego. W zarządzeniu rektora było napisane „zwolnić z powodu nieradzenia sobie z pracą". Zaznaczmy, że w czasach radzieckich nigdy nie pisano jawnie o podstawach zwolnienia. Dwa dni później zwolniono z Uniwersytetu wszystkich pracowników, którzy zostali aresztowani bądź nie stawili się do pracy.

Najmniej jednak ucierpiał Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, a nawet został wzmocniony kadrowo matematykami pochodzenia żydowskiego, którzy uciekając przed Niemcami schronili się we Lwowie. Zatrudnieni zostali: doc. Bronisław Knaster, doc. Stanisław Saks, dr Edward Szpilrajn i Michał Żyw z Warszawy oraz spoza środowiska akademickiego: dr Marian Jakob i Ludwik Sternbach. W książce Steinhausa [29, str. 176] czytamy:

> Trzeba wiedzieć, że skład ludności lwowskiej zmienił się znacznie przez napływ uchodźców z Warszawy, z Krakowa, Poznańskiego, z całej zachodniej Polski. „Ludność" się podwoiła. Z uchodźców 75% stanowili Żydzi.

Na innych wydziałach wielu profesorów i docentów zostało zwolnionych bądź

zdegradowanych, otrzymując stanowiska laborantów. Na Politechnice Lwowskiej Sowieci pozostawili prawie wszystkich profesorów.

Stanisław Hartman wspominał w książce [8, str. 45–46]:

> Uniwersytet lwowski był de facto nadal polskim uniwersytetem. Znaczna większość profesorów pozostała i wykładała po polsku. Matematyka lwowska, silna i niezwykła już przed wojną, wzbogaciła się teraz jeszcze o uchodźców. Dziekanem wydziału był Banach i dalej wykładał, zachowując swoje audytorium. Wokół siebie miał teraz nie tylko Steinhausa, Schaudera, Mazura, Ruziewicza, Auerbacha, ale także Saksa, Knastera, Szpilrajna. Od asystentów wymagano ukraińszczyzny, ale nie zawsze to było przestrzegane. Kiedy przyszedł do nas dr Kreisler prowadzić ćwiczenia z fizyki teoretycznej, zaczął mówić po ukraińsku, ale powiedzieliśmy mu, że jesteśmy wszyscy polskojęzyczni i zaniechał tego. Po ukraińsku wykładali miejscowi Ukraińcy i ludzie ze wschodu, zza Zbrucza, ale ich było niewielu. Wschodnimi ludźmi obsadzono przede wszystkim wykłady marksizmu-leninizmu.

Dnia 1 grudnia 1939 roku Wydział Matematyczno-Przyrodniczy podzielono na dwa, Wydział Fizyczno-Matematyczny i Wydział Przyrodniczy. Stefan Banach został mianowany dziekanem nowo utworzonego Wydziału Fizyczno-Matematycznego (jedynym polskim dziekanem na uniwersytecie), a prodziekanem mianowano Mirona Zaryckiego. Wydział prowadził dwa kierunki studiów: matematykę i fizykę. Personel uczący Wydziału liczył osiemnastu profesorów, czterech docentów, dwudziestu dwóch asystentów i sześciu laborantów. Biblioteka liczyła osiem tysięcy woluminów i była przy niej czytelnia.

Od 1 stycznia 1940 roku wszyscy pracownicy naukowi Uniwersytetu Państwowego im. Iwana Franki otrzymali nowe nominacje od funkcjonariuszy władzy radzieckiej. Radzieckie stopnie naukowe były następujące: kandydat, docent, doktor i profesor. Nowy zreorganizowany uniwersytet rozpoczął oficjalnie rok akademicki 15 stycznia 1940 roku. Wykłady uniwersyteckie odbywały się w języku polskim z zachętą władz do uczenia po ukraińsku i rosyjsku.

Obsada zaś dziewięciu katedr (sześciu katedr matematyki, dwóch fizyki i jednej astronomii) wyglądała w styczniu i październiku 1940 roku następująco (zob. [3; 6, str. 154; 18, str. 23; 22, str. 24]):

– Analiza I: prof. Stefan Banach (kierownik), prof. Leon Chwistek, prof. Wołodymir Lewickij, prof. Władysław Orlicz, prof. Stanisław Saks, asystenci: Jan Hercberg, Maurycy Sperling, Ludwik Sternbach, Michajło Tymoszyk (skreślony 9 lutego 1940 roku, bo się nie pojawił w pracy), Wacław Warecki (od 1 lutego 1940 roku, a od września 1940 roku w katedrze analizy II), laboranci: Andrzej Alexiewicz, Stanisław Leja (zwolniony 1 lutego 1940 roku w związku z przejściem do pracy we Lwowskim Instytucie Politechnicznym), Helena Plamitzer,

Zygmunt Zahorski (od 27 stycznia 1940 roku). Od października 1940 roku Orlicz pracował na pół etatu w tej katedrze, a na drugie pół w katedrze rachunku prawdopodobieństwa. W dniu 1 lutego 1941 roku zwolniono Alexiewicza i Zahorskiego w związku z ich przyjęciem na aspiranturę (tzn. na studia doktoranckie).

– Analiza II: prof. Hugo Steinhaus (kierownik), prof. Herman Auerbach, doc. Meier Eidelheit, asystent Marceli Stark (od października 1940 roku w katedrze algebry), pracownik naukowy (studentka IV roku) Etti Schorr (24 października – 5 grudnia 1940 roku).

– Geometria: prof. Stanisław Mazur (kierownik), prof. Bronisław Knaster, doc. Edward Szpilrajn (15 kwietnia – 4 czerwca 1940 roku, zwolniony, gdyż nie był w pracy, a 18 maja 1940 roku przywrócony do pracy od 1 czerwca 1940 roku), asystent Menachem Wojdysławski, 1 lutego 1941 roku zwolniono Wojdysławskiego w związku z jego przyjęciem w aspiranturę (na studia doktoranckie).

– Algebra: prof. Eustachy Żyliński (kierownik), doc. Władysław Hetper (skreślony 1 listopada 1939 roku, bo się nie pojawił), asystent Józef Andruszkiw (styczeń – czerwiec 1940 roku).

– Teoria prawdopodobieństwa: prof. Miron Zarycki (kierownik), prof. Marian Jakob, doc. Józef Pepis (15 kwietnia 1940 roku przeniesiony do katedry geometrii), asystent Prokop Jurkiewicz, Ada Halpern (od 25 stycznia 1940 roku i zwolniona 24 kwietnia 1940 roku, bo dwa tygodnie nie była w pracy).

– Mechanika teoretyczna: prof. Juliusz Paweł Schauder (kierownik), prof. Wasyl Milianczuk, asystenci: Maurycy Mosler i Antoni Raabe.

– Fizyka eksperymentalna: prof. Stanisław Loria (kierownik), prof. Roman Zehelski (od października 1940 roku), doc. Marian Puchalik, asystenci: Szczęsny Gnatowski, Jakub Klinger, Franciszek Kuczera, H. Petrenko, Roman Smoluchowski (był na liście od 1 stycznia 1940 roku, ale nie przystąpił do pracy), Zdzisław Specht, Jurij Wieliczko, Bruno Winawer, Efim Wugmeister (1 luty – 1 sierpnia 1940 roku), Michał Żyw, laboranci: Józef Hurnjak i Eugeniusz Otrysko.

– Fizyka teoretyczna: prof. Wojciech Rubinowicz (kierownik), prof. Zenon Chrapływyj, doc. Juda Kreisler.

– Astronomia: prof. Eugeniusz Rybka (kierownik), asystenci: Jerzy Mergentaler, Helena Kazimierczak-Połońska (od 1 stycznia 1940 roku), Aleksander Moncibowicz, Alicja Wojtowicz, laboranci: Helena Kaczmarz, Stefania Ninger i Helena Opolska, Ludwik Zajdler (w okresie 1 listopada 1940 roku – 31 maja 1941 roku był pracownikiem naukowym), aspirant: Jarosław Kapko (od stycznia

1941 roku). W 1941 roku, jeszcze przed inwazją hitlerowską na Związek Sowiecki, przyjęto na etat prof. T. Gułę i laborantów: O. Szeparowicza i W. Słymakowskiego.

Ada Halpern napisała w [7, str. 13]:

> Bez większych trudności zostałam asystentką nowomianowanego profesora teorii prawdopodobieństwa. Byłam zachwycona. 600 rubli miesięcznie i dokument stwierdzający że jestem „pracownikiem naukowym", czyli należę do najlepszej kategorii. Cieszyło mnie też, że miałam pracę, która nie była mi obca. Musiałam przyrzec, że w przeciągu 6 miesięcy nauczę się języka ruskiego, gdyż ten język miał być oficjalnym językiem „Uniwersytetu Iwana Franki". O moje zapatrywania polityczne, na razie, mnie nie zapytano.
>
> Nowy mój szef był sam Ukraińcem, lecz miejscowym. On to zresztą pomógł mi uzyskać to stanowisko i współpraca z nim była bardzo przyjemna; w jej trakcie dowiedziałam się, że jego córka i zięć zostali zaaresztowani natychmiast po zajęciu miasta i że córka jego w więzieniu urodziła dziecko.[5]
>
> Wykładów swych teorii prawdopodobieństwa nie rozpoczynał jeszcze w tym semestrze i wobec tego mnie wyznaczono inne zajęcie, tak zwaną reorganizację biblioteki matematycznej. Reorganizacją w innych bibliotekach nazywało się przeprowadzenie czystki i eliminowanie wszystkich dzieł „niebłagonadiożnych". W bibliotece matematycznej miały być tylko sporządzone katalogi w języku ukraińskim. Bardzo mnie to wpierw przeraziło, bo języka tego zupełnie nie znałam, nawet z alfabetem miałam jeszcze pewne trudności.

Po październiku 1939 roku nad astronomią na uniwersytecie zawisła groźba likwidacji. Rybka, jako znany obserwator gwiazd zmiennych, wystarał się o list znakomitego rosyjskiego astronoma, świetnie ustawionego w radzieckiej hierarchii administrującej nauką, Borysa Wasiljewicza Kukarina z Moskwy, zapraszający go do wspólnego programu obserwacji tych gwiazd. Pomogła też opinia Aleksandra Jakowlewicza Orłowa z Kijowa i w rezultacie nie zlikwidowano astronomii przy uniwersytecie i Rybce z powrotem przypadło stanowisko kierownicze (zob. [26, str. 181]).

Obciążenia dydaktyczne na uniwersytecie nie były wielkie. Egzaminy wstępne dla studentów I roku odbyły się w dniach 26 listopada–3 grudnia 1939 roku, a komisję z matematyki stanowili Banach, Steinhaus i Żyliński. Na rok akademicki 1940/1941 przyjęto na I rok stu ośmiu studentów, chociaż plan zakładał tylko dziewięćdziesięciu. Na zajęcia chodziło jednak osiemdzeisięciu

[5] Chodzi tutaj o Mirona Zaryckiego i jego córkę Katerynę Zarycką (1914–1986), która urodziła 2 września 1940 roku syna Bohdana (zob. [16, str. 61]). Rękopisy siedmiu prac, o których wspomnieliśmy na początku, odnalezione zostały w domowym archiwum Bohdana i jego żony Luby. W tym samym mieszkaniu mieszkał jego dziadek Miron.

trzech studentów (trzydziestu dziewięciu Ukraińców, dwudziestu dwóch Żydów, szesnastu Polaków i sześciu Rosjan). Wśród studentów byli Władysław Lance, Abraham Straus i Mark Wiszik.

Wiszik wspominał swoje czasy studenckie (zob. [13, str. 1153–1154] z naszym tłumaczeniem na polski):

> Na Uniwersytecie Lwowskim, gdzie zapisałem się w 1939 roku, dziekanem Wydziału Matematyki był Stefan Banach, genialny matematyk. Oprócz niego, uczyli nas najwybitniejsi profesorowie szkoły Banacha: Bronisław Knaster – geometrii analitycznej, Juliusz Schauder – mechaniki teoretycznej, profesor Stanisław Mazur – geometrii różniczkowej, a profesor Władysław Orlicz wykładał algebrę. To wszystko w języku polskim. Tylko asystent dziekana, profesor Miron Zarycki, uczył w języku ukraińskim.
>
> Chodziłem na wszystkie wykłady Banacha, i dały mi one niesamowite uczucie szczęścia: stwierdziłem, że mogę studiować na takim uniwersytecie! Nawet już za życia Banach był uważany za najwybitniejszego polskiego matematyka. Jednak on nie pokazywał swojej wielkości. Był przyjemny, przyjazny, wesoły i miał wielkie poczucie humoru.
>
> Podczas swojego seminarium ciągle przerywał mówiącemu, zadając pytania i robiąc z nich nawet przyjazną zabawę. Jednak nikogo tym nie wystraszył; ogólna atmosfera była bardzo wesoła i przyjemna.
>
> Banach lubił chować przed seminarium teczkę profesora Stanisława Saksa, by ten jej potem szukał i dzięki temu można było nieźle się zabawić. Każdego dnia on i profesor Zarycki wychodzili razem na obiad, i gdy wracali było jasne, że wypili też kilka drinków. Banach kochał życie i był dużym, hałaśliwym oraz głośnym człowiekiem.

Na I roku w drugim semestrze studiowało sześciesięciu jeden studentów, na III roku – trzydziestu jeden i na IV roku – czterdziestu jeden studentów. Razem na Wydział uczęszczało dwieście osiemnaście studentów dziennych oraz stu zaocznych. Czwarty rok kończył studia na Wydziale Fizyczno-Matematycznym egzaminami państwowymi (bez obrony prac magisterskich), do których dopuszczono siedemnastu matematyków, jednego fizyka i jednego astronoma. Państwową Komisję tworzyli Banach, Mazur i Zarycki, a egzaminatorami byli: z równań różniczkowych i całkowych – Steinhaus, z podstaw wyższej geometrii – Mazur, z fizyki eksperymentalnej – Loria i z podstaw marksizmu-leninizmu – Mychalyk. Wśród studentów czwartego roku byli Mozes Gertwagen, Michał Skalski i Dawid Meizler. Po ukończeniu studiów absolwenci otrzymywali skierowanie do szkół.

Już w 1940 roku przygotowano projekt aspirantury (dla trzydziestu doktorantów), który został złożony w ministerstwie. Z końcem lipca 1940 roku został

ogłoszony konkurs na aspirantury. Egzaminy na aspiranturę na Wydział Fizyczno-Matematyczny odbyły się w dniach 4–6 listopada 1940 roku, a dodatkowa rekrutacja w grudniu. Komisja egzaminacyjna składała się z Banacha, Mazura, Zaryckiego i Rybki. Do egzaminu dopuszczono następujących dziesięć osób (w nawiasie podajemy oceny z egzaminu wstępnego obejmującego specjalność, podstawy marksizmu-leninizmu i język obcy oraz ewentualne nieprzystąpienie do egzaminu – zob. [3]): Alexiewicz (5, 3, 5), S. Bochniewicz (nie przystąpił), A. Bugera (nie przystąpił), Jurkiewicz (5, 2, 5), Ninger (5, 2, 5), Skalski (5, 5, 4), Szor [Schorr] (nie przystąpiła), S. Weinlös (4, 4, 5), Wojdysławski (5, 5, 5) i Zahorski (5, 5, 5). Na studia przyjęto Alexiewicza, Skalskiego, Wojdysławskiego i Zahorskiego. Brak jest listy z grudnia 1940 roku, ale przyjęto na aspirantów: na matematykę – Gertwagena, fizykę – Wandę Hanusową i astronomię – Kapko. Promotorem Alexiewicza, Gertwagena, Skalskiego i Zahorskiego został Banach, promotorem Wojdysławskiego – Mazur, a promotorem Hanusowej – Rubinowicz i Ukraińca Kapko – Rybka.

Aspirantura trwała trzy lata. W tym czasie aspiranci byli zwolnieni z wszelkich prac administracyjnych i organizacyjnych w katedrach, do których byli przydzieleni. Cały swój czas mieli bowiem przeznaczyć na pracę naukową według indywidualnego planu, który przewidywał w ciągu pierwszego roku naukę dwóch języków obcych (dowolnie wybranych) oraz filozofię materializmu dialektycznego. W drugim roku rozpoczynała się samodzielna praca naukowa pod kierunkiem profesora, a w ciągu trzeciego roku aspirant mógł prowadzić pewne wykłady pod nadzorem profesora. Aspiranta obowiązywał trzydziestoszesciogodzinny tydzień pracy i miał dwumiesięczne letnie ferie oraz dziesięć dni wolnych w ciągu roku. Otrzymywał stypendium państwowe w wysokości czterystu rubli miesięcznie (bez potrąceń) oraz czterysta rubli kredytu rocznie na zakup książek. W określonym terminie należało napisać dysertację.

Na początku 1941 roku promotorzy sporządzili każdemu doktorantowi „indywidualny plan szkolenia edukacyjnego i naukowego" zawierający: informacje ogólne (wydział, katedra, promotor, specjalność ogólna i wąska, data rozpoczęcia i ukończenia studiów doktoranckich), opis kształcenia doktoranta ze specjalności ogólnej i wąskiej (kursy, egzaminy, literatura, uczestnictwo w seminariach), szkolenie doktoranta w zakresie podstaw marksizmu-leninizmu (rozkład godzin i termin egzaminu), szkolenie doktoranta w zakresie języka obcego (język główny i dodatkowy z przybliżoną datą egzaminów), informacje o rozprawie doktorskiej (przybliżony tytuł pracy, jeśli możliwe), praktykę dydaktyczną doktoranta (wykłady i ćwiczenia, jakie ma prowadzić i na którym uniwersytecie), wyjazdy naukowe (konkretne plany wyjazdów).

Widzimy więc, że był to system radziecki, tzn. najpierw zdawanie egzaminów, a dopiero później pisanie rozprawy doktorskiej. Po trzech latach następował egzamin komisyjny przed komisją złożoną z prorektora do spraw nauki, dziekana wydziału, profesora danej katedry i wybranego egzaminatora z danej dyscypliny.

Powiedzmy też o wizytach i wyjazdach z Wydziału Fizyczno-Matematycznego Uniwersytetu Lwowskiego im. Iwana Franki. Do Lwowa przyjeżdzali i mieli odczyty tacy znani matematycy radzieccy, jak: Sergiej Sobolew, Paweł Aleksandrow, Anisim Bermant i Lazar Lusternik – profesorowie z Moskwy, Michaił Ławrientiew, Nikołaj Bogoljubow – profesorowie z Ukraińskiej Akademii Nauk oraz Mark Krein – profesor z Odessy. Wpisali oni też problemy do Księgi Szkockiej (nr 183 Bogoljubow, nr 186 Aleksandrow, nr 187 Sobolew, nr 189 Bermant, nr 190 Lusternik). Aleksandrow i Sobolew napisali ponadto opinie o prawie wszystkich matematykach uniwersyteckich, potrzebne do otrzymania radzieckich stopni naukowych. W okresie od września 1939 roku do maja 1941 roku wpisano tylko czternaście nowych problemów w Księdze Szkockiej (do tego czasu książka zawierała sto osiemdziesiąt problemów), a kończy ją wpis Steinhausa z 31 maja 1941 roku. Lance, który jako student był na seminarium Banacha, siedział obok Schaudera w czasie referatu Sobolewa. Schauder cicho komentował: *przecież to u nas wszystko zrobiono*.

Profesorowie uniwersytetu uczestniczyli w kwietniu 1940 roku w Moskwie w sesji naukowej poświęconej sto siedemdziesiątej piątej rocznicy śmierci Michaiła Łomonosowa. Byli to Banach, Krypiakiewicz, Polański i Simowicz.

W dniach 20–22 listopada 1940 roku na Uniwersytecie Lwowskim im. Iwana Franki przebywała delegacja gruzińska z Uniwersytetu im. Józefa Stalina w Tbilisi, wśród której byli rektor David Kipsidze, były rektor Georgij Kiknadze, będący Komisarzem Ludowym Oświaty Gruzińskiej SRR, Nikołaj Muscheliszwili – akademik i prezes Akademii Nauk Gruzińskiej SSR, pisarz Konstantin Lordkipanidze, przewodniczący kołchozu A. S. Pchaladze i szefowa fermy drobiu O. E. Kitiaszwili. Wizytę tę, na całej trzeciej stronie, opisała gazeta *Czerwony Sztandar* z dnia 21 listopada 1940 roku, gdzie matematyk Muscheliszwili stwierdza:

> Jakże rad jestem, że obecnie, w czasie krótkiego wprawdzie, kilkudniowego pobytu we Lwowie miałem możność zapoznania się z tutejszymi sferami naukowymi, w pierwszym rzędzie z profesorem matematyki Banachem, którego dotąd znałem tylko z literatury fachowej.
>
> W dniu dzisiejszym w gmachu uniwersytetu lwowskiego imienia Iwana Franki nasza delegacja spotkała się z profesorami i studentami. To cośmy widzie-

> li – sale, pracownie naukowe, wspaniała biblioteka, a przede wszystkim nastrój jaki panuje w murach tej uczelni, przekonało nas, że studjująca młodzież ma tu jak najlepsze warunki do nauki. Żałuję tylko, że ograniczony czas nie pozwolił mi bliżej zapoznać się z systemem studiów przede wszystkim na wydziale matematycznym, co mnie osobiście ze względów zawodowych najbardziej przecież interesuje.

O ile wyjazdy grupowe miały charakter propagandowy, o tyle wyjazdy indywidualne pracowników miały charakter szkoleniowy. Ze Lwowa do Moskwy jeździli: Banach (30 kwietnia 1940 roku i od 2 maja 1940 roku na jubileuszu Uniwersytetu Moskiewskiego) oraz Żyliński (listopad–grudzień 1940 roku), Mazur, Saks i Schauder (styczeń–luty 1941 roku), do Kijowa – Banach, Mazur, Schauder i Zarycki (razem 13–17 listopada 1940 roku i Banach jeszcze 19–26 czerwca 1941 roku[6]), do Tbilisi i Gori – Banach i Zarycki (marzec 1941 roku),[7] do Odessy – Banach.

Wiadomo, że wybuch wojny niemiecko-radzieckiej zastał Banacha w Kijowie, dokąd przyjechał w celach naukowych. Troska o losy rodziny spowodowała, że nie zastanawiając się ani chwili wsiadł do ostatniego odchodzącego jeszcze do Lwowa pociągu i powrócił do żony i syna (zob. [11, str. 27]).

Szczególnie bliskie i przyjacielskie stosunki łączyły go z akademikami Iwan Winogradowem i Michaił Ławrientiewem.[8] Banach często bywał w domu

[6] W artykule gazety *Wolna Ukraina* z sierpnia 1944 roku napisano: „W połowie czerwca, tydzień do wtargnięcia Niemców na nasz kraj, kandydatura Banacha jednogłośnie była wysunięta do głosowania na członka Akademii Nauk USRR" (Ukraińskiej Socjalistycznej Republiki Radzieckiej). Dlatego też Banach pojechał 19 czerwca 1941 roku do Kijowa. Dlaczego tak późno była załatwiana ta sprawa? Banach musiał mieć radziecki stopień doktora, który został zatwierdzony przez WAK (Wyższa Komisja Atestacyjna Wszechzwiązkowego Komitetu ds. Szkół Wyższych w Moskwie) dopiero 8 marca 1941 roku, gdyż Kijów nie mógł nadawać stopni naukowych przed Moskwą. Nie wiemy, czy odbyło się głosowanie w Akademii. Na stronie internetowej Ukraińskiej Akademii Nauk nie ma Banacha na liście członków korespondentów. Wiadomo jednak, że wyjazd Banacha do Akademii Nauk do Kijowa był zatwierdzony na czas 19–26 czerwca 1941 roku. Wybuch wojny przeszkodził prawdopodobnie temu głosowaniu.

[7] Pobyt Banacha i Zaryckiego został opisany w [30]. Dowiadujemy się z niego, że 15 marca 1941 roku przybyła do Tbilisi delegacja Lwowskiego Państwowego Uniwersytetu, na czele ze znanym matematykiem S. Banachem. Delegację stanowili Zarycki – profesor historii matematyki, A. S. Braginets [Andrij Brahineć (1903–1963)] – dziekan Wydziału Historii (po wojnie dziekan i prorektor UL) i M. V. Solyak, studentka Wydziału Historycznego. 19 marca przebywali w Gori w towarzystwie dwóch matematyków gruzińskich: Archila Kiriłowicza Kharadze (1895–1976) i Ilii Nestorowicza Wekuy (1907–1977), zwiedzając dom, w którym urodził się i spędził dzieciństwo Józef Stalin i wizytując Państwowy Instytut Pedagogiczny w Gori. Podpisano umowę o współpracy między dwoma uniwersytetami. Wcześniej, tzn. w listopadzie 1940 roku delegacja Uniwersytetu Tbiliskiego wizytowała Uniwersytet we Lwowie.

[8] Iwan Matwiejewicz Winogradow (1891–1983), Michaił Aleksiejewicz Ławrientiew [Mikhail Alekseevich Lavrentyev, Lavrentev, Lavrentiev, Lavrentieff] (1900–1980).

Winogradowa i przy tych okazjach gromadzili się tam inni matematycy. W grudniu 1940 roku Banach napisał o *Rozwoju nauki* (zob. [1] z naszym tłumaczeniem na polski):

> Wszystkich, którzy zaczynają poznawać radziecką naukę, dziwi jej rozkwit i wielkość. W kwietniu tego roku odwiedziłem Moskwę i Kijów. Jestem pod wrażeniem tamtejszej liczby zakładów naukowych, ich pracowników oraz wielkich osiągnięć. Widziałem tam takie instytuty i organy naukowe, jakich nie ma nigdzie za granicą. Pracownicy naukowi w Związku Radzieckim mają wszystko, co jest im potrzebne do spokojnej i rzeczowej pracy. Zrozumiałem wtedy, dlaczego radziecka nauka stoi tak wysoko i dlaczego na przykład moskiewska szkoła matematyczna jest pierwsza (najlepsza) na świecie.
>
> Rozmyślając nad korzeniami takiego niewidzialnego i szybkiego wzrostu nauki w ZSRR, przekonałem się, że stało się tak, ponieważ urząd radziecki otacza uczonych szczególną uwagą. W ZSRR każdemu, kto ma jakieś zdolności i chce się zajmować pracą naukową, państwo daje wszystko, co jest mu niezbędne.

W 1940 roku Banach, Knaster, Mazur, Schauder, Saks i Zarycki wzięli udział w organizowanej przez Instytut Matematyki Akademii Nauk USRS[9] w Kijowie *Konferencji z Analizy Funkcjonalnej i Teorii Funkcji Zmiennej Zespolonej* (20–25 VI 1940), na której Schauder wygłosił odczyt *O zasadach mechaniki kwantowej*. Knaster pisze o udziale w *Zjeździe Wszechzwiązkowym z Teorii Funkcji* w Kijowie (24–26 VI 1940), gdzie wygłosił odczyt: *Funkcja rzeczywista ciągła dwóch zmiennych, która jest stała na każdym prostym łuku*, a w sekcji analizy funkcjonalnej odczyt Schaudera nosił tytuł *Równania Hamiltona w przestrzeniach Banacha* (nie znaleźliśmy jednak dobrego potwierdzenia tej informacji).

Schauder planował dwie podróże naukowe po 30 dni w 1941 roku na Uniwersytet do Moskwy, jedną związaną z tematem w mechanice kwantowej, a drugą w związku z pracą nad równaniami różniczkowymi. Zrealizował jeden wyjazd w dniach 5 stycznia – 10 luty 1941 roku. Schauder prowadził wspólnie z fizykami seminarium z mechaniki kwantowej i napisał, że przygotowuje do druku książkę *Zur Grundlegung der Quantenmechanik* [*Podstawy Mechaniki Kwantowej*]. W artykule [25] czytamy, że profesorowie Banach i Schauder piszą podręcznik z zakresu mechaniki teoretycznej.

Poza matematykami wyjeżdżali też fizycy. Loria w sierpniu 1940 roku był gościem Wszechzwiązkowego Komitetu ds. Nauki ZSRR w Moskwie. Profesor Henryk Herszfinkiel[10] i asystent Żyw w dniach 16–25 listopada 1940 roku byli

[9] USRS to skrót nazwy Ukraińska Socjalistyczna Republika Sowiecka.

[10] Henryk Herszfinkiel (1883–?), uczeń Marii Skłodowskiej-Curie, od 1918 roku pracował w Pracowni Radiologicznej Towarzystwa Naukowego Warszawskiego im. Mirosława Kernbauma

na konferencji Instytutu Fizyki AN ZSRR w Moskwie. Możliwe, że opublikowali coś w materiałach konferencyjnych.

Milianczuk był w okresie 6–14 marca 1941 roku na Uniwersytecie Kijowskim wraz z delegacją, która podpisała umowę o współpracy. Rektor Byczenko i prorektor Chrapływyj przebywali w czerwcu 1941 roku w Kijowie. Ponadto 18 czerwca 1941 roku rektor zatwierdził decyzję wyjazdu do Kijowa na konferencję z fizyki organizowaną przez Akademię Nauk Ukraińskiej Republiki (29 czerwca – 4 lipca 1941 roku) Lorii, Puchalika i Winawera. Wydaje się nam, że do wyjazdu nie doszło z powodu wybuchu wojny niemiecko-radzieckiej 22 czerwca 1941 roku.

Na koniec tej części wspomnimy o wyjazdach astronomów. Eugeniusz Rybka był pierwszym polskim profesorem ze Lwowa, który już w styczniu 1940 roku wyjechał do Kijowa i Moskwy. W Kijowie uczestniczył w konferencji astronomicznej (15–17 stycznia 1940 roku) z odczytem po rosyjsku w dniu 16 stycznia, co było niespodzianką dla uczestników, a w Moskwie wizytował obserwatorium astronomiczne Państwowego Instytutu im. Szternberga z referatem o lwowskim obserwatorium (19–24 stycznia 1940 roku). Był serdecznie przyjmowany przez astronomów radzieckich. Następnym razem był w Kijowie na sesji naukowej (17–22 października 1940 roku), wraz z Heleną Kazimirczak-Połońską, z referatem o fotometrii fotowizualnej i obserwacjach w pobliżu bieguna północnego. W dniach 11–15 listopada 1940 roku przebywał w Moskwie, gdzie w okresie 11–12 listopada 1940 roku uczestniczył też w posiedzeniu komisji zaćmieniowej dotyczącej przygotowania do ekspedycji na obserwacje całkowitego zaćmienia Słońca w Kazachstanie we wrześniu 1941 roku. W 1941 roku wyjeżdżał do Kijowa (styczeń 1941 roku), Moskwy (kwiecień 1941 roku konferencja grawimetryczna, 18–20 maja 1941 roku komisja zaćmieniowa) i Leningradu (23–27 maja 1941 roku konferencja kosmologiczna) (zob. [27, str. 936; 28, str. 23, 25–27]).

Dnia 8 września 1940 roku została podpisana umowa „o socjalistycznej współpracy" między Uniwersytetem Lwowskim i Kijowskim. Ponadto Banach, Mazur, Orlicz, Saks, Schauder, Steinhaus i Zarycki pracowali równocześnie w filii Instytutu Matematyki Akademii Nauk USRS w Kijowie, kierowanej przez Ławrientiewa, co dawało każdego miesiąca dodatkowy dochód. Było to około dwóch tysięcy rubli, czyli mniej więcej dziesięć razy tyle, ile wynosiła przeciętna pensja, i dwadzieścia razy tyle, co emerytura (zob. [9, str. 214]). W pracy Banacha [2], otrzymanej przez redakcję *Zbirnika* 7 grudnia 1940 roku, a opublikowanej do-

---

i zajmował się metodami rozdzielania pierwiastków promieniotwórczych. Wykładał na Wolnej Wszechnicy Polskiej w Warszawie. Od stycznia 1940 roku był kierownikiem katedry chemii fizycznej na UL i od sierpnia tegoż roku profesorem i kierownikiem katedry chemii ogólnej na UL.

piero w 1946 roku (faktycznie w 1947 roku) Banach jako swój adres pracodawcy podaje Instytut Matematyki Akademii Nauk URSR[11] (zob. [2, str. 90]).

W 1940 roku Komitet Organizacyjny Światowego Kongresu Matematyków w Nowym Jorku zaprosił Banacha na przewodniczącego sekcji oraz został on wybrany członkiem Rady Miejskiej Lwowa odpowiedzialnym za sprawy oświaty i kultury. Banach nie lubił wszelkich oficjalnych posiedzeń i prac administracyjnych, a pełnienie funkcji dziekana i członka Rady Miejskiej zabierało mu sporo czasu. Toteż w owym okresie opublikował tylko dwie prace.

Pierwsza Naukowa Sesja Lwowskiego Państwowego Uniwersytetu im. Iwana Franki odbyła się w dniach 29 stycznia – 3 lutego 1941 roku. Otwierał ją i zamykał rektor Byczenko. Wygłoszono na niej sześć odczytów plenarnych, w tym jeden matematyczny: prof. M. Zarycki, *Leninowska analiza podstaw statystyki*. Sesja obradowała w sekcjach.

Kierownikiem X sekcji matematyki, która obradowała trzy dni (30, 31 stycznia i 1 lutego 1941 roku w godzinach 14–16 i 19–21), był Banach, a piętnaście odczytów wygłosili (zob. też [6, str. 156], gdzie znajdujemy przekład na język polski):

– 30 stycznia – prof. S. Mazur, *O podstawowych pojęciach geometrii różniczkowej krzywych*, prof. B. Knaster, *O krzywej Antoine'a*, doc. O. Pepis, *O funkcjach i równaniach rekursywnych*, doc. E. Szpilrajn, *O nierozwiązanych zagadnieniach teorii miary*, asyst. M. Mosler, *O pewnym twierdzeniu S. Bernsteina*,

– 31 stycznia – prof. M. Jakob, *Fenomen Gibssa dla wielomianów ortogonalnych*, prof. E. Żyliński, *O równaniach trzeciego stopnia*, prof. H. Steinhaus, *O rozkładach gęstości, jakie dają rzuty rozkładów jednostajnych*, prof. H. Auerbach, *O krzywych i powierzchniach mających średnice sprzężone*, prof. S. Banach, *O funkcjach Baire'a w przestrzeniach liniowych*,

– 1 lutego – prof. L. Chwistek, *O podstawach mechaniki kwantowej*, prof. W. Orlicz, *O funkcjach Höldera*,[12] prof. S. Saks, *O funkcjach podharmonicznych*, asyst. Z. Zahorski, *O zbiorze zer pochodnych* i asyst. I. Hercberg, *O podstawach analizy algebraicznej*.

Kierownikiem zaś sekcji XI fizyki i astronomii był prof. W. Rubinowicz. Trzynaście odczytów w dniach 30 stycznia – 1 lutego 1941 roku, wygłosili (w godzinach 11–16):

[11] URSR to w języku ukraińskim skrót nazwy Ukraińska Radiańska Socjalistyczna Republika.

[12] Wydaje się możliwe, że wyniki te zostały opisane w pracy [20], gdyż, jak pisze autor w przypisie, „rezultaty pochodzą z 1940 roku, ale z powodu wojny dopiero zostały zaprezentowane 10 kwietnia 1945 roku w Polskim Towarzystwie Matematycznym (Oddział w Krakowie), a do Redakcji *Studia Mathematica* praca wpłynęła 2 maja 1947 roku. Praca zawiera pozytywną odpowiedź na Problem 57 z *Księgi Szkockiej* postawiony przez S. Ruziewicza".



Zdjęcie Stefana Banacha i Stanisława Mazura przy pracy, opublikowane w czasopiśmie *Wolna Ukraina* z 13 grudnia 1940 roku. Skan zdjęcia znajduje się też w książce [9, str. 233].

– 30 stycznia – asyst. B. Winawer, *Pomiary stałej dielektrycznej sproszkowanych substancji i tzw. formuła mieszanin*, doc. M. Puchalik, *Zależność momentu dipolowego od struktury chemicznej*, asyst. S. Gnatowski, *Dielektryczna stała tetraliny*, prof. S. Loria i asyst. J. Klinger, *Elektronowe badanie struktury sadzy*,

– 31 stycznia – prof. W. Milianczuk, *Do pytania o teorię deuteronu*, aspir. W. Ganusowa, *Promienie oktupolowe*, prof. W. Rubinowicz, *Uogólnienie twierdzenia o wzajemności dla równania oscylacji*, asyst. J. Wieliczko, *Praktyczny rachunek nawinięć walcowych*, asyst. J. Wieliczko, *Praktyczny sposób wyznaczania elementów koła sprzężonego w superheterdynie*,

– 1 lutego – prof. E. Rybka, *Czerwona fotometria blisko bieguna*, asyst. J. Mergentaler, *Metoda obliczania elementu gwiazd zmiennych typu Cephei*, asyst. H. Kazimierczak, *O planetocentrycznym ruchu komet*, asyst. A. Moncibowicz, *Udział obserwatorium lwowskiego w eksperymentach zmiennych gwiazd zgodnie z planem Akademii Nauk SRSR w Moskwie*.

Ponadto w dniach 17–23 kwietnia 1941 roku odbyła się Pierwsza Naukowa Konferencja Studentów Lwowskiego Państwowego Uniwersytetu im. Iwana Fran-

ki. W sekcji fizyczno-matematycznej, której przewodniczył Banach, a zastępcą był Szpilrajn, odczyty wygłosili 18 kwietnia następujący studenci: M. Ja. Nosarzewska (IV rok), *Z teorii funkcji niezależnych* i E. A. Gelerman (IV rok), *Z teorii struktur*; 19 kwietnia: Z. A. Abramson (IV rok), *Impulsowa reprezentacja oscylatora harmonicznego* i L. M. Cejmer (IV rok), *Promieniowanie kwadrupolowe operatora harmonicznego*; 21 kwietnia: M. I. Wiszik (II rok), *O produktach kartezjańskich słabo ośrodkowych przestrzeni* i S. K. Hartman (IV rok), *Przejście falowe pakietu przez barierę potencjału*.

Gelerman otrzymał nagrodę w wysokości dwustu rubli za najlepszą pracę naukową, a prace naukowe Wiszika i Nosarzewskiej uzyskały nagrody (czwarte miejsca z nagrodą sto rubli każda). Wyróżniono jeszcze pracę Hartmana. Praca Wiszika dotyczyła pewnej części problemu 192 z Księgi Szkockiej postawionego przez Knastera i Szpilrajna (zob. [17, str. 265–266]). Zauważmy, że odczyt Wiszika był wygłoszony na podstawie wspólnej pracy Lance i Wiszika, co zostało odnotowane w [17, str. 266].

W kwietniu 1940 roku byli we Lwowie Aleksandrow i Sobolew i 20 kwietnia napisali swoje opinie o nadaniu radzieckich tytułów i stopni naukowych. Senat UL proponował je zgodnie z ich rekomendacją. W lipcu tegoż roku Uniwersytet przesłał podania do WAK-u w Moskwie.[13] Ponieważ nie było w nich rezultatów głosowania Senatu Uniwersytetu, podania o stopniach były ponownie rozpatrywane na posiedzeniu Senatu od grudnia 1940 roku do kwietnia 1941 roku (w przypadku Banacha podanie UL pochodzi z 12 lipca 1940 roku). Senat UL nadał stopień doktora i tytuły profesora kolejno na swoich posiedzeniach (w nawiasie podajemy datę zatwierdzenia przez WAK, jeśli tę datę znamy) 30 grudnia 1940 roku: Lorii (22 lutego 1941 roku), Rubinowiczowi (22 lutego 1941 roku), Banachowi (8 marca 1941 roku), Mazurowi (5 kwietnia 1941 roku), Lewickiemu (14 czerwca 1941 roku), Chrapływyjemu, Jakobowi, Rybce, Steinhausowi, Zaryckiemu (profesura 21 kwietnia 1945 roku i stopień kandydata nauk 6 lipca 1946 roku), Żylińskiemu (11 stycznia 1941 roku), Milianczukowi (22 lutego 1941 roku), Auerbachowi, Chwistkowi, Orliczowi, Saksowi (15 lutego 1941 roku) Knasterowi, Schauderowi (25 marca 1941 roku). Ponadto nadano stopień kandydata i tytuł docenta w marcu 1941 roku (WAK zatwierdził 10 maja 1941 roku) Eidelheitowi, Pepisowi i Szpilrajnowi. Odnotujmy, że WAK nie zawsze nadawał tytuły i stopnie naukowe zgodnie z decyzją Aleksandrowa i Sobolewa

[13] WAK – Wyższa Atestacjonnaja Komisja, na polski można przetłumaczyć jako „Państwowa Najwyższa Komisja Certyfikująca". Jest to nazwa krajowej agencji rządowej w Rosji i ZSRR oraz obecnie w Rosji i niektórych państwach poradzieckich, nadzorująca przyznawanie stopni naukowych i tytułów akademickich.

oraz Senatu UL. Na przykład Zaryckiemu i Lewickiemu zatwierdził profesury i doktoraty, ale nie habilitacje.

Mazur stwierdził w artykule [18, str. 24]:

> Przy niewielkich obciążeniach dydaktycznych prowadziliśmy spokojne życie środowiska matematycznego we Lwowie. Atak wojsk hitlerowskich na Związek Radziecki w dniu 22 czerwca 1941 roku przekreślił to wszystko.

W lipcu 1941 roku zamknięto Uniwersytet Lwowski i pozostałe uczelnie. Taki stan utrzymał się do końca 1941 roku.

Podziękowanie. Dziękujemy Archiwum Lwowskiego Państwowego Uniwersytetu im. Iwana Franki za kopie dokumentów [3] i Państwowemu Archiwum Obwodu Lwowskiego za kopie dokumentów [4], w tym pierwszego spisu prac z I Tomu *Zapisków Wydziału Fizyczno-Matematycznego*. Dziękujemy ponadto Janowi Strelcynowi z Paryża i Karolowi Leśnikowi z Poznania za ich sumienną korektę tekstu. Dziękujemy również Redakcji *Wiadomości Matematycznych* za wnikliwe sprawdzenie i poprawienie kilku faktów historycznych.

Bibliografia

[1] S. Banach, *Rozkwit nauki*, Wolna Ukraina 15 grudnia 1940 roku, str. 8 (po ukraińsku).

[2] S. Banach, *Sur la mesure dans les corps indépendants (O mierze w niezależnych ciałach)*, Zbirnik Prac Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. RSR 1946, no. 8 (1947), 71–90, wersja angielska *On measures in independent fields*, Studia Math. 10 (1948) 159–177.

[3] *Dokumenty z Archiwum Lwowskiego Państwowego Uniwersytetu im. Iwana Franki*[14] (1940).

[4] *Dokumenty z Państwowego Archiwum Obwodu Lwowskiego*[15] (1940–1941).

[14] Dokumenty te to obsada katedr matematyki, fizyki i chemii ze stycznia i października 1940 roku (fond P119, opis 3, sprawa 3), informacje o egzaminie do aspirantury (fond P119, opis 3, sprawa 1458), lista trzydziestu pięciu członków Senatu Lwowskiego Państwowego Uniwersytetu im. Iwana Franko z 15 kwietnia 1940 roku (fond P119, opis 3, sprawa 64), spis czterdzistu jeden członków Rady Naukowej Lwowskiego Państwowego Uniwersytetu im. Iwana Franko (fond P119, opis 3, sprawa 68).

[15] Dokumenty te to pierwszy spis zawartości I Tomu Zapisków Wydziału Fizyczno-Matematycznego (fond P119, opis 3, sprawa 201), sprawozdania kierowników katedr z października 1940 roku: Banacha, Mazura, Schaudera, Steinhausa i Żylińskiego (fond 119, opis 3, sprawa 192), dokumenty po rosyjsku dla WAK-u w Moskwie o nadaniu stopni i tytułów z 12 sierpnia 1940 roku dla m.in. H. F. Auerbach, S. S. Banach, E. W. Chraplywyj, D. W. Chwistek, M. G. Jakob, W. O. Lewicki, E. W. Rybka, S. F. Saks, P. S. Schauder, H. W. Steinhaus i M. O. Zarycki, podpi-

[5] J. Draus, *Uniwersytet Jana Kazimierza we Lwowie 1918–1946. Portret kresowej uczelni*, Księgarnia Akademicka, Kraków 2007, 328 stron.
[6] R. Duda, *Lwowska Szkoła Matematyczna*, Wyd. Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2007, 256 stron.
[7] A. Halpern, *Spokojne życie*, Biblioteka Orła Białego, Rzym 1946, 134 strony.
[8] S. Hartman, *Wspomnienia* (*lwowskie i inne*), Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2014, 137 stron.
[9] O. Hnatiuk, *Odwaga i strach*, Kolegium Europy Wschodniej, Wrocław–Wojnowice 2015, 718 stron.
[10] G. Hryciuk, *Polacy we Lwowie 1939–1944: życie codzienne*, Książka i Wiedza, Warszawa 2000, 430 stron.
[11] E. Jakimowicz, A. Miranowicz (red.), *Stefan Banach. Niezwykłe życie i genialna matematyka*, Wydanie III, Wyd. Impuls, Kraków 2010, 202 strony.
[12] S. Kalbarczyk, *Polscy pracownicy nauki, ofiary zbrodni sowieckich w latach II wojny światowej*, Wydawnictwo Neriton, Warszawa 2001, 295 stron.
[13] E. I. Kalikinskaya, *Meetings with Mark Vishik*, Russian Math. Surveys 69 (2014), no. 6, 1149–1157.
[14] K. Lanckorońska, *Wspomnienia wojenne: 22.IX.1939–5.IV.1945*, Znak, Kraków 2003, 364 strony.
[15] L. Maligranda, *Stefan Kaczmarz* (*1895–1939*), Antiq. Math. 3 (2007), 15–61.
[16] L. Maligranda, J. G. Prytuła, *Lwowscy uczeni wymienieni w przesłuchaniach Banacha z 1944 roku*, Wiad. Mat. 49 (2013), nr 1, 29–66.
[17] R. D. Mauldin (red.), *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café*, Birkhäuser, Boston 1981, xiii+268 stron.
[18] S. Mazur, *Wspomnienia matematyka z okresu wojny*, Kultura i Społeczeństwo 22 (1978), nr 3, 23–26; przedruk: *Przemówienie wygłoszone przy nadaniu doktoratu honorowego Uniwersytetu Warszawskiego*, Wiad. Mat. 22 (1980), nr 2, 266–270.
[19] Z. S. Olesiak, *O lwowskim środowisku akademickim podczas wojny*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 46 (2001), nr 2, 35–59.
[20] W. Orlicz, *Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée. I*, Studia Math. 10 (1948), 21–39; przedruk w: *Władysław Orlicz, Collected Papers*, Warszawa 1988.
[21] Z. Popławski, *Dzieje Politechniki Lwowskiej 1844–1945*, Ossolineum, Wrocław––Warszawa–Kraków 1992, 361 stron.

---

sane przez Ju. I. Polańskiego (fond P119, opis 3, sprawa 34a), świadectwo komendanta Lwowa o zamknięciu wszystkich uniwersytetów we Lwowie (po niemiecku) z 1 lipca 1941 roku oraz po ukraińsku wydane na podstawie dokumentu niemieckiego i podpisany przez W. I. Simowicza (fond P35, opis 13, sprawa 129), dokument *W Departamencie Nauki i Szkolnictwa we Lwowie* z 16 stycznia 1942 roku podpisany przez W. Simywytscha (po niemiecku) (fond P1295, opis 1, sprawa 8), dokument po niemiecku z informacją o ilości ukraińsko-polskich asystentów i laborantów na Lwowskim Uniwersytecie z 22 kwietnia 1942 roku, podpisany przez komisarza N. Puschkara (fond P1295, opis 1, sprawa 11).

[22] J. G. Prytula, *Remarks on the history of mathematics in Lviv up to the middle of the XXth century*, Banach Center Publ. 87 (2009), 17–26.
[23] *Radziecki naukowiec otoczony jest szczególną opieką państwa i narodu. Profesorzy lwowscy o swoich wrażeniach z Moskwy. Autorzy: W. Minkiewicz, W. Nowicki, K. Bartel, S. Kulczyński, A. Cieszyński, S. Ochęduszko, T. Boy-Żeleński, R. Rosołoński i S. Piłat*, Czerwony Sztandar z 27 września 1940 roku, strony 3–4.
[24] A. Redzik, *Szkic o dziejach Uniwersytetu Lwowskiego w latach 1939–1946*, Visnyk Lviv Univ., Ser. Histor. 2007, Special issue, 577–592.
[25] K. Reischer, *Praca naukowa na uniwersytecie*, Czerwony Sztandar z 28 grudnia 1940 roku, str. 4.
[26] K. Rudnicki, *Z historii obserwatorium astronomicznego we Lwowie*, Analecta 5 (1996), z. 2, 171–188.
[27] P. Rybka, *Autobiografia*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 33 (1988), nr 4, 929–942.
[28] P. Rybka, *Zarys dziejów astronomii na Uniwersytecie Lwowskim w latach 1932–1945*, Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej, Seria 2, 1991, z. 4, 3–40.
[29] H. Steinhaus, *Wspomnienia i Zapiski*, Aneks, London 1992, 587 stron.
[30] V. Tarieladze, *Stefan Banach in Tbilisi* (*On the occasion of his 120-th Birthday Anniversary*), Book of Abstracts of the Third International Conference of Georgian Mathematical Union, Batumi, September 2–9, 2012, 21–26 (program konferencji dostępny pod adresem http://rmi.ge/~gmu/III_Annual_Conference/E_III_Annual.htm).
[31] W. Żeleński, *Podróże profesorów lwowskich do Moskwy w roku 1940*, Wiadomości (Londyn) 30 (1975), nr 23 (1523) z 4 VI 1975, str. 4.

Lech Maligranda
Department of Engineering Sciences and Mathematics
Luleå University of Technology
lech.maligranda@ltu.se

Jarosław G. Prytuła
Faculty of Mechanics and Mathematics
Ivan Franko National University of Lvov
ya.g.prytula@gmail.com



Jesienna Przestrzeń Hausdorffa (fot. Piotr Górny).
Trzecia nagroda w konkursie Matematyka w obiektywie w 2017 roku (http://mwo.usz.edu.pl)

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 331–350
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Alicja Matczuk (Lublin)

Działalność Samuela Dicksteina w zakresie polskiej retrospektywnej bibliografii matematycznej

W 1873 roku, w czterechsetną rocznicę urodzin Mikołaja Kopernika, ukazała się w Krakowie *Bibliografija piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki oraz ich zastosówań* Teofila Żebrawskiego[1] (zob. [11, 20, 30]). Po uzyskaniu stopnia doktora filozofii z zakresu kartografii[2] na Uniwersytecie Jagiellońskim Żebrawski wykładał geodezję i topografię, następnie zwrócił się ku naukom przyrodniczym. Planował zrobić karierę naukową jako matematyk geometra i nawet opublikował kilka prac z tej dziedziny (zob. [12, str. 320–321]) Na przeszkodzie stanęła mu przeszłość polityczna – brał udział w powstaniu listopadowym. Niedopuszczony do katedry matematyki na UJ, o którą się ubiegał w 1842 roku, objął stanowisko inspektora komunikacji wodnych miasta Krakowa, by później zająć się architekturą. Żebrawski miał bardzo różnorodne zainteresowania, nie tylko matematyczne. Uprawiał topografię, kartografię, budownictwo, mechanikę, geodezję, archeologię, numizmatykę, lingwistykę, a także bibliografię. Kolekcjonował książki, wcześnie zajął się bibliografią i ogłosił kilka wykazów piśmiennictwa (zob. [20]). Gromadząc w ciągu wielu lat dzieła matematyczne, planował opracowanie historii nauk matematycznych w Polsce, której druk nawet zapowiedziano w 1854 roku (zob. [15]). Do druku jednak nie doszło. Kilka lat później ukazała się jego rozprawa [37], która była zapewne fragmentem

[1] Teofil Żebrawski (1800–1887), matematyk, bibliograf, erudyta, członek Akademii Umiejętności w Krakowie.

[2] Na podstawie rozprawy z 1831 roku *O sieciach do kart geograficznych, astronomicznych i morskich* na Wydziale Filozoficznym. Była to pierwsza praca w języku polskim o odwzorowaniach kartograficznych, a także pierwszy doktorat filozofii z zakresu kartografii na Uniwersytecie Jagiellońskim.

zamierzonego dzieła. Ostatecznie zrezygnował z pracy nad dziejami nauk matematycznych i fizycznych i zajął się opracowywaniem *Bibliografiji piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki oraz ich zastosówań,* której poświęcił ponad dwadzieścia lat pracy. Dzieło to wykazywało druki i rękopisy z zakresu szeroko rozumianych nauk ścisłych od czasów najwcześniejszych aż do 1830 roku (zob. [20]). Poza piśmiennictwem matematycznym obejmowało prace z zakresu budownictwa, wojskowości, geografii, astronomii, chronologii, muzyki, fizyki, meteorologii, chemii, górnictwa. Rejestrowało 2641 pozycji. Żebrawski uzupełnił swoją *Bibliografiję*, publikując w 1886 roku, krótko przed śmiercią, dwa *Dodatki*, które powiększyły liczbę odnotowanych tytułów do 3245 pozycji. Jego praca miała układ chronologiczny, gdyż chodziło mu o wykazanie historycznego rozwoju tych gałęzi piśmiennictwa, jakie objął swym wykazem. *Bibliografija* ukazała się nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiej, Jana Działyńskiego, który wystąpił tutaj nie tylko jako mecenas, lecz także przewodniczący Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu. Jak wyznał Żebrawski we wstępie do książki [36] „[...] praca byłaby niewątpliwie pozostała w rękopisie, gdyby nie zachęcenie do jej wydania i czynnego poparcia ze strony Działyńskiego". Dzieło to do dzisiaj zachowało walory naukowe i informacyjne, a w swoim czasie spowodowało wzrost zainteresowań historią matematyki w Polsce.

We wstępie do *Bibliografiji* Żebrawski pisał: „Zbiór niniéjszy wiadomości bibliograficznych ograniczyłem po koniec roku 1830, zostawiając następcom dalsze lata. Lecz i w tym obrazie wiele mi jeszcze do zbadania pozostało: w kilku bibliotekach krajowych, równie jak i po obcych dziełach są jeszcze ukryte wiadomości, zadania naszego dotyczące, które tylko przez dłuższe poszukiwania i nie przez jednego podjęte, dałyby się wydobyć i spożytkować". Apel twórcy bibliografii znalazł zrozumienie i odzew wyrażający się w podejmowaniu prac nad polską bibliografią matematyczną XIX wieku.

Już 4 grudnia 1873 roku na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu przyjęto wniosek o podjęciu prac nad kontynuacją dzieła Żebrawskiego. W roku następnym Towarzystwo ogłosiło konkurs na *Ułożenie bibliografii piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki oraz ich zastosówań od roku 1830 aż do najnowszych czasów*. W programie [24] czytamy: „Dopełnienia te, o których wspomina autor, a zwłaszcza dopełnienie wiadomości bibljograficznych najnowszych czasów, wydało się Towarzystwu Nauk Ścisłych rzeczą pierwszorzędnego znaczenia w nauce. Tak dla piszących jak dla czytelników, tak dla nauczycieli jak dla uczących się, dla wszystkich w ogóle, którym rozwój nauki w kierunku narodowym na sercu leży, niezmiernie jest ważném i pożyteczném posiadanie dokładnego spisu wszystkich źródeł, z których czerpać mają wiedzę w ojczystym języku, wszystkich prac poprzedników swych

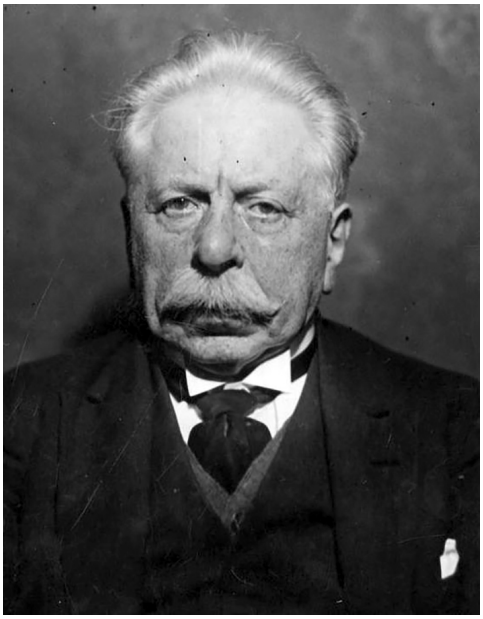
na obranéj drodze wykonanych. [...] Tę myślą powodowane Towarzystwo Nauk Ścisłych, na przedstawienie swego Prezesa i z funduszów na ten cel przez niego przeznaczonych, postanowiło nagrodę w summie TYSIĄCA franków tytułem zachęty temu, ktoby przedstawił najdaléj do dnia pierwszego stycznia 1877 roku (t.j. we trzy lata po niniejszém ogłoszeniu) *najzupełniejszy, najlepiej ułożony i przynajmniéj co do wcześniejszych publikacyj krytycznemi uwagami opatrzony spis dzieł, bądź drukiem bądź litografią w języku polskim ogłoszonych, jako téż artykułów w różnych pismach zbiorowo lub pojedynczo publikowanych z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań*". Później termin nadsyłania prac został jeszcze przedłużony na dzień 1 stycznia 1880 roku (zob. [3]). Żmudnej pracy bibliograficznej mającej stanowić kontynuację dzieła Żebrawskiego nikt się jednak nie podjął. Konkurs nie został rozstrzygnięty przed zlikwidowaniem Towarzystwa w 1882 roku.

Kilkanaście lat później idea kontynuacji bibliografii Żebrawskiego zyskała nowego inicjatora i twórcę w osobie Samuela Dicksteina (1851–1939) (zob. [11, 39]). Myśli i działania bibliograficzne związane z tym zamierzeniem towarzyszyły Dicksteinowi przez prawie pięćdziesiąt lat. Tym bardziej tragiczną wymowę miał fakt, że *Bibliografia matematyczna polska XIX stulecia*, którą przygotował wspólnie z Edwardem Wawrykiewiczem,[3] nie została wydana, a materiał przygotowany niemal w całości do druku spłonął w pożodze wojennej. Natomiast tylko fragmentem wielkiej pracy bibliograficznej pozostał zeszyt próbny *Bibliografii*. Stanowi on szczególnie cenny materiał źródłowy, gdyż zawiera wiele ciekawych, nieznanych informacji na temat genezy bibliografii, jej koncepcji i metody opracowania. Również mało znane lub znane tylko w niewielkim stopniu są poczynania Dicksteina w zakresie uzupełnienia i wydania bibliografii Żebrawskiego.

Zasadniczym celem niniejszego opracowania jest zatem zebranie i zaprezentowanie dokonań Dicksteina w dziedzinie retrospektywnej polskiej bibliografii matematycznej, akcentując zwłaszcza jego poczynania w zakresie kontynuacji, uzupełnienia i wydania *Bibliografiji* Żebrawskiego, oraz przedstawienie kontynuatorów jego idei i przekazu bibliograficznego

Duży wpływ w kształtowaniu świadomości i kultury bibliograficznej Dicksteina odegrała Szkoła Główna w Warszawie, w której studiował matematykę

[3] Edward Wawrykiewicz (1847–1917), polski inżynier kolejnictwa, popularyzator wiedzy technicznej, uczestnik powstania styczniowego. Pełnił obowiązki bibliotekarza w sekcji technicznej Towarzystwa Popierania Przemysłu i Handlu w Warszawie. Wydał w 1903 roku *Bibliografię 37 tomów „Przeglądu Technicznego" za lat 25* (*1875–1899*) oraz w 1914 roku *Bibliografię 10 tomów „Przeglądu Technicznego" wydanych w latach 1900–1909*. Przygotował również w 1898 roku *Spis techników w guberniach Królestwa Polskiego* (zob. [29]).



Samuel Dickstein (1851–1939)
Źródło: Zbiory Narodowego Centrum Cyfrowego
https://audiovis.nac.gov.pl/obraz/96712/

w latach 1866–1869. W tym czasie działał tutaj Karol Estreicher stojący u początków swej pracy w charakterze profesora bibliografii i bibliotekarza Biblioteki Głównej. Wykłady jego ściągały dość licznych słuchaczy ze wszystkich wydziałów Szkoły i jak pisał Dickstein w artykule [4]: „[...] obudzały zamiłowanie rzeczy swojskich i w duszy niejednego z młodzieży budziły postanowienie zajęcie się pomnikami przeszłości". Spośród studentów Szkoły Głównej wielu później łączyło pracę zawodową z aktywnością bibliograficzną. Ich inicjatywie, ofiarności, wielorakiemu i niestrudzonemu działaniu zawdzięczają powstanie liczne bibliografie dziedzinowe, które doprowadziły do stworzenia klimatu sprzyjającemu rozwojowi nauk, a także podtrzymywania narodowej świadomości w najtrudniejszym okresie niewoli, do początków XX wieku. W gronie tym obok Dicksteina znaleźli się m.in. Adolf Suligowski, Feliks Kucharzewski, Stanisław Czarnowski, Adam Antoni Kryński, Karol Appel i Józef Bieliński.

Zainteresowania bibliograficzne towarzyszyły Dicksteinowi przez całe życie (zob. [30]). Podlegały one swoistej ewolucji. Otwierała ją tematyka pedagogiczna, ze szczególną skłonnością ku pedagogice szkolnej, co bezpośrednio wiązało się z działalnością pedagogiczną Dicksteina (zob. [38]) – w latach 1870–1905 był nauczycielem szkół średnich. Połączenie tych dwóch zainteresowań znalazło wyraz w zapoczątkowaniu przez niego pierwszej bieżącej biblio-

grafii pedagogicznej w Polsce, ogłaszanej w wydawanym i redagowanym przez siebie *Roczniku Pedagogicznym* (1881–1884), pierwszym polskim czasopiśmie pedagogicznym. Do sprawy bibliografii pedagogicznej powrócił on raz jeszcze w okresie międzywojennym inicjując jej publikację w drugiej serii *Rocznika Pedagogicznego* (1921–1928).

Wkrótce jednak zainteresowania jego zwróciły się ku informacji bibliograficznej w zakresie matematyki, wszak w istocie był przede wszystkim matematykiem oraz w tej dziedzinie zdobył swoje pierwsze stopnie naukowe. Spisom bibliograficznym dotyczącym matematyki wyznaczył Dickstein znaczne miejsce w wydawanych przez siebie czasopismach uważając, iż racjonalne zorganizowanie bieżącej informacji o piśmiennictwie polskim i zagranicznym stanowi fundament rozwoju matematyki. Dużą wartość informacyjną miały ogłaszane przez Dicksteina w latach 1883–1887 *Sprawozdania z piśmiennictwa naukowego polskiego w dziedzinie nauk matematycznych i przyrodniczych*, których cztery roczniki obejmowały lata 1882–1885. Potem kontynuował je, wspólnie z Władysławem Gosiewskim, w *Pracach Matematyczno-Fizycznych*. Wykazy nowych publikacji matematycznych regularnie były ogłaszane od 1897 roku także w *Wiadomościach Matematycznych*. Duże znaczenie dla promocji matematyki polskiej na arenie międzynarodowej miały jego streszczenia polskiej literatury matematycznej publikowane w czasopismach obcych: *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (od 1875 roku) i *Revue semestrielle des publications mathématiques* (od 1897 roku). Zabiegom Dicksteina zawdzięcza nauka polska powstanie *Katalogu Literatury Naukowej Polskiej* (od t. 15 *Katalog polskiej literatury matematyczno-przyrodniczej*) wydawanego w latach 1901–1934 (t. 1–19) przez Komisję Bibliograficzną Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie. *Katalog* stanowił ogniwo *Międzynarodowego Katalogu Literatury Naukowej* (*International Catalogue of Scientific Literature)*[4] publikowanego przez Royal Society of London. Rozpoczęcie współpracy z *Międzynarodowym Katalogiem...* było ważnym wydarzeniem na drodze wejścia Akademii na forum międzynarodowe. Po raz pierwszy wystąpiła ona w roli instytucji reprezentującej matematykę polską wszystkich trzech zaborów. Bibliografia polskiej twórczości z zakresu nauk ścisłych i przyrodniczych nie tylko prezentowała dorobek naukowy narodu pozbawionego niepodległego państwa, ale też pozwalała dotrzeć do tego dorobku badaczom zagranicznym.

[4] *International Catalogue of Scientific Literature* – międzynarodowa bibliografia publikacji naukowych, zorganizowana z inicjatywy Królewskiego Towarzystwa Naukowego (*The Royal Society*) w Londynie. Projekt bibliografii przedstawiony został na konferencji naukowej w Londynie w 1896 roku. Wydawnictwo ukazywało się jako rocznik w latach 1902–1921 i obejmowało literaturę za lata 1901–1914. Przedruk wydany został w latach 1965–1968.

Dickstein utrzymywał liczne stosunki z uczonymi obcymi i reprezentował Polskę na międzynarodowych kongresach matematycznych (odbywały się od 1897 roku) i Zjazdach Lekarzy i Przyrodników Polskich.[5]

Mało znanym faktem jest, że Dickstein był pomysłodawcą i autorem koncepcji zestawienia bibliograficznego [1] na temat nauk matematyczno-fizycznych w Akademii Wileńskiej, którego realizacji podjął się jego kolega ze Szkoły Głównej – Józef Bieliński, lekarz i bibliograf.

Przedmiotem szczególnej troski Dicksteina była retrospektywna bibliografia matematyczna. Uwarunkowane to było rozwijającymi się u niego z biegiem lat coraz silniejszymi zainteresowaniami historią matematyki w Polsce, dziedziną wówczas w Polsce zupełnie zaniedbaną. Oceniając krytycznie dorobek polski w tym zakresie Dickstein wskazywał, iż zasadniczą przeszkodą w rozwoju badań historycznych z zakresu matematyki był brak pełnej retrospektywnej bibliografii matematycznej. Swoje poglądy na ten temat wyłożył w artykule [7]. Podał w nim również w układzie chronologicznym bibliografię historii matematyki w Polsce za lata 1781–1890, rejestrując monografie historyczne, artykuły i książki, zawierające wiadomości historyczne oraz biografie matematyków.

Wtedy też prawdopodobnie zrodziła się u Dicksteina myśl przygotowania kontynuacji *Bibliografii* Żebrawskiego. Rozumiał on Żebrawskiego i jego ambicję stworzenia w miarę kompletnej podstawy do badań naukowych nad historią matematyki. Uważał, że taka spuścizna narzucała na potomnych obowiązek kontynuowania dzieła, czyli dalszego rejestrowania publikacji wydanych po 1830 roku. Od tego czasu praca nad polską bibliografią matematyczną XIX wieku stała się jego pasją na długie lata i kontynuowana była niemal do końca życia.

Aby przyśpieszyć realizację zamierzenia, Dickstein do współpracy zaprosił Wawrykiewicza. W wyniku mozolnych poszukiwań w 1891 roku istniała już pokaźna kartoteka bibliograficzna polskiego piśmiennictwa matematycznego XIX wieku.

Na VI Zjeździe Lekarzy i Przyrodników Polskich we Lwowie, w lipcu 1891 roku, Dickstein przedłożył projekt opracowania bibliografii matematycznej polskiej XIX stulecia. Niestety referat nie został opublikowany i znamy go tylko ze streszczenia (zob. [27, str. 10]). W wystąpieniu wygłoszonym 17 lipca 1891 roku na posiedzeniu sekcji matematyczno-fizycznej omówił założenia metodyczne przedsięwzięcia, jego metodę opracowania oraz poinformował, że zgromadzono już pokaźną ilość materiału bibliograficznego. Plan jego przewidywał zasto-

[5] Przed I wojną światową liczba matematyków polskich była tak nieznaczna, że nie zachodziła potrzeba organizowania specjalnych zjazdów matematycznych. Sekcja matematyczna tworzona w ramach periodycznych Zjazdów Lekarzy i Przyrodników Polskich wystarczała dla potrzeb naukowych ówczesnej grupy matematyków (zob. [2]).

sowanie w układzie bibliografii „wszelkie najnowsze ulepszenia". Zaapelował również do obecnych o dostarczenie wiadomości o dziełach i pismach, które mogłyby ujść uwadze autorów. Równocześnie wystąpił z postulatem podjęcia prac nad uzupełnieniem i wydaniem bibliografii Żebrawskiego, wskazując, iż doprowadzona została tylko do 1830 roku oraz posiada pewne niedociągnięcia i braki, których usunięcie jest niezbędne. Można sądzić, że projekt bibliografii spotkał się z akceptacją.

Gromadząc materiały do *Bibliografii* autorzy nieustannie apelowali na łamach czasopism o nadsyłanie opisów druków, znajdujących się w niedostępnych zbiorach. W 1893 roku w *Przewodniku Bibliograficznym* w dziale *Kronika* zamieszczona została notka [16], w której czytamy: „Zasłużeni autorowie pragnęliby w pomnikowem tem wydawnictwie wyczerpującą podać wiadomość także o niewydanych dotąd z zakresu tego rękopisach lub nieznanych drukach, w którymto celu zwracają się do posiadaczy podobnych zabytków z uprzejmą prośbą, ażeby im łaskawie w pomoc przyjść zechcieli, i albo same rękopisy i druki nadesłali albo możliwie dokładny ich opis bibliograficzny". Redakcja czasopisma, w osobie Władysława Wisłockiego gorąco poparła apel Dicksteina i Wawrykiewicza z uwagi na ważność i doniosłość przedsięwzięcia, jak i ze względu „na obydwóch tyle sumiennych i wybitnych pracowników, którzy tak pożądane wydawnictwo w swoje ujęli ręce". Prawdopodobnie apel odniósł pożądany efekt, gdyż rok później, z okazji zwołania VII Zjazdu Lekarzy i Przyrodników Polskich, autorzy wydali zeszyt próbny *Bibliografii matematycznej polskiej XIX stulecia*, w celu poddania go uwadze sekcji matematyczno-fizycznej tegoż Zjazdu.

Zeszyt próbny *Bibliografii* ukazał się w 1894 roku w Krakowie nakładem autorów w drukarni Władysława Anczyca. Wybór miejsca wydania zeszytu nie był przypadkowy. Dicksteina łączyły ścisłe związki z krakowskim środowiskiem naukowym, blisko współpracował z Akademią Umiejętności, której w 1893 roku wybrany został zagranicznym członkiem korespondentem (zob. [32]). W Warszawie był nieoficjalnym przedstawicielem tej instytucji.

Autorzy byli głęboko przekonani, że sprawą bibliografii należy zainteresować jak najszerszy krąg specjalistów. W 1885 roku, w liście (zob. [10]) do Władysława Natansona, profesora fizyki matematycznej UJ, Dickstein narzekał, że Warszawa „[...] jest biernym świadkiem wydarzeń naukowych zachodzących w Krakowie". Tymczasem w Krakowie, ognisku nauki polskiej, posiadającym Akademię i Uniwersytet Jagielloński, ukazywały się najważniejsze polskie prace z zakresu nauk ścisłych oraz dzieła bibliograficzne (na przykład *Bibliografia polska* Karola Estreichera). Wydając zeszyt próbny *Bibliografii matematyki polskiej XIX stulecia* autorzy zapewne mieli nadzieję, że publikacja spotka się nie tylko z żywym zainteresowaniem, ale też zrozumieniem i poparciem dla reali-

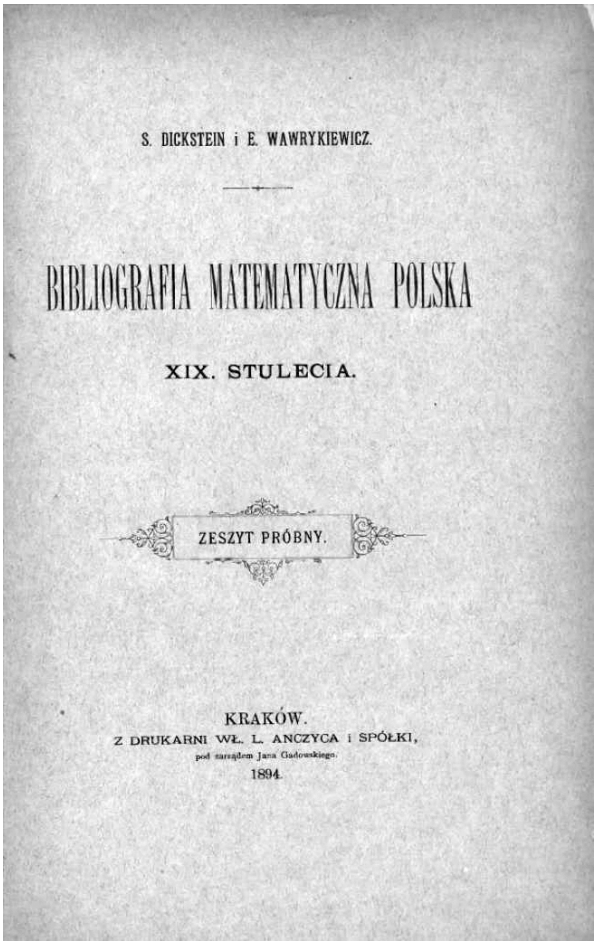
zowanego zamierzenia ze strony krakowskiego środowiska naukowego. Wszak przygotowywana przez nich bibliografia stanowiła kontynuację chronologiczną dzieła Żebrawskiego, uczonego krakowskiego, które ukazało się drukiem w Krakowie. Być może po cichu liczyli, że wydaniem polskiej bibliografii matematycznej XIX wieku zainteresuje się Akademia Umiejętności bądź jakiś wydawca profesjonalny.

Z programu [25] VII Zjazdu Lekarzy i Przyrodników, który odbył się we Lwowie w dniach 23–26 lipca 1894 roku, wynikało, że referat Dicksteina o bibliografii matematycznej polskiej XIX stulecia i przedłożenie jej zeszytu próbnego miało miejsce w drugim dniu obrad sekcji matematyczno-fizycznej. Niestety brak jest bliższych informacji o odbiorze zeszytu próbnego przez uczestników sekcji. Wiadomo tylko, że po wystąpieniu Dicksteina wywiązała się dyskusja (zob. [31]), w której zabrali głos Józef Puzyna, Władysław Gosiewski, Oskar Fabian, Zygmunt Kramsztyk, Kazimierz Żorawski. Na Zjeździe tym Dickstein wystąpił również z referatem, w którym przedstawił stan literatury polskiej w zakresie nauk matematyczno-fizycznych w ciągu dwudziestolecia 1873–1893 na podstawie materiałów zgromadzonych do bibliografii matematycznej XIX wieku.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej zeszytowi próbnemu *Bibliografii matematycznej polskiej XIX stulecia.* Liczące trzydzieści dwie strony wydawnictwo zawierało, oprócz *Słowa wstępnego*, klasyfikację nauk matematycznych (zob. [6]) uchwaloną w 1889 roku w Paryżu przez Międzynarodowy Kongres Bibliografii Nauk Matematycznych oraz fragment części pierwszej *Bibliografii*, ograniczony tylko do litery S.

Koncepcję *Bibliografii* i jej zamierzoną metodę opracowania sformułowane przez autorów ukazywało *Słowo wstępne.*

Bibliografia miała uwzględniać polskie piśmiennictwo matematyczne w zakresie przedmiotów objętych klasyfikacją nauk matematycznych, przyjętą przez kongres. Jak piszą autorzy: „Należą tu wszystkie gałęzie matematyki czystej, t.j. analizy i geometryi, wszystkie działy mechaniki teoretycznej, termodynamika, fizyka matematyczna, astronomia, mechanika niebieska, geodezyę, metody graficzne, tablice matematyczne, filozofia i historya matematyki". Oprócz druków zwartych przedmiotem rejestracji miały być czasopisma, artykuły ogłoszone w czasopismach specjalnych lub ogólnych oraz rozprawy z dzieł zbiorowych, czysto naukowe, oryginalne i tłumaczone. Ze względu na formę piśmienniczą zamierzano uwzględnić podręczniki i książki szkolne, artykuły dydaktyczne, ważniejsze streszczenia i recenzje. Natomiast zaniechano z wykazywania artykułów i wzmianek, pozbawionych charakteru naukowego lub historycznego, ponieważ – jak pisali autorzy – „[...] bez żadnej dla nauki i jej historyi szkody,


S. DICKSTEIN i E. WAWRYKIEWICZ.

BIBLIOGRAFIA MATEMATYCZNA POLSKA

XIX. STULECIA.

ZESZYT PRÓBNY.

KRAKÓW.
Z DRUKARNI WŁ. L. ANCZYCA i SPÓŁKI,
pod zarządem Jana Gadowskiego.
1894.

Karta tytułowa *Bibliografii matematycznej polskiej XIX stulecia* Samuela Dicksteina i Edwarda Wawrykiewicza (Kraków 1894)

nawet w bibliografii naukowej za zupełną uważanej, pomijane być mogą". Obok piśmiennictwa drukowanego planowano rejestracją objąć także ważniejsze rękopisy. W przeciwieństwie do dzieła Żebrawskiego bibliografia miała pomijać kalendarze. Mając na uwadze przede wszystkim prace teoretyczne z zakresu matematyki, autorzy zamierzali zrezygnować z wykazywania „[...] całego zasobu prac doświadczalnych, obserwacyi i zastósowań i w ogóle tego, co nie przedstawia interesu matematycznego", wychodząc ze słusznego założenia, że wymagają one oddzielnych bibliografii specjalnych. „Sądzimy, że to ograniczenie zadania nie będzie poczytane za wadę «Bibliografii» naszej; owszem zgodnem jest ono bardziej z charakterem tej książki, mającej dać zestawienie głównie prac teoretycznych z zakresu matematyki".

Ustalając zasięg chronologiczny autorzy postanowili nie ograniczać się do XIX wieku, ale też uwzględnić publikacje matematyczne, które ukazały się u schyłku wieku XVIII, ponieważ wielu ówczesnych autorów kontynuowało swoją działalność na początku wieku następnego, a ponadto wiele dzieł z ubiegłego stulecia zostało wznowionych w XIX wieku.

Początkowo bibliografia miała rejestrować wyłącznie oryginalne publikacje polskie, prace tłumaczone na język polski oraz prace autorów polskich napisane po łacinie. Przyjęcie tego kryterium związało się z pominięciem prac polskich matematyków ogłoszonych za granicą w językach obcych lub w czasopismach obcych. Autorzy mieli pewne wątpliwości, czy uwzględnić tego typu prace, albowiem „[...] do literatury matematycznej polskiej właściwie nie należą, na rozwój nauki w kraju często wpływu nie mają; co więcej, niekiedy są w kraju zupełnie nieznanemi". Ostatecznie jednak postanowili je wykazać w *Bibliografii*, gdyż „stanowią bądź co bądź pewien dorobek umysłowości naszej i świadectwo naszych zdolności naukowych", a ponadto niektórzy autorzy tych prac mieszkają w kraju, a nawet jeśli nie, to pozostają wierni ojczyźnie i publikują także swoje prace po polsku. W przypadkach wątpliwych, „gdy stwierdzenie polskiego pochodzenia było trudnem [...], solidarność narodowa autora nie były wiadomą" podejmowano odpowiednie poszukiwania, a nawet zwracano się niekiedy wprost do autorów z zapytaniem, czy życzą sobie, aby ich prace były uwzględnione w *Bibliografii*. W ramach przyjętych kryteriów bibliografia miała być możliwie kompletna. Autorzy zapewniali, że dołożyli wszelkich starań, by materiał bibliograficzny był wyczerpujący.

Zbierając materiały do *Bibliografii* wykorzystali autorzy źródła różnego rodzaju. Były to przede wszystkim polskie bibliografie ogólne i bibliografie specjalne. Prócz tego uwzględniono ogólne wydawnictwa informacyjne (encyklopedie) zawierające dane biograficzne i opracowania monograficzne, dotyczące poszczególnych autorów. Pełny wykaz dzieł pomocniczych, z których czerpano wiadomości miał być zamieszczony w wydrukowanej bibliografii.

Wobec braku systematycznej bibliografii zawartości czasopism autorzy zmuszeni byli do przeglądania szeregu polskich i zagranicznych czasopism i wydawnictw zbiorowych, nie tylko matematycznych. Wykonanie tego zadania umożliwiał bogaty księgozbiór Dicksteina, zawierający, obok dzieł klasyków matematyki i wielu starodruków, komplety czasopism matematycznych polskich i obcych oraz rękopisy (zob. [33]). Najważniejsze ze stanowiska bibliograficznego jest to, że starali się materiał opisywać z autopsji. W przypadku trudności dotarcia do prac sięgali do różnych źródeł informacji.

Za model *Bibliografii* autorzy obrali pracę Pietro Riccardiego, włoskiego historyka matematyki i bibliografa, *Biblioteca matematica italiana dalla origine*

della stampa ai primi anni del secolo XIX (t. 1–6, Modena 1878–1893). Idąc za jego przykładem postanowili opracować dzieło składające się z dwóch uzupełniających się części: zrębu głównego w układzie alfabetycznym autorskim z pełnym opisem wydawnictw oraz spisu w układzie systematycznym z opisem skróconym.

Pierwsza część miała charakter biobibliograficzny. W opracowaniach haseł osobowych zastosowali autorzy konstrukcję podobną do Riccardiego – podział na trzy części; bezpośrednio po krótkich danych biograficznych (data urodzenia ewentualnie też śmierci, informacje o zajmowanych stanowiskach, stopniach naukowych i pełnionych funkcjach) podano informację z zakresu bibliografii przedmiotowej (literatura przedmiotu), a następnie bibliografię podmiotową (twórczość).

W bibliografii przedmiotowej, obejmującej opracowania dotyczące autora, opisy – choć zostały uproszczone – pozwalały jednak łatwo zidentyfikować opisywane dokumenty. Układ opracowań był chronologiczny.

Bibliografia podmiotowa miała również układ chronologiczny. W obrębie hasła autorskiego pozycje były numerowane. Opis bibliograficzny był dokładny i obejmował następujące elementy: przy drukach zwartych – tytuł, podtytuł, oznaczenie wydania, nazwę drukarni, rok wydania, dane zewnętrzne (format, objętość); przy publikacjach w czasopismach – tytuł czasopisma, czasem numer rocznika, strony zajęte przez utwór. Opisy utworów z dzieł zbiorowych były zrozumiałe, gdyż cytata wydawnicza została poprzedzona formułkami: „w piśmie", „w dziele", co było decyzją stosunkowo nowatorską, choć już wcześniej zaczęto uświadamiać sobie, iż należy odróżnić zapis utworu w książce od opisu artykułu z czasopisma (zob. [19, str. 262]).

Przed tytułem każdej pracy figurował symbol międzynarodowej klasyfikacji z zakresu matematyki. „Dzięki temu" – jak piszą autorzy – „Bibliografia nasza będzie mogła być spożytkowana i dla celów bibliografii matematycznej powszechnej, którą przygotowuje komitet międzynarodowy".

Autorzy nie ograniczyli się do formalnego opisu druków, ale podawali przy niektórych pozycjach dodatkowe informacje, czyli adnotacje. Objaśnienia te przeważnie dotyczyły treści dokumentów. Zawierały m.in. spis rzeczy pracy, z podaniem odpowiednich stron, krótką charakterystykę prac ważniejszych lub godnych uwagi bądź wskazywały źródła, w których znaleźć można ich ocenę. Niekiedy adnotacje przedstawiały związki bibliograficzne opisywanego dokumentu z innymi dokumentami, informowały o kolejnych wydaniach, przekładach, przeróbkach i przedrukach.

Opisy bibliograficzne nawet z punktu widzenia dzisiejszego użytkownika były bardzo czytelne, także dzięki zastosowaniu przejrzystego układu graficzne-

go (stosowanie pogrubionej czcionki dla hasła autorskiego, w samym opisie druk rozstrzelony dla tłumaczy, osób występujących w tytule, wyróżnienie adnotacji mniejszym krojem czcionki).

W części drugiej zamierzano dokonać podziału całego piśmiennictwa matematycznego na odrębne dyscypliny. W obrębie działów skrócone zapisy poszczególnych pozycji miały być uszeregowane alfabetycznie. Motywując obecność części drugiej autorzy wskazywali, iż pozwoli ona ocenić produkcję wydawniczą w poszczególnych działach nauki matematycznej i wykazać jej większą lub mniejszą obfitość lub braki w naszej literaturze.

Twórcy bibliografii nie zamierzali poprzestać tylko na tym. Planowali również przedstawić piśmiennictwo matematyczne z różnych punktów widzenia interesujących historyka wiedzy i bibliografa, na przykład ukazać produktywność naukową w kolejnych okresach (na przykład w dziesięcioleciach), stosunek liczby prac oryginalnych do przekładów lub przeróbek, produkcję wydawniczą w różnych dzielnicach kraju. Jak słusznie zauważyli „wykazy podobne rzucają pewne światło na zależność produkcji umysłowej od różnych czynników społecznych, politycznych itd."

Powyższa analiza pozwala stwierdzić, że *Bibliografia matematyczna polska XIX stulecia* była dziełem wytrawnego bibliografa. Dickstein dobrze orientował się w problematyce bibliograficznej i znał najważniejsze jej osiągnięcia na gruncie polskim i międzynarodowym.

W 1897 roku prace nad bibliografią dobiegały końca. Autorzy przystąpili do ostatnich czynności związanych z weryfikacją danych bibliograficznych. W związku z tym w tomie pierwszym *Wiadomości Matematycznych* z tego roku zamieścili jeszcze odezwę [9] informującą o zamiarze druku *Bibliografii* wraz z prośbą do autorów o nadsyłanie spisów swych prac naukowych w dziedzinie matematyki, fizyki i ich zastosowań pod adres Redakcji *Prac Matematyczno-Fizycznych*. Niestety do opublikowania bibliografii nie doszło. Zapewne w ostatniej chwili nakładca wycofał się z druku ze względu na duże ryzyko finansowe, ponieważ tego typu dzieła były szczególnie trudne do sprzedaży, a ich wydanie wymagało zaangażowania niemałego nieraz kapitału. Zaistniała sytuacja nie była przypadkiem odosobnionym. Z braku nakładcy wiele podejmowanych ogromnym nakładem pracy dzieł bibliograficznych – wówczas jak i później – nie doczekało się realizacji w druku (zob. [19, str. 129, 140]). Tylko nielicznych autorów stać było na wydanie dzieł własnym sumptem (zob. [18]). Na marginesie, interesujące jest, dlaczego Dickstein nie zwrócił się o zapomogę na publikację bibliografii do Kasy Pomocy Naukowej im. Mianowskiego, której był jednym z twórców i najważniejszych działaczy. Powód był prozaiczny – brak zrozumienia i niechęć Komitetu Kasy do podejmowania wydawnictw bibliograficznych.

Z reguły Komitet odmawiał wsparcia finansowego na przygotowanie bądź druk gotowego dzieła bibliograficznego (zob. [19, str. 134–135]).

Kiedy nadzieje na druk dzieła rozwiały się, Dickstein nie porzucił pracy nad bibliografią , lecz rozszerzył jej zasięg chronologiczny i wraz z Wawrykiewiczem (do jego śmierci w 1917 roku) kontynuował gromadzenie materiałów za lata następne. Z czasem do nich dołączył Aleksander Łaparewicz,[6] matematyk i popularyzator matematyki.

Na I Zjeździe Bibliotekarzy Polskich, który się odbył we Lwowie w 1928 roku, Dickstein podał do wiadomości (zob. [21, str. 57]), iż „przygotowano bibliografię druków polskich w dziedzinie nauk matematycznych i fizycznych od r. 1831 do r. 1910 jako dalszy ciąg bibliografii Żebrawskiego".

W okresie międzywojennym nadal niewiele osób poważnie interesowało się historią matematyki, lecz miały one znaczące osiągnięcia (na przykład Aleksander i Ludwik Birkenmajerowie, Dickstein, Edward Stamm[7]). Również możliwości publikacji dzieł bibliograficznych nie uległy zasadniczej zmianie, mimo coraz większego udziału państwa, nadal istniały trudności z pozyskaniem funduszy na ich druk (zob. [19, str. 139–141]). Formy mecenatu społecznego trwały wprawdzie, ale społeczne instytucje naukowe borykały się z problemami finansowymi, co poważnie ograniczało ich działalność wydawniczą w zakresie bibliografii.

W tych okolicznościach perspektywa wydania *Bibliografii* była wątpliwa. Mimo to Dickstein zaryzykował i podjął próbę pozyskania funduszy. Lecz i tym razem na dzieło nie znalazł wydawcy. Rozczarowanie Dicksteina było duże. W 1927 roku, w liście do Edwarda Stamma (zob. [34]), w cierpkich słowach wypowiadał się o małym zainteresowaniu polityki wydawniczej pracami z historii matematyki. Pisał: „[...] prawda, że i brak funduszów stanowi niemałą przeszkodę, bo uniemożliwia ogłoszenie drukiem prac dawniejszych do druku gotowych. O pozyskanie poważniejszych subwencji na cele wydawnicze dziś jeszcze myśleć nie można, nie tracę wszakże nadziei poprawy". Do końca niezachwianie jednak wierzył, że dzieło, któremu poświęcił większość swego życia, ujrzy kiedyś światło dzienne i będzie stanowić niezbędny warsztat naukowy dla

[6] Aleksander Łaparewicz (1864–1938) od 1890 roku pracował w Towarzystwie Kredytowym miasta Warszawy oraz jako wykładowca matematyki w prywatnych gimnazjach. W latach 1906–1915 aktywnie działał w Kole Matematyczno-Fizycznym, którego prezesem był Dickstein. Autor *Bibliografii nauczania przedmiotów matematyczno-fizycznych w zakresie średnim* (dodatek do 14 tomu *Wiadomości Matematycznych* z 1910 roku). Na łamach *Wiadomości* i innych czasopism publikował prace popularyzujące matematykę (zob. [22, 28]).

[7] Edward Stamm (1886–1940), nauczyciel gimnazjalny, logik, matematyk i historyk matematyki. Był jedną z niewielu osób w okresie międzywojennym, które publikowały prace z zakresu historii matematyki. Utrzymywał bliskie i serdeczne stosunki z Dicksteinem (zob. [23, 28]).

historyka matematyki XIX wieku. Dlatego nanosił w nim poprawki i nieustannie uzupełniał, doprowadzając je ostatecznie do 1915 roku.[8] Było to dowodem dużej bezinteresowności i prawdziwego poświęcenia dla nauki, cech właściwych całemu życiu autora.

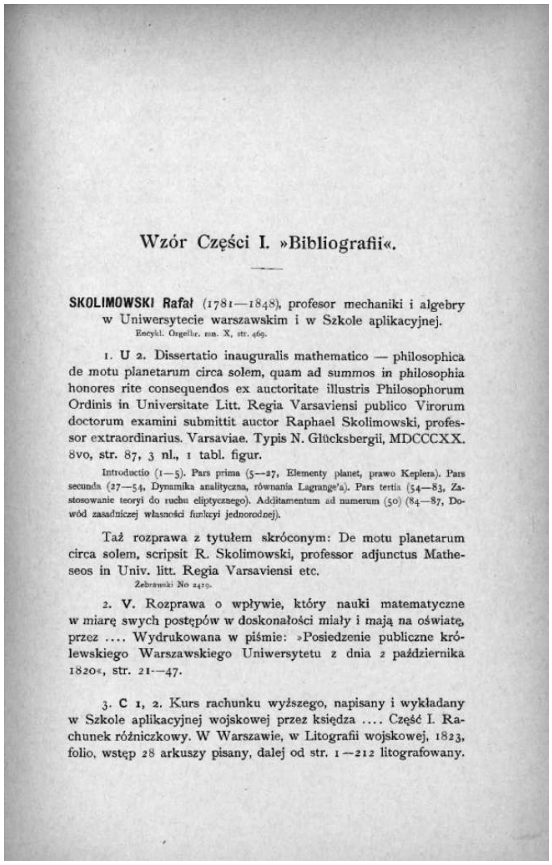
Nieopublikowanie *Bibliografii* było niewątpliwie niepowetowaną stratą dla historii kultury narodowej i matematyki polskiej, która została pozbawiona źródeł do swojej dziewiętnastowiecznej historii. Świadczy o tym fakt, że zeszyt próbny *Bibliografii* nadal wykorzystywany jest w badaniach historyczno-matematycznych jako źródło informacji.

Jakkolwiek przedsięwzięcie zakończyło się fiaskiem, miało też swoje dobre strony. Dickstein bowiem pasją bibliograficzną zaraził swoich współpracowników. Wawrykiewicz pozostawił po sobie bibliografię zawartości *Przeglądu Technicznego* za lata 1875–1909 (zob. przypis 2), Łaparewicz zaś bibliografię nauczania przedmiotów matematyczno-fizycznych (zob. przypis 6), która powstała prawdopodobnie na marginesie prac zbierackich do bibliografii matematyki polskiej XIX wieku. Zawierała ona obszerną listę podręczników z przedmiotów ścisłych z lat 1897–1909.

Równolegle do prac nad bibliografią matematyczną XIX wieku, Dicksteina ciągle nurtowała myśl uzupełnienia i wydania *Bibliografii* Żebrawskiego. Wykonanie tego zadania było dla niego marzeniem, które żywił od najwcześniejszych lat swojej pracy bibliograficznej. Toteż nic dziwnego, że nie krył wielkiej radości, kiedy dowiedział się, że sprawą zainteresował się Stamm. Wiedząc z doświadczenia, jak trudno mu będzie znaleźć środki finansowe na wydanie bibliografii, Dickstein rozpoczął starania o ich pozyskanie, uruchamiając swoje kontakty w świecie naukowym. W 1934 roku, w liście do Stamma (zob. [34]) pisał: „[...] ale nam iść powinno przede wszystkim o wydanie książki dającej obraz produkcji naukowej. Taka książka jest potrzebna i pożądana. Pan Stefan Dembowski[9] dyrektor Biblioteki Narodowej, z którym rozmawiałem o tym przedmiocie, uznał tę potrzebę w zupełności i gotów jest nawet wydatek na ogłoszenie drukiem tej książki pokryć z budżetu przyszłorocznego Biblioteki Narodowej. Radzi przy tym, aby proponowane wydawnictwo nie było nazwane drugą edycją Żebrawskiego, lecz, aby nosiło nazwę *Bibliografii matematyki polskiej*, przy czym, czy to w tytule, czy we wstępie wyraźnie zaznaczyć, że i w jakim stopniu korzystano z dzieła Żebrawskiego..." Z dalszej korespondencji wynika, że Dickstein mocno zaangażował się w planowane przez Stamma

[8] Informację o górnej granicy zasięgu chronologicznego przedsięwzięcia podał Dickstein w wystąpieniu na swoim jubileuszu [13]. Niektóre opracowania (na przykład [14, 15]) podają błędną informację, że bibliografia sięgała 1939 roku.

[9] Właściwie Demby.



Wzór Części I. »Bibliografii«.

SKOLIMOWSKI Rafał (1781—1848), profesor mechaniki i algebry w Uniwersytecie warszawskim i w Szkole aplikacyjnej.
Encykl. Orgelbr. tom. X, str. 469.

1. **U 2.** Dissertatio inauguralis mathematico — philosophica de motu planetarum circa solem, quam ad summos in philosophia honores rite consequendos ex auctoritate illustris Philosophorum Ordinis in Universitate Litt. Regia Varsaviensi publico Virorum doctorum examini submittit auctor Raphael Skolimowski, professor extraordinarius. Varsaviae. Typis N. Glücksbergii, MDCCCXX. 8vo, str. 87, 3 nl., 1 tabl. figur.

Introductio (1—5). Pars prima (5—27, Elementy planet, prawo Keplera). Pars secunda (27—54, Dynamika analityczna, równania Lagrange'a). Pars tertia (54—83, Zastosowanie teoryi do ruchu eliptycznego). Additamentum ad numerum (50) (84—87, Dowód zasadniczej własności funkcyi jednorodnej).

Taż rozprawa z tytułem skróconym: De motu planetarum circa solem, scripsit R. Skolimowski, professor adjunctus Matheseos in Univ. litt. Regia Varsaviensi etc.
Żebrawski No 2419.

2. **V.** Rozprawa o wpływie, który nauki matematyczne w miarę swych postępów w doskonałości miały i mają na oświatę, przez .... Wydrukowana w piśmie: »Posiedzenie publiczne królewskiego Warszawskiego Uniwersytetu z dnia 2 października 1820«, str. 21—47.

3. **C 1, 2.** Kurs rachunku wyższego, napisany i wykładany w Szkole aplikacyjnej wojskowej przez księdza .... Część I. Rachunek różniczkowy. W Warszawie, w Litografii wojskowej, 1823, folio, wstęp 28 arkuszy pisany, dalej od str. 1—212 litografowany.

Fragment *Bibliografii matematycznej polskiej XIX stulecia* z 1894 roku

przedsięwzięcie. Zaproponował mu współpracę oraz udostępnienie zebranych przez siebie materiałów bibliograficznych. Dzielił się uwagami na temat formy projektowanej publikacji i kryteriów doboru materiału. Niestety z planów tych nic nie wyszło.

Sprawa opracowania pełnej bibliografii polskiego piśmiennictwa matematycznego trapiła Dicksteina niemal do końca życia. W swym wystąpieniu na jubileuszu (zob. [13]) sześćdziesięciopięciolecia działalności naukowej, pedagogicznej i społecznej, jaki urządziło mu w 1937 roku Polskie Towarzystwo Matematyczne, wśród zadań wymagających doprowadzenia do końca, a najbardziej leżących mu na sercu, wymienił uzupełnienie i wydanie *Bibliografii* Żebrawskiego.

Śmierć Dicksteina w 1939 roku, okupacja oraz zagłada materiałów zgromadzonych przezeń materiałów bibliograficznych, zniweczyły nadzieje na dokończenie prac nad polską retrospektywną bibliografią matematyczną.

O wartości dziedzictwa Dicksteina w zakresie polskiej retrospektywnej bibliografii matematycznej polskiej stanowią trzy elementy: uświadomienie potrzeby i konieczności prowadzenia dokumentacji bibliograficznej w zakresie matematyki, jako punktu wyjścia wszelkich poszukiwań badawczych dotyczących historii matematyki, zapoczątkowanie prac nad bibliografią matematyczną polską XIX wieku, zainicjowanie działań zmierzających do uzupełnienia i wydania *Bibliografii* Żebrawskiego.

Po drugiej wojnie światowej przekaz bibliograficzny Dicksteina w dziedzinie retrospektywnej bibliografii matematycznej stanowił istotne źródło inspiracji do kontynuowania rozpoczętych na tym polu prac, a także inicjowania nowych.[10]

Zaraz po wojnie Polska Akademia Umiejętności gorliwie zajęła się rejestracją polskiego piśmiennictwa matematycznego. Już w 1947 roku ogłosiła *Wykaz prac z działu nauk matematyczno-przyrodniczych wykonanych w Polsce w okresie okupacji niemieckiej w latach 1939–1945*. Zamieszczał on m.in. spis prac matematycznych wykonanych w okresie okupacji zaznaczając, czy dochowały się i w jakim stopniu. Podawał także tytuły prac zniszczonych częściowo lub całkowicie i oraz tekst prac ocalałych. Realizując ideę pochodzącą od Dicksteina, Akademia ogłosiła w 1952 roku tom 21 *Katalogu polskiej literatury matematyczno-przyrodniczej za lata 1945–1949*, wydany dwa lata później.

Potrzeby w zakresie inwentaryzacji polskiego dorobku naukowego w dziedzinie matematyki spowodowały, że w 1957 roku wydano *Bibliografię matematyki polskiej w X-leciu 1944–1954*. Dotychczas jest to jedyna większa, całościowa bibliografia z tej dziedziny. Według opinii Marii Konopackiej (zob. [14]) *Bibliografia* obciążona była niestety wieloma błędami i brakami, które wynikały zarówno z pośpiechu przy jej opracowaniu, jak i braku współpracy z bibliografami-fachowcami. W 1963 roku praca ukazała się bez żadnych zmian i uzupełnień (mimo że obejmowała zaledwie 45% druków z tego okresu) w wersji angielskiej *Bibliography of Polish mathematics 1944–1954*. Kontynuację *Bibliografii* za lata 1955–1964 przygotowała Konopacka na zlecenie Instytutu Matematycznego PAN (zob. [14]). Zestawienie jednak nie zostało opublikowane.

Odpowiedzią na wyraźne potrzeby badań historyczno-matematycznych była bibliografia polskiego piśmiennictwa w zakresie historii matematyki od XV wieku do 1976 roku opracowana przez Jadwigę Dianni, historyka matematyki. Niestety również i to dzieło nie ukazało się drukiem. Jak podano w książce [28], zostało przekazane do Archiwum PAN w Krakowie.

[10] Przeglądu prac bibliograficznych z zakresu matematyki za lata 1944–1965 dostarcza artykuł [14].

Potrzeba opracowania pełnej retrospektywnej bibliografii matematycznej nadal nurtowała środowisko historyków matematyki. Świadczy o tym dezyderat [26] zgłoszony na sesji naukowej, poświęconej historii matematyki w Polsce i jej potrzebom, która odbyła się we Wrocławiu w 1964 roku. Zaapelowano wówczas o powołanie pracowni bibliograficznej, która przygotowałaby pełną bibliografię polskiego piśmiennictwa matematycznego, realizując wreszcie testament naukowy Dicksteina. Do realizacji postulatu jednak nie doszło.

Wychodząc naprzeciw potrzebom historyków nauk ścisłych, Komitet Historii Nauki i Techniki PAN wydał w 1992 roku reprint dzieła Żebrawskiego, której pierwsze wydanie zostało całkowicie wyczerpane. Dzięki temu *Bibliografija*, mimo swoich niedostatków, w dalszym ciągu należy do podstawowych narzędzi pracy każdego historyka nauk ścisłych zajmującego się okresem do 1830 roku.

Dużym krokiem naprzód w kierunku opracowania pełnej retrospektywnej bibliografii polskiego piśmiennictwa matematycznego stało się opublikowanie w 2014 roku przez Witolda Więsława, historyka matematyki *Dodatku III do Bibliografiji Teofila Żebrawskiego* [35]. Dzieło to stanowi rezultat żmudnej, dwudziestoletniej pracy, opartej na szeroko zakrojonych kwerendach archiwalno-biblioteczno-bibliograficznych. Praca ta, jak sam tytuł wskazuje, została pomyślana jako kontynuacja pracy Żebrawskiego i zachowywała jej układ (chronologiczny) oraz numerację. Zawiera uzupełnienia do dzieła i obejmuje okres do 1890 roku. Odnotowane też zostały liczne prace z późniejszego okresu do I wojny światowej, jak również niektóre publikacje z XX i XXI wieku, uzupełniające i rozwijające wcześniejsze informacje o polskiej literaturze matematycznej podane u Żebrawskiego. Nowością w stosunku do oryginału jest uwzględnienie ekonomii i rolnictwa jako działów nauk ścisłych. *Dodatek III* rejestruje 2762 pozycje, co przekracza dalece liczbę pozycji odnotowanych w obu *Dodatkach*, które Żebrawski opublikował w 1886 roku. Sprawność informacyjną pracy podnosi indeks alfabetyczny.

Dodatek III ma ogromne znaczenie dla badań historycznych w zakresie nauk ścisłych. Stanowi ono też częściową realizację marzenia bibliograficznego Dicksteina.

Bibliografia

[1] J. Bieliński, *Stan nauk matematyczno-fizycznych za czasów Wszechnicy Wileńskiej, Szkic bibliograficzny*, Prace Matematyczno-Fizyczne 2 (1890), 265–432, odb. Drukarnia Józefa Sikorskiego, pod zarządem A. Saładyckiego, Warszawa 1890.

[2] J. Cabaj, *Walczyć nauką za Ojczyznę. Zjazdy ponadzaborowe polskich środowisk naukowych i zawodowych jako czynnik integracji narodowej* (*1869–1914*), Siedlce 2007.
[3] J. Dianni, *Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu* (*1870–1882*), Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 17 (1972), nr 1, 45–57.
[4] S. Dickstein, *Karol Estreicher. Wspomnienie pośmiertne*, Przegląd Biblioteczny 1 (1908), nr 3–4, 189–202.
[5] S. Dickstein, *Matematyka*, Książka 3 (1903), nr 13, 496.
[6] S. Dickstein, *Uchwały Międzynarodowego Kongresu Bibliografii Nauk Matematycznych*, Prace Matematyczno-Fizyczne 3 (1892), 179–182.
[7] S. Dickstein, *Wiadomości bibliograficzne. O badaniach historyczno-matematycznych w Polsce*, Prace Matematyczno-Fizyczne 2 (1890), 247–264.
[8] S. Dickstein, E. Wawrykiewicz, *Bibliografia matematyczna polska XIX stulecia. Zeszyt próbny*, nakładem autorów, Kraków 1894.
[9] S. Dickstein, E. Wawrykiewicz, *Odezwa*, Wiadomości Matematyczne 1 (1897), nr 2–3, 137.
[10] S. Domoradzki, *Samuel Dickstein* (*1851–1939*) *w świetle korespondencji z Władysławem Natansonem i Marianem Smoluchowskim. Problemy nurtujące naukę polską*, [w:] Matematyka przełomu XIX i XX wieku. Nurt mnogościowy (J. Mioduszewski, red.), Materiały III Szkoły Historii Matematyki, Katowice 1992, 84–103.
[11] R. Duda, *Matematycy XIX i XX wieku związani z Polską*, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 2012.
[12] K. Estreicher, *Bibliografia polska XIX stólecia*, t. 4 (W–Z), Akademia Umiejętności, Kraków 1880.
[13] *Jubileusz działalności naukowej, pedagogicznej i społecznej Profesora Samuela Dicksteina. III Polski Zjazd Matematyczny, Warszawa 3 X 1937 r.*, staraniem Komitetu Jubileuszowego, Warszawa 1938.
[14] M. Konopacka, *Bibliografia polskiego piśmiennictwa matematycznego w okresie 1944–1965*, [w:] Druga Ogólnokrajowa Narada Bibliografów. Warszawa 20 VI 1966, Biblioteka Narodowa, Warszawa 1967, 143–152.
[15] J. Korpała, *Dzieje bibliografii w Polsce*, Stowarzyszenie Bibliotekarzy Polskich, Warszawa 1969.
[16] *Kronika*, Przewodnik Bibliograficzny (Kraków) (February 1, 1893), 37–38.
[17] A. Matczuk, *Bibliografia dziedzinowa w działalności Akademii Umiejętności i Polskiej Akademii Umiejętności w latach 1872–1952*, [w:] Między tekstem a znakiem (A. Jaworska, S. Górzyński, red.), Wydawnictwo DiG, Warszawa 2013, 467–482.
[18] A. Matczuk, *Mecenat nad bibliografiami dziedzinowymi w okresie zaborów*, Folia Bibliologica 55/56 (2013/2014), 53–73.
[19] A. Matczuk, *Polskie bibliografie nauk humanistycznych i społecznych. Historia i metodyka*, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 2014.
[20] A. Matczuk, *Teofil Żebrawski jako bibliograf*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 42 (1997), nr 3-4, 119–138.

[21] *Pamiętnik I Zjazdu Bibliotekarzy Polskich we Lwowie* (*26–29 V 1928 r.*), J. B. Richter (oprac.), staraniem Koła Bibliotekarzy Polskich, Lwów 1939.

[22] W. Piotrowski, *Aleksander Łaparewicz popularyzator matematyki*, Matematyka 35 (1982), nr 3, 173–175.

[23] H. Markiewicz i in. (red.), *Polski słownik biograficzny*, t. 41, Instytut Historii PAN, Fundacja na rzecz Nauki Polskiej, Warszawa.

[24] *Program przedstawionego do konkursu przez Towarzystwo Nauk Ścisłych zadania Ułożenie bibliografii piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki oraz ich zastosowań od 1830 aż do najnowszych czasów*, Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu 4 (1874), 149–150.

[25] *Program VII Zjazdu Lekarzy i Przyrodników w Polsce we Lwowie od 23 do 26 lipca 1894*, Druk Wł. Łozińskiego, Lwów 1894.

[26] Z. Opial, *Stan i potrzeby historii matematyki w Polsce*, Wiadomości Matematyczne 8 (1965), 65–83.

[27] *Sekcja fizyczno-matematyczna i chemiczna. Posiedzenie I dnia 17 lipca 1891 r.*, [w:] Dziennik Szóstego Zjazdu Lekarzy i Przyrodników Polskich, Kraków 1891 (3), 10.

[28] S. Domoradzki, Z. Pawlikowska-Brożek, D. Węgrowska (red.), *Słownik biograficzny matematyków polskich*, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnobrzegu, Tarnobrzeg 2003.

[29] Z. Skoczyński (red.), *Słownik biograficzny techników polskich, z. 8*, Wydaw. Czasopism i Książek Technicznych NOT-SIGMA, Warszawa 1997.

[30] I. Treichel (red.), *Słownik pracowników książki polskiej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Wrocław 1972.

[31] *Sprawozdanie z posiedzeń sekcji fizyki i matematyki. VII Zjazd lekarzy i przyrodników polskich we Lwowie*, [w:] Pamiętnik VII Zjazdu Lekarzy i Przyrodników Polskich we Lwowie. Część przyrodnicza (W. Bylicki, red.), Lwów 1897, 119.

[32] K. Stachowska, *Akademia Umiejętności w Krakowie w listach Samuela Dicksteina*, Rocznik Biblioteki PAN w Krakowie 7 (1982), 145–221.

[33] E. Tatarkiewicz-Hilczenko, *Dawni bibliofile matematyczni i stare matematyczne księgozbiory*, Bibliotekarz 11 (1965), 325–329.

[34] A. Wachułka, *S. Dickstein a historia matematyki w Polsce w świetle korespondencji z E. Stammem*, Wiadomości Matematyczne 7 (1964), 191–202.

[35] W. Więsław, *Dodatek III do Bibliografiji Teofila Żebrawskiego*, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2014.

[36] T. Żebrawski, *Bibliografija piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki oraz ich zastosowań*, nakładem właściciela Biblioteki Kórnickiej, przewodniczącego w Towarzystwie Nauk Scisłych w Paryżu, Kraków 1873, dodatki do *Bibliografiji piśmiennictwa polskiego* [...], Kraków 1886. [Reprint: IHN PAN 1992].

[37] T. Żebrawski, *Wiadomość o Adamie Kochańskim i pismach jego matematycznych*, Rocznik Towarzystwa Naukowego Krakowskiego 7 (1862), odb. Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1862.

[38] R. Żebrowski, *Działalność pedagogiczna Samuela Dicksteina*, Biuletyn Żydowskiego Instytutu Historycznego w Polsce 1 (1990), 33–43.
[39] R. Żebrowski, *Działalność Samuela Dicksteina na niwie naukowej*, Biuletyn Żydowskiego Instytutu Historycznego w Polsce 4 (1989), 65–67.

Alicja Matczuk
Instytut Informacji Naukowej i Bibliotekoznawstwa
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
alicja.matczuk@poczta.umcs.lublin.pl

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 351–354
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Wywiad z Iwoną Ryniewicz, Prezes Zarządu mFundacji

Piotr Borodulin-Nadzieja: *Obecnie trwa druga edycja konkursu „Krok w przyszłość" organizowanego przez Fundację mBanku, w którym nagradzane są prace studenckie z matematyki. Jakie prace można było zgłaszać na konkurs i na jakie laury może liczyć zwycięzca? Czy planowane są kolejne edycje konkursu?*

Iwona Ryniewicz: „Krok w przyszłość" umożliwia zgłaszanie prac licencjackich, magisterskich lub samodzielnych prac naukowych napisanych przez studentów i przyjętych do druku w międzynarodowym czasopiśmie naukowym. W ramach bieżącej drugiej edycji konkursu można było składać prace od 30 czerwca do 31 października 2017 roku. Rozstrzygnięcie nastąpi w marcu 2018 roku. Autor najlepszej pracy otrzyma nagrodę pieniężną w wysokości 20 000 złotych oraz zostanie uhonorowany statuetką „Stefcio", stworzoną na cześć patrona konkursu – Stefana Banacha. Przewidujemy także dwa równorzędne wyróżnienia po 10 000 złotych. Kolejna trzecia odsłona konkursu rozpocznie się w drugiej połowie 2018 roku i zakończy wiosną 2019 roku.

Jaka była geneza konkursu? Czy jest to inicjatywa Fundacji mBanku?

Tak, to jest inicjatywa mFundacji. Po trzech latach działalności zauważyliśmy, że w naszym portfolio brakuje działań na rzecz studentów i absolwentów matematyki. Pan profesor Marek Kordos, który jest członkiem Rady Fundacji mBanku, podsunął nam pomysł konkursu na najlepszą pracę studencką. Dzięki pozycji Kordosa w środowisku akademickim szybko udało się dopiąć szczegóły, a przede wszystkim – pozyskać zacne jury. Sekretariat konkursu powierzyliśmy

Instytutowi Matematyki PAN. I konkurs ruszył. W pierwszej edycji wpłynęły trzydzieści trzy prace.

Kto ocenia nadesłane prace?

Jury konkursu jest zróżnicowane, w jego skład wchodzą uznani członkowie środowiska naukowego w Polsce. Wśród nich są:

- prof. dr hab. Paweł Strzelecki, dziekan Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, przewodniczący jury,
- prof. dr hab. Dariusz Buraczewski z UWr,
- Lidia Jabłonowska-Luba, wiceprezes zarządu mBanku ds. zarządzania ryzykiem,
- dr hab. Marek Kordos z UW, członek Rady Fundacji mBanku,
- prof. dr hab. Dov Bronisław Wajnryb z Politechniki Rzeszowskiej,
- dr Łukasz Pańkowski z UAM, laureat międzynarodowej nagrody im. Stefana Banacha za najlepszą rozprawę doktorską w obszarze nauk matematycznych,
- prof. dr hab. Paweł Rowiński, wiceprezes Polskiej Akademii Nauk.

Czy jesteście Państwo zadowoleni z liczby nadesłanych prac i z ich poziomu?

Tak, nawet bardzo. Wydaje się, że liczba nadesłanych do nas prac to duża część tych w ogóle w naszym kraju obronionych. Co ważne, do konkursu zgłosili się młodzi ludzie z różnych ośrodków naukowych – nie tylko z dużych miast i uczelni, ale także z tych mniejszych, takich jak Uniwersytet Zielonogórski, Politechnika Białostocka, Politechnika Śląska czy Politechnika Rzeszowska. To cieszy podwójnie. Widać, że mamy zdolnych matematyków i pasjonatów tej dziedziny w całej Polsce.

Jaka była tematyka nadesłanych prac? Czy dominowały prace związane z zastosowaniem matematyki?

Prace, które otrzymaliśmy, były bardzo różnorodne, ciężko wskazać jedną dominującą dziedzinę, przy czym wyraźnie widać, które tematy budzą żywe zainteresowanie wśród studentów. W konkursie znalazły się prace z analizy matematycznej, geometrii, topologii, równań różniczkowych, statystyki, teorii decyzji i teorii gier.

Konkurs „Krok w przyszłość" jest tylko jednym z działań Fundacji wspierających utalentowaną matematycznie młodzież. Dlaczego zdecydowaliście się Państwo wspierać właśnie matematyków, a nie dziedziny bliższe, przynajmniej pozornie, bankowości?

Powodów jest wiele. Bez matematyki nie ma edukacji finansowej, przedsiębiorczości, bankowości, ale także fizyki, architektury, informatyki. Chcemy rozwijać i stymulować myślenie matematyczne, pokazywać, jak jest ciekawe i potrzebne w codziennym życiu. Liczymy, że dzięki temu przysłużymy się całemu społeczeństwu i gospodarce, wspierając rozwój wysoko wykwalifikowanej kadry pracowników związanych z zaawansowanymi technologiami i innowacjami.

Czy mogliby Państwo pokrótce opisać inne działania Fundacji mBanku wspierające utalentowaną matematycznie młodzież?

mFundacja prowadzi kilka programów, w ramach których wspiera dzieci i młodzież w nauce matematyki. Nie koncentrujemy się tylko na szczególnie zdolnych, wierzymy, że matematyka może zaciekawić każdego.

– mPotęga – program grantowy, który popularyzuje matematykę wśród młodych ludzi. Program ma także zachęcić nauczycieli, rodziców i pasjonatów matematyki do przezwyciężenia rutyny i schematów w nauczaniu tego przedmiotu. Programem grantowym obejmujemy zarówno wszystkie typy szkół i uczelnie wyższe, ale także biblioteki, organizacje pozarządowe oraz grupy nieformalne z całej Polski. Za mPotęgę zostaliśmy wyróżnieni statuetką Złotego Bankiera w kategorii „Bank odpowiedzialny społecznie".

– Dotacje – jednorazowe wsparcie finansowe dla projektów z zakresu edukacji matematycznej i okołomatematycznej. Nauczyciele mogą wnioskować o pieniądze na sfinansowanie konkursu matematycznego, specjalnych lekcji matematyki, warsztatów etc. Przez trzy lata na dotacje przeznaczyliśmy blisko dwa miliony złotych. W tym czasie dofinansowaliśmy sto trzydzieści sześć projektów, wspierając prawie sto dziewięćdziesiąt tysięcy odbiorców (uczniów, nauczycieli i rodziców dzieci)

– „Mistrzowie matematyki" – program stypendialny, który pozwala wybitnie uzdolnionym matematycznie uczniom i studentom na kontynuację nauki niezależnie od ich sytuacji materialnej. Program jest skierowany do organizacji pozarządowych, które mogą prowadzić programy stypendialne. Organizacje te mogą ubiegać się o dofinansowanie stypendiów na rzecz uczniów i studentów wybitnie utalentowanych matematycznie. Przez trzy lata w programie stypendialnym „Mistrzowie Matematyki" wsparliśmy stypendiami czterystu uczniów.

– „Wakacje z matematyką" – konkurs grantowy, który ma na celu zapewnienie dzieciom wakacyjnych atrakcji łączących zabawę z nauką matematyki. O granty mogą ubiegać się organizacje pozarządowe, biblioteki publiczne i grupy nieformalne (na przykład koła naukowe, nauczyciele) z Warszawy, Łodzi, Krakowa, Poznania, Wrocławia i Gdańska. Premiujemy projekty, które angażują dzieci w spędzanie wolnego czasu na świeżym powietrzu.

Czy mFundacja ma w planach wsparcie również profesjonalnych matematyków, na przykład w działalności wydawniczej?

Naszą misją jest wspieranie edukacji matematycznej. Wszystko zależy od projektu, trudno złożyć jakąkolwiek deklarację w ciemno.

Jak duża część pracowników mBanku to absolwenci matematyki? Jakie są doświadczenia mBanku z absolwentami matematyki?

mBank zatrudnia ponad stu absolwentów wydziałów matematyki. Matematyka w banku to codzienność, na przykład w zarządzaniu ryzykiem czy w księgowości. Większość działalności bankowej opiera się na matematyce, choć czasem w różnych wcieleniach – analizie finansowej, programowaniu czy modelowaniu ekonometrycznym. Między innymi dlatego wybraliśmy matematykę jako przedmiot działań mFundacji.

Dziękuję za wywiad. Dziękujemy także mFundacji za hojne i konsekwentne wspieranie edukacji matematycznej. My też wierzymy, że pieniądze wydane w ten sposób nie pójdą na marne.

Wywiad przeprowadził Piotr Borodulin-Nadzieja (Wrocław)
Piotr.Borodulin-Nadzieja@math.uni.wroc.pl

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 355–364
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Walerian Piotrowski (Warszawa)

Matematyka i matematycy na polskich medalach

Matematyka jako jedna z nielicznych dyscyplin naukowych już w starożytności miała swoją muzę. W Ogrodzie Saskim w Warszawie znajduje się rzeźba z XVIII w. przedstawiająca piękną dziewicę – symbol królowej nauk. Matematycy byli otaczani przeważnie powszechnym szacunkiem. Pierwszą monetą grecką z portretem wybitnego męża był obiekt zawierający profil głowy Pitagorasa; na przestrzeni wieków ukazało się wiele medalionów, medali, monet z podobiznami wielkich matematyków.

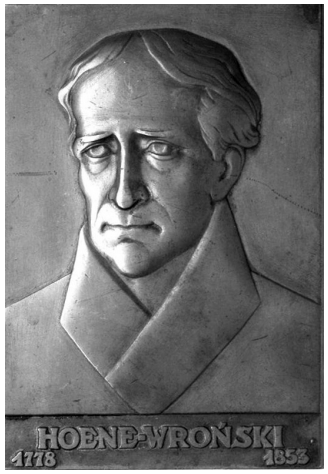
W tej krótkiej notatce chciałbym poświęcić kilka słów naszym medalom z XX wieku, na których znajdują się portrety matematyków lub które dotyczą tematyki matematycznej.

Pierwszą grupę stanowią medale wydane przez instytucje czy towarzystwa naukowe na cześć tych osób, które zasłużyły się dobrze matematyce oraz instytucjom i organizacjom związanych z matematyką.

Jako pierwszą przedstawimy plakietę wybitą w 1928 roku poświęconą Józefowi Marii Höene-Wrońskiemu. Autorem plakiety był Józef Aumiller, medalier Mennicy Warszawskiej.

Kazimierz Żorawski był w latach 1928–1931 prezesem Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. W 1931 roku został wybity został według projektu Józefa Aumillera medal upamiętniający odbudowę Pałacu Staszica – siedziby TNW. Na awersie tego medalu znajduje się profil K. Żorawskiego, a wokół biegnie napis: „Kazimierz Żorawski, prezes T. N. W. 1931".

W latach 1931–1951 prezesem TNW był Wacław Sierpiński. W roku 1951 został wybity medal na cześć tego matematyka, także projektu Aumillera. Na awersie znajduje się podobizna Sierpińskiego.



Józefa Maria Höene-Wroński na plakietce honorowej



Medal pamiątkowy z wizerunkiem Kazimierza Żorawskiego



Medal upamiętniający dwudziestolecie prezesury TNW Władysława Sierpińskiego

W 1966 roku Uniwersytet Warszawski wydał na cześć swojego rektora Stanisława Turskiego, w sześćdziesiątą rocznicę jego urodzin, medal lany projektu Edwarda Gorola. Na awersie zostało umieszczone popiersie Stanisława Turskiego, na rewersie jest napis: „W 60-lecie urodzin rektora Uniwersytetu Warszawskiego prof. dr. Stanisława Turskiego. 1966", a w środku godło UW. Autor medalu wręczył go uroczyście jubilatowi 15 maja 1966 roku. Wykonano tylko kilka sztuk tego medalu.

Drugą grupę medali stanowią medale wydawane przez towarzystwa naukowe i kulturalne z różnych okazji; znajdują się na nich portrety znanych matematyków dla zaakcentowania i związków z danym terenem. W 1975 roku został wybity (a później kilkakrotnie wznawiany) medal, na którego awersie jest portret Jan Brożka z Kurzelowa. Medal został wydany przez Włoszczowskie Towarzystwo Krzewienia Kultury, a projektował go Jerzy Jarnuszkiewicz (Kurzelów znajduje się 6 km na północ od Włoszczowej).

Również w 1975 roku Towarzystwo Przyjaciół Nauk w Legnicy wydało z okazji XV rocznicy swego powstania medal, którego rewers przedstawia portret Witelona – filozofa, optyka, matematyka i fizyka ze Śląska. Medal zaprojektowała Wanda Gosławska.

Oddział Mławski Polskiego Towarzystwa Archeologicznego i Numizmatycznego zrealizował w 1981 roku medal z podobizną Stanisława Grzebskiego[1], autora pierwszego w języku polskim podręcznika geometrii (Grzebsk – miejscowość, z której pochodził Grzebski, leży niedaleko Mławy). Projektantem medalu była Stanisława Wątróbska, medal wybito w dwóch wersjach: srebrzonej i brązowej.

W latach osiemdziesiątych XX wieku artysta rzeźbiarz Zygmunt Kaczor (1924–1999), tworzący w Kielcach, wykonał lany medal Samuela Dicksteina.

W 2005 roku wybity został przez Bydgoskie Muzeum Sztuki Medalierskiej w Mennicy Polskiej medal poświęcony Marianowi Rejewskiemu, urodzonemu w Bydgoszczy w 1905 roku.

Medale tej grupy stanowią wyraz przywiązania, chluby i pamięci kultywowanej na danym terenie w odniesieniu do sławnego matematyka.

Wreszcie trzecia grupa to medale matematyczne wybite i przyznawane osobom, które przyczyniają się do rozwoju matematyki polskiej.

Senat Uniwersytetu Warszawskiego, podejmując inicjatywę Oddziału Warszawskiego PTM i Wydziału Matematyki i Mechaniki UW dotyczącą uczczenia pamięci Wacława Sierpińskiego, postanowił organizować co roku (od 1974) w rocznicę jego urodzin uroczysty wykład, a także ufundować specjalny medal.

[1] Używana jest również forma Grzepski – przyp. red.



Jan Brożek na medalu wybitym przez
Włoszczowskie Towarzystwo Krzewienia Kultury



Witelon na medalu wybitym przez Towarzystwo Przyjaciół Nauk w Legnicy



Stanisław Grzebski na medalu wybitym przez Oddział Mławski Polskiego
Towarzystwa Archeologicznego i Numizmatycznego

Wskazana przez jury – powoływane przez rektora UW – osoba wygłasza referat i jest wyróżniana medalem (pierwszy wykład został wygłoszony 8 marca 1974 roku przez Kazimierza Kuratowskiego). Wykład i wręczenie medalu stanowią dla środowiska matematycznego wielkie wydarzenie.

W 1992 roku ustanowiona została nagroda Prezydium Polskiej Akademii Nauk w setną rocznicę urodzin Stefana Banacha. Medal na awersie przedstawia portret Banacha, a na rewersie dedykację dla obdarowanego. Pierwszym obdarowanym był w 1992 roku Zbigniew Ciesielski z Gdańska.

W kolejnym roku przypadała dziewięćdziesiąta rocznica urodzin Władysława Orlicza. Rada Wydziału Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu, gdzie Orlicz pracował po II wojnie światowej, postanowiła organizować corocznie uroczysty wykład im. Władysława Orlicza, a zaproszonego wykładowcę honorować specjalnym medalem. Pierwszy Wykład im. W. Orlicza wygłosił 26 listopada 1993 roku Władysław Narkiewicz, który otrzymał medal nr 1.

Centrum Badań Nieliniowych im. J. P. Schaudera działające przy Uniwersytecie Mikołaja Kopernika ustanowiło nagrodę matematyczną w formie medalu im. J. P. Schaudera. Medal, zaprojektowany przez Szymona Salińskiego, jest przyznawany co dwa lata za osiągnięcia naukowe i wkład w analizę nieliniową i jej zastosowania. W 2012 roku pierwszym laureatem medalu został belgijski matematyk, Jean Mawhin.

Od 1949 roku organizowana jest Olimpiada Matematyczna dla uczniów szkół średnich. Z okazji trzydziestolecia tej formy współzawodnictwa Komitet Główny OM opracował projekt i wybił w Mennicy Warszawskiej w nakładzie 350 egz. medal pamiątkowy (projekt medalu wykonała Ewa Krynicka). Medal ten, wykonany w brązie w kształcie koła, ma na awersie rysunek czwartego przybliżenia krzywej trójkątowej Sierpińskiego, a w otoku napisy: „Olimpiada Matematyczna" (u góry), 1949 – XXX – 1979 (u dołu); na rewersie widnieją napisy w otoku: „Ministerstwo Oświaty i Wychowania" (u góry), „Polskie Towarzystwo Matematyczne" (u dołu), w środku zaś wypisano pierwsze zadanie z pierwszej Olimpiady Matematycznej. Medal był przyznany osobom i instytucjom, zasłużonym dla Olimpiady Matematycznej w ciągu trzydziestu lat jej istnienia – otrzymało go 295 osób.

Kolejne medale, również wręczane osobom zasłużonym dla Olimpiady Matematycznej, wybito z okazji pięćdziesięciolecia i sześćdziesięciolecia Olimpiady.

Oprócz krajowej Olimpiady Matematycznej odbywają się zarówno w Polsce, jak i za granicą różne konkursy i zawody matematyczne oraz Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Ich zwycięzcy otrzymują medale w trzech klasach – złote, srebrne i brązowe. Obecnie istnieje wielka liczba ustanowionych



Samuel Dickstein na medalu autorstwa Zygmunta Kaczora



Medal upamiętniający setną rocznicę urodzin Mariana Rejewskiego



Wacław Sierpiński na medalu ufundowanym przez
Senat Uniwersytetu Warszawskiego



Stefan Banach na medalu ufundowanym przez Prezydium Polskiej Akademii Nauk



Władysław Orlicz na medalu ufundowanym przez
Radę Wydziału Matematyki i Informatyki UAM



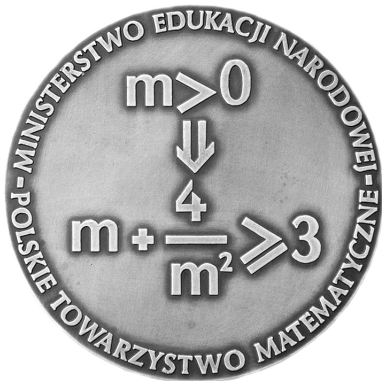
Juliusz Schauder na medalu ufundowanym przez
Centrum Badań Nieliniowych im. J. P. Schaudera





Medal Pamiątkowy Trzydziestolecia Olimpiady Matematycznej





Medal Pamiątkowy Pięćdziesięciolecia Olimpiady Matematycznej





Medal Pamiątkowy Sześćdziesięciolecia Olimpiady Matematycznej



Medal wręczany laureatom Konkursu Prac Uczniowskich



Medal upamiętniający siedemdziesiątą rocznicę założenia PTM



Medal 6 Europejskiego Kongresu Matematyki w Krakowie

i zdobytych przez uczniów i studentów wszystkich typów szkół i uczelni medali matematycznych.

Od 1978 roku corocznie odbywa się z inicjatywy PTM i Redakcji popularno-naukowego miesięcznika *DELTA* Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki, od 2017 roku noszący imię Pawła Domańskiego. Zakwalifikowane do finału konkursu przez jury prace uczniowskie są referowane przez autorów i publicznie bronione, a następnie nagradzane medalami w trzech klasach (złoty, srebrny i brązowy).

Wśród medali o tematyce matematycznej znajdują się także medale upamiętniające wydarzenia i rocznice ważne dla tego środowiska.

Jako pierwszy wymienimy medal wykonany dla uczczenia 70. rocznicy utworzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Uroczystość rocznicowa obchodzona była w Krakowie podczas XIII Zjazdu PTM w 1989 roku. Wszyscy uczestnicy Zjazdu mieli możliwość nabycia tego pamiątkowego medalu, zaprojektowanego przez Macieja Zychowicza.

W 2012 roku odbywał się, także w Krakowie, Szósty Europejski Kongres Matematyki.

Inicjatywą Andrzeja Pelczara było wybicie z tej okazji specjalnego medalu. Zaprojektował i wykonał go krakowski artysta, Stefan Dousa. Na awersie jest Rynek w Krakowie i logo 6 ECM, na rewersie – kilka aproksymacji krzywej Sierpińskiego wypełniającej kwadrat oraz budynek Collegium Novum Uniwersytetu Jagiellońskiego. Pomysłodawcą umieszczenia krzywej Sierpińskiego na medalu była Danuta Ciesielska. Medale zostały wydane w dwóch wersjach – srebrzonej i z brązu. Srebrzone otrzymali zaproszeni wykładowcy oraz osoby wybitnie zasłużone dla organizacji Kongresu, brązowe zaś pozostali organizatorzy; te brązowe można było również nabyć podczas Kongresu.

Opracowanie niniejsze nie pretenduje do pełnego wyczerpania tematu medali matematycznych. Z pewnością istnieją medale, do których autor nie miał możliwości dotarcia. Jednak warto tę tematykę pogłębiać, choćby z szacunku do „królowej nauk".

Walerian Piotrowski
walerian_piotrowski@poczta.onet.pl

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 365–370
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krzysztof Ciesielski (Kraków)

Doczekaliśmy się, czyli o symbolach

W maju 2001 roku, gdy w Polsce wprowadzono poważną reformę szkolnej edukacji, Polska Akademia Umiejętności powołała komisję, która zajęła się oceną podręczników szkolnych. W skład komisji weszli przedstawiciele różnych dyscyplin, a główne jej cele były dwa – sygnalizowanie zjawisk niepokojących i błędów zawartych w podręcznikach oraz wyróżnianie tych najlepszych. Komisja PAU do Oceny Podręczników Szkolnych pracuje aktywnie do dziś, a recenzje opracowane przez jej członków publikowane są w specjalnych tomach, których do 2017 roku wyszło już czternaście; obecnie wydawane są jako czasopismo *Opinie Edukacyjne Polskiej Akademii Umiejętności*.

W tomie II, wydanym w 2004 roku jeszcze pod tytułem *Prace Komisji do Oceny Podręczników Szkolnych*, kilkanaście recenzji dotyczących podręczników z matematyki, napisanych przez czwórkę matematyków wchodzących w skład komisji – Danutę Ciesielską, Mariana Łuczyńskiego, Marię Ewę Pliś i Jerzego Szczepańskiego, zostało zebranych i poprzedzonych wstępem z ogólnymi uwagami na temat ocenianych książek. Czytamy tam między innymi:

> Dodatkowy problem edytorski stanowią same symbole matematyczne. Podręczniki do nowego liceum najbardziej rozczarowały nas kontynuowaniem oznaczania zbiorów liczb: całkowitych, wymiernych i zespolonych odpowiednio literami $\mathbb{C}$, $\mathbb{W}$ oraz $\mathbb{Z}$. Mieliśmy nadzieję, że w ramach reformy Autorzy zgodnie wykorzystają dogodny moment i dostosują symbolikę do powszechnie używanej na całym świecie. Naprawdę nie tłumaczy nikogo fakt, że podobno (?) oznaczenie $\mathbb{C}$ ułatwia uczniom skojarzenie litery z nazwą zbioru. Na tej samej zasadzie chemicy mogliby wprowadzić oznaczenia: **W** – węgiel, **C** – cynk, **Sr** – srebro, **K** – krzem, by ułatwić uczniom kojarzenie nazw pierwiastków z ich symbolami.

W matematyce praktycznie na całym świecie $\mathbb{C}$ oznacza zbiór liczb zespolonych, gdy $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych; natomiast $\mathbb{Q}$ to zbiór liczb wymiernych, a zbiór liczb niewymiernych zapisuje się jako $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Wszystkie podręczniki musiały przed dopuszczeniem do użytku uzyskać pozytywną opinię kilku recenzentów z listy wyznaczonej przez Ministerstwo. Wkrótce potem dotarła do moich rąk recenzja jednego z planowanych do wydania podręczników; napisana została w 2004 roku, jej autorem był Michał Krych. Recenzja ta nigdzie nie została opublikowana, ale za to – wraz z dodatkowym komentarzem – wysłana do Ministerstwa. Przytaczam tu jej fragment za zgodą Autora.

> Mój gwałtowny sprzeciw budzą oznaczenia W, IW, C stosowane dla oznaczenia zbiorów liczb wymiernych, niewymiernych i całkowitych, zresztą są one stosowane w Polsce powszechnie pozostając w sprzeczności ze stosowanymi poza polskimi liceami. Podobno ludzie mają się więcej kręcić po świecie, wstąpiliśmy do UE. Może więc w końcu przejść na oznaczenia stosowane na całym świecie z wyjątkiem wspaniałych polskich szkół i oznaczać zbiór wszystkich liczb całkowitych przez $\mathbb{Z}$, zbiór wszystkich liczb wymiernych przez $\mathbb{Q}$, zbiór wszystkich liczb zespolonych przez $\mathbb{C}$ – poza szkołami istnieją wyższe uczelnie, w nich nie ma wyjścia – trzeba stosować oznaczenia międzynarodowe, ze studentami matematyki kłopotów nie ma, bo mają dużo zajęć z matematyki, więc się przyzwyczajają szybko, ale gorzej jest np. ze studentami ekonomii, chemii itp. To jest jakiś bezsensowny pomysł, który ktoś kiedyś wprowadził w życie, ale wtedy trudniej było zmieniać miejsce zamieszkania. (...)
>
> Oznaczanie zbioru liczb niewymiernych jest **całkowicie zbędne**, a oznaczanie go przez IW powinno być karalne, bo skąd niby taki pomysł?! Jak ma to być uzasadnione, z czym ma się to kojarzyć – ten pomysł jest IRRACJONALNY. Dlaczego oznaczając jakoś zbiór liczb niewymiernych nie wprowadzamy jeszcze oznaczenia zbioru liczb niecałkowitych? Co to za straszliwa dyskryminacja! Natychmiast oznaczyć przez IC. $\mathbb{C}$ na całym świecie oznacza zbiór liczb zespolonych, na naszych wyższych uczelniach również. Nic nie zapowiada zmiany na $\mathbb{Z}$, bo liczby zespolone, to complex numbers po angielsku, ale termin jest łaciński i powszechnie od wielu lat stosowany. Liczby całkowite nawet Francuzi oznaczają (i propagują to oznaczenie – N. Bourbaki) przez $\mathbb{Z}$, choć to oznaczenie z niemieckiego (die Zahl). Może chemicy w Polsce powinni oznaczać węgiel przez **Wę** (ę dla odróżnienia od wolframu). Niektóre nacje mogłyby to poprzeć przynajmniej po to, by zobaczyć jak Anglicy lub Niemcy próbują wymówić Wę. To oczywisty nonsens i każdy to widzi. Z jakichś przyczyn spece od dydaktyki matematyki w Polsce wymyślili sobie oryginalne oznaczenia. Pisałem o tym kilkakrotnie w recenzjach kierowanych do wydawnictw. Oczywiście bezskutecznie. Piszę teraz do Ministerstwa.

Jak widać, pewne osoby niezależnie wpadły na taki sam pomysł – analogia do pierwiastków chemicznych jest urocza i było mi wręcz trochę wstyd, że sam na nią nie wpadłem – za to potem niejednokrotnie wykorzystywałem, krytykując powszechnie używane w szkole oznaczenia zbiorów liczbowych.

Do powyższych cytatów w zasadzie nic dodawać nie trzeba – chyba trudno będzie znaleźć matematyka, który by się z ową krytyką nie zgodził. Chciałbym jednak zwrócić uwagę na trzy dodatkowe aspekty tej sprawy.

Po pierwsze, opisany problem jest kwestią dwóch – tak, **dwóch** – oznaczeń: $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$, bo o liczbach zespolonych w szkole się obecnie nie mówi, a z $\mathbb{R}$ i $\mathbb{N}$ nie ma problemu. Ręce mi opadały, gdy słyszałem „argumenty", że używanie oznaczeń $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$, niezgodnych z pierwszymi literami odpowiednich nazw, będzie dla uczniów trudne. Przecież stwierdzenie, że nauczenie się dwóch oznaczeń sprawi uczniom kłopoty, można uznać wręcz za obraźliwe dla tych uczniów. Jakoś nikt nie przejmował się takimi problemami w przypadku wspominanej wyżej chemii albo w przypadku fizyki, gdzie też stosuje się rozmaite oznaczenia. A w tym samym czasie w szkole młodzież na lekcjach matematyki zobowiązana była znać oznaczenia na kombinacje, wariacje z powtórzeniami i bez... Nie wiem, po co komu one potrzebne, a poza tym stosowane oznaczenia były dość absurdalne – na k–elementowe kombinacje zbioru n–elementowego stosowano skrót C_n^k, co niewątpliwie świetnie współgrało z tym, że we wzorze $\binom{n}{k}$ na liczbę kombinacji n jest na górze, a k na dole.

Po drugie – pozwolę sobie użyć sformułowania Michała Krycha o karalności – moim zdaniem, karalne powinno być przede wszystkim coś innego. Otóż dla mnie najgorsze jest oznaczanie przez $\mathbb{C}$ (w ten sposób zapisaną literą) zbioru liczb całkowitych. Jak oznaczenie C jedynie różni się od przyjętego na całym świecie $\mathbb{Z}$, tak stosowanie tu $\mathbb{C}$ jest błędem merytorycznym – bo w matematyce $\mathbb{C}$ to **inny** zbiór. Nawiązując do przykładu chemicznego, jest to tak, jakbyśmy oznaczali w szkole potas przez P, a cynk przez C.

I po trzecie, zetknąłem się z opinią, że sprawa jest błaha. Nie zgadzam się. Nawyki wynoszone ze szkoły pozostają i dla niejednego studenta (mam na myśli przede wszystkim takich, którzy z matematyką stykają się przy okazji jednego–dwóch przedmiotów) dostosowanie się może być naprawdę trudne... Na jednej z uczelni wyższych, na studiach matematycznych drugiego stopnia, osoba zdająca egzamin z funkcji analitycznych użyła sformułowania „funkcja holomorficzna na zbiorze liczb całkowitych" i nie widziała w tym błędu. Oczywiście możemy z prawdopodobieństwem bliskim jeden przyjąć, że osoba ta nie uczęszczała na wykłady, zastanowić się, w jaki sposób uzyskała zaliczenie ćwiczeń, zapytać, gdzie kończyła studia I stopnia – ale fakt pozostaje faktem, o zdarzeniu tym opowiadał mi egzaminator.

Ani apel Krycha, ani tekst firmowany przez nader ważną w nauce i nauczaniu instytucję nie odniosły żadnego skutku. Co więcej, widziałem listy protestujące czy urażone takim stanowiskiem. No cóż – dla wydawnictw podręcznik jest źródłem niemałego dochodu, a zmiana to kłopot.

Dlaczego o tym piszę? Otóż w dniu 30 stycznia 2018 roku wydane zostało rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego; będzie ona obowiązywać od 1 września 2018 roku. Absolutnie nie mam zamiaru komentować czy oceniać tej podstawy w zakresie matematyki. To jest zupełnie inny temat i można się spodziewać, że – jak zawsze po tego rodzaju zmianach – nietrudno będzie znaleźć tak gorących zwolenników nowej podstawy, jak i wielkich jej przeciwników. Chciałem jednak zwrócić uwagę na fragment, który znajduje się na stronie 293.

> *Oznaczenia*. Uczniowie powinni używać powszechnie przyjętego oznaczenia zbiorów liczbowych, a w szczególności: dla liczb całkowitych symbolu Z, dla liczb wymiernych – Q, dla liczb rzeczywistych – R.

Doczekaliśmy się!

Tu w zasadzie mógłbym z radością zakończyć, jeśli jednak już poruszyłem ten temat, warto może podać kilka faktów historycznych – skąd te oznaczenia się wzięły, od kiedy ich powszechnie używamy?

Otóż zapewne nie jest zaskakujące, że za wprowadzenie takich, a nie innych oznaczeń odpowiedzialny jest Nicolas Bourbaki. Jak wiadomo, bourbakiści jako bazę, na której będą budowane ich podręczniki matematyki, przyjęli teorię mnogości, ale pełna wersja tomu pierwszego, tej tematyce poświęconemu, ukazała się jako siedemnasta dopiero książka Bourbakiego! Jednakże notację, także teoriomnogościową, wprowadzono znacznie wcześniej. Jak napisał André Weil w książce [4]: *zdecydowaliśmy opublikować notację na razie częściowo ustaloną, a nie czekać na szczegółową całość, która miała się w przyszłości ukazać; był najwyższy czas, by ustalić tę notację raz na zawsze, i rzeczywiście – to, co zaproponowaliśmy, a związane to było z licznymi modyfikacjami wcześniej używanej notacji, spotkało się z powszechną aprobatą*. Po raz pierwszy symbole **Z** i **Q** w wydrukowanej postaci pojawiły się w pierwszej księdze części drugiej dotyczącej struktur algebraicznych [1], wydanej jako czwarty z kolei tom *Elementów matematyki*. Symbol **Z** pojawił się na stronie 27, a zbiór ten został zdefiniowany jako zbiór klas równoważności w $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, przy czym pary (m_1, n_1) oraz (m_2, n_2) były w relacji, gdy $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$ (zachowany jest tu zapis z książki). Na stronie 29 zdefiniowany jako $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ z odpowiednią relacją został zbiór dodatnich liczb wymiernych $\mathbf{Q}_+$, a oznaczenie **Q** po raz pierwszy pojawiło się na stronie 30. Oznaczenia **Z** i **Q**, pochodzące od niemieckich słów *Zahlen*

5. Applications : I. Entiers rationnels.

Prenons pour E l'ensemble N des entiers naturels, la loi de composition étant l'*addition* ; tous les éléments de N sont réguliers pour cette loi. Le symétrisé de N se note Z ; ses éléments sont appelés *entiers rationnels* ; la loi obtenue par symétrisation de l'addition dans N s'appelle *addition des entiers rationnels* et se note encore +. Les éléments de Z sont, par définition, les classes

Fragment strony 27 z książki [1]

i *Quotient*, zaczęły powszechnie być stosowane w matematyce. A skąd się wzięły pisane współcześnie podwójne kreski przy tych oznaczeniach? Dla odróżnienia od zwyczajnych wielkich liter N, Z, Q, R, C, gdy w podręcznikach mowa była o zbiorach liczbowych, pisano je tłustym drukiem, czasami kursywą. Ale na tablicy tłusty druk nie jest łatwy do zaznaczenia, rozpoczęto więc stosowanie podwójnych kresek (stąd nazwa komend używanych w programie TEX – *blackboard bold* i skróty `\Bbb` oraz jego obecnie zalecany wariant `\mathbb`). A potem, w miarę rozwoju techniki drukarskiej, symbole tablicowe zaczęły pojawiać się i w wydrukowanych książkach... W 1985 roku, w wywiadzie [2] inny bourbakista, Jean-Pierre Serre, stwierdził, komentując zadania, które sobie kilkadziesiąt lat wcześniej postawili: „Bourbaki wygrał". Dotyczyło to niewątpliwie także notacji.

Nous ne pousserons pas davantage ici l'étude de $\mathbf{Q}_+$, car on retrouvera cet ensemble plus loin (§ 9, n° 5) comme partie de l'ensemble Q des *nombres rationnels* (où on définira, non seulement une multiplication induisant sur $\mathbf{Q}_+$ la multiplication qui vient d'être définie, mais aussi une *addition*).

Fragment strony 30 z książki [1]

Przed II wojną światową było tak, jak pisał Weil; na zbiory liczbowe używane były, przez różne osoby w pisanych przez nie książkach, różne oznaczenia i istotnie najwyższy był czas, by z tym zrobić porządek. Jako ciekawostkę podam, że zbiór liczb całkowitych oznaczany był, na przykład, przez K (Dedekind, 1872), Γ (Hasse, 1926), G^0 (Haupt, 1929). Pojawiło się także oznaczenie C(!). Użył go Bartel Leendert van der Waerden w swojej książce *Moderne Algebra*, wydanej w 1930 roku, ale w ósmym wydaniu tejże monografii, w 1971 roku (*Algebra I. Achte Auflage der Modernen Algebra*), zmienił C na $\mathbf{Z}$. To zdarzenie powinno zwrócić uwagę wydawców polskich podręczników szkolnych. Jeśli zaś chodzi o zbiór liczb wymiernych, to Dedekind używał oznaczenia R, Hasse – P,

Satz 113: *Die ganzen Zahlen genügen den fünf Axiomen der natürlichen Zahlen, wenn die Klasse von* $\frac{1}{1}$ *an Stelle von* 1 *genommen wird und als Nachfolger der Klasse von* $\frac{x}{1}$ *die Klasse von* $\frac{x'}{1}$ *angesehen wird.*

Beweis: $\overline{\mathfrak{Z}}$ sei die Menge der ganzen Zahlen.

1) Die Klasse von $\frac{1}{1}$ gehört zu $\overline{\mathfrak{Z}}$.

Fragment strony 40 z książki [3]

a Haupt P^0 (zarówno u Hassego jak i Haupta „P" to było nie duże „p", ale wielka grecka litera ρ).

Użycie litery **C** na oznaczenie zbioru liczb zespolonych też zawdzięczamy Bourbakiemu, ale ten symbol pojawił się w *Elementach matematyki* troszkę później, bo w 1947 roku, w tomie dotyczącym topologii.

Dodajmy jeszcze, że pierwszym, który użył w podręczniku litery Z na oznaczenie zbioru liczb całkowitych, był prawdopodobnie Edmund Landau w książce [3] w 1930 roku. Nie było to jednak zwykłe Z, a Z pisane gotykiem, i to jeszcze z kreską u góry – $\overline{\mathfrak{Z}}$.

Bibliografia

[1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre. Structures algébriques*, Hermann, Paris 1942.
[2] C. T. Chong, Y. K. Leong, *An Interview with Jean-Pierre Serre*, Math. Intelligencer 8 (1986), nr 4, 8–13.
[3] E. Landau, *Grundlagen der Analysis*, Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., Leipzig 1930.
[4] A. Weil, *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhäuser, Basel 1991.

Krzysztof Ciesielski
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
krzysztof.ciesielski@im.uj.edu.pl

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 371–374
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Nowi profesorowie

Marek Niezgódka



Marek Niezgódka urodził się 15 czerwca 1951 roku w Toruniu. Tytuł profesora uzyskał w 2013 roku. Działalność naukowa i organizacyjna Marka Niezgódki od początku poświęcona jest zastosowaniom nauk matematycznych w technice i naukach przyrodniczych. Od założenia w 1993 roku, pełni funkcję dyrektora Interdyscyplinarnego Centrum Modelowania Matematycznego i Komputerowego Uniwersytetu Warszawskiego (ICM), w którego skład wchodzi m.in. niedawno powstałe jedno z najnowocześniejszych w Polsce centrów superkomputerowych, mieszczące się w Centrum Technologii ICM na Białołęce w Warszawie.

Po studiach z matematyki stosowanej na Politechnice Warszawskiej (w latach 1968–1973) i studiach doktoranckich w Instytucie Automatyki na Wydziale Elektroniki Politechniki Warszawskiej (w latach 1974–1977) zakończonych obroną rozprawy doktorskiej *Zadanie sterowania procesu dynamicznego opisywanego parabolicznym zagadnieniem brzegowym z ruchomą granicą*, napisanej pod kierunkiem Anatola Gosiewskiego, podjął pracę w Instytucie Badań Systemowych PAN. Od 1981 roku był członkiem *International Liaison Committee for Free Boundary Problems*, wokół którego powstała liczna światowa społeczność matematyków (i nie tylko) zajmujących się problematyką prowadzącą do modeli zawierających zagadnienia ze swobodnymi granicami. Pobyt na uniwersytetach w Bonn i Augsburgu w latach 1983–1985, częściowo w ramach prestiżowego stypendium Fundacji Humboldta, zaowocował habilitacją przeprowadzoną na Uniwersytecie Augsburskim w 1985 roku, później nostryfikowaną przez Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW. Rozprawa habilitacyjna zawierała

dwie części: analizę modeli matematycznych dynamiki procesów przejść fazowych typu Stefana z możliwymi degeneracjami oraz konstrukcję i analizę modeli procesów bezdyfuzyjnych nieizotermicznych transformacji fazowych w układach z pamięcią kształtu. Dla tych ostatnich opracowano, przedstawiono i zweryfikowano szeroką klasę ich realizacji obliczeniowych, które zostały powiązane z mającymi odniesienia eksperymentalne danymi obserwacyjnymi. Były to pierwsze w literaturze wyniki mające zastosowanie m.in. do transformacji martenzytycznych w stopach z pamięcią kształtu, nowej klasie materiałów o szerokich innowacyjnych zastosowaniach. W 1989 roku – za namową Marka Burnata – Marek Niezgódka zaangażował się w rozwój powstałego wówczas Instytutu Matematyki Stosowanej i Mechaniki na Wydziale Matematyki Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, pełniąc funkcję zastępcy dyrektora instytutu ds. naukowych. W 1993 roku Marek Niezgódka stał się jednym z liderów i twórców centrum nauk obliczeniowych, które powstało w ramach Uniwersytetu Warszawskiego, słynnego już ICM, w którym pojawia się pierwszy w Polsce superkomputer firmy Cray.

Nowe koncepcje matematyczne Marek Niezgódka przywiózł niewątpliwie z Niemiec pod koniec lat osiemdziesiątych, a jego entuzjazm i szerokość zainteresowań wspaniale wpisały się w atmosferę zmian, które te lata przyniosły Polsce. Od strony matematycznej te nowe trendy obejmowały analizę nieliniową w duchu szkoły francuskiej skupionej wokół Jacques-Louis Lionsa i Haima Brezisa oraz japońskiej kojarzonej z Yukio Komura, rozszerzające klasyczną analizę funkcjonalną o odwzorowania wielowartościowe, a teorię operatorów liniowych o teorię nieliniowych operatorów maksymalnie monotonicznych, wiążąc ją z rachunkiem wariacyjnym funkcjonałów wypukłych, inkluzjami dla subróżniczek i nierównościami wariacyjnymi. Po okresie intensywnej współpracy z matematykami niemieckimi, Marek Niezgódka podjął trwającą do dziś owocną współpracę z jednym z głównych reprezentantów szkoły japońskiej, Nobuyuki Kenmochi. Nowy trend ukazywał także, jak bardzo te rozwijające się nowe koncepcje matematyczne wyrastają z poszukiwania opisu szerokiej klasy zagadnień fizyki i techniki. Co więcej, modelowanie matematyczne okazywało się być z jednej strony źródłem ambitnych problemów matematycznych, a z drugiej – wspaniałą przygodą zmuszającą do przekraczania granic tego, co już wiemy i to we współpracy z przyrodnikami lub inżynierami.

Prace matematyczne Marka Niezgódki z lat dziewięćdziesiątych XX wieku dotyczyły analizy modeli matematycznych, opisujących przejścia fazowe. Na uwagę zasługuje na przykład licznie cytowana praca *Subdifferential Operator Approach to the Cahn–Hilliard Equation with Constraint* (wspólna z Nobuyuki Kenmochi i Ireną Pawłow) opublikowana w *Journal of Differential Equations*,

dotycząca jednego z bardziej znanych modeli opisujących dyfuzyjną separację fazową, w tym przypadku zachodzącą w stopach metali. W pracy tej użycie teorii operatorów wielowartościowych i maksymalnie monotonicznych do subróżniczki funkcjonału energii swobodnej umożliwiło wbudowanie do znanego modelu Cahna–Hilliarda warunku ograniczającego zakres zmienności funkcji niewiadomej określającej udział danej fazy w danym miejscu przestrzeni. Wiele prac z tamtego okresu dotyczy analizy modeli dynamiki materiałów z pamięcią kształtu i roli efektu histerezy, a także podstawowego zagadnienia w teorii przejść fazowych, zagadnienia Stefana, opisującego topienie bryły lodu, prowadzącego do prototypowego nieliniowego równania parabolicznego z brzegiem swobodnym.

Spektrum zainteresowań Marka Niezgódki związanych z różnymi dziedzinami zastosowań matematyki jest niezwykle szerokie i obejmuje na przykład badanie roli złożonych geometrii i topologii (w tym sieci i grafów), z uwzględnieniem wpływu wariacji obszaru na własności rozwiązań układów opisujących procesy reakcji i dyfuzji. Trzeba także wspomnieć o rozwoju metod matematycznych modelowania wizualnego i analizy danych w zastosowaniu do obrazowania medycznego i planowania terapii. Jednak zagadnienia wariacyjne typowe dla wcześniejszego obszaru zainteresowań wciąż przykuwają uwagę Marka Niezgódki, o czym świadczy opublikowana ostatnio w *Journal of Mathematical Analysis and Applications* praca *Variational inequalities of Navier–Stokes type with time dependent constraints* (wspólna z Marią Gokieli i Nobuyuki Kenmochi).

Opisując działalność akademicką Marka Niezgódki, na którą składa się wypromowanie ośmiu doktorów, autorstwo około sześćdziesięciu artykułów naukowych, wśród których czterdzieści obejmuje baza *Mathematical Reviews*, należy podkreślić jego wyjątkowe zaangażowanie w działania na rzecz całej społeczności naukowo-akademickiej. Jednym ze sztandarowych przedsięwzięć zainicjowanym i prowadzonym przez niego od 1996 roku jest Wirtualna Biblioteka Nauki, w ramach której wszyscy polscy uczeni i studenci mają nieograniczony dostęp do wielkiej kolekcji czołowych światowych czasopism oraz książek naukowych. Innym obszarem, któremu w ostatnich latach Marek Niezgódka poświęcił dużo energii, są zagadnienia związane z rozwojem i wdrażaniem modeli „nauki otwartej", w szczególności z otwartym udostępnianiem wiedzy na platformach cyfrowych. Te działania doprowadziły do utworzenia Platformy Otwartej Nauki, udostępniającej polskie czasopisma i książki naukowe oraz repozytorium prac naukowych CeON. Warto tu wspomnieć wreszcie jedną z wczesnych inicjatyw Marka Niezgódki z 1998 roku, która doprowadziła do utworzenia i udostępnienia przez ICM w modelu otwartym praktycznie pełnej kolekcji archiwalnych

artykułów opublikowanych w polskich czasopismach matematycznych oraz polskich matematycznych wydawnictw książkowych opublikowanych do 2000 roku. Inicjatywa ta stała się składową dalej rozwijanej przy aktywnym udziale ICM europejskiej cyfrowej biblioteki matematycznej EuDML.

Marka Niezgódkę można bez cienia przesady określić mianem wybitnego menadżera nauki, przede wszystkim inspirującego, ale także koordynującego projekty podejmujące wyzwania płynące z różnych obszarów rozwoju cywilizacji od medycyny poprzez epidemiologię i numeryczne prognozowanie pogody do optymalizacji transportu lotniczego. Jego pasją jest przekraczanie granic.

Anna Trykozko, *Dariusz Wrzosek* (Warszawa)

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 375–389
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Laureaci nagród

Jan Okniński

laureat Nagrody Głównej PTM im. Stefana Banacha za 2015 rok



Jan Okniński od momentu rozpoczęcia studiów do dnia dzisiejszego związany jest naukowo i zawodowo z Wydziałem Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. W 1977 roku uzyskał na tej uczelni tytuł magistra nauk matematycznych, a w 1982 roku obronił pracę doktorską, przygotowaną pod kierunkiem Jana Krempy. W 1992 roku otrzymał na UW stopień doktora habilitowanego nauk matematycznych. W 2002 roku nadano mu tytuł profesora nauk matematycznych. Lata 1988–1990 spędził w *North Carolina State University* w USA, w roku akademickim 1992–1993 przebywał na Uniwersytecie we Freiburgu w Niemczech jako stypendysta Fundacji Humboldta, a w roku 1997–1998 w *Memorial University of Newfoundland* w Kanadzie. W latach 2005–2012 pełnił funkcję dyrektora Instytutu Matematyki na Wydziale MIM UW. Aktualnie jest kierownikiem Zakładu Algebry i Teorii Liczb w Instytucie Matematyki MIM UW. W 2015 roku otrzymał Nagrodę Główną PTM im. Stefana Banacha.

We wcześniejszym okresie jego badania koncentrowały się na problemach dotyczących pierścieni półgrupowych i problemach dotyczących półgrup liniowych, czyli podpółgrup w półgrupie multyplikatywnej macierzy kwadratowych nad ciałem. Wśród najważniejszych wyników z tego okresu na szczególną uwagę zasługują: dowód hipotezy D. K. Faddiejewa orzekającej, że zespolona algebra półgrupowa $\mathbb{C}[M_n(\mathbb{F}_q)]$ pełnej półgrupy liniowej nad ciałem skończonym $\mathbb{F}_q$ jest półprosta (w pracy wspólnej z M. S. Putchą), otrzymanie ogólnego twierdzenia strukturalnego dla dowolnych półgrup liniowych, udowodnienie (wspólnie

z A. Salwą) tak zwanej uogólnionej alternatywy Titsa dla półgrup liniowych. Warto dodać, że pierwszy z tych rezultatów uzyskany został na dużo ogólniejszym gruncie niż pierwotna hipoteza Faddiejewa, a mianowicie dla tak zwanych (skończonych) monoidów typu Liego.

Badania naukowe Jana Oknińskiego z ostatnich sześciu lat, będące podstawą wniosku o nagrodę im. Stefana Banacha, dotyczą teorii pierścieni nieprzemiennych, teorii grup i półgrup oraz algebraicznych aspektów równania Yanga–Baxtera. We wszystkich tych zagadnieniach uzyskał on bardzo twórcze i finezyjne wyniki.

Jego rezultaty mają ścisły związek z geometrią nieprzemienną, fizyką matematyczną i różnymi aspektami kombinatoryki algebraicznej. Okniński rozważał między innymi struktury algebraiczne znane jako *braces*, które będą dalej nazywane po polsku „klamerkami". „Najważniejszym osiągnięciem naukowym profesora Oknińskiego w ciągu ostatnich pięciu lat jest jego wkład w rozwój teorii klamerek, pozwalający na głębokie zrozumienie algebraicznych aspektów rozwiązań równania Yanga–Baxtera" – napisało jury w uzasadnieniu decyzji.

Klamerki zostały wprowadzone około 2005 roku przez Rumpa jako narzędzie przydatne przy badaniu teoriozbiorowych rozwiązań równania Yanga–Baxtera. Każde takie rozwiązanie tego równania można zanurzyć w dobry sposób w klamerkę, a z drugiej strony – każda klamerka daje teoriomnogościowe rozwiązanie równania Yanga–Baxtera. W ostatnich latach Jan Okniński uzyskał razem ze swoimi współpracownikami (głównie z F. Cedó i E. Jespersem) serię istotnych wyników, które zmieniły oblicze tej dziedziny. Przypomnijmy, że równanie Yanga–Baxtera najpierw pojawiło się w fizyce matematycznej oraz mechanice statystycznej w pracach Yanga i Baxtera (lata 1967 i 1972) i szybko wzbudziło zainteresowanie ze strony środowiska matematycznego. Znalazło liczne zastosowania i przyczyniło się do rozwoju takich dziedzin naukowych, jak teoria grup kwantowych, teoria algebr Hopfa, czy teoria węzłów.

Artykuły Oknińskiego wyróżniają się nie tylko wybitnymi pomysłami, lecz również bogactwem stosowanych metod i dużą czytelnością. Wielkie wrażenie robi jego praca *Braces and the Yang–Baxter equation* opublikowana w *Communications in Mathematical Physics* (wspólnie z Cedó i E. Jespersem). Rozwiązane w niej są dwa istotne problemy postawione przez T. Gatevę-Ivanovą oraz P. Camerona. W tej pracy zachwycają nowe metody badawcze oraz błyskotliwe pomysły. Bardzo podobają mi się wyniki, w których autorzy charakteryzują grupy, na których można zadać strukturę klamerkową. Uzyskane rezultaty są inspirujące. Bardzo interesujące jest również twierdzenie, w którym autorzy pokazują, jak można przejść od wyników dla klamerek do wyznaczenia rozwią-

zań równania Yanga–Baxtera przez bezpośrednie i natychmiastowe użycie tego rezultatu, bez znajomości innego typu metod dotyczących grup warkoczowych, grup strukturalnych i kocyklicznych.

Należy tu też podkreślić dbałość autorów o prezentację wyników. Dzięki temu artykuł ich staje się dostępny nie tylko dla specjalistów – w rozszerzonym wstępie przedstawiają najważniejsze wyniki z tej dziedziny, które dotychczas były rozsianie w wielu różnych publikacjach. Autorzy wymyślili nowe krótkie dowody, dzięki czemu dziedzina, która była dotąd zrozumiana głównie przez specjalistów, staje się nagle przejrzysta i wręcz zachwyca swoim pięknem!

W tej i w innych pracach ci sami autorzy badali też własności grup, półgrup i algebr noetherowskich oraz pierścieni grupowych związanych z klamerkami. Innym bardzo ważnym osiągnięciem jest rozwiązanie przez Oknińskiego (wspólnie z F. Cedó i E. Jespersem) problemu retraktowalności rozwiązań równania Yanga–Baxtera w pracy *Retractability of set theoretic solutions of the Yang–Baxter equation* opublikowanej w *Advances in Mathematics*.

Inne prace w obrębie tej tematyki też są bardzo inspirujące. Dotyczą one „rozwiązań" wielopermutacyjnych (*multipermutation solutions*) oraz tworzenia nowych klas klamerkowych. Warto dodać, że bardzo często podanie konkretnych metod konstrukcji klamerek i grup warkoczowych jest niezwykle trudne i imponujące jest, że Oknińskiemu udało się skonstruować tak szerokie klasy takich struktur. Mam tu na myśli w szczególności konstrukcje z pracy *A family of irretractable square-free solutions of the Yang–Baxter equation* z 2015 roku i wspomnianej wyżej pracy *Retractability of set theoretic solutions of the Yang–Baxter equation*, w których autorzy odpowiedzieli na szereg istotnych pytań.

Spektrum zainteresowań matematycznych Oknińskiego jest bardzo szerokie. Z przyjemnością znalazłam w pracy Jana Oknińskiego *Trichotomy for finitely generated monomial algebras* z 2014 roku odpowiedź na postawione przeze mnie i Jasona Bella pytanie. Okniński udowodnił, że jeśli R jest skończenie generowaną pierwszą algebrą jednomianową, to zachodzi przynajmniej jedna z trzech możliwości:

i. R spełnia tożsamość wielomianową,
ii. R ma niezerowy radykał Jacobsona,
iii. R jest algebrą prymitywną.

Warto też podkreślić wyniki dotyczące systematycznych badań struktury algebr półgrupowych dla podpółgrup w grupach nilpotentnych.

Jan Okniński uzyskał też bardzo interesujące rezultaty naukowe w obszarze teorii algebr nieprzemiennych, związane z algebrami skończenie prezentowalnymi, a w szczególności z algebrami plaktycznymi. Wiele najtrud-

niejszych otwartych problemów w obszarze badań dotyczących algebr nieskończonego wymiaru dotyczy algebr skończenie prezentowalnych. Przypomnijmy, że algebra skończenie prezentowalna jest ilorazem algebry wolnej skończenie generowanej przez ideał generowany przez skończoną liczbę elementów. Otwarte problemy dotyczące algebr skończenie prezentowalnych są bardzo trudne. Często też badania konkretnych przykładów takich algebr są ważne i potrzebne ze względu na zastosowania w algebrze oraz pokrewnych działach matematyki. W tych nurtach badań mieszczą się prace Oknińskiego dotyczące algebr plaktycznych: *Plactic algebra of rank* 3 z 2012 roku oraz jego nowsze prace *Gröbner–Shirshov bases for plactic algebras* oraz *Identities of the plactic monoid* (współautorem tych prac jest Ł. Kubat). W tych pracach wyznaczono spektrum pierwsze i wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne algebry plaktycznej (czyli algebry monoidu plaktycznego) rangi trzy, a także wyznaczono tożsamości monoidu plaktycznego. Monoid plaktyczny odgrywa kluczową rolę w teorii i zastosowaniach diagramów Younga, ważnych dla teorii reprezentacji liniowych, kombinatoryki algebraicznej, grup kwantowych i wielu innych kontekstów. Rezultat uzyskany przez Gromowa i Grigorczuka orzeka, że skończenie generowana półgrupa skracalna o wielomianowym wzroście spełnia nietrywialną tożsamość. Założenie skracalności jest istotne, gdyż bez niego wynik ten przestaje być prawdziwy. Monoid plaktyczny nie jest skracalny, więc nie można zastosować do niego wyniku Gromowa i Grigorczuka. Istnieje jednak hipoteza, że monoid plaktyczny dowolnej rangi zawsze spełnia pewną tożsamość wielomianową. Okniński wspólnie z Kubatem wykazali, że hipoteza ta zachodzi dla monoidów plaktycznych rangi trzy.

W omawianych pracach Oknińskiego i Kubata uzyskano istotne wyniki związane z bazami Gröbnera–Shirshova. Udowodniono, że algebra plaktyczna rangi $n \leqslant 3$ nad ciałem K posiada skończoną bazę Gröbnera–Shirshova, oraz że dla $n \geqslant 4$ dowolna baza Gröbnera–Shirshova algebry rangi n względem porządku stopniowo-leksykograficznego musi być nieskończona. Zaskakujące jest też, że w przypadku pokrewnych algebr chińskich sytuacja wygląda inaczej – zawsze posiadają one skończone bazy Gröbnera–Shirshova.

Wyniki Oknińskiego wyróżniają się wysoką jakością i oryginalnością metod badawczych. W swoich pracach, obok metod kombinatorycznych, Okniński swobodnie korzysta również z metod geometrycznych, algebraicznych i teorioliczbowych. Przygotowaniem istotnych (oczywiście nie jedynych) narzędzi badawczych do obecnych prac jest bardzo dobra monografia Jespersa i Oknińskiego *Noetherian Semigroup Algebras*, wydana w 2007 roku przez Springera w serii *Algebra and Applications*. W monografii tej stworzono nowe metody

badania algebr noetherowskich i ich zastosowania do pewnych ważnych klas algebr, w szczególności do klasy algebr kwadratowych, wprowadzonych na gruncie geometrii nieprzemiennej przez J. I. Manina. Dwie wcześniejsze, samodzielne monografie Oknińskiego też są istotne i aktualne w tym kontekście, choć opublikowane więcej niż dekadę temu.

Okniński jest jednym ze światowych liderów prac nad algebraicznymi i kombinatorycznymi własnościami algebr skończenie prezentowalnych, a także grup i półgrup. Wyrazem tego są liczne zaproszenia na ważne konferencje międzynarodowe jako jednego z głównych prelegentów. Można tu wymienić przykłady takich konferencji z ostatnich kilku lat: *Semigroups and Applications*, Uppsala, 2012, *Algebraic Monoids, Group Embeddings and Algebraic Combinatoric*, *Fields Institute*, Toronto, 2012, *Groups, Rings and Group Rings*, *Brock University* i *Fields Institute*, 2014, *Advances in Group Theory and Applications*, Porto Cesareo, 2015. Był też głównym organizatorem konferencji *Classical Aspects of Ring Theory and Module Theory*, Będlewo, 2013. Jest jednym z redaktorów *Semigroup Forum*, czasopisma o światowej renomie, a także redaktorem *Colloquium Mathematicum*. Wyniki Oknińskiego są często cytowane przez innych matematyków zarówno w publikacjach, jak i w referatach na ważnych konferencjach. Od wielu lat aktywnie uczestniczy on w kolejnych projektach badawczych KBN, MNiSW i NCN, a także w projektach międzynarodowych.

Jan Okniński jest autorem ponad stu prac naukowych opublikowanych w renomowanych czasopismach oraz trzech monografii. Jego wyniki opublikowane są w czasopismach najwyższej klasy, na przykład w *Advances in Mathematics*, *Communications in Mathematical Physics*, *Transactions of the American Mathematical Society*, a także w tradycyjnie najlepszych czasopismach algebraicznych takich jak *Journal of Algebra*, *Algebras and Representation Theory* oraz *Journal of Pure and Applied Algebra*. W 2013 roku został nagrodzony dyplomem *Academy Award Fellowship of the Royal Flemish Academy for Science and Arts*, otrzymując grant na półroczny pobyt naukowy w *Royal Flemish Academy* w Brukseli. Wypromował czterech doktorów. Okniński jest członkiem Polskiego Towarzystwa Matematycznego od 1982 roku.

Agata Smoktunowicz (Edynburg, Wielka Brytania)

Dariusz Wrzosek

laureat Nagrody Głównej PTM im. Hugona Steinhausa za 2015 rok



Dariusz Wrzosek – profesor na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, otrzymał w 2015 roku nagrodę im. Hugona Steinhausa w dziedzinie zastosowań matematyki, ze szczególnym uwzględnieniem wykorzystania nieskończeniewymiarowych układów dynamicznych do wyjaśnienia wpływu drapieżnictwa ryb na rozkład gęstości planktonu zwierzęcego. W uzasadnieniu decyzji jury czytamy m.in.:

> Jury pragnie szczególnie wyróżnić trzy obszary osiągnięć Laureata. Prace dotyczące równań opisujących zjawiska koagulacji i fragmentacji, gdzie otrzymano ważny rezultat dotyczący procesu żelacji. Prace te przyczyniły się do wzrostu zainteresowania tym modelem i znajdują zastosowania w wielu naukach stosowanych, na przykład w chemii polimerów. Drugim ważnym obszarem aktywności profesora Wrzoska jest badanie równań opisujących zjawisko chemotaksji w biologii i medycynie. Badania te dotyczą modeli typu (Evelyn) Keller–(Lee) Segela, a za najbardziej znaczący wynik należy uznać pracę, w której udowodniono formowanie się osobliwości oraz tworzenie wzorców przestrzennych. Jest to piękny przykład wykorzystania zaawansowanych metod matematycznych do zrozumienia zjawisk biologicznych. Zdaniem jury, najważniejsze osiągnięcie profesora Dariusza Wrzoska z zakresu zastosowań matematyki dotyczy modelowania gęstości rozkładu wiekowego dafni. Prace te, powstałe w ścisłej współpracy z hydrobiologami, zaowocowały stworzeniem modelu matematycznego, który w sposób zgodny z empirycznymi obserwacjami pozwolił opisać efekt drapieżnictwa ryb na rozwój planktonu oraz przewidzieć efekty różnych strategii drapieżników.

Laureat urodził się w 1964 roku. Ukończył studia magisterskie z matematyki w 1987 roku, uzyskał stopnie naukowe doktora (w 1993 roku, za rozprawę *Analiza układów równań różniczkowych opisujących zjawiska nieliniowe w półprzewodnikach* napisaną pod kierunkiem Marka Niezgódki) i doktora habilitowanego nauk matematycznych (w 2000 roku, na podstawie rozprawy *Nieskończone układy równań typu reakcja-dyfuzja w teorii koagulacji-fragmentacji*) na Uniwersytecie Warszawskim. Rozprawa habilitacyjna była nagrodzona w 2002 roku nagrodą Ministra Edukacji Narodowej i Sportu. W 2011 roku Dariusz Wrzosek otrzymał tytuł profesora nauk matematycznych.

Jest członkiem Polskiego Towarzystwa Matematycznego od 2007 roku. Wypromował trzech doktorów, z których jeden (Tomasz Cieślak) uzyskał już habilitację. Jest zaangażowany w działalność organizacyjną – był m.in. prodziekanem WMIM UW do spraw finansowych (w latach 2012–2016), a obecnie jest dyrektorem Instytutu Matematyki Stosowanej i Mechaniki UW.

Tematyka jego badań naukowych jest szeroka i obejmuje kilka (nierozłącznych) grup zagadnień: układy równań opisujące przepływ nośników prądu w półprzewodnikach, równania koagulacji-fragmentacji (a w zasadzie nieskończone układy równań różniczkowo-całkowych po raz pierwszy zaproponowane przez Mariana Smoluchowskiego), modele nielokalne i przejścia asymptotyczne, równania chemotaksji (zwłaszcza ze specjalnymi nieliniowościami opisującymi efekty agregacji komórek przy różnych biologicznie uzasadnionych ograniczeniach), równania transportu morfogenów, układ opisujący wzrost kilku populacji w obecności drapieżnika.

Dariusz Wrzosek jest autorem trzydziestu ośmiu prac naukowych notowanych w *MathSciNet*, które były cytowane ponad czterysta razy. Świadczy to o bardzo wyraźnym oddźwięku jego aktywności matematycznej w świecie.

Owocnie współpracuje z takimi specjalistami światowego formatu, jak matematycy: Philippe Laurençot, Michael Winkler, J. Ignacio Tello i biologowie matematyczni: Mark Chaplain, Zbigniew M. Gliwicz. Ma też wspólne publikacje ze swoimi młodszymi współpracownikami.

Po otrzymaniu tytułu naukowego profesor Dariusz Wrzosek utrzymuje wysoką aktywność naukową, publikując wyniki badań w bardzo dobrych czasopismach matematycznych, jak na przykład *Nonlinearity*, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, *Nonlinear Analysis*, jak również z biologii matematycznej w czasopismach *Hydrobiologia* i *American Naturalist*. Najnowsze publikacje dotyczą głównie analizy zjawiska chemotaksji w modelach quasi-liniowych oraz modelowania drapieżnictwa ryb planktonożernych.

Dariusz Wrzosek jest często zapraszany na ważne konferencje, zarówno matematyczne, jak i z zastosowań matematyki w biologii i medycynie, na których wygłosił wiele zaproszonych odczytów. Aktywnie uczestniczy w licznych projektach badawczych NCN i MNSzW, a także w przedsięwzięciach o zasięgu międzynarodowym.

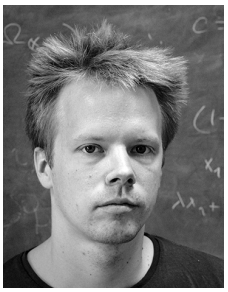
Jego wysokie kompetencje naukowe są wykorzystywane przy opiniowaniu doktoratów (w tym również za granicą w *Universität Zürich* i *University of Alberta* w Edmonton), habilitacji i profesur (bardzo szybko po uzyskaniu stosownych uprawnień). Jest też cenionym recenzentem powoływanym przez redakcje najlepszych czasopism.

Jego działalność dydaktyczna obejmuje m.in. kluczowe zajęcia na kierunku bioinformatyki, matematykę dla biologów oraz szereg wykładów, ćwiczeń i seminariów z równań różniczkowych. Napisał też podręcznik akademicki z tej dziedziny.

Piotr Biler (Wrocław)

Piotr Achinger

laureat Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego za 2016 rok



Doktor Piotr Achinger jest młodym matematykiem zajmującym się geometrią algebraiczną. Urodził się w lipcu 1986 roku. W 2005 roku zaczął studia na Jednoczesnych Studiach Informatyczno-Matematycznych na Uniwersytecie Warszawskim. W trakcie studiów trzykrotnie zdobył pierwszą nagrodę, a raz drugą na *International Mathematics Competition for University Students*. Pracę magisterską z matematyki napisał i obronił z wyróżnieniem w 2010 roku pod opieką niżej podpisanego. Dotyczyła ona rozkładu pchnięć snopa strukturalnego na kwadryce przy pomocy morfizmu Frobeniusa. Rozszerzała ona do charakterystyki 2 wcześniejsze rezultaty promotora i używała ich, by pokazać, w jaki sposób obliczyć rozkłady pchnięć wiązek liniowych na kwadryce przez wyższe morfizmy Frobeniusa we wszystkich charakterystykach. Praca ta ukazała się w *Communications in Algebra*, a Achinger zdobył za nią drugą nagrodę w konkursie im. Marcinkiewicza na najlepszą pracę studencką z matematyki. Pracę magisterską z informatyki, napisaną pod kierunkiem Mikołaja Bojańczyka, obronił również z wyróżnieniem w 2012 roku.

Po zakończeniu studiów matematycznych na Wydziale MIM UW, Achinger wyjechał w 2010 roku na studia doktoranckie za granicę. Spędził rok u Nicolasa Perrina w Bonn, a pobyt ten zaowocował wspólną pracą na temat szczególnych rozmaitości sferycznych. Autorzy wykazali w niej, że dla pewnych produktów jednorodnych rozmaitości rzutowych domknięcia orbit grupy Borela są normalnymi rozmaitościami Cohena–Macaulaya i mają wymierne osobliwości. Wcześniej było wiadomo, że dla ogólnych rozmaitości sferycznych otrzymane rozmaitości nie muszą być normalne. Praca ta ukazała się w *Advanced Studies in*

Pure Mathematics. W 2011 roku Achinger dostał *International Fulbright Science and Technology Award* na wyjazd na studia doktoranckie do Artura Ogusa do *University of California* w Berkeley.

W okresie studiów doktoranckich w Berkeley zajmował się on najpierw charakteryzacją rozmaitości torycznych w charakterystyce dodatniej w terminach rozkładu pchnięć wiązek liniowych przez odwzorowanie Frobeniusa. Pracę na ten temat opublikował w *International Mathematics Research Notices*. Późniejszy wyjazd do Ahmeda Abbesa w *Institut des Hautes Études Scientifiques* spowodował, że Achinger zajął się badaniem rozmaitości typu $K(\pi,1)$ w charakterystyce dodatniej. W topologii – rozmaitości typu $K(\pi,1)$ to te, dla których grupa podstawowa jest izomorficzna z grupą π, a wszystkie wyższe grupy homotopii znikają. Mają one swój algebraiczny odpowiednik, który nie był jednak intensywnie badany. Gerd Faltings, w swoim podejściu do p-adycznych twierdzeń porównujących kohomologie, skonstruował otoczenia typu $K(\pi,1)$ dla gładkich schematów nad pierścieniami waluacji dyskretnej w charakterystyce mieszanej. Ważnym problemem było zrozumienie przypadku złej redukcji. Student Faltingsa, Remi Lodh, opublikował pracę, w której próbował wykazać, że rezultat Faltingsa pozostaje prawdziwy nie tylko w przypadku schematów gładkich, ale też regularnych. Achinger skonstruował kontrprzykład do jednego z głównych rezultatów Lodha. Opierając się na analizie tego przykładu pokazał, jak rozszerzyć rezultat Faltingsa do przypadku logarytmicznie gładkiego. Głównym składnikiem dowodu jest wariant triku Nagaty używanego w jego dowodzie twierdzenia Noether o normalizacji. Rezultat ten został opublikowany w *Compositio Mathematica*.

Z okresu studiów doktoranckich w Berkeley pochodzi też inna praca Achingera *F-Split and F-Regular Varieties with a Diagonalizable Group Action*, napisana wspólnie z Nathanem Iltenem i Hendrikiem Süssem i opublikowana w *Journal of Algebraic Geometry*. Praca ta jest jednak zbyt techniczna, by móc opisać jej wyniki w tym artykule. W uznaniu swoich wyników Achinger otrzymał w 2015 roku *UC Berkeley Kenneth Ribet and Lisa Goldberg Award in Algebra*.

W 2015 roku, po obronie pracy doktorskiej otrzymał dwuletnie stypendium podoktorskie z *European Post-Doctoral Institute for Mathematical Sciences*. Pierwszy rok spędził w Centrum Banacha w Warszawie, a drugi w *Institut des Hautes Études Scientifiques* w Bures-sur-Yvette we Francji. W tym czasie zajmował się paroma projektami, z których najważniejszy dotyczy problemów powstałych w trakcie opisanej wyżej pracy z *Compositio Mathematica*. Powstało mianowicie pytanie, jakie gładkie rozmaitości afiniczne w charakterystyce dodatniej są rozmaitościami typu $K(\pi,1)$. Okazało się, że – w przeciwieństwie

do tego co wiadomo w przypadku zespolonym – są to wszystkie takie rozmaitości. Jednak dowód tego faktu jest wysoce niebanalny i używa w istotny sposób pewnych rezultatów z wyższej teorii rozgałęzień, które były ostatnio otrzymane przez Takeshi Saito. Rezultat ten został też rozszerzony do przypadku sztywnych rozmaitości analitycznych i do rozmaitości w charakterystyce mieszanej, a długa, niemal pięćdziesięciostronicowa praca Achingera ukazała się ostatnio w *Inventiones Mathematicae*. Po stażu podoktorskim został zatrudniony jako adiunkt w IM PAN w Warszawie, gdzie obecnie pracuje.

Wykłady wygłaszane przez Achingera na seminariach i konferencjach są ciekawe, bardzo dobrze przygotowane, świadczą o dobrym zrozumieniu trudnych pojęć i twierdzeń oraz pozwalają słuchaczom na ich zrozumienie (co jest już cechą zanikającą). Zostało to docenione w Berkeley, gdzie w 2014 roku otrzymał *UC Berkeley Outstanding Graduate Student Instructor Award*. Achinger od lat pomaga organizować kolejne edycje Olimpiady Matematycznej i aktywnie uczestniczy w prowadzeniu Wakacyjnych Warsztatów Wielodyscyplinarnych.

Achinger jest żonaty, a jego żona, Masza Vlasenko, również zajmuje się matematyką. Mają oni córkę Helenę. Oprócz matematyki interesuje się muzykowaniem, filmem, turystyką górską i fotografią.

Adrian Langer (Warszawa)

Adam Kanigowski

laureat Nagrody PTM dla Młodych Matematyków za 2015 rok,
Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego za 2016 rok
oraz International Banach Prize za 2016 rok



Adam Kanigowski urodził się 15 kwietnia 1989 roku. Jest absolwentem słynnego toruńskiego IV Liceum Ogólnokształcącego. W trzeciej klasie liceum był laureatem Olimpiady Matematycznej (rok wcześniej był jej finalistą). Tytuł zawodowy magistra matematyki uzyskał na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w 2012 roku. W czasie studiów wielokrotnie reprezentował Wydział Matematyki i Informatyki UMK na różnych zawodach matematycznych dla studentów. Do jego największych sukcesów zaliczyłbym siódme miejsce w Międzynarodowych Zawodach Mate-

matycznych im. Vojtěcha Jarníka w Ostrawie w 2010 roku oraz nagrodę drugiego stopnia na *International Mathematics Competition for University Students* w Błagojewgradzie również w 2010 roku. W okresie studenckim jego zainteresowania naukowe koncentrowały się na analizie nieliniowej. Tematyki tej dotyczyła jego praca magisterska, której pokłosiem jest artykuł [1] (wspólny z promotorem). Po ukończeniu studiów zmienił tematykę badawczą i jego zainteresowania naukowe skupiły się na teorii ergodycznej i teorii układów dynamicznych.

Od października 2012 roku do maja 2015 roku odbywał studia doktoranckie w Instytucie Matematycznym PAN. Promotorem jego rozprawy doktorskiej był niżej podpisany, promotorem pomocniczym zaś Joanna Kułaga-Przymus. Od sierpnia 2015 roku odbywa trzyletni staż podoktorski w *Penn State University* – uzyskał tam prestiżowe stypendium im. S. Chowli.

Tematyka badawcza w dotychczasowym dorobku naukowym Kanigowskiego dotyczy własności Ratner i własności mieszających gładkich potoków na powierzchniach (prace [2, 3, 5, 6, 12]), teorii spektralnej gładkich potoków na powierzchniach (praca [11]), problemów klasyfikacyjnych i gładkiej realizacji K-automorfizmów (prace [8, 10, 13]), wolnej entropii w układach dynamicznych (praca [9]), czasów sztywności dla układów słabo mieszających (praca [4]).

Patrząc na ten w zasadzie zaledwie czteroletni dorobek naukowy i osiągnięte wyniki trudno nie podzielić się refleksją, że Kanigowski, mimo tak młodego wieku, jest już matematykiem dojrzałym – rozwiązuje trudne problemy, często przekuwając jedynie nieprecyzyjne intuicje matematyczne w „twarde" dowody oraz potrafi rozwijać własne teorie i stawiać interesujące pytania. Duża część jego prac ma charakter przełomowy, wszystkie przynoszą rozwiązanie istotnych problemów matematycznych.

Aby zrozumieć wagę dokonań Kanigowskiego wspomnijmy bardzo skrótowo dotychczasową historię tzw. *własności Ratner*. Została ona odkryta przez Marinę Ratner na początku lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku dla potoków horocykli zwartych powierzchni o stałej ujemnej krzywiźnie i pełniła kluczową rolę w twierdzeniach o „sztywności" połączeń, a następnie w dowodach fundamentalnych twierdzeń klasyfikujących domknięcia orbit oraz miary niezmiennicze dla potoków unipotentnych na przestrzeniach jednorodnych. Własność Ratner została odkryta dla potoków na rozmaitościach o wymiarze co najmniej trzy i przez wiele lat nie wiadomo było, czy własność ta może zachodzić w wymiarze dwa.

Dopiero w pracach Frączka i niżej podpisanego (lata 2006–2010) wykazano, że – po odpowiedniej modyfikacji oryginalnej definicji Ratner do tzw. *słabej własności Ratner* – możemy tę własność widzieć również bezpośrednio

na powierzchniach i stosować do wykazywania tzw. łagodnego mieszania dla pewnych klas potoków na powierzchniach, danych często przez naturalne reprezentacje specjalne.

Tematyka ta była kontynuowana przez Kanigowskiego w pracach [2, 3], przynosząc piękne rezultaty o łagodnym mieszaniu w przypadku funkcji dachowych o wahaniu ograniczonym z nietrywialną częścią absolutnie ciagłą w rozkładzie Lebesgue'a (w tym klasyczne potoki von Neumanna) lub nawet bez tej części, na przykład dla tzw. „diabelskich schodów". Przypadki te dotyczyły jednak funkcji o wahaniu ograniczonym, gdzie mieszanie potoków jest wykluczone (klasyczne twierdzenia Kochergina i Katoka). Jednak wiele potoków na powierzchniach ma własność silnego mieszania: wyróżnia się tu tzw. potoki Arnolda i Kochergina (rezultaty Fayada, Kochergina, Chanin, Sinaja oraz Ulcigrai – przypadek przekładań odcinków).

W przypadku silnego mieszania kolejnym zagadnieniem jest rozstrzygnięcie, czy mieszanie to jest tzw. *mieszaniem dowolnego rzędu*. Dotykamy tu jednego z fundamentalnych i najstarszych (ciągle otwartych) problemów teorii ergodycznej, problemu Rochlina, a mianowicie, czy zawsze silne mieszanie implikuje mieszanie dowolnego rzędu. We wszystkich znanych klasach przykładów silne mieszanie rzeczywiście implikuje mieszanie dowolnego rzędu (najbardziej spektakularnym rezultatem jest tu twierdzenie Hosta z 1990 roku o wielokrotnym mieszaniu układów mieszających o widmie osobliwym), lecz w przypadku potoków Arnolda i Kochergina odpowiedź nie była znana (a więc na przykład problem wielokrotnego mieszania potoków Kochergina liczy sobie ponad czterdzieści lat). Wiadomo już było wcześniej, że potoki mieszające z własnością Ratner mają własność mieszania dowolnego rzędu. Problem polega jednak na tym, że (słaba) własność Ratner nie zachodzi, co wykazano w pracy [5]. Praca ta (wspólna z B. Fayadem) jest w tym kontekście przełomowa. Kanigowski zaproponował nową definicję własności Ratner, nazwaną *przełączeniową własnością Ratner*, w skrócie PWR, w której dopuszcza się zmianę strzałki czasu. Następnie pokazuje się, że konsekwencje dynamiczne tej nowej własności są zachowane. Kulminacją pracy [5] jest wykazanie PWR w przypadku potoków Arnolda i Kochergina (przy dodatkowych założeniach na aproksymacje obrotów i punktów osobliwych funkcji dachowej). W pracy [5] rozwiązano zatem otwarty od ponad czterdziestu lat problem o mieszaniu wszystkich rzędów w tej klasie potoków.

Kolejnym przełomem w tematyce ratnerowskiej była praca [6], wspólna z Kułagą-Przymus, w której po raz pierwszy wykazano możliwość zachodzenia własności Ratner dla potoków nad przekładaniami odcinków (wszystkie wcześniejsze prace dotyczyły potoków specjalnych nad izometriami), co pozwala na badanie dalszych ważnych klas potoków gładkich na powierzchniach.

Tematyka ta z powodzeniem była kontynuowana w pracy [12] (wspólnej z Kułaga-Przymus i C. Ulcigrai), w której udowodniono, że gładkie, mieszające potoki na powierzchniach (typowo) są mieszające wszystkich rzędów.

Prace [8,13] (wspólne z A. Solomko) są powrotem do badania potoków von Neumanna i badania ich niezmienników miarowych (takich jak ranga potoku) i problemów klasyfikacyjnych. W pracy [9] z kolei liczy się tzw. wolną entropię Katoka–Thouvenota (jest to niezmiennik subtelniejszy niż sama entropia, skuteczny w przypadku zerowej entropii), co pozwala również rozstrzygać o innych niezmiennikach miarowych potoków gładkich – niech komentarzem do tych eleganckich prac będzie to, że wyniki tego typu jeszcze kilka lat temu wydawały się nieosiągalne.

Tematyka pracy [10] (wspólnej z F. Rodriguezem-Hertzem i K. Vinhagem) dotyczy gładkich układów dynamicznych o dodatniej entropii. Rozwiązano w niej klasyczny problem istnienia gładkich K-automorfizmów, które nie są Bernoulliego na rozmaitościach wymiaru cztery (do tej pory konstrukcje tego typu były osiągalne dopiero w wymiarze pięć). Problem pozostaje otwarty dla wymiaru trzy.

Kolejnym wybitnym osiągnięciem naukowym Kanigowskiego jest praca [11] (wspólna z B. Fayadem i G. Fornim), w której rozstrzygnięto problem widma dla dużej klasy potoków lokalnie hamiltonowskich na $\mathbb{T}^2$, wykazując, że jest ono lebesgue'owskie. O problemie widma dla potoków Arnolda słyszałem już trzydzieści lat temu, przy czym wielu wybitnych matematyków przypuszczało, że widmo takich potoków jest osobliwe (choć na przykład M. Herman w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku powiedział mi, że on sądzi, iż widmo jest lebesgue'owskie – wydaje mi się jednak, że była to opinia odosobniona). W eleganckiej konstrukcji w pracy [4] (wspólnej z B. Fayadem) wykazano zaskakujący rezultat, że klasa ciągów będących czasami sztywności dla automorfizmów słabo mieszających jest istotnie większa niż czasów sztywności dla obrotów, odpowiadając na wcześniejsze pytanie z pracy Bergelsona, del Junco, Rosenblatta i niżej podpisanego.

W końcu w pracy [7] (wspólnej z niżej podpisanym) odpowiedziano na pytanie Thouvenota sprzed ponad dwudziestu lat o możliwości zachodzenia własności Ratner dla potoków z własnością sztywności. Choć powszechnie uważano, że potrzebna jest po prostu dobra konstrukcja, odpowiedź okazała się zaskakująca – centralizator potoków z własnością Ratner jest zbyt mały, aby mogła zachodzić jednocześnie sztywność. Rezultat tym bardziej cenny, że naturalne klasy potoków na powierzchniach, na przykład gładkie potoki na $\mathbb{T}^2$ bez punktów stałych są sztywne, a więc dla nich własność Ratner jest wykluczona.

Kanigowski jest jednym z największych talentów naukowych ostatnich lat w matematyce polskiej i nie tylko. To ostatnie znajduje potwierdzenie międzynarodowe – uzyskanie prestiżowego stypendium im. S. Chowli w *Penn State University* czy współpraca z wybitnymi matematykami (wspomniani wcześniej B. Fayad, G. Forni, F. Rodriguez-Herz, C. Ulcigrai). Za swoją rozprawę doktorską Kanigowski otrzymał Międzynarodową Nagrodę im. Stefana Banacha za 2015 rok (wcześniej za rozprawę otrzymał nagrodę im. Marka Wacławka). Otrzymał również nagrodę PTM dla młodych matematyków za 2015 rok.

Mimo początkowego stadium swojej kariery naukowej Kanigowski był już wielokrotnie zapraszany do wygłaszania wykładów, m.in. do *Paris VII*, *Northwestern University*, *Bristol University*, *Maryland University*, *University of Utah*, ostatnio wygłosił serię referatów w *Penn State University*. Uczestniczył w kilku konferencjach międzynarodowych: Oberwolfach 2012, Heraklion 2013, *Institute for Advanced Studies* w Jerozolimie 2013, Tel Aviv 2014, Toruń 2014, Chapel Hill 2014. Był zaproszony jako *invited speaker* na konferencji *Journées Dynamiques P6–P7* w Paryżu w 2015 roku.

Z ciekawostek – Kanigowski ma również talent sportowy (bieganie). Jego prawdziwą pasją jest siatkówka plażowa. W roku 2012 zdobył w tej dyscyplinie mistrzostwo Torunia, a rok później zajął trzecie miejsce w mistrzostwach województwa kujawsko-pomorskiego. Adam Kanigowski ma żonę Olgę i półroczną córkę Julię.

Cytowane prace laureata

[1] *Perron-Frobenius and Krein-Rutman theorems for tangentially positive operators*, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), nr 6, 2240–2263 (współautor: W. Kryszewski).

[2] *Ratner's property for special flows over irrational rotations under functions of bounded variation. II*, Coll. Math. 136 (2014), nr 1, 125–147.

[3] *Ratner's property for special flows over irrational rotations under functions of bounded variation*, Ergodic Theory Dynam. Systems 35 (2015), nr 3, 915–934.

[4] *Rigidity times for weakly mixing dynamical systems which are not rigidity times for any irrational rotation*, Ergodic Theory Dynam. Systems 35 (2015), 2529–2534 (współautor: B. Fayad).

[5] *Multiple mixing for a class of conservative surface flows*, Inventiones Math. 203 (2016), 555–614 (współautor: B. Fayad).

[6] *Ratner's property and mild mixing for smooth flows on surfaces*, Ergodic Theory Dynam. Systems 36 (2016), 2512–2537 (współautor: J. Kułaga-Przymus).

[7] *Flows with Ratner's property have discrete essential centralizer*, Studia Mathematica 237 (2017), 185–194 (współautor: M. Lemańczyk).

[8] *On rank of von Neumann special flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems (2017) (współautor: A. Solomko).
[9] *Slow entropy for smooth flows on surfaces*, Israel J. Math.
[10] *Smooth K non-Bernoulli automorphisms in dimension 4*, J. Modern Dynamics, J. Modern Dynamics (współautorzy: F. Rodriguez-Hertz, K. Vinhage).
[11] *Spectral properties of smooth surface flows*, przesłana do publikacji (współautorzy: B. Fayad, G. Forni).
[12] *Multiple mixing and parabolic divergence in smooth area-preserving flows on higher genus surfaces*, J. European Math. Society (współautorzy: J. Kułaga-Przymus, C. Ulcigrai).
[13] *Isomorphism problem for von Neumann flows*, Israel J. Math. (współautor: A. Solomko).

Mariusz Lemańczyk (Toruń)

Jak widać, nie każdego fascynują pozbawione znaczenia reguły i pozbawione znaczenia wnioski, które można z nich wysnuć, tak jak nas. Nie potrafię tego pojąć.

Jeff Atwood

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 391–395
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krótkie informacje

Postanowieniem Prezydenta RP nominacje na tytuł naukowy profesora nauk matematycznych otrzymali:

- 7 grudnia 2017 roku – Włodzimierz Bryc z *University of Cincinnati* oraz Ian Pratt-Hartmann z Uniwersytetu Opolskiego,
- 6 lutego 2018 roku – Stanisław Spodzieja z Uniwersytetu Łódzkiego.

* * *

Nagrodę Shawa za 2017 rok otrzymali János Kollar z *Princeton University* i Claire Voisin z *Collége de France* za ich godne uwagi wyniki w wielu obszarach geometrii algebraicznej, mające wpływ za rozwiązanie długo otwartych problemów uważanych dotąd za nierozwiązywalne.

* * *

Christopher Hacon z *University of Utah* i James McKernan z *University of California* w San Diego zostali laureatami nagrody *Breakthrough Prize in Mathematics* za 2017 rok, ufundowanej w 2013 roku przez Marka Zuckerberga i Jurija Milnera za przełomowe dokonania w matematyce. Zaszczytne wyróżnienia przyznano za ich wybitny wkład w rozwój biwymiernej geometrii algebraicznej, w szczególności za badania dotyczące konstrukcji modeli minimalnych we wszystkich wymiarach.

* * *

Nagrodę Wolfa za 2018 rok otrzymali Alexander Beilinson i Vladimir Drinfeld z *University of Chicago* za imponujący wkład w badania w zakresie geometrii algebraicznej, teorii reprezentacji i fizyki matematycznej.

* * *

Stanisław Kwapień z Uniwersytetu Warszawskiego i Instytutu Matematycznego PAN otrzymał w 2017 roku Nagrodę Prezesa Rady Ministrów za wybitny dorobek naukowy. Nowatorskie prace laureata przyczyniły się do rozwoju lokalnej teorii przestrzeni Banacha i teorii miar w przestrzeniach Banacha, a jego szeroko znane twierdzenia dotyczące teorii operatorów, twierdzeń granicznych i procesów losowych weszły do kanonu analizy funkcjonalnej, rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

* * *

Jerzy Klamka z Politechniki Śląskiej w Gliwicach otrzymał w 2017 roku Nagrodę Prezesa Rady Ministrów za osiągnięcia naukowe, w uznaniu jego badań z zakresu zagadnień sterowalności układów dynamicznych oraz praktycznego wykorzystania metod fizyki kwantowej w informatyce.

* * *

Janusz Górniak z Politechniki Wrocławskiej – wyjątkowy wykładowca i organizator wielu akcji popularyzujących matematykę – otrzymał w 2017 roku Nagrodę Prezesa Rady Ministrów za osiągnięcia dydaktyczne.

* * *

Piotr Nowak z Instytutu Matematycznego PAN został w 2017 roku laureatem Nagrody Prezesa Rady Ministrów za wysoko ocenione osiągnięcia, będące podstawą nadania stopnia doktora habilitowanego na podstawie rozprawy *Kohomologie grup o współczynnikach w modułach Banacha*.

* * *

Bartosz Langowski z Politechniki Wrocławskiej został w 2017 roku laureatem Nagrody Prezesa Rady Ministrów za rozprawę doktorską *Transformaty Riesza, funkcje kwadratowe i przestrzenne Sobolewa w kontekście klasycznych i zsymetryzowanych rozwinięć Jacobiego*.

* * *

Andrzej Trautman z Uniwersytetu Warszawskiego otrzymał, w dniu 6 grudnia 2017 roku na Zamku Królewskim w Warszawie, Nagrodę Fundacji na rzecz Nauki Polskiej w obszarze nauk matematyczno-fizycznych i inżynierskich za teoretyczne wykazanie istnienia fal grawitacyjnych.

* * *

Nagrodę Naukową im. Wacława Sierpińskiego, przyznawaną przez Wydział III PAN, otrzymał w 2017 roku Karol Palka z Instytutu Matematycznego PAN za uogólnienie teorii modeli niemal minimalnych i jego zastosowanie do dowodu hipotezy Coolidge'a–Nagatyza.

* * *

Stypendia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla wybitnych młodych naukowców otrzymali w 2017 roku: Kamil Kaleta (PWr), Marcin Andrzej Woźniak (PŚl) i Jakub Jan Radoszewski (UW).

* * *

Stypendia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego na rok akademicki 2017/18 dla studentów za wybitne osiągnięcia otrzymali studenci kierunku matematyka: Grzegorz Adamski (UAM), Tomasz Bochacik (AGH), Jakub Koncki (UW), Mieczysław Krawiarz (UAM), Aleksandra Krawiec (UŚl), Ryszard Kukulski (UŚl), Karolina Łukaszewicz (UWr), Mikołaj Marciniak (UAM), Grzegorz Marcjasz (PWr), Łukasz Maślanka (PŁ), Grzegorz Moś (UŚl), Paweł Nałęcz-Jawecki (UW), Patrycja Odyniec (PB), Katarzyna Piskała (UW), Martyna Płomecka (UW), Olga Półchłopek (UW), Kamil Rychlewicz (UW), Tomasz Skalski (PWr), Barbara Smoleń (PŚl), Mateusz Staniak (UWr), Bartłomiej Szczygieł (UW), Bartosz Uniejewski (PWr), Wojciech Wawrów (UAM), Tomasz Weron (PWr) i Wojciech Wołoszyn (UGd).

* * *

W Konkursie PTM na najlepszą pracę studencką z rachunku prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki w 2017 roku otrzymali:

– I nagrodę – Michał Ciach (UW) za pracę *Modelowanie reakcji dysocjacji białek w spektrometrii masowej*,
– III nagrodę – Katarzyna Jabłońska (UJ) za pracę *Reprezentacje liniowe grup i ich zastosowanie w genetyce* oraz Łukasz Maziarka (UJ) za pracę *Stochastyczne równania różniczkowe wstecz – teoria, zastosowania, symulacje*.

W roku 2017 sponsorami Konkursu byli Dolnośląska Loża Bussines Center Club oraz Krzysztof Samotij.

* * *

Jury XLIII Konkursu im. Marka Kuczmy uznało następujące prace z równań funkcyjnych za najlepsze opublikowane w 2016 roku:

– I miejsce – Wojciech Jabłoński, *Iterations in rings of formal power series*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 2015, 114 str.,
– II miejsce – Wojciech Jabłoński, *Additive iterative roots of identity and Hamel bases*, Aequationes Math. 90 (2016), 133–145,
– III miejsca – Roman Badora, *The Hahn–Banach theorem almost everywhere*, Aequationes Math. 90 (2016), 173–179, Szymon Draga i Janusz Morawiec, *Reducing the polynomial-like iterative equations order and a generalized Zoltán Boros' problem*, Aequationes Math. 90 (2016), 935–950, Gyula Maksa i Maciej Sablik, *On the alienation of the exponential Cauchy equation and the Hosszú equation*, Aequationes Math. 90 (2016), 57–66.

* * *

W dniu 8 grudnia 2017 roku Lech Tadeusz Januszkiewicz z Instytutu Matematycznego PAN wygłosił, na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, XXV Wykład im. Władysława Orlicza *O geometrycznych metodach w teorii grup nieskończonych*.

* * *

Stanisława Kanas z Uniwersytetu Rzeszowskiego została powołana w skład *Women Committee* Europejskiego Towarzystwa Matematycznego na kadencję 2018–2021.

* * *

W dniu 23 lutego 2018 roku w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego odbyła się uroczysta sesja Polskiego Towarzystwa Matematycznego z okazji dziewięćdziesiątej rocznicy urodzin Andrzeja Krzywickiego.

* * *

Jubileusz osiemdziesięciolecia urodzin obchodził Mieczysław Trąd, organizator Klubów Młodych Matematyków „Pitagoras", od ponad czterdziestu lat opiekun uzdolnionej matematycznie młodzieży z województwa lubuskiego.

* * *

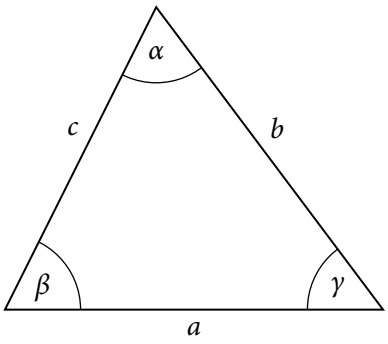
W dniu 15 września 2017 roku zmarł, w wieku 66 lat, Mariusz Koras z Uniwersytetu Warszawskiego, specjalista z geometrii algebraicznej (w szczególności, geometrii zespolonych rozmaitości afinicznych), m.in. współautor dowodu hipotezy Coolidge'a–Nagaty.

W dniu 17 grudnia 2017 roku zmarł, w wieku 86 lat, Józef Siciak, jeden z najwybitniejszych matematyków polskich, twórca krakowskiej szkoły funkcji analitycznych. Międzynarodowy rozgłos zyskał dzięki pracom poświęconym wielomianowym funkcjom ekstremalnym oraz funkcjom oddzielnie analitycznym.

Redakcja prosi o nadsyłanie informacji do działu *Krótkich informacji* na adres: Grzegorz Łysik, Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa, e-mail: glysik@ujk.edu.pl.

Twierdzenie Dijkstry. W dowolnym trójkącie, w którym naprzeciw boków długości a, b i c znajdują się odpowiednio kąty α, β, γ, zachodzi równość:

$$\operatorname{sgn}(a^2 + b^2 - c^2) = \operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma)$$



Edsger W. Dijkstra (1930–2002)

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 397–399
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Lech Dubikajtis (1927–2014)





Lech Dubikajtis urodził się 6 października 1927 roku w Warszawie w rodzinie oficera Wojska Polskiego. Od 1934 roku mieszkał wraz z rodzicami w Wilnie, gdzie w 1938 roku wstąpił do Gimnazjum Państwowego im. Zygmunta Augusta. W czasie okupacji naukę kontynuował na tajnych kompletach; zdał maturę w 1945 roku. Studia w zakresie elektrotechniki rozpoczął w tym samym roku na Politechnice Warszawskiej z tymczasową siedzibą w Lublinie. Warto wspomnieć, że zainteresowanie techniką wzbudził w nim ojciec Roman, który w 1939 roku został internowany na Litwie i tam też zmarł na serce. W latach 1946–1948 Lech Dubikajtis kontynuował studia z elektrotechniki na Politechnice Gdańskiej, lecz później przeniósł się na studia matematyczne do Torunia. Magisterium z matematyki uzyskał na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w 1950 roku i w tym samym roku objął tam stanowisko asystenta. W Toruniu pozostał do 1972 roku, rozwijając zainteresowania matematyczne, a także szeroko rozumianą działalność społeczną. W 1958 roku po tzw. „odwilży" wraz z Karolem Górskim

w Toruniu współorganizował Klub Inteligencji Katolickiej. Założył także Dyskusyjny Klub Filmowy, którego był prezesem aż do wyjazdu z Torunia. W 1968 roku wspólnie z Leonem Jeśmanowiczem zorganizował w IV LO pierwszą klasę eksperymentalną dla młodzieży uzdolnionej matematycznie.

Zainteresowania naukowe Lecha Dubikajtisa koncentrowały się wokół logiki i geometrii. Pracę doktorską napisał pod kierunkiem Stanisława Jaśkowskiego, znanego logika, ucznia Jana Łukasiewicza. Doktorat obronił w 1954 roku w Instytucie Matematycznym PAN w Warszawie. Cztery lata później w oparciu o rozprawę *Aksjomatyka geometrii kul* (*Liego*) uzyskał nominację na docenta. Na tytuł profesora musiał jednak czekać wiele lat. Wniosek o awans profesorski Senat Uniwersytetu Mikołaja Kopernika wystosował do Ministerstwa w 1964 roku. Po siedmiu latach oczekiwania na odpowiedź okazało się, że wniosek został wstrzymany po negatywnej opinii uczelnianego sekretarza PZPR. W końcu, w maju 1972 roku nadeszła decyzja o nominacji profesorskiej. Jednak Dubikajtis podjął już decyzję o przenosinach na Uniwersytet Śląski. Od października 1972 roku wykładał w Katowicach. Tutaj także, oprócz pracy naukowej, wykonywał wiele innych prac na rzecz środowiska naukowego. Między innymi zorganizował i poprowadził, podobnie jak w Toruniu, Dyskusyjny Klub Filmowy. W latach 1973–1975 był prezesem Oddziału Górnośląskiego PTM. Jednak przede wszystkim zajmował się podstawami geometrii i dydaktyką matematyki. Kierował też Zakładem Dydaktyki Matematyki. W Katowicach wypromował dwóch doktorów: Stanisława Kowalskiego z Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Olsztynie i Jana Frydę z Uniwersytetu Śląskiego. W sumie, w latach 1964–1979, Lech Dubikajtis wypromował jedenastu doktorów matematyki, z czego dziewięcioro w Toruniu.

Lech Dubikajtis był autorem około stu prac z różnych działów geometrii i logiki. Publikował głównie po angielsku, choć nie tylko – w jego dorobku znajdują się prace wydane po polsku, francusku i włosku. Był autorem, nie licząc wznowień, siedmiu książek dotyczących różnych działów geometrii. Pierwsza jego książka, *La geometrie de Lie*, była wydana w 1958 roku przez PWN w serii *Monografie Matematyczne*. W 1963 roku, także nakładem PWN, wydał obszerny *Wstęp do geometrii wykreślnej*. Ważną publikacją była również *Geometria metryczna* wydana na UMK w 1971 roku, a powtórnie w 1973 roku na UŚl. Dwukrotnie wydany był także dwutomowy skrypt z geometrii analitycznej dla pierwszego roku studiów matematycznych. Lech Dubikajtis utrzymywał rozległe kontakty naukowe. Pracował, między innymi, na uniwersytetach w São Paulo i Campinas w Brazylii (w latach 1975–1976) i na uniwersytetach w Lille i Leuven we Francji i Belgii (w latach 1982–1983).

W stanie wojennym internowano Jacka, syna Dubikajtisa. Jacek był wówczas studentem matematyki, działaczem Niezależnego Zrzeszenia Studentów.

Egzamin magisterski zdawał będąc na przepustce z miejsca internowania. Krótko po tych zdarzeniach, w 1982 roku, Lech Dubikajtis wyjechał do Francji, a następnie do Włoch w ramach tzw. wyjazdu popieranego. Oznaczało to, że część zarobionych pieniędzy przekazywał uniwersytetowi, a tym samym jego pobyt zagraniczny w świetle wówczas obowiązującego prawa był legalny. W końcu, w 1983 roku, osiadł we Włoszech, gdzie objął stanowisko profesora zwyczajnego na *Università della Calabria* w Cosenzy. Tam piastował kilka ważnych funkcji akademickich, a w szczególności został wybrany dziekanem i pełnił funkcję prodziekana. Nadal publikował. Nie zaniedbywał też działalności na rzecz środowiska matematycznego, biorąc czynny udział w kilku stowarzyszeniach. Publikował również prace (po włosku) z pogranicza filozofii i teologii. Po dwudziestu latach, będąc już na emeryturze, powrócił do kraju i osiadł w Toruniu.

Lech Dubikajtis był matematykiem obdarzonym wielką pasją. Uprawiał matematykę nie pod presją konieczności osiągania wyników naukowych, nie jako powinność uczonego, lecz dlatego, że to, co robił, interesowało go. Był osobowością twórczą, a przejawiało się to także w jego działaniach poza matematyką. Był człowiekiem przyjaznym i ciepłym dla przyjaciół i rodziny, którą stawiał najwyżej. Dla swej żony Basi, córki Beaty oraz synów Jacka i Jerzego stworzył dom wypełniony ciepłem i atmosferą zamiłowania do kultury. Zmarł 11 listopada 2014 roku po długiej i ciężkiej chorobie i został pochowany na cmentarzu przy ul. Wybickiego w Toruniu. Wszystkim nam go bardzo brakuje.

Aleksander Błaszczyk (Katowice)



Symetria w Geometrii (fot. Małgorzata Jakubowska).
Wyróżnienie w konkursie Matematyka w obiektywie w 2017 roku (http://mwo.usz.edu.pl)

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 401–403
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Zdzisław Porosiński (1955–2016)



Zdzisław Józef Porosiński urodził się 19 marca 1955 roku w Kłodzku. W latach 1970–1974 był uczniem Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Środzie Śląskiej. Po maturze w 1974 roku rozpoczął studia wyższe w zakresie matematyki stosowanej na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej. Studia ukończył w 1979 roku z wyróżnieniem przedstawiając pracę magisterską *O pewnych grach czasowych z reakcją*. Opiekunem jego rozprawy był Stanisław Trybuła.

Po studiach rozpoczął pracę zawodową na Politechnice Wrocławskiej w Instytucie Matematyki na etacie asystenta. W dniu 17 marca 1987 roku obronił na swojej *Alma Mater* pracę doktorską *Wybrane problemy optymalnego zatrzymywania*. Promotorem doktoratu był również Stanisław Trybuła. Główne wyniki rozprawy doktorskiej zawarł w pracy *The full-information best choice*

Zdjęcie Zdzisława Porosińskiego wykonała Monika Kaczmarz.

problem with a random number of observations opublikowanej w *Stochastic Processes and their Applications*. Po uzyskaniu stopnia doktora, w kwietniu 1987 roku, awansował na stanowisko starszego asystenta, a wkrótce, w czerwcu 1987 roku na stanowisko adiunkta. Kontynuował badania rozpoczęte w doktoracie, a rezultaty przedstawił w rozprawie habilitacyjnej *Problem wyboru najlepszego kandydata z losową liczbą aplikantów*. Po kolokwium habilitacyjnym, które miało miejsce w dniu 20 listopada 2003 roku, uzyskał stopień doktora habilitowanego nauk matematycznych. Wspólnie z Trybułą i Szajowskim podał analityczną postać sterowań adaptacyjnych dla układów liniowych w obecności zakłóceń z klasy wykładniczej. Interesował się także między innymi zagadnieniami estymacji bayesowskiej i odpornej w wykładniczej rodzinie rozkładów przy różnych asymetrycznych funkcjach straty. Opublikował ponad trzydzieści prac. Jako ceniony ekspert z zakresu badań operacyjnych, teorii gier, statystyki matematycznej, a także wspomagania informatycznego badań, współpracował z matematykami z Japonii, Niemiec, Rosji, Stanów Zjednoczonych Ameryki Północnej i Belgii. W 2008 roku był promotorem pracy doktorskiej *Bayesian and robust Bayesian estimation for various loss functions* Agnieszki Kamińskiej.

Podczas swej pracy naukowej i akademickiej był zatrudniony w Instytucie Matematyki Politechniki Wrocławskiej, który zmienił swoją nazwę na Instytut Matematyki i Informatyki, a ostatnio został przekształcony w Wydział Matematyki. W 2009 roku został profesorem nadzwyczajnym Politechniki Wrocławskiej. Był również pracownikiem Zakładu Nauk Podstawowych Wyższej Szkoły Zawodowej w Nysie (w latach 2001–2008), początkowo jako wykładowca, a od 2007 roku na stanowisku profesora tej uczelni.

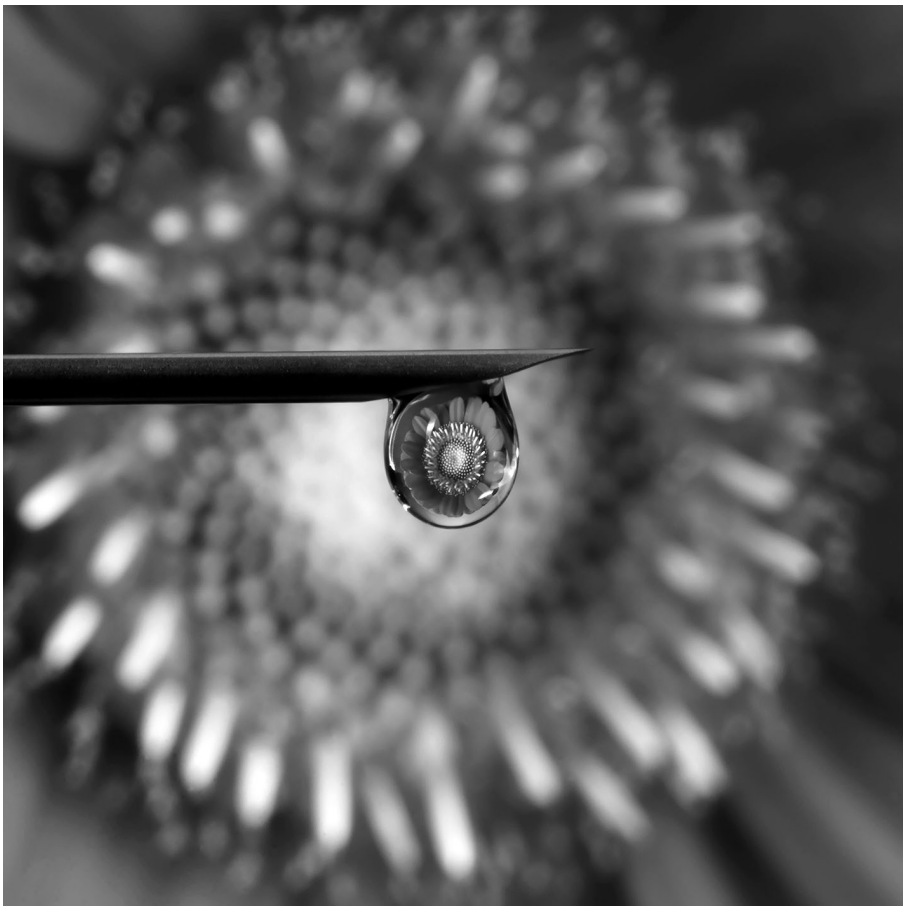
W latach 2006–2012 pełnił ważną i odpowiedzialną funkcję dyrektora do spraw dydaktyki IM PWr. Sprawował ją z wielkim zaangażowaniem, z troską o wysoką jakość kształcenia matematycznego. W tamtym okresie ranga dydaktyki na wydziałach technicznych Politechniki Wrocławskiej była wiodąca w skali kraju, co zaowocowało tym, że w 2008 roku XIII Ogólnopolska Konferencja *Nauczanie Matematyki w Uczelniach Technicznych* obradowała we Wrocławiu. Kierownictwo uczelni doceniało jego zaangażowanie i wyróżniało nagrodami.

W życiu prywatnym był wspaniałym mężem, mądrym ojcem i ukochanym dziadkiem. Uwielbiał podróże, lubił rozwiązywać krzyżówki, grać w brydża i szachy. Swoje techniczne wykształcenie wykorzystywał nie tylko w pracy, ale także w domu – projektował i wykonywał meble oraz inne przydatne sprzęty. Mnóstwo radości sprawiało mu uprawianie ogródka, majsterkowanie oraz spędzanie czasu z wnukami, którym zaszczepił pasję do muzyki poważnej. Był

człowiekiem sprawiedliwym i solidnym – rodzina i znajomi zawsze mogli na nim polegać. Lubił też żartować i sprawiać innym niespodzianki. Uwielbiał wyprawy rowerowe, wycieczki po górach, spływy kajakowe, wędzone ryby i ciasto z makiem.

Zdzisław Porosiński zmarł 26 marca 2016 roku we Wrocławiu. Zabrała go choroba, z którą walczył dzielnie kilka lat. Pochowany został 31 marca 2016 roku na cmentarzu we Wrocławiu przy ul. Kiełczowskiej. Jego studenci, współpracownicy i przyjaciele zapamiętają go jako szlachetnego i prawego człowieka, znakomitego organizatora, wykładowcę i człowieka nauki.

Agnieszka Kamińska, *Krzysztof Szajowski* (Wrocław)

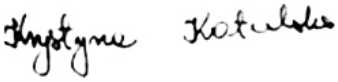


Soczewkowanie kropli wody na tle ciągu Fibonacciego (fot. Kuba Surmacz).
Czwarta nagroda w konkursie Matematyka w obiektywie w 2017 roku (http://mwo.usz.edu.pl)

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 405–407
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krystyna Katulska (1950–2017)





Krystyna Maria Katulska urodziła się 12 stycznia 1950 roku w Poznaniu, w rodzinie inteligenckiej, jako córka Leona i Cecylii z domu Duczmal. W latach 1957–1964 uczęszczała do szkoły podstawowej, a następnie kontynuowała naukę w II Liceum Ogólnokształcącym im. Heleny Modrzejewskiej w Poznaniu. W dniu 4 czerwca 1968 roku uzyskała świadectwo dojrzałości i została wyróżniona pamiątkowym medalionem dla najwybitniejszych absolwentek Liceum[1]. W tym samym roku podjęła studia matematyczne na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii UAM. W latach 1968–1973 była członkiem Zrzeszenia Studentów Polskich. W latach 1971–1972 była przewodniczącą Komisji Nauki Rady Wydziałowej Matematyki, Fizyki i Chemii tegoż Zrzeszenia. Tytuł magistra matematyki (specjalność metody numeryczne) uzyskała w dniu 14 czerwca 1973 roku. Pracę magisterską *Analiza wyników danych z nieortogonalnej klasyfikacji krzyżowej*

[1] Wówczas to liceum było szkołą żeńską – przyp. red.

lub hierarchicznej metodą Bocka napisała pod kierunkiem Tadeusza Calińskiego. W dniu 1 września 1973 roku podjęła pracę w Zakładzie Metod Numerycznych Instytutu Matematyki UAM jako asystent stażysta. W tym samym roku wstąpiła do Związku Nauczycielstwa Polskiego. Od 1 lutego 1974 roku do 31 stycznia 1977 roku była słuchaczką Studium Doktoranckiego Matematyki przy Instytucie Matematyki UAM. Po ukończeniu tych studiów powróciła do pracy w Zakładzie Metod Numerycznych Instytutu Matematyki UAM jako starszy asystent. W dniu 20 października 1978 roku Rada Wydziału Matematyki i Fizyki UAM nadała jej stopień naukowy doktora nauk matematycznych. Promotorem rozprawy doktorskiej *Układy blokowe uwikłane, ich teoria i zastosowanie* był Tadeusz Caliński, a recenzentami Dobiesław Bobrowski i Wiktor Oktaba. Dnia 1 stycznia 1979 roku uzyskała etat adiunkta. Od 1 kwietnia 1980 roku pracowała w kierowanym przeze mnie Zakładzie Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki Matematycznej. Przez długie lata współpracy Krystyna była bardzo życzliwą, pogodną, sumienną i pracowitą koleżanką. Nigdy się na niej nie zawiodłem. W dniu 22 czerwca 1990 roku, uchwałą Rady Wydziału Matematyki i Fizyki UAM uzyskała stopień naukowy doktora habilitowanego nauk matematycznych. Recenzentami rozprawy habilitacyjnej *Optymalna estymacja wybranych funkcji parametrycznych w układach wagowych* byli Tadeusz Caliński, Ryszard Zieliński i niżej podpisany. Od 1 lipca 1996 roku pracowała na etacie profesora nadzwyczajnego UAM.

Dorobek naukowy Krystyny Katulskiej związany jest ze statystyczną teorią eksperymentu. Od 1982 roku rozwijała teorię układów wagowych i badała ich związek z układami blokowymi. Nowością tych badań było odrzucenie dotychczas obowiązującego założenia o jednorodności wariancji błędów doświadczalnych. Wprowadzane kolejno macierze kowariancji dla błędów, różne od macierzy jednostkowej, pozwoliły na rozszerzenie istniejącej teorii oraz nowe jej zastosowania. Jest autorką lub współautorką osiemdziesięciu prac, w tym opublikowanych w czasopismach o zasięgu światowym. Brała czynny udział w licznych konferencjach naukowych w kraju i za granicą. Za działalność naukowo-badawczą była wielokrotnie wyróżniana nagrodami rektora UAM. Wypromowała dwoje doktorów oraz opracowała osiem recenzji rozpraw doktorskich.

Była cenionym dydaktykiem. Prowadziła wykłady ze statystyki matematycznej i teorii eksperymentu oraz seminaria magisterskie. Jej wykłady i seminaria były chętnie wybierane przez studentów. Wykształciła liczne grono magistrów matematyki.

Krystyna Katulska pełniła liczne funkcje organizacyjne na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM. W latach 1993–1996 była kierownikiem Zaocznego Studium Matematyki. W latach 1996–1999 była prodziekanem ds. studiów zaocznych, a w latach 1999–2002 była prodziekanem ds. studenckich. W latach

2002–2005 kierowała Studium Doktoranckim, a następnie Studium Podyplomowym Matematyki. Od 1 września 2012 roku kierowała Zakładem Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki Matematycznej. Poświęcała swój czas także zewnętrznym organizacjom naukowym. Była członkiem Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Polskiego Towarzystwa Biometrycznego. W latach 1983–1989 była sekretarzem Zarządu Głównego PTB, a ostatnio członkiem Zarządu Głównego PTB. W latach 1991–2011 była sekretarzem Komisji Statystyki Matematycznej Komitetu Matematyki PAN. Była członkiem Rady Naukowej czasopisma *Colloquium Biometricum* oraz redaktorem statystycznym czasopisma *Journal of Gender and Power*.

W latach 2002–2009 łączyła pracę w UAM z pracą w Wyższej Szkole Handlu i Usług w Poznaniu. W latach 2002–2004 była prorektorem ds. dydaktyki w tej szkole, w latach 2004–2008 była dziekanem, a w latach 2008–2009 prodziekanem ds. studenckich Wydziału Społeczno-Ekonomicznego.

Ostatni okres życia Krystyny Katulskiej był okresem zmagania się z nowotworem. Mimo wyniszczającej choroby, do ostatnich dni swego życia wypełniała z zaangażowaniem zadania dydaktyczne i obowiązki związane z kierowaniem Zakładem Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki Matematycznej. Niestety choroba zwyciężyła. Zmarła przedwcześnie w dniu 9 stycznia 2017 roku. Pochowana jest na cmentarzu komunalnym Junikowo w Poznaniu.

Mirosław Krzyśko (Poznań)

Wciąż jest dla mnie źródłem nieustającego zdziwienia, że kilka znaków nagryzmolonych na tablicy lub na kartce papieru może zmienić bieg ludzkich spraw.

Stanisław Ulam

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 409–412
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krzysztof Maurin (1923–2017)





Trudno jest w krótkim tekście opisać tak bogatą osobowość, jaką był profesor Krzysztof Maurin. Był matematykiem, filozofem, teologiem i – dla nas przede wszystkim – nauczycielem i mistrzem. W tej notce zajmiemy się przedstawieniem sylwetki Maurina – matematyka, zostawiając pozostałe aspekty jego działalności do późniejszego opisu.

Krzysztof Maurin urodził się 14 lipca 1923 roku w Kaliszu, studia rozpoczął w 1943 roku na tajnych kompletach UW. Ukończył je w 1949 roku. W 1951 roku roku uzyskał stopień doktora nauk matematycznych na podstawie rozprawy *O samosprzężonych równaniach eliptycznych drugiego rzędu i pewnych układach równań eliptycznych*. Promotorem był Stanisław Mazur. Habilitację uzyskał w 1958 roku, w 1962 roku został mianowany profesorem nadzwyczajnym, a w 1969 roku – profesorem zwyczajnym.

W marcu 1962 utworzono (z inicjatywy Leopolda Infelda) Katedrę Metod Matematycznych Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Jej organizację powierzo-

no Maurinowi i Jerzemu Plebańskiemu. Kierownikiem katedry został Maurin i był nim do czasu przejścia na emeryturę w 1993 roku.

Zainteresowania matematyczne Maurina kształtowały się już w czasach studenckich. Dotyczyły dwóch tematów: zagadnień brzegowych dla równań eliptycznych i metod bezpośrednich rachunku wariacyjnego oraz ogólnej teorii rozwinięć na funkcjonały własne z jej zastosowaniami. Oba te działy matematyki nie były wówczas reprezentowane w Polsce, Maurin szukał więc kontaktów zagranicznych. Zasadnicze znaczenie w jego rozwoju jako matematyka były wizyty w Lund i kontakty z Larsem Gårdingiem.

W pracach dotyczących równań cząstkowych uzasadnił stosowalność metody Galerkina do szerokiej klasy problemów eliptycznych, podał związek metod Trefftza i Ritza z metodą rzutu ortogonalnego, udowodnił eliptyczność szerokiej klasy funkcjonałów rachunku wariacyjnego całek wielokrotnych, wykazał też stabilność indeksu eliptycznych zagadnień brzegowych przy zaburzeniach niższego rzędu.

Bardzo ważną część dorobku Maurina stanowiła ogólna teoria rozwinięć na funkcje własne. Dawała ona uzasadnienie procedury stosowanej w mechanice kwantowej od czasu Diraca. Uogólnienie tej koncepcji na grupy Liego pozwoliło m.in. otrzymać nowe podejście do abstrakcyjnej analizy harmonicznej oraz uzyskać uogólnienie twierdzeń typu Bochnera–Schwartza o dystrybucjach dodatnio określonych. Krzysztof Maurin jest także autorem kilku prac dotyczących struktury matematycznej kwantowej teorii pola w sformułowaniu Wightmana.

Owocem wymienionych wyżej zainteresowań naukowych są monografie *Metody przestrzeni Hilberta* (dedykowana Kōsaku Yosidzie i Larsowi Gårdingowi) oraz *General eigenfunction expansions and representations of topological groups*.

Jednak nie publikacje i dowodzone przez siebie twierdzenia uważał Maurin za swoje najważniejsze osiągnięcie. W jego odczuciu była nim Katedra Metod Matematycznych Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (KMMF), którą współtworzył i którą kierował przez ponad trzydzieści lat. Po latach pisał: „[b]y zrozumieć ideę przewodnią KMMF trzeba uprzytomnić sobie relacje wiążące fizykę i matematykę – Matematyka i Fizyka stanowią jedność, jeden wielki organizm". Maurin rozumiał, że matematyki na wydziale fizyki należy uczyć jako języka fizyki.

Najpierw były więc wykłady analizy matematycznej dla studentów fizyki. Niezwykłość tych wykładów rzucała się w oczy, powstał nawet termin „morenizm" dla określenia ich zawartości i stylu. Trudno jest sprecyzować, na czym to polegało; wydaje się, że ważną rolę odgrywało to, że Profesor potrafił pokazać swoją fascynację współczesną matematyką, a także to, że nowoczesny język

w prostszy i bardziej elegancki sposób potrafi ujmować podstawowe idee analizy matematycznej. Można to lepiej zrozumieć zaglądając do jego trzytomowej *Analizy*. Wykłady z analizy stały się swoistym „punktem werbunkowym" przyszłych asystentów w Katedrze, oczarowanych bogactwem matematyki ukazywanym przez Profesora.

Ważnym elementem pracy dydaktycznej Maurina były wykłady monograficzne. Co roku przygotowywał wykład na zupełnie inny temat, co było pracą prawdziwie tytaniczną. Wykładom zawsze towarzyszyły ćwiczenia prowadzone przez asystentów KMMF, co pozwalało im znacząco poszerzać horyzonty wiedzy matematycznej. Wykłady były istotnym czynnikiem tworzenia zespołu o szerokim spojrzeniu na matematykę. Oto tytuły niektórych z tych wykładów: *Aspekty matematyczne teorii kwantów*, *Funkcje sferyczne, funkcje automorficzne i teoria dwoistości Pontriagina*, *Analiza funkcjonalna dla fizyków*, *Funkcje wielu zmiennych zespolonych*, *Rachunek wariacyjny, wstęp do teorii Morse'a*, *Rachunek prawdopodobieństwa, procesy Markowa, potencjały*. Motto wykładów mogłoby brzmieć tak: „byście nie twierdzili, że nigdy o tym nie słyszeliście".

Istotną rolę odgrywały też seminaria Katedry, poświęcone początkowo strukturom matematycznym kwantowej teorii pola, później – w miarę poszerzania tematyki – teorii reprezentacji grup, metodom geometrycznym w fizyce, analizie zespolonej i innym działom matematyki.

Krzysztof Maurin miał sobie właściwy sposób podchodzenia do kształcenia młodych naukowców. Nigdy nie narzucał tematu, lecz dawał do zreferowania interesującą pracę albo powierzał prowadzenie ćwiczeń do wykładu monograficznego. Z reguły po niewielu próbach uczeń sam wybierał temat swoich badań. W rezultacie powstała szkoła naukowa o bardzo szerokim zakresie tematycznym i pewnym specyficznym stosunku do uprawianej dziedziny. Maurin wypromował kilkunastu doktorów, z których wielu jest obecnie znanymi w świecie profesorami matematyki i fizyki.

Zainteresowania i działalność naukowa Maurina znacznie wykraczały poza matematykę i fizykę. Od początku lat siedemdziesiątych prowadził interdyscyplinarne seminarium, którego tematyka, związana początkowo z metodami i znaczeniem nauk przyrodniczych, z czasem obejmowała szersze obszary, takie jak język, symbol, triada człowiek–świat–Bóg, sztuka, religia. Podobnie ewoluowała tematyka wykładów monograficznych Maurina – od czysto matematycznych do takich, których głównym tematem była filozofia i teologia. Matematyka pełni w nich zresztą zawsze ważną rolę jako język bogaty w symbole otwierające znacznie szersze dziedziny rzeczywistości, a także jako przykład życia idei – w nawiązaniu do filozofii starożytnej, w szczególności do Plotyna.

Swoistym wyznaniem wiary jest monografia *The Riemann Legacy* poświęcona współczesnemu rozwojowi idei mających źródła w pracach Riemanna. W jej zakończeniu czytamy: „*[i]t is not so strange as it might first appear: the kosmos noethos is the work of Logos, the Logos in action, and mathematics is one of the most beautiful works of the Logos who lives, acts, and works in mankind, through mankind.*"

Krzysztof Maurin bardzo żywo współpracował z matematykami, filozofami i teologami zagranicznymi, szczególnie z niemieckiej strefy językowej, w tym z takich uniwersytetów, jak Getynga, Heidelberg, Zurych, Bonn. Wygłosił kilkaset odczytów, cykli wykładów, napisał wiele artykułów, m.in. trzykrotnie wygłaszał odczyty na seminarium *Nauka–Religia–Dzieje* w Castel Gandolfo. Maurin działał aktywnie w Polskim Towarzystwie Matematycznym, w latach 1975–1977 był prezesem Oddziału Warszawskiego.

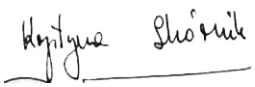
Krzysztof Maurin zmarł 14 stycznia 2017 roku w Warszawie. Został pochowany w Sobieniach-Jeziorach.

Kazimierz Napiórkowski, Paweł Urbański (Warszawa)

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 413–415
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krystyna Skórnik (1939–2017)





Krystyna Skórnik, z domu Augustyniak, urodziła się 3 kwietnia 1939 roku w Rudzie Śląskiej. Tam też uczęszczała do II LO im. Gustawa Morcinka. Po maturze w 1957 roku rozpoczęła w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Katowicach studia matematyczne, które ukończyła w 1961 roku. Pracę magisterską napisała pod kierunkiem Mieczysława Kucharzewskiego. W Wyższej Szkole Pedagogicznej, która w 1968 roku weszła w skład powstałego wówczas Uniwersytetu Śląskiego, pracowała na etacie asystenta, a później starszego asystenta do 1970 roku, kiedy to przeszła do Pracowni Matematycznej PAN w Katowicach, kierowanej przez Jana Mikusińskiego. Pod jego kierunkiem w 1971 roku napisała pracę doktorską, którą obroniła w IM PAN. Tematykę zapoczątkowaną przez pracę *Dystrybucje periodyczne zredukowane* rozwijała też w późniejszych latach, poszerzając ją o inne dziedziny matematyki uprawiane w Katowicach. Ma w dorobku ponad sześćdziesiąt publikacji, a wśród nich książkę *Operational Calculus and Related Topics* opublikowaną w 2006 roku wspólnie z H.-J. Glaeskem i A. P. Prudni-

kowem. Jej aktywność naukowa przejawiała się też poprzez udział w licznych konferencjach, często występowała w roli ich współorganizatora. W Akademii Nauk ZSRR w Moskwie odbyła zagraniczny staż naukowy w roku akademickim 1979/1980.

Była osobą niezwykle pracowitą, z wielkim oddaniem realizującą stojące przed nią zadania. Jej największą pasją okazało się jednak nauczanie i popularyzowanie matematyki. Z tego zapewne powodu nie starała się o kolejne stopnie w karierze naukowej. W 1989 roku została nauczycielem matematyki w VIII Liceum Ogólnokształcącym im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach. Jak sama o sobie powiedziała: „przyszłam na zastępstwo, a zostałam na dwadzieścia pięć lat". Wychowankowie wspominają ją jako nauczyciela bardzo życzliwego, cierpliwego, świetnego wykładowcę. Potrafiła zaszczepić młodzieży zainteresowanie matematyką. Wielu spośród jej uczniów ukończyło studia matematyczne, a część z nich rozwija karierę naukową na uczelniach krajowych i zagranicznych.

Krystyna Skórnik inspirowała uzdolnionych matematycznie uczniów do udziału w Olimpiadzie Matematycznej i innych konkursach matematycznych. Miała szczególny dar odkrywania talentów oraz umiejętność przekonywania młodych ludzi do wiary we własne możliwości. Wśród jej uczniów jest trzech laureatów i jedenastu finalistów Olimpiady Matematycznej, reprezentant Polski na *Second Middle European Mathematical Olympiad* oraz brązowy medalista Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Została odznaczona Medalem Komisji Edukacji Narodowej, Medalem Pięćdziesięciolecia Olimpiady Matematycznej oraz Medalem Sześćdziesięciolecia Olimpiady Matematycznej.

Krystyna Skórnik była związana z Polskim Towarzystwem Matematycznym od początku swojej działalności naukowej. W latach 1977–1979 oraz 1984––1986 pełniła funkcję sekretarza Oddziału Górnośląskiego, a w latach 1992–1996 wiceprezesa. Prezesem Oddziału Górnośląskiego została w roku 1996 i pełniła tę funkcję nieprzerwanie przez dwadzieścia lat. Wcieliła w tym okresie w życie wiele przedsięwzięć, które do dziś przynoszą efekty dla społeczności matematycznej na Górnym Śląsku. To z jej inicjatywy powstała monografia *Pół wieku matematyki na Górnym Śląsku*, wydana w 2003 roku nakładem Wydawnictwa Uniwersytetu Śląskiego. Z racji funkcji pełnionych w PTM była ściśle związana z organizacją konkursów matematycznych na Śląsku. Szczególną rolę odegrała w zbudowaniu od podstaw Śląskiego Konkursu Matematycznego, który jest organizowany od 2003 roku pod egidą Oddziału Górnośląskiego PTM. Grupę założycielską stanowiło kilku nauczycieli matematyki – członków PTM, wśród których oprócz Krystyny Skórnik byli m.in. Józef Siwy i Tomasz Szymczyk. Co roku w konkursie bierze udział kilkuset uczniów województwa śląskiego, z czego około stu zostaje zakwalifikowanych do rywalizacji finałowej. Z jej

inicjatywy podczas zawodów finałowych odbywają się równolegle warsztaty dla nauczycieli, a zakończenie konkursu ma uroczysty charakter, tradycyjnie uświetniony wykładem wygłoszonym przez kogoś ze znanych popularyzatorów matematyki. W uznaniu zasług Krystyny Skórnik, dla uczczenia jej pamięci, Zarząd Oddziału Górnośląskiego PTM postanowił, że od 2018 roku będzie to *Śląski Konkurs Matematyczny im. Krystyny Skórnik*.

Będąc nauczycielem z powołania, Krystyna Skórnik miała na uwadze rozwój każdego ucznia, również tego, który nie widzi siebie w rozgrywkach konkursowych. Z myślą o nich zorganizowała w 1990 roku Międzyszkolne Koło Matematyczne, przygotowujące m.in. do matury. Kładła też duży nacisk na popularyzację matematyki. Organizowała odczyty popularnonaukowe dla młodzieży, zapraszając na nie znanych wykładowców z różnych ośrodków naukowych z całej Polski. W 2002 roku wykłady przyjęły formę bardziej zorganizowaną. Zachęcona zaangażowaniem i chęcią działania kilkorga nauczycieli z rejonu Katowic, podjęła decyzję o organizacji corocznej sesji popularnonaukowej o nazwie *Spotkania z Matematyką*. Współorganizatorami sesji są Oddział Górnośląski PTM i Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach. Nawiązała w ten sposób do *Wieczornic Matematycznych* organizowanych przed kilkudziesięciu laty w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Katowicach. Dbałość o kontynuację inicjatyw poprzedników oraz zachowanie tradycji i dobrych wzorów dla przyszłych pokoleń były jednymi z ważnych cech wyróżniających Krystynę Skórnik. Przyjaciele pamiętają jej zaangażowanie w redakcję i wydanie różnych publikacji. Wielokrotnie pisała do *Wiadomości Matematycznych* wspomnienia o zmarłych matematykach. Dziś nadszedł czas, aby to jej pamięci poświecić niniejszy artykuł.

Krystyna Skórnik miała dwoje dzieci. Syn Aleksander jest ekonomistą i pracuje w bankowości w Luksemburgu. Natomiast córka Urszula poszła w ślady matki. Obroniła pracę doktorską z matematyki w Instytucie Matematycznym PAN i pracuje w SGGW w Warszawie. Życie rodzinne było dla Krystyny bardzo ważne – żyła sprawami swoich dzieci, a w ostatnich latach również wnuków. Razem z mężem Franciszkiem (zmarłym kilkanaście lat temu) prowadzili dom otwarty. Gościli u siebie wiele osób, w tym liczne grono matematyków z kraju i zagranicy. Odeszła po ciężkiej chorobie 23 września 2017 roku. Pracowita, rzetelna, serdeczna, otwarta na drugiego człowieka – taką ją zapamiętają najbliżsi, współpracownicy, uczniowie oraz koleżanki i koledzy z Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

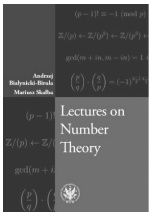
Aleksander Błaszczyk, Renata Suchanek (Katowice)

Dla matematyka rzeczywistość jest tylko jednym z możliwych przypadków.

anonim

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 417–433
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Recenzje



Andrzej Białynicki-Birula, Mariusz Skałba, *Lectures on Number Theory*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2016, 122 str.

Książka jest podręcznikiem do kursu teorii liczb na studiach licencjackich lub magisterskich. Pierwszy autor, matematyk o światowej renomie, członek rzeczywisty Polskiej Akademii Nauk, dzieli się z nami notatkami do prowadzonego przez siebie wykładu, jest więc oczywiste, że oparta na takich notatkach publikacja jest pozycją wartościową. Jeśli dodać, że notatki te zostały jeszcze wzbogacone, poprawione i uzupełnione zadaniami przez drugiego autora, teoretyka liczb o ugruntowanej pozycji, znanego z działalności naukowej i popularyzatorskiej, to już właściwie nie potrzeba dalszej rekomendacji.

Materiał podzielony jest na czternaście wykładów, różnej objętości. Autorzy rozpoczynają od omówienia aksjomatycznych podstaw teorii, konstrukcji liczb całkowitych, ich podstawowych własności porządkowych i algebraicznych, wreszcie zagadnienia rozwiązalności liniowych równań diofantycznych. Wykład drugi traktuje o kongruencjach. Autorzy omawiają ich zastosowania do rozwiązywania równań diofantycznych i podstawowe twierdzenia, w tym strukturę grupy jedności pierścienia klas reszt *modulo n*. Wykład trzeci poświęcony jest metodzie lokalnej. Zawiera dowód lematu Hensela, szkic dowodu twierdzenia o rozwiązalności równań wielomianowych *modulo* p^r dla odpowiednio dużych p oraz wprowadzenie w świat liczb p-adycznych całkowitych.

Wykład czwarty dotyczy pierścienia liczb całkowitych Gaussa. Omówiono tu własności algebraiczne tego pierścienia: funkcję normy, dzielenie z resztą, jednoznaczność rozkładu i skończoność pierścieni ilorazowych, udowodniono też twierdzenie o przedstawialności liczby n w postaci sumy dwóch kwadratów w przypadku, gdy n jest liczbą pierwszą. Ogólny przypadek przedstawiono jako zadanie dla czytelnika. Wykład piąty zawiera rozstrzygnięcie, które liczby pierwsze dają się przedstawić w postaci $x^2 + dy^2$ dla $d = 1, 2, 3$ (i naturalnych x, y) oraz informację o przypadku, kiedy d jest większe. Prowadzi to do pojęcia

reszty kwadratowej i związanych z nim zagadnień, omówionych w ramach wykładu szóstego. Autorzy przedstawiają tam podstawowe własności tego symbolu, prawo wzajemności kwadratowej Gaussa z zastosowaniami, twierdzenie, że liczba niebędąca kwadratem nie jest resztą kwadratową *modulo* nieskończenie wiele liczb pierwszych, dwa dowody prawa wzajemności pochodzące od Eisensteina, wprowadzenie (m.in. poprzez zadania) w problematykę uogólnień symbolu Legendre'a i prawa wzajemności.

W wykładzie siódmym znajdziemy przykłady zastosowań teorii liczb w kryptografii (kryptosystemy RSA i ElGamala) i kryptoanalizie (rozkład liczby pseudopierwszej na czynniki metodą Rabina–Millera). Wykład ósmy to przegląd najbardziej znanych, doniosłych problemów arytmetyki. Omówiono tu wielkie twierdzenie Fermata (udowodnione przez Wilesa w 1995 roku), zagadnienia związane z problemem Waringa (dowód twierdzenia Lagrange'a oparty na twierdzeniu Minkowskiego, twierdzenie Waringa–Hilberta, oszacowanie Karatsuby), hipotezę Goldbacha i twierdzenie Helfgotta, hipotezę ABC. Omówienie hipotezy Riemanna uzupełniono o wprowadzenie w teorię funkcji ζ Riemanna, m.in. dowód istnienia przedłużenia tej funkcji na półpłaszczyznę $\mathrm{Re}\, s > 0$. W ten sposób autorzy przygotowują grunt dla przedstawienia, podczas wykładu dziewiątego, dowodu Newmana (z modyfikacjami Zagiera) twierdzenia o liczbach pierwszych.

Ostatnie pięć wykładów stanowi wprowadzenie do algebraicznej teorii liczb. Wychodząc od wielkiego twierdzenia Fermata, autorzy omawiają domknięcia całkowite, ślad i normę, pierścienie liczb całkowitych algebraicznych ciał liczbowych, wyróżnik, jednoznaczność rozkładu ideałów w pierścieniach Dedekinda, grupę klas, przypadki rozszerzeń kwadratowych i cyklotomicznych, elementy teorii Galois, zagadnienia związane z rozkładem ideałów leżących nad zadanym ideałem w rozszerzeniu algebraicznym i ogólne prawa wzajemności, w tym prawo wzajemności Artina.

Autorzy przedstawili na stu dwudziestu stronach bogaty zestaw zagadnień, często głębokich i trudnych. Wprawdzie niektóre dowody zastąpiono szkicami, część zagadnień omówiono w skrócie, jednak materiał, który w książce zawarto, jest imponujący, a jego przedstawienie podczas semestralnego wykładu, choć możliwe, nie wydaje się zadaniem łatwym. Zaznaczę jeszcze, że celem autorów nie było wyczerpujące omówienie poruszanych zagadnień, lecz raczej zainspirowanie czytelnika do własnych poszukiwań. Jak czytamy we wstępie, autorzy chcieli ukazać zwłaszcza dwie cechy teorii liczb: to, że wzbogaca ona inne dziedziny matematyki oraz to, jak obficie korzysta z metod i wyników tych innych dziedzin. Sądzę, że cel ten został osiągnięty. Przystępne i zwięzłe przedstawienie interesujących zagadnień oraz ciekawe zadania sprawią, że książka znajdzie odbiorców zarówno w naszej ojczyźnie, jak i za granicą. Miejmy nadzieję, że przysporzy teorii liczb nowych adeptów.

Maciej Radziejewski
Wydział Matematyki i Informatyki
UAM



Anna Ludwicka, *Matematyczna pizza*, Nasza Księgarnia, Warszawa 2017, 80 str.

Jeżeli usłyszymy, że została wydana książka o matematyce dla dzieci, to zazwyczaj wiadomo, czego możemy się spodziewać. Zapewne jest to zbiór matematycznych łamigłówek lub ciekawych zadań, w miarę elementarnych, choć niekoniecznie łatwych, ewentualnie książeczka poświęcona ciekawostkom liczbowym lub geometrycznym. Są takie pozycje w literaturze i niejednej młodej osobie pomogły zadzierzgnąć bliższe kontakty z matematyką. Ale czy książka dla uczniów szkoły podstawowej może być w dużej mierze poświęcona wyższej matematyce?

Otóż może – książka taka niedawno powstała. Napisała ją Anna Ludwicka. Autorka ukończyła studia matematyczne na Uniwersytecie Warszawskim, ale jest również (a raczej przede wszystkim) artystą grafikiem. Przez wiele lat była redaktorem techniczno-graficznym i ilustratorem *Delty* (ostatnio, po przerwie, wróciła do tego zajęcia), ukończyła również wyższe studia graficzne. Ma zatem bardzo dobre predyspozycje do napisania książki o matematyce dla dzieci – to, co napisze, może sama zilustrować dokładnie tak, jak chce.

Nie trzeba chyba nikogo przekonywać o tym, że autorka postawiła przed sobą piramidalnie trudne zadanie. Pisać dzieciom o tematach pojawiających się na studiach matematycznych na uniwersytecie? Co prawda każda dorosła osoba miała kiedyś dziesięć lat, ale czy pamiętamy o tym, w jaki sposób myśleliśmy wtedy o matematyce – a może raczej, czy wyobrażamy sobie, jak myślelibyśmy o zagadnieniach związanych z wyższą matematyką, gdybyśmy się z nimi zetknęli?

Jak tę matematykę przedstawia dzieciom Anna Ludwicka? Na samym początku czytamy: „To nie jest zwyczajna książka do matematyki! To książka rozrywkowa, zbiór zagadek, zadań i zagadnień, które uczą myślenia matematycznego w sposób zupełnie inny, niż podręczniki szkolne. Jest ona także podróżą w świat logiki, wizytą na dworze królowej nauk..." Istotnie, książka to niezwykła. Składa się z trzydziestu dziewięciu nie tyle rozdziałów, co oddzielnych, niezależnych części. Każda z nich zajmuje dwie sąsiednie strony formatu A4 i składają się na nią pewne informacje (bynajmniej nie z programu szkolnego), rysunki i – po wprowadzeniu do tematu – niemal zawsze zadanie do wykonania. Zadanie nietrudne, pomagające w zrozumieniu przedstawianego zagadnienia, ale zawsze związane z narysowaniem czegoś (ewentualnie napisaniem) w pewnym miejscu na którejś z tych dwóch stron. Na przykład: „spróbuj narysować w kwadracie jak najdłuższą linię" (nietrudno się domyślić, że tematem jest krzywa Peano); „zamaluj wielokrotności liczby 2, czyli co drugą liczbę, zaczynając od 4 na niebiesko, co trzecią liczbę zaczynając

od 6 na zielono" (to oczywiście przedstawienie sita Eratostenesa); „spróbuj pokolorować obrazek czterema barwami tak, żeby sąsiadujące obszary miały różne kolory" (problem czterech barw); „spróbuj narysować dywan Sierpińskiego" (narysowane jest tło, czyli pokratkowany kwadrat o wymiarach 27 × 27); „stwórz swój algorytm szyfrujący i zaszyfruj wiadomość »10 kawałków pizzy zjedzonych«". A ponadto wielokrotnie na dole strony, opatrzone tytułem „Czy wiesz, że...", pojawiają się dodatkowe, interesujące informacje.

Już z przedstawionych wyżej poleceń można się zorientować, z jak niestandardową z punktu widzenia młodego człowieka książką mamy do czynienia. Niektóre spośród innych haseł to *Kula u fryzjera*, *Fraktalna roślinka*, *Jak to jest z tą nieskończonością?*, *Jaki chcesz mieć parkiet?*, *Liczby Fibonacciego rządzą!*, *Zadziwiająca wstęga*. W tych przypadkach matematyk bez trudu zorientuje się, czemu odpowiednie dwie strony są poświęcone. Trudniej rozszyfrować treść ukrytą za tytułami *Czy takim widelcem zjemy spaghetti?* (o figurach niemożliwych), *Czy mogę panią prosić do tańca?* (równoliczność zbiorów), *Czy to myszka zjadła kawałek sera?* (tu z kolei mowa o znanej zagadce, w której 65 kwadratowych pól pokryto małymi kwadracikami z kwadratu o wymiarach 8 × 8 za pomocą odpowiedniego przesunięcia). Są też dodatkowe zadania dla czytelnika, a odpowiedzi podane są na końcu.

Przedstawiając dany temat, Ludwicka ogranicza się do kilku zdań, pisząc prostym, zrozumiałym językiem. Sądzę, że tekst został tak zredagowany, by dzieci mogły go odpowiednio odebrać. Ponadto rysunki są tak wykonane, by zachęcić do dorysowania czegoś; tego właśnie autorka oczekuje od czytelników.

Jak widać – książka jest wyjątkowa, a autorka wykonała zadanie wydające się niewykonalne. Czy znajdziemy jakieś błędy czy usterki?

Niestety, do ideału trochę brakuje... Najbardziej uraziły mnie pewne fragmenty w części dotyczącej równoliczności zbiorów. Przy narysowanych licznych sylwetkach czytelnik poproszony jest, by otoczył czerwoną pętlą „elementy zawierające chłopców, a niebieską – zawierające dziewczynę". Dalej czytamy: „Mamy tu dwa zbiory: zbiór elementów zawierających chłopca i zbiór elementów zawierających dziewczynę. **Część wspólna** tych zbiorów to zbiór **par**" (wytłuszczenie zgodne z oryginałem). Tak pisać nie wolno. *Część wspólna* to fachowy termin matematyczny; część wspólna tych dwóch zbiorów to przecież zbiór pusty. Poza tym, po co te „elementy zawierające"? Można polecenie wypowiedzieć prościej... Na następnej stronie mamy definicję zbiorów równolicznych zakończoną zdaniem „Jeżeli jakiś element nie będzie miał pary, to znaczy, że zbiory nie są równoliczne". Takie sformułowanie zdecydowanie przeczy nie tylko matematycznej prawdzie, ale i podanej na następnej stronie (z poprawnym uzasadnieniem) informacji, że zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb parzystych. Przecież tyle elementów pozostaje bez pary... Należało to napisać inaczej.

W rozdziale *Kula u fryzjera* myląca jest informacja: „kula ma dwa punkty osobliwe". Jak jednak odróżnić punkty na powierzchni, o których punktach tu mowa? Powinno zostać zaznaczone, ze chodzi nie o obiekt geome-

tryczny, a o „uczesanie" i to konkretne, bo przecież liczba punktów osobliwych zależy od pola wektorowego. A poza tym – nie kuli, lecz sfery. To zrozumiałe, że w książce dla dzieci muszą pojawić się pewne uproszczenia czy niedokładności, jednak błędów nie można popełniać.

W rozdziale o złotej proporcji umieszczona jest ilustracja oparta na rysunku człowieka witruwiańskiego Leonarda da Vinci. Rozumiem, ze rysunek nagiego mężczyzny mógłby wydawać się niewłaściwy, choć to absolutna klasyka, ale jednak ubranie czarnego człowieka witruwiańskiego w czerwone bokserki z białymi serduszkami budzi co najmniej mieszane uczucia. Tamże czytamy niezbyt zręcznie sformułowane zdanie o ciągu Fibonacciego: „okazuje się, że ciąg ten zmierza do jednej liczby, a jest nią złota liczba φ". Jeśli już mówimy o „zmierzaniu" i o ciągu, to po przeczytaniu tego zdania nieświadomy czytelnik może pomyśleć, że ciąg może zmierzać do kilku liczb...

Przy omawianiu złotej proporcji brak mi choćby wspomnienia o pięciokącie gwiaździstym; myślę, że trudno znaleźć obiekt, na którym tę proporcję widać bardziej poglądowo. Nie jest to jedyne miejsce, gdzie moim zdaniem aż się prosi o dodanie czegoś. W kilku przypadkach informacja podana w obecnej formie jest nad wyraz niepełna. W rozdziale *Fraktalna roślinka* czytamy: „nazwę *fraktal* wymyślił francuski matematyk Benoit B. Mandelbrot, który żył w XX wieku". I to wszystko na ten temat – jeśli już Mandelbrot został wspomniany, to ewidentnie trzeba było napisać coś więcej, choćby jedno zdanie... Stwierdzenie, że on wymyślił tę nazwę, zupełnie nie oddaje wkładu Mandelbrota w teorię fraktali. A ponadto fraktale kojarzą się nieodparcie z pięknymi oryginalnymi obrazkami – naprawdę zaskakuje, że w książce, w której rysunki są newralgiczną częścią, nie ma ani jednego. Gdy mowa o krzywych wypełniających kwadrat, autorka pisze o krzywych Hilberta i Peano – można byłoby dodać, że jest ich więcej, a konstrukcję jednej z nich podał Wacław Sierpiński, zwłaszcza że o Sierpińskim mowa dwie strony dalej. Nie zgadzam się ze stwierdzeniem, że krzywa, o której mowa, została „wynaleziona przez Hilberta" (chodzi mi o słowo „wynalezienie").

Razi mnie też sposób podawania numerów stron. W prawym górnym rogu stron o numerach nieparzystych narysowany jest czarny jamnik w różnych pozycjach na różnych stronach, a na jego tułowiu małe białe cyferki. Cyfry te są tak słabo widoczne, że przez pewien czas myślałem, że strony w książce nie są numerowane... Czasami można zauważyć drobne usterki stylistyczne czy literówki. Najbardziej przykro wygląda „Wawszawa" podana jako miejsce wydania polecanej książki Włodzimierza Krysickiego.

Wspomniane usterki nie zmieniają jednak bardzo wysokiej oceny recenzowanej książki. Gdyby mnie zaproponowano wykonanie tego rodzaju pracy – odmówiłbym, i to nie tylko dlatego, że nie umiem ładnie rysować.

W czasach, gdy uczęszczałem do szkoły podstawowej, literatura przeznaczona dla młodych osób była znacznie skromniejsza niż obecnie. Trzy książki mocno wpłynęły na moje zainteresowania matematyczne: *Lilavati* Szczepana Jeleńskiego, *Zadania konkursowe z matematyki* Tomasza Abramowicza i *Zygza-*

kiem przez matematykę Wojciecha Bieńki. Sądzę, że gdyby *Matematyczną pizzę* wydano nie dziś, a wtedy, dołączyłaby do tej kolekcji.

Krzysztof Ciesielski
Instytut Matematyki UJ



Dariusz Łukasiewicz, Ryszard Mordarski (red.), *Kobiety w Szkole Lwowsko-Warszawskiej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz 2016, 240 str.

§ 1.

W ciągu ostatnich lat wyrósł w Bydgoszczy jeden z najpoważniejszych w Polsce ośrodków kontynuujących i propagujących tradycję filozoficznej Szkoły Lwowsko-Warszawskiej. Stało się to głównie dzięki determinacji, energii i kompetencjom dwóch profesorów Instytutu Filozofii Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego: Dariusza Łukasiewicza i Ryszarda Mordarskiego. Ośrodek ten wypłynął na ogólnokrajowe wody organizując w 2009 roku konferencję *Aktualność filozofii Tadeusza Czeżowskiego*, która zapoczątkowała serię następnych, poświęconych różnym postaciom i przejawom działalności Szkoły.

Tom *Kobiety w Szkole Lwowsko-Warszawskiej* jest plonem jednej z takich konferencji, która miała miejsce w 2014 roku. Tytuł konferencji różnił się od tytułu książki jedynie tym, że przy słowie „kobiety" był w nim kwalifikator „wybitne" – i prawdę mówiąc, tamten tytuł był bardziej adekwatny w stosunku do listy przedstawicielek Szkoły Lwowsko-Warszawskiej, którym są poświęcone poszczególne teksty składające się na omawiany tom (dodajmy, że nie jest to lista wszystkich pań związanych ze Szkołą[1]). Tworzą ją: Daniela Tennerówna-Gromska (1889–1973), Maria Niedźwiecka-Ossowska (1896–1974), Janina Hosiasson-Lindenbaumowa (1899–1942), Debora Voglówna-Barenblüth (1900–1942), Dina/Janina Sztejnbarg/Kamińska-Kotarbińska (1901–1997), Izydora Dąmbska (1904–1983), Seweryna Łuszczewska-Romahnowa (1904–1978), Eugenia Ginsberżanka-Blausteinowa (1905–1944) i Maria Kokoszyńska-Lutmanowa (1905–1980).[2]

[1] Pełniejsza lista znajduje się w przeglądowym artykule Ryszarda Kleszcza, zamieszczonym w recenzowanym tomie.

[2] Osoby znajdujące się na tej liście w różnych okresach swego życia posługiwały się różnymi nazwiskami: panieńskimi, «po mężu» (jeśli takie miały) lub ich połączeniem. W niniejszym tekście w odniesieniu do mężatek będę używać nazwisk «po mężu».

Bohaterki tomu miały różnorodne zainteresowania naukowe i zajmowały się problematyką różnych dziedzin filozofii. Ze zrozumiałych względów skupimy się tutaj na tych spośród owych bohaterek, których rezultaty badawcze mogą szczególnie zainteresować czytelników *Wiadomości Matematycznych* – a więc na tych, które zajmowały się (co najmniej) problematyką metodologiczną lub, szerzej, problematyką filozofii nauki.

§ 2.

Należy do nich Lutmanowa; w artykule Anny Brożek został przedstawiony jej pogląd na pierwszą kwestię z zakresu tej problematyki – a mianowicie kwestię naukowości metafizyki i obecności metafizyki w nauce. A był on następujący.

Trzeba odróżnić metafizyczność tez od metafizyczności metody. Tezy metafizyczne byłyby nienaukowe tylko wtedy, gdyby były zarazem zdaniami niezdeterminowanymi (tj. takimi, że do ich uznania lub odrzucenia nie wystarczałaby znajomość sensu terminów, z których są one zbudowane) i nietestowalnymi (tj. takimi, że ani nie wynikają one ze zdań percepcyjnych, ani z nich takie zdania nie wynikają). Metoda byłaby metafizyczna, gdyby była dogmatyczna, a więc gdyby była metodą nieapriorycznną (tj. nie polegającą na uznawaniu zdań jako po prostu aksjomatów lub jako zdań dedukcyjnie wyprowadzonych z aksjomatów) i nieempiryczną (tj. nie odwołującą się ani bezpośrednio, ani pośrednio do spostrzeżeń).

Czy w nauce – a matematyk dodałby: w matematyce w szczególności – występują tak ujmowane tezy metafizyczne i tak ujmowana metoda metafizyczna? Odpowiedź, zdaje się, byłaby następująca. Nawet jeśli są tezy naukowe (odpowiednio, matematyczne) nietestowalne, to są one co najmniej zdeterminowane. I nawet jeśli naukowcy (odpowiednio, matematycy) posługują się metodą nieempiryczną, to jest ona wtedy apriorycznna. Inna sprawa, że w tym ostatnim wypadku powstaje pytanie, na jakiej podstawie uznawane są aksjomaty – skoro zwykła empiria tu nie wchodzi w grę. Spotykanym rozwiązaniem jest rozszerzenie „empirii" na procedury pozapercepcyjne (na przykład tzw. intuicję matematyczną). Ale taką możliwością Lutmanowa już się nie zajmowała.

§ 3.

Stanowisko wobec podobnej problematyki, zajęte przez Kotarbińską, zostało omówione w artykule Krzysztofa Ślezińskiego. Kotarbińska uważa tezy metafizyczne za tezy nienaukowe, a te utożsamia z tezami nietestowalnymi (w każdym razie tak rozumianymi tezami metafizycznymi się zajmuje). Czy takie tezy metafizyczne występują w nauce?

Załóżmy, że tak. Nie mogą one jednak występować w roli hipotez eksplanacyjnych, gdyż o takich zakłada się, że pociągają one tezy percepcyjne (i to prawdziwe), a skoro tak, to *ex definitione* są testowalne.

Wygląda więc na to, że jeśli występują – to w roli jakichś tez izolowanych od reszty tez danej teorii naukowej. Jeśli jednak występują w takiej roli, to nie bardzo wiadomo, na jakiej podstawie zostały do tej właśnie teorii dołączone. W konsekwencji – gdyby taką rolę miały pełnić wobec wszystkich dyscyplin naukowych – nie występują one *de facto* w nauce.

§ 4.

Drugą kwestią metodologiczną – po kwestii obecności metafizyki w nauce – którą zajmowały się bohaterki tomu *Kobiety w Szkole Lwowsko-Warszawskiej*, była kwestia kryteriów postępu w nauce. Marek Lechniak w swoim artykule odtworzył stanowisko w tej sprawie zajmowane przez Lindenbaumową. Według Lindenbaumowej teoria *B* jest postępem względem teorii *A* (skonstruowanej wcześniej niż teoria *B*), gdy spełnione jest co najmniej jedno z trzech kryteriów: (a) teoria *B* jest bogatsza informacyjnie od teorii *A*; (b) teoria *B* jest w większym stopniu zaktualizowana niż teoria *A*; (c) teoria *B* jest bardziej zintegrowana wewnętrznie niż teoria *A*. Mówiąc w dużym uproszczeniu: kryterium (a) jest spełnione, gdy nowe informacje, które znalazły się w teorii *B*, są mało prawdopodobne na gruncie teorii *A*; kryterium (b) jest spełnione, gdy w teorii *B* jest więcej niż w teorii *A* tez *explicite* wyprowadzonych ze zdań bazowych; wreszcie kryterium (c) jest spełnione, gdy w wypadku teorii *B* uświadamiamy sobie więcej powiązań (formalnych i semantycznych) między jej tezami – niż w wypadku teorii *A*.

Autor artykułu zauważa, że na przykład na gruncie teorii aksjomatycznych trudno mówić o postępie ze względu na kryterium (b), jeśli się założy, że do takiej teorii należą wszystkie konsekwencje aksjomatyki – bez względu na to, czy dla danej konsekwencji został efektywnie podany dowód. Dodajmy, że o podobnej niestosowalności w obrębie takich teorii można mówić w wypadku kryteriów (a) i (c).

§ 5.

Za objaw nienaukowości lub małej naukowości jakiejś dyscypliny uważa się – poza jakąś formą obecności w niej metafizyki – brak precyzyjności terminologicznej. Ta trzecia – w naszym sprawozdaniu – kwestia metodologiczna, którą zajmowano się w „żeńskiej mniejszości" Szkoły Lwowsko-Warszawskiej, była m.in. badania przez Romahnową, a rezultaty tych badań poddała krytycznej rekonstrukcji w swych artykule Alicja Chybińska.

Romahnowa broniła poglądu, że oczekiwanie od języka naukowego całkowitej precyzji, a w szczególności pełnej jednoznaczności i jasności, jest oczekiwaniem nierealistycznym i niepraktycznym. Jest oczekiwaniem nierealistycznym, gdyż języki naukowe – w każdym razie języki naukowe zbudowane na bazie języka potocznego – nigdy nie mogą być w pełni jednoznaczne i jasne. Jest oczekiwaniem niepraktycznym, gdyż to, co jest naprawdę potrzebne do sprawności komunikacyjnej języka, polega nie na jednoznaczności i jasności, lecz na w dużym stopniu niezależnej od nich umiejętności rozpoznawania apriorycznośći i empiryczności zdań tego języka oraz rozpoznawania logicznych relacji zachodzących między tymi zdaniami (w szczególności relacji wynikania, wykluczania się itd.).

Autorka tekstu zarzuca Romahnowej, że wyprowadza zbyt daleko idące wnioski z tego, że istnieją wypowiedzi niejednoznaczne i nie w pełni jasne, które nie uniemożliwiają identyfikacji związków między tymi wypowiedziami – istotnych z naukotwórczego punktu widzenia; takie metodologicznie neutralne defekty semantyczno-pragmatyczne

rzeczywiście istnieją, ale są też defekty semantyczno-pragmatyczne, które dyskwalifikują komunikacyjnie język nimi obarczony.

Dodajmy już na własną odpowiedzialność, że przynajmniej dla pewnej klasy języków niedogmatycznej pozycji Romahnowej w sprawie postulatu precyzji można bronić, jeśli założymy, że zdanie jest wieloznaczne, gdy jest prawdziwe w co najmniej dwóch istotnie różnych modelach, z których żaden nie został *explicite* wyróżniony – a jest niejasne, gdy ma strukturę implikacji (i wtedy nie w pełni określony jest stosunek między denotacjami terminów poprzednika i terminów następnika tej implikacji). Otóż zdania takie zdarzają się w „porządnych" teoriach, którym trudno odmówić z tego tytułu naukowości. Może więc należałoby ostrożniej uznać, że z dwóch teorii takich, że jedna zawiera takie zdania, a druga ich nie zawiera – ta druga jest tylko bardziej „intuicyjna".

§ 6.

Czwarta kwestia metodologiczna, pojawiająca się w kręgu zainteresowania bohaterek tomu *Kobiety w Szkole Lwowsko-Warszawskiej*, to poruszana przez Ossowską i zrelacjonowana w artykułach Aleksandry Horeckiej i Grzegorza Pacewicza kwestia stosunku opisu do oceny.

Jak wolno sądzić na podstawie tej relacji – Ossowska uważa, że opisu od oceny nie da się odróżnić na podstawie syntaktyczno-semantycznej. Zarówno zdania opisowe (włączając w to zdania spostrzegawcze), jak i zdania oceniające mogą mieć strukturę zdania podmiotowo-orzecznikowego typu „*A* jest *B*". W wypadku obu tych zdań dopuszczalna jest zarówno interpretacja obiektywistyczna („*A*-kowi przysługuje własność *B*"), jak i subiektywistyczna („*A* wzbudza w osobie *O* przeżycie *B*-ka"). Tym, co istotnie różni takie zdania, jest sposób ich uzasadniania, a zwłaszcza możliwość odwołania się przy uzasadnianiu do pomiaru (istniejąca przy opisie, nieistniejąca przy ocenie).

Odnotujmy, że kryterium Ossowskiej zawodzi w wypadku dyscyplin formalnych. Na podstawie tego kryterium trzeba by uznać tezy tych dyscyplin za zdania oceniające. Skoro zaś trudno się z tym zgodzić, trzeba uznać, że wspomniane kryterium nie może stanowić zasady dychotomicznego podziału zdań.

§ 7.

Nie ulega wątpliwości, że ostatnia kwestia metodologiczna – kwestia pierwiastków konwencjonalnych w nauce – omówiona w artykule Katarzyny Ossowskiej na przykładzie Izydory Dąmbskiej, była nie tylko w centrum badań tej ostatniej, ale doczekała się dzięki jej badaniom ujęcia najoryginalniejszego i najwartościowszego spośród wszystkich, o których tutaj mowa. Jest to zarazem kwestia bodajże najciekawsza dla czytelników *Wiadomości Matematycznych* – i to we wszystkich trzech aspektach, które uwzględnia autorka artykułu: w aspekcie systematyzacji pojęć *konwencji*, arbitralności przyjmowania konwencji i relacji konwencjonalizmu do relatywizmu.

Jeśli chodzi o pierwszy aspekt, Dąmbska wyróżniała (mówiąc w uproszczeniu) trzy pojęcia: konwencję-umowę, konwencję-ustanowienie i konwencję-zwyczaj – każde w dwóch odmia-

nach: czynności lub wytworu. Spośród tych trzech rodzajów konwencji Dąmbska za podstawową uznała konwencję-ustanowienie, wychodząc z założenia, że dwie pozostałe nie są bez niej możliwe.

Jeśli chodzi o drugi aspekt, Dąmbska odróżniła dwa rodzaje arbitralności: mocną i słabą. Z mocną arbitralnością uznania jakiegoś zdania mamy do czynienia, gdy za tym uznaniem nie stoi ani motywacja logiczna, ani motywacja pragmatyczna; ze słabą – gdy uznanie nie jest motywowane logicznie, ale ma motywację pragmatyczną. Tylko w tym ostatnim wypadku można mówić, że arbitralność jakiejś konwencji polega na całkowitej dowolności.

Jeśli chodzi o trzeci aspekt, Dąmbska wskazywała na trzy różnice między konwencjonalizmem a relatywizmem; konwencjonalizm jest poglądem w sprawie rozstrzygalności twierdzeń, a relatywizm – w sprawie ich prawdziwości; konwencjonalizm uznaje zasadę niesprzeczności, a relatywizm ją odrzuca; wreszcie konwencjonalizm nie ma żadnych konsekwencji metafizycznych, a relatywizm implikuje idealizm ontologiczny.

W tej sytuacji, jeśli ktoś utrzymuje, że przyjęcie takiej czy innej aksjomatyki w obrębie jakiejś dyscypliny zaksjomatyzowanej jest sprawą konwencji, to ma to dobry sens zasadniczo tylko wtedy, kiedy ma na myśli konwencję-ustanowienie – i taki wybór jest co prawda konwencjonalizmem, ale nie przesądza zajęcia pozycji relatywistycznych.

§ 8.

Na zakończenie pozwolę sobie na pewną ogólną uwagę terminologiczną i poniekąd ideologiczną.

Autorka jednego z tekstów zawartych w tomie – Ewa Chudoba – używa w sposób niekonwencjonalny (w sensie trzecim z wyróżnionych przez Dąmbską) słowa „feministyczny" i pochodnych. Zdaję sobie sprawę z tego, że zwyczaje się zmieniają i że wobec tego moja uwaga może być już anachroniczna. Swoją uwagę ujmę więc w ten sposób, aby uniknąć zarzutu anachronizmu. Rozróżnijmy mianowicie dwa pojęcia. Jedno to stanowisko, zgodnie z którym kobiety powinny mieć te same prawa polityczne co mężczyźni – i wobec tego należy walczyć o polityczne zrównanie obu płci. Drugie to pogląd, że psychika kobiet jest skrajnie różna od psychiki mężczyzn (a w szczególności doskonalsza od tej ostatniej) i że kobiety są co najmniej równie mądre jak mądrzy są mężczyźni (a nawet mądrzejsze od nich).[3]

Otóż wspomniana autorka sugeruje, że Szkoła Lwowsko-Warszawska miała „charakter feministyczny", co wynikało z „feminizmu samego Twardowskiego". Ten pierwszy miałby polegać na znaczącym udziale kobiet w Szkole; ten drugi – na byciu zwolennikiem kształcenia kobiet. I pierwsze, i drugie było co prawda faktem, ale trudno odnosić do nich „feminizm", wzięty w którymś ze wskazanych wyżej znaczeń. Skądinąd także dokonana przez autorkę ogólna charakterystyka osoby Twardowskiego – i jego stosunku do kobiet z otoczenia – daleka

[3] Rozróżnienia tego dokonałem w tekście *Mody w filozofii* (Edukacja Filozoficzna 63 (2017), str. 5–21).

jest od rzeczywistości. Zapiski z *Dzienników* i zachowana korespondencja świadczą o tym, że jego kontakty z nimi były nie tylko towarzyskie („miła rozmowa i pomoc w codziennych sprawach"), lecz także czysto naukowe; tak samo dwoisty charakter miały jego kontakty z mężczyznami – zarówno z uczniami, jak i przyjaciółmi.

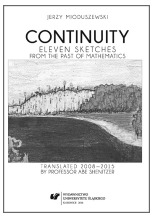
§ 9.

I może jeszcze jeden komentarz historyczny.

Od dziesiątków lat zajmuję się tradycją Szkoły Lwowsko-Warszawskiej (i wierzę, że do niej nawiązuję), a nie zauważyłem, żeby sami przedstawiciele tej szkoły lub poważni historycy tej tradycji w jakiś sposób wyróżniali – pozytywnie czy negatywnie – jej żeńską część. To, że w Szkole byli zarówno mężczyźni, jak i kobiety, uważano zawsze za coś najzupełniej naturalnego. Wybitnym kobietom poświęcano ani więcej, ani mniej miejsca w monografiach poświęconych szkole. Spuścizna Ossowskiej i Dąmbskiej jest w tej tradycji obecna w równym stopniu, jak spuścizna na przykład Ajdukiewicza czy Salamuchy. Jest to bowiem spuścizna wybitna nie dlatego, że jest spuścizną wyjątkowych kobiet – lecz dlatego, że jest dziełem wyjątkowych umysłów.

Dlatego – wbrew temu, co pisze w swoim artykule Elżbieta Pakszys – nie ma potrzeby „wydobywania z niepamięci postaci oraz twórczości filozoficznej kobiet Szkoły Lwowsko-Warszawskiej" – nie ma potrzeby, gdyż nigdy dotąd w takiej niepamięci nie były pogrążone.

Jacek Jadacki
Instytut Filozofii
Uniwersytet Warszawski



Jerzy Mioduszewski, *Continuity. Eleven sketches from the past of mathematics*, tłumaczenie Abe Shenitzer, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2016, 200 str.

Continuity to dokonane przez Abe Shenitzera tłumaczenie na angielski książki Jerzego Mioduszewskiego *Ciągłość. Szkice z historii matematyki*, wydanej przez WSiP w 1996 roku (a napisanej dwanaście lat wcześniej). Jest tylko jedna znacząca różnica. W angielskiej edycji pominięto pierwszy esej z wersji polskiej. Ma on całkiem odmienny charakter od pozostałych. Tłumacz ocenił go jako zbyt zaskakujący, czy też zbijający z tropu (ang. *baffling*) czytelnika i na jego wniosek autor zdecydował się go usunąć. Myślę, że słusznie. Może on wprawdzie zachęcić do lektury matematyków, ale zdecydowanie zrazi czytelników mniej matema-

tycznie wyrobionych, a eseje z samej definicji przeznaczone są przecież dla szerokiego audytorium.

Dla recenzenta lektura angielskiego wydania była więc kolejnym, co najmniej trzecim kontaktem z książką Mioduszewskiego (był on wydawniczym recenzentem jej polskiej wersji, potem przeczytał jej książkowe wydanie, a wracał do niej i później). Obecna lektura pozbawiona więc była walorów nowości. Jednakże potwierdziła ona, że do książki tej warto wracać i na pewno za każdym razem otworzy ona przed czytelnikiem nowe perspektywy. Mamy tu bowiem do czynienia z materiałem niezwykle obszernym, na dodatek przedstawionym z konieczności skrótowo – w formie jedenastu szkiców, które – jak sama nazwa wskazuje – nie wyczerpują materiału, a miejscami jedynie sygnalizują pewne zagadnienia, zachęcając do własnych przemyśleń i poszukiwań. Na niespełna dwustu stronach, na dodatek niezbyt gęsto zadrukowanych i przerywanych rycinami, odbywamy bowiem przechadzkę po mniej więcej dwóch i pół tysiącu lat dziejów matematyki – od Pitagorasa (ok. 570–500 p. Chr.) i Zenona z Elei (ok. 490–430 p. Chr.) po Weierstrassa (1815–1897), Dedekinda (1831–1916) i Cantora (1845–1918). O ile bowiem – wraz z udowodnieniem niewspółmierności przeciwprostokątnej i przyprostokątnej równoramiennego trójkąta prostokątnego i aporiami Zenona – problem ciągłości postawiony został z całą wyrazistością, o tyle dopiero dziewiętnastowieczne zdefiniowanie liczb rzeczywistych pozwoliło go odłożyć *ad acta* jako problem rozwiązany (czy ocena ta jest słuszna – to inna sprawa). Tak długo, choć oczywiście z różną intensywnością, trwała praca nad tym pojęciem. Na dodatek angażowała ona najtęższe matematyczne i filozoficzne umysły i to w różnych kulturach – antycznej Grecji i krajach hellenistycznych, w średniowiecznej Europie, w krajach islamu – od Hiszpanii do Środkowej Azji, wreszcie w nowożytnej już Europie. Tak to też jest ujmowane w dostępnych historiach matematyki. Myślę jednak, że jedynie luki w prowadzonych badaniach historycznych, a może w transferze wiedzy historycznej, nie pozwalają uzupełnić tego inwentarza o wkład uczonych chińskich i indyjskich.

Mamy bowiem do czynienia nie z ideą czysto matematyczną, ale z jednym z podstawowych pojęć kosmologicznych. Atrybut ciągłości przysługuje (a przynajmniej może przysługiwać) przestrzeni – i to w każdym jej rozumieniu (od bezrefleksyjnie przyjmowanej przestrzeni życiowej każdego człowieka, przez przestrzeń – scenę dramatu kosmicznego, po przestrzeń będącą przedmiotem refleksji filozofów czy badań matematyków). Jest też (a przynajmniej od jakiegoś czasu tak to sobie wyobrażamy) cechą czasu. Przysługuje przeróżnym zjawiskom, z których daleko nie wszystkie zostały zadowalająco zmatematyzowane... Krótko mówiąc – jest to jedna z podstawowych kategorii, jakie przykładamy do otaczającego nas świata, by go próbować zrozumieć i prowadzić o nim dyskurs (nie tylko naukowy). Nie jest też wykluczone, jak to sugeruje autor w zakończeniu ostatniego eseju, że mamy do czynienia z czymś jeszcze bardziej zasadniczym. Warto ten fragment przytoczyć w całości. „Dwa sposoby widzenia świata, ciągłościowy i dyskretny, są mimo wszystko obce sobie. Tysiące lat

myśli filozoficznej, w tym matematycznej, nie potrafiły obu tych sposobów złączyć w jedno. (...) Nie zapominajmy bowiem i o naszej naturze, która ma wbudowane w siebie obie te zdolności widzenia oddzielnie. Jedna z nich daje nam umiejętność wykonywania czynności. Druga pozwala je rozumieć". Ciągłość jest więc nie tylko jedną z podstawowych kategorii opisu wszechświata, ale też okazuje się jedną z podstawowych kwalifikacji ludzkich wpływających na możliwość odbierania i rozumienia otaczającego świata. Pytanie o to, czym jest ciągłość, musiało się więc pojawić u zarania myśli filozoficznej tym bardziej, że pojęciu temu towarzyszyły istotne trudności. Jak w przypadku każdego pojęcia o takim stopniu ogólności i szerokości zastosowań, używanie go bez właściwej ostrożności prowadzić musi do efektów paradoksalnych czy antynomijnych.

Praca nad pojęciem ciągłości trwała więc przez stulecia. Mioduszewski zaczyna jej opis od Zenona i Pitagorasa, ale recenzentowi wydaje się, że można by się cofnąć jeszcze o krok – do pierwszych znanych z imienia greckich filozofów z Miletu – Talesa (VII/VI wiek p. Chr.) i jego szkoły. Tego typu zastrzeżeń można mieć zresztą więcej. Przy pracy, której podjął się autor *Ciągłości* pominięcia są nieuniknione, a każdy inny autor dorzuciłby do przedstawionego materiału jakieś swoje spostrzeżenia. Tym bardziej, że dla zmian w rozumieniu ciągłości i prób jej określenia znaczenie miało nie tylko to, co działo się wewnątrz matematyki czy w dyskursie filozoficznym, ale też i kontekst cywilizacyjny, w którym zanurzeni byli myśliciele i matematycy. Zmiany owego otoczenia mogły mieć zasadniczy wpływ na to, jak wyobrażano sobie ciągły przebieg zjawisk i jakie zjawiska miano na myśli rozprawiając o ciągłości. Niektóre z tych wpływów Mioduszewski wspomina, ale na pewno można by przywołać i inne (choć nie zawsze łatwo jest wykazać takie zależności w dostatecznie wiarygodny sposób).

Książkę Mioduszewskiego otwiera czysto techniczny rozdzialik *Od autora*, po czym przychodzi *Wstęp*, w którym autor przedstawia bohatera swojej książki – pojęcie ciągłości, jego zakorzenienie w kosmologii (ciągłość jako atrybut i przestrzeni, i czasu), ale też w filozofii. Przywoływane są nazwiska dwóch myślicieli, którzy na refleksji o ciągłości odcisnęli najsilniejsze piętno, a więc Arystotelesa i Kanta, ale i tych, bez których dyskurs na ten temat jest niemożliwy – Zenona z Elei, Pitagorasa, Platona. Sygnalizowana też jest rola Euklidesa jako tego, kto swoje *Elementy* zaprojektował tak, by aporiom Zenona uniemożliwić wtargnięcie do budowanego przez siebie (i następców) gmachu matematyki.

Pierwszy esej poświęcony jest atomistycznemu podejściu do *continuum*. Jest ono na tyle naturalne, że można mu oddać pierwszeństwo. Ba, znane nam rozwiązanie problemu polegające na potraktowaniu *continuum* liczbowego jako zbioru i ufundowanie jego podstaw w teorii mnogości wyraźnie nawiązało do tego właśnie sposobu myślenia. Jednakże już na samym początku pojawiła się tu zasadnicza trudność, którą sformułował Zenon z Elei w swoim rozumowaniu o lecącej strzale (użyte przez filozofa określenie *aporia* to właśnie trudność, a nie paradoks, jak to się zazwyczaj tłumaczy). Dalej autor przybliża nam podejście do tej aporii innych filozofów (Arystotelesa z jednej, a Demokryta

z drugiej strony) oraz jej wpływ na fizykę arystotelesowską (dominującą aż do czasu Newtona). Chodziło o pominięcie prowadzącego do trudności pojęcia chwilowego stanu zmiennego procesu, a więc czegoś, z czym matematyka uporała się dopiero z chwilą wprowadzenia i należytego obrobienia pojęcia funkcji, a więc w dobie rozwoju analizy matematycznej...

Drugi esej obraca się wokół aksjomatu Archimedesa, grającego kluczową rolę w metodzie wyczerpywania, stanowiącej szczytowy punkt dojścia starożytnych w kierunku przyszłego rachunku całkowego.

Trzeci esej dotyczy wkładu pitagorejskiego nurtu w dzieje pojęcia ciągłości. Odcinki niewspółmierne odkryte przez pitagorejczyków dzięki znajomości twierdzenia przypisanego ich Mistrzowi i Założycielowi (używam wielkich liter dla przypomnienia, że pitagorejczycy tworzyli nie tyle kierunek myślenia, ile sektę, która samemu Pitagorasowi nadawała boski status). To odkrycie zablokowało drogę do prostego (żeby nie powiedzieć – prostackiego) zamknięcia problemu wielkości geometrycznych (i fizycznych) jako tych, którym po ustaleniu jakiejś jednostki można przypisać wartość liczbową – wynik pomiaru. Żeby uczynić ten krok, trzeba mieć zadowalającą teorię *continuum* liczb rzeczywistych, a z tym ludzkość uporała się dopiero w XIX wieku...

Z problemem wielkości (szkic czwarty) trzeba więc było sobie radzić innymi sposobami. Teoria proporcji Eudoksosa i jej wirtuozowskie zastosowania (szkic piąty) zamykają przegląd tego, co w temacie ciągłości (w matematyce i filozofii – pamiętajmy, że matematyka wciąż była, nieźle wydzieloną i bardzo specyficzną, ale jednak częścią filozofii) udało się uczynić starożytnym Grekom. A było to niemało. Między teorią Eudoksosa a przekrojami Dedekinda odległość jest niewielka (niektórzy, na przykład Lipschitz, skłonni byli nawet ją ignorować). Niemniej pokonanie jej wymagało bardzo wiele wysiłku – i dalsze szkice Mioduszewskiego ten wysiłek dobrze dokumentują.

Kolejne dwa szkice opisują wkład arabskiego (szósty) i europejskiego średniowiecza (siódmy). Następne trzy szkice dotyczą rozwoju analizy matematycznej w nowożytnej matematyce europejskiej, czyli metody niepodzielnych (od Keplera i Cavalieriego do Robervala, a więc od połowy XVI do połowy XVII wieku), *calculusa* do Leibniza i Newtona oraz dalszego rozwoju analizy w XVIII wieku (od Eulera do Lagrange'a). Wreszcie dochodzimy do dziewiętnastowiecznego ufundowania analizy i teorii liczb rzeczywistych.

Książkę zamykają *Posłowie* i *Autorskie reminiscencje*. Te krótkie i bardzo osobiste teksty są szczególnie ważne. Autor nie tylko podsumowuje w nich całe swoje dzieło, ale i daje upust osobistym refleksjom i opiniom. Są one zdecydowane, czasem ocierają się o złośliwość. Jednakże zmuszają do myślenia, prowokują do dyskusji, a może też do podjęcia własnych badań.

Co można powiedzieć o tak obszernym materiale zmieszczonym na dokładkę na stosunkowo niewielu stronicach?

W jedynej znalezionej recenzji polskiej wersji *Ciągłości* (*Studia Philosophiae Christianae* 33/2 (1997), 197–200), jej autorka A. Lemańska pisze: „Spośród

wielu wątków z historii matematyki ukazanych w książce na plan pierwszy wysuwają się trzy, jak się wydaje, szczególnie istotne dla podejmowanych prób rozjaśnienia pojęcia ciągłości, a mianowicie: zmaganie się z nieskończonością, kształtowanie się teorii ruchu oraz proces odrywania się mian od wielkości geometrycznych". Przedstawia też bardzo klarownie to, co Mioduszewski pisze na te tematy. Warto zapoznać się z tą dostępną w Internecie prezentacją. O ile jednak dwa z tych wątków – problem nieskończoności i konstrukcja *continuum* liczbowego są raczej dobrze znane matematykom, o tyle trzeci – problem ruchu wart jest dodatkowej ekspozycji. Trzeba bowiem zwrócić uwagę na to, że w nim zawęźlają się problemy obu najistotniejszych *continuów* – przestrzeni i czasu. Ruch jakiegokolwiek (rzeczywistego czy jedynie wyobrażonego) obiektu przebiega zarówno w przestrzeni, jak i w czasie. Wiąże ze sobą obydwa te pojęcia, wskazuje na ich zasadnicze podobieństwo. Co jeszcze ważniejsze, samo pojęcie ciągłości czy może wiązane z nim intuicje nierozłącznie są z ruchem związane. Jak bowiem najprościej ilustrujemy, o co w ogóle chodzi w pojęciu ciągłości? Chyba poprzez ilustrację. Linię ciągłą (bo ją najłatwiej zwizualizować) pokazujemy jako tę, którą można narysować nie odrywając ołówka od papieru czy kredy od tablicy. Jest to więc trajektoria ruchu ciągłego. Usuwając poza matematykę zagadnienia związane z ruchem, Grecy zamknęli więc sobie drogę do zrozumienia i głębszego poznania natury *continuum*. Od czasu średniowiecza, a bardzo intensywnie w nauce nowożytnej, nastąpiła zasadnicza zmiana w tym względzie. Z jednej strony problematyka i wyobraźnia matematyczna poszerzone zostały o nowe obszary związane z równocześnie rozwijającą się fizyką, z drugiej strony badania ruchu (i innych zmian w świecie fizycznym) oraz refleksja nad nim dostarczyły matematyce nowych problemów i narzędzi dla ich rozwiązywania. Równoczesny rozwój *calculusu* i nowoczesnej fizyki nie były więc przypadkowe (choć geniuszu Newtona nie tłumaczy żaden dziejowy determinizm).

Eseje dotyczące wieków średnich i początków nowożytności są w książce Mioduszewskiego zdecydowanie najciekawsze. Zawierają też najwięcej uwag na temat powiązań problematyki matematycznej (i filozoficznej) z uwarunkowaniami cywilizacyjnymi. Spostrzeżenia te są ciekawe i inspirujące, choć na pewno nie wyczerpują tematu. Jednakże silniejsze uwypuklenie tego aspektu wymagałoby napisania znacznie obszerniejszej pracy. W tak szkicowym ujęciu pominięcia są nieuniknione. Poprzestanę na zwrócenie uwagi na jedno z nich. Badając rozwój matematycznego pojęcia ciągłości (i jego filozoficznego uogólnienia) autor skupia się na geometrii, nieco po macoszemu traktując czas. Tymczasem wokół może nie tyle rozumienia czasu, ile praktycznej kwestii jego pomiaru koncentrowała się spora część pracy nad pojęciem *continuum* i jego wyobrażeniem. Słusznie Mioduszewski wskazuje na znaczenie w okresie średniowiecza szerszego kontaktu ludzi (w tym i uczonych) z przeróżnymi narzędziami i urządzeniami (w tym z kołem szlifierskim, którego obserwacja wpłynęła na zasadniczą, odrzucającą koncepcje Arystotelesa, zmianę podejścia do ruchu). Upomniałbym się wszakże o pewne narzędzie, które zmieniło zasadniczo wyobrażenie o świe-

cie w skali masowej. Było to pojawienie się zegara wieżowego, który odmierzał jednakowy czas dla wszystkich mieszkańców miasta, który oderwał intuicje chronometryczne od subiektywnych odczuć, od pór roku i ruchu słońca, a także od jakichkolwiek konotacji religijnych (jak było z czasem odmierzanym liczbą „odklepywanych" pacierzy). Ruch wskazówek unaoczniał fakt, że *continuum* czasu i *continuum* okręgu koła (a w konsekwencji i linii prostej) są w ścisłym ze sobą związku...

Książka Mioduszewskiego zaprasza do dyskusji. Dosłownie na ostatniej stronie, tłumacząc się z różnych pominięć, autor pisze: „...czy można z zachowaniem logiki myślenia opisać nieskończenie małe Leibniza? Oczywiście, można by się posłużyć nowoczesną analizą niestandardową (którą autor próbował swego czasu zgłębiać), ale byłby to błąd jeszcze większy i innego rodzaju. Można by to w ogóle pominąć, ale błędy Leibniza są ciągle żywe w umysłach matematyków, i pominięcie tych nieskończenie małych byłoby nieusprawiedliwionym unikiem". Na pewno można się z takim postawieniem sprawy spierać. Analiza niestandardowa zasługuje na większą uwagę. Pokazuje ona, że leibnizjańskie intuicje nie są wprawdzie precyzyjne, ale są czymś więcej niż po prostu błędną drogą. Istnieje możliwość (i to właśnie pokazuje analiza niestandardowa) nadania im spoistości logicznej i ufundowania na nich zarówno analizy, jak i teorii liczb rzeczywistych. Byłaby to droga odmienna od tej, jaką wybrała XIX-wieczna matematyka, ale fakt, że intuicja wielu matematyków błąka się po tamtych, zakazanych rejonach pokazuje, że obrana droga nie wszystkich w pełni satysfakcjonuje i że podążając nią być może z czegoś niesgłusznie rezygnujemy.

Ostatnia uwaga dotyczy cytowanych źródeł. Mioduszewski, co oczywiste, korzysta z dość bogatej literatury przedmiotu (ale nie przesadza z przeciążaniem tekstu erudycyjnym balastem). Są w tym i oryginalne teksty przywoływanych myślicieli. Korzysta przy tym z tłumaczeń polskich bądź rosyjskich dokonanych przez innych – głównie przez filozofów, którzy niekoniecznie musieli dobrze wyczuwać matematyczną zawartość tłumaczonych tekstów (czasem chodziło o nie całkiem wyraźne intuicje, co dodatkowo komplikowało sprawę). Miejscami więc autor koryguje tłumaczenia, by lepiej służyły założonym celom. I chyba słusznie, choć puryści mogliby żądać wnikliwej analizy takich miejsc. Tak więc bardzo często mamy do czynienia z tłumaczeniami tłumaczeń. Shenitzer wydłuża ten łańcuch. Pisze wprawdzie w przypisach, że to on jest tłumaczem odpowiednich cytatów, nie podkreśla jednak tego, że tłumaczy tłumaczenia Mioduszewskiego. W ten sposób mogą narastać rozbieżności między oryginałem a tym, co dociera do czytelnika. Oczywiście nie jest to winą ani autora, ani tłumacza. Zrobili, co mogli, a więcej mógłby dokonać jedynie ktoś, kto biegłą znajomość łaciny, greki i arabskiego (jak też co najmniej dwóch innych języków) połączyłby z kompetencją matematyczną i filozoficzną. Pojawienie się kogoś takiego jest bardzo mało prawdopodobne...

Książka Mioduszewskiego jest świetnie napisana i dobrze się ją czyta. Dotyczy to zarówno polskiego oryginału, jak i angielskiego tłumaczenia, które czasem (jak to jest choćby z tytułem książki),

sprawia wrażenie nawet zbyt bliskiego duchowi języka polskiego. To jednak może martwić czytelnika o innym niż polski języku ojczystym. Inna rzecz, że polskiego czytelnika zachęciłbym do poszukania i przeczytania polskiego oryginału. Wprawdzie wydany on był w bardzo niekorzystnej sytuacji – wydawnictwo przeżywało właśnie swoją restrukturyzację i nie zajmowało się czymś tak banalnym, jak dystrybucja gotowego tomu. Zdaje się, że spora część nakładu nie trafiła w ogóle do czytelników i po latach nie jest łatwo do książki dotrzeć. Jest wszakże w wielu bibliotekach i pojawia się na aukcjach internetowych.

Jan Waszkiewicz
Międzynarodowa Wyższa Szkoła
Logistyki i Transportu we Wrocławiu

Studenci dostali kiedyś listę dowodów, jakie należało opanować na egzamin. Jedno z pytań na tymże egzaminie brzmiało „Proszę sformułować i udowodnić twierdzenie X." Pytanie studenta: „czy mogę napisać sam dowód, bo tylko jego się nauczyłem?".

Z przekazu profesora UAM

Wiad. Mat. 53 (2) 2017, 435–441
© 2017 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Książki nadesłane

Tadeusz Krasiński i Stanisław Spodzieja, *Analytic and Algebraic Geometry*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2013, 202 str.

Książka zawiera jedenaście prac prezentowanych na dorocznych konferencjach organizowanych przez Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego. Poświęcone są one rzeczywistej i zespolonej geometrii algebraicznej. W książce zamieszczono też angielskie tłumaczenie pracy Stanisława Łojasiewicza *Geometric desingularization of curves in manifolds*.

Zygmunt Charzyński, *Selected Papers*, redakcja: Tadeusz Krasiński i Stanisław Spodzieja, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2014, 658 str.

Książka została wydana z okazji setnej rocznicy urodzin profesora Zygmunta Charzyńskiego. Zawiera (w postaci faksymilowych reprintów) czterdzieści sześć jego prac publikowanych w latach 1933–1994 – są to wszystkie jego prace matematyczne. Pominięto kilka z tych napisanych po polsku o charakterze dydaktycznym lub biograficznym. Do książki dołączono biografię naukową Charzyńskiego, listę jego publikacji oraz kilka zdjęć.

Krzysztof Chełmiński i Wojciech Ożański, *Równania różniczkowe cząstkowe*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2015, 211 str.

Jest to skrypt oparty na wykładach i ćwiczeniach prowadzonych przez pierwszego autora na Politechnice Warszawskiej. Składa się z dwóch rozdziałów poświęconych, odpowiednio, równaniom pierwszego i drugiego rzędu. Zawiera liczne przykłady i zadania.

Szymon Frankowski, *Wielowartościowość w logikach modalnych i w lingwistyce formalnej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2016, 143 str.

Książka jest próbą opisania związków łączących wielowartościowe logiki modalne z lingwistyką wielowartościową. Znajdziemy w niej syntaktyczny i semantyczny opis skończenie wartościowej logiki Łukasiewicza, jak również bardziej ogólną charakterystykę struktur opartych na dowolnych kratach, w szczególności algebry Heytinga. Podano też aksjomatyzację wielowartościowej logiki modalnej PDL. Przedstawiono ponadto charakterystykę automatów wielowartościowych i gramatyk probabilistycznych.

Andrzej Indrzejczak i Marek Nowak, *Metody logiki. Dedukcja*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2016, 144 str.

Książka jest pierwszą z planowanego cyklu poświęconego najważniejszym metodom i technikom wypracowanym na gruncie nowoczesnej logiki formalnej. Przedstawiono w niej rozmaite sposoby konstrukcji dowodów metodą dedukcji naturalnej (założeniową) w logice klasycznej, arytmetyce liczb naturalnych i teorii mnogości. Omówiono – ilustrując wywody licznymi przykładami – różne strategie i techniki dowodzenia (dowody wprost i nie wprost, dowody warunkowe i rozgałęzione oraz dowody z wykorzystaniem indukcji matematycznej).

Wiesław Laskowski (red.), *Rok matematyki na Pomorzu*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2016, 206 str.

Celem książki jest pokazanie różnorodnej tematyki badań naukowych, związanych z matematyką, prowadzonych na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego. Znalazły się tu zarówno prace naukowe napisane przez pracowników tegoż wydziału, jak i wyróżniające się prace magisterskie. Mamy tu zatem dwie prace magisterskie, dwie prace przeglądowe i trzy prace badawcze. Okazją do wydania tej książki był Rok Matematyki na Pomorzu.

Wiesław M. Macek (red.), *15 lat nauk ścisłych na UKSW*, Wydawnictwo Naukowe UKSW, Warszawa 2016, 156 str.

Książka jest pokłosiem jubileuszowej konferencji zorganizowanej z okazji piętnastolecia Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego UKSW. Obok oficjalnych wystąpień gości znajdujemy teksty dotyczące historii tego wydziału (ilustrowane licznymi zdjęciami i kopiami dokumentów) oraz teksty referatów wygłoszonych na tej konferencji. Dotyczą one rozmaitych zagadnień matematyki (A. Schinzel, B. Węglorz, W. Kulpa), fizyki, chemii oraz informatyki (J. Cytowski i F. Seredyński, M. Kutyłowski, M. A. Kowalski). Dołączono też zdjęcia z konferencji.

Jacek Wojdanowski, *Kod liczb pierwszych*, Wydawnictwo Poligraf, Brzezia Łąka 2016, 278 str.

Książka poświęcona jest rozmaitym zagadnieniom związanym z liczbami pierwszymi. Składa się z dwóch części. W pierwszej z nich analizuje się algorytm znajdowania liczb pierwszych, w drugiej zaś autor zajmuje się wzorem na liczbę liczb pierwszych nie większych od danej liczby.

John D. Barrow, *Stałe natury. O liczbach skrywających najgłębsze tajemnice Wszechświata*, tłumaczenie Rafał Śmietana, Copernicus Center Press, Kraków 2017, 415 str.

Autor rozważa stałe określające takie zjawiska fizyczne jak grawitacja, prędkość światła czy masa cząstek elementarnych – oraz ich wpływ na powstanie znanego nam Wszechświata. Sugeruje, że podstawowe siły przyrody mogły być kiedyś inne i że ich ewolucja jeszcze się nie skończyła. Pokazuje niezwykłe zbiegi okoliczności, które umożliwiły powstanie życia na Ziemi.

Przemysław Biecek, *Przewodnik po pakiecie R*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2017, 395 str.

Książka stanowi podręcznik do nauki języka programowania oraz kluczowych bibliotek programu R.

Ken Binmore, *Teoria gier*, tłumaczenie Iwona Konarzewska, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2017, 207 str.

Książka stanowi popularnonaukowe wprowadzenie do teorii gier. Ukazała się oryginalnie w interdyscyplinarnej serii „Krótkie wprowadzenia" wydawanej przez *Oxford University Press*.

Jan Bury, *Polska informatyka: informatyka w służbach specjalnych PRL. Analiza kryminalistyczna*, Polskie Towarzystwo Informatyczne, Warszawa 2017, 439 str.

Książka składa się z dwóch części. W pierwszej z nich omówiono m.in. rozwój informatyki w cywilnych służbach specjalnych PRL, w wywiadzie, w cywilnym radiowywiadzie, w wywiadzie i kontrwywiadzie wojskowym oraz problem ochrony danych informatycznych w służbach specjalnych PRL. Część druga (licząca ponad dwieście stron) to faksymile wybranych dokumentów źródłowych.

Albert Einstein, *Jak wyobrażam sobie świat*, tłumaczenie Tomasz Lanczewski, Copernicus Center Press, Kraków 2017, 527 str.

Jest to najbardziej kompletny zbiór najważniejszych pism Alberta Einsteina. Zawiera eseje pisane od początków jego kariery, aż po ostatni tekst z roku 1954. Teksty dotyczą

religii, praw człowieka, ekonomii, zasad zarządzania państwem, wojny jądrowej, a także kwestii dotyczących teorii względności oraz własności czasoprzestrzeni.

Jerzy Ginter, *Symetria w fizyce materii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2017, 410 str.

Książka składa się z trzech części. W części pierwszej omawia się własności izometrii, przekształcenia symetrii obiektów płaskich i przestrzennych oraz zastosowania właściwości symetrii do zagadnień fizycznych. W części drugiej mowa jest o własnościach macierzy izometrii, macierzach symetrii i zastosowaniach fizycznych. Część trzecia omawia reprezentacje grup i ich wybrane zastosowania.

Michał Heller, *Jak być uczonym*, wybór i opracowanie: Małgorzata Szczerbińska-Polak, Copernicus Center Press, Kraków 2017, 71 str.

Książka zawiera kilka wcześniej już publikowanych tekstów autora. Ich celem jest podzielenie się z czytelnikiem własnymi doświadczeniami w przeżywaniu przygody, jaką jest uprawianie nauki. Na podkreślenie zasługuje śliczna szata graficzna – książka została naprawdę pięknie wydana.

Michał Heller, *Podróże z filozofią w tle*, wybór i opracowanie: Małgorzata Szczerbińska-Polak, wydanie trzecie, Copernicus Center Press, Kraków 2017, 331 str.

Jest to wybór zapisków z dziennika autora prowadzonego podczas podróży naukowych. Pokazuje inne oblicze autora – nie tylko uczonego, ale także bystrego obserwatora życia, miłośnika literatury i sztuki. Znajdziemy tu także rozważania o pięknie matematyki, o starożytnej poezji, a także recenzje z lektur i zapiski z wakacji.

Robert Kanigel, *Człowiek, który poznał nieskończoność*, tłumaczenie Małgorzata Szubert, Świat Książki, Warszawa 2017, 544 str.

Jest to opowieść o życiu i osiągnięciach słynnego hinduskiego geniusza matematycznego Srinivasy Aiyangara Ramanujana. Autorowi udało się przedstawić dokonania Ramanujana, ale także pokazać źródła jego inspiracji, jego emocje, fascynację liczbami i przyjemność, jaką czerpał z ich badania.

Andrzej Kisielewicz, *Logika i argumentacja. Praktyczny kurs krytycznego myślenia*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2017, 302 str.

Książka jest propozycją w zakresie myślenia krytycznego. Została napisana głównie z myślą o studentach uczących się na kierunkach ścisłych. Zawiera liczne przykłady zadań i tematów do dyskusji, jak również różnorodne zagadki logiczne.

Mickaël Launay, *Pi razy drzwi, czyli dziwne przypadki matematyki*, tłumaczenie Krzysztof Rejmer, Wydawnictwo JK, Łódź 2017, 309 str.

Książka opowiada o rozmaitych problemach matematyki. Autor jest absolwentem *École Normale Supérieure*, doktorem matematyki (jego rozprawa doktorska dotyczyła rachunku prawdopodobieństwa), twórcą *Micmaths*, matematycznego kanału na *YouTube*.

Andrzej Łukasik, *Filozoficzne zagadnienia mechaniki kwantowej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 2017, 254 str.

Książka stanowi wprowadzenie do filozofii fizyki kwantowej. Przeznaczona jest przede wszystkim dla humanistów, w tym dla studentów filozofii i kognitywistyki. Umożliwia przygotowanie do samodzielnego studiowania literatury fachowej. Autor prezentuje elementy wiedzy fizycznej, formalizm matematyczny mechaniki kwantowej i podstawowe zagadnienia filozoficzne fizyki kwantowej.

Jerzy S. Nowak i Beata Ostrowska (red.), *Polska informatyka: wizje i trudne początki*, Polskie Towarzystwo Informatyczne, Warszawa 2017, 280 str.

Jerzy S. Nowak i Beata Ostrowska (red.), *Polska informatyka: systemy i zastosowania*, Polskie Towarzystwo Informatyczne, Warszawa 2017, 301 str.

Zebrane w obu tych książkach prace są plonem konkursu wydawniczego na opracowania z historii polskiej informatyki, ogłoszonego przez Polskie Towarzystwo Informatyczne w 2015 roku. Dotyczą one, odpowiednio, szeroko rozumianego przemysłu informatycznego oraz aplikacji i zastosowań informatyki.

Piotr Mikołaj Sołtan, *Elementy teorii operatorów na przestrzeni Hilberta*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2017, 180 str.

Książka zawiera zwięzły wykład podstawowych zagadnień teorii operatorów na przestrzeniach Hilberta. Omawia się w niej takie zagadnienia, jak rachunek funkcyjny i twierdzenia spektralne, operatory zwarte, śladowe i Hilberta–Schmidta, samosprzężone rozszerzenia operatorów symetrycznych oraz jednoparametrowe grupy operatorów. Każdy rozdział kończą syntetyczne notatki podające także źródła, w których można znaleźć zadania i przykłady oraz wskazówki do dalszej lektury.

Jakub Szczepaniak, *Przechytrzyć Murphy'ego, czyli matematyka na co dzień*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2017, 282 str.

Autor w przystępny sposób pokazuje, że matematyka jest kluczem do zrozumienia reguł rządzących nawet najprostszymi zdarzeniami codzienności oraz jak może pomóc w sytuacjach życia codziennego. Każdy rozdział poprzedzony jest fragmentem utworu

muzycznego dopasowanym klimatem do opowiadanej historii (muzyka jest drugą obok matematyki pasją autora).

Zbigniew Skoczylas, *Algebra i analiza. Egzaminy na ocenę celującą*, wyd. drugie rozszerzone, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2017, 131 str.

W książce zebrano zestawy zadań z odbywających się od 1994 roku na Politechnice Wrocławskiej konkursów matematycznych pod nazwą „Egzamin na ocenę celującą". Mamy tu zadania z algebry i geometrii analitycznej oraz analizy. Podano pełne rozwiązania zadań lub odpowiedzi ze wskazówkami.

Daniel Tammet, *Zanurzeni w liczbach. Jak matematyka kształtuje nasze życie*, tłumaczenie Zuzanna Lamża, Copernicus Center Press, Kraków 2017, 271 str.

Autor prowadzi czytelnika w fascynujący sposób po świecie liczb pokazując, jak silnie związane są one z otaczającą nas rzeczywistością.

Bogdan Węglorz, *Topologia*, Wydawnictwo Naukowe UKSW, Warszawa 2017, 176 str.

Książka jest wykładem z topologii ogólnej. Omawia się w niej takie zagadnienia, jak: pojęcie topologii i przestrzeni topologicznej, przestrzenie metryczne, punkty skupienia i granice, funkcje ciągłe, zbiory borelowskie, aksjomaty oddzielania, przestrzenie zwarte, zupełność a zwartość, przestrzenie spójne. Do każdego z czternastu rozdziałów dołączono zadania o różnym stopniu trudności – zadania trudniejsze zaopatrzono we wskazówki.

Eugeniusz Wojciechowski, *Między językiem naturalnym a formalnym*, Aureus, Kraków 2017, 626 str.

Tom zawiera czterdzieści pięć prac autora dotyczących zagadnień z pogranicza logiki i filozofii. Motywem przewodnim tych prac jest myśl Stanisława Leśniewskiego, w szczególności zaproponowane przez niego rachunki logiczne, które autor stosuje jako narzędzie. W zamieszczonych pracach rozważa się takie kwestie, jak problem predykacji, wieloaspektowo potraktowana sylogistyka, problem prawdy, asercji, modalności aletycznych, semantyczna i syntaktyczna analiza nazw.

Marek Zakrzewski, *Teoria liczb*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2017, 246 str.

Książka jest kolejną pozycją z serii *Markowych Wykładów z Matematyki*. Obejmuje takie zagadnienia, jak kongruencje, podstawy kryptografii i algorytmy randomizujące, rozmieszczenie liczb pierwszych, reszty kwadratowe, prawo wzajemności i sumy

kwadratów, równania diofantyczne i wstęp do krzywych eliptycznych. Każdy rozdział zawiera uwagi historyczne oraz zadania, do których podano rozwiązania.

Marek Zakrzewski, *Analiza, geometria i świat fizyczny*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2017, 294 str.

Jeszcze jedna pozycja z serii *Markowych Wykładów z Matematyki*. Zawiera podstawowy wykład rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych z elementami analizy wektorowej oraz krótkie wprowadzenie do analizy zespolonej.

Roman Murawski i Jan Woleński (red.), *Problemy filozofii matematyki i informatyki*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2018, 222 str.

Prace zebrane w tym tomie obrazują prowadzone obecnie w Polsce badania filozoficzne nad matematyką i informatyką, zarówno historyczne, jak i systematyczne. Autorzy reprezentują różne ośrodki akademickie i różne specjalności – są wśród nich matematycy, logicy, filozofowie, a nawet teologowie. Artykuły poświęcone zostały między innymi badaniu klasycznych kierunków filozofii matematyki, rozważaniom na temat rozwoju filozofii matematyki, problemowi prawdy w matematyce, koncepcjom dotyczącym ontologii matematyki, problemowi nieskończoności w matematyce i w informatyce, semiotyce matematyki, zagadnieniu związków między obiektami matematycznymi i przedmiotami fizycznymi, kognitywistyce matematyki, zastosowaniom teorii kategorii w filozofii matematyki, związkom między nierozstrzygalnością i teorią złożoności oraz pytaniu o to, czym się różnią *hardware* i *software*.

Opracowanie: *Roman Murawski* (Poznań)