ISSN: 2080-5519
wm.ptm.org.pl

WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE

Tom 56 Nr 2 2020

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II

Komitet Redakcyjny

Redaktor
Krzysztof Ciesielski
Zastępca Redaktora
Tadeusz Nadzieja
Sekretarze
Marcin Borkowski
Paweł Mleczko
Dział Recenzji
Maciej Kandulski
Roman Murawski
Krótkie informacje
Grzegorz Łysik

Piotr Biler
Aleksander Błaszczyk
Piotr Borodulin-Nadzieja
Dariusz Buraczewski
Roman Duda
Grzegorz Gabor
Grzegorz Graff
Rafał Latała
Krzysztof Pawałowski
Paweł Strzelecki
Michał Szurek
Joanna Zwierzyńska
Włodzimierz Zwonek

rok zał. 1919 ptm
POLSKIE
TOWARZYSTWO
MATEMATYCZNE

Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego zostały utworzone w 1955 roku w celu reaktywowania czasopism założonych w XIX wieku przez Samuela Dicksteina: Prac Matematyczno-Fizycznych, których 48 tomów opublikowano w latach 1888-1951, oraz Wiadomości Matematycznych wydanych w 47 tomach w okresie 1897-1939.

Początkowo Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazywały się w dwóch seriach. Aktualnie wydawane są w następujących sześciu seriach:

Seria I:	Commentationes Mathematicae – od 1955 roku,
Seria II:	Wiadomości Matematyczne – od 1955 roku,
Seria III:	Matematyka Stosowana – od 1973 roku,
Seria IV:	Fundamenta Informaticae – od 1977 roku,
Seria V:	Didactica Mathematicae – od 1981 roku,
Seria VI:	Antiquitates Mathematicae – od 2007 roku.

Seria I, wydawana najpierw jako Prace Matematyczne, swoją obecną nazwę otrzymała w 1969 roku, a Seria V – poprzednio Dydaktyka Matematyki – w 2007 roku.

Sprzedaż i prenumerata

Polskie Towarzystwo Matematyczne
ul. Śniadeckich 8
00-956 Warszawa

Sales and subscription

Polish Mathematical Society
ul. Śniadeckich 8
00-956 Warszawa, Poland

Tel. +48 22 629 9592
E-mail: zgptm@ptm.org.pl

Spis treści

Od redaktora · 175
M. Lemańczyk, *O gęstościowej hipotezie Sarnaka* · 179
W. Słomczyński, A. Szymusiak, *Zespolone proste równokątne i hipoteza Zaunera* · 197
F. Apéry, *Szekspirowskie równanie Otella* · 215
S. Ghosh, Y. Lu, T. Nowicki, *Błądzenie Monte Carlo według przepisu Hamiltona* · 227
A. Dąbrowski, *Przypadek – wróg czy sojusznik?* · 241
K. R. Apt, S. Simon, D. Wojtczak, *Gry z potencjałem* · 257
J. Górnicki, *Perełka:* $e^{i\pi} + 1 = 0$ · 281
T. Nadzieja, *Pół wieku seminarium profesora Andrzeja Krzywickiego – kilka osobistych wspomnień* · 287
L. Maligranda, *Setna rocznica doktoratu Stefana Banacha* · 301
M. Kokowski, *Czy odkryto grób Mikołaja Kopernika?* · 311
D. Ciesielska, L. Maligranda, *Informacje o studiach Mariana Rejewskiego w Getyndze w świetle archiwaliów* · 319
Rozmowa z Kazimierzem Gębą · 337
K. M. Pawałowski, *Moje refleksje o uczeniu topologii* · 349
K. Ciesielski, *O regule de l'Hospitala z dydaktycznego punktu widzenia* · 369
A. Bobrowski, M. Smoleń-Wawrzusiszyn, *Czy matematycy są „amenable"?* · 377
K. Ciesielski, *Kilka uwag o przekładach* · 391
M. Szurek, *Matematyka – moja droga* · 403
K. Ciesielski, *Tryptyk wyborczy, czyli przygody matematyka z wyborami* · 423

Laureaci nagród
Yuriy Tomilov (laureat Nagrody Głównej PTM im. Stefana Banacha za 2019 rok) · 433
Adam Bobrowski (laureat Nagrody Głównej PTM im. Hugona Steinhausa za 2019 rok) · 437
Dominik Burek (laureat Nagrody dla Młodych Matematyków PTM za 2019 rok) · 440
Agnieszka Hejna (laureatka Nagrody PTM dla Młodych Matematyków za 2019 rok) · 445
Mateusz Wasilewski (laureat Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego za 2020 rok) · 447

A. Czarnecki, *Wybrane rozdziały z matematycznych przygód Mikołajka – twierdzenie Tietzego* · 451
Krótkie informacje · 457

Z żałobnej karty
Henryk Hudzik (1945–2019) · 467
Zdzisław Denkowski (1940–2019) · 471
Jan Stanisław Lipiński (1923–2019) · 475
Wojciech Okrasiński (1950–2020) · 479
Andrzej Zajtz (1934–2020) · 485
Julian Musielak (1928–2020) · 491

Recenzje
Bartłomiej Bzdęga, *10^2 zadań na 10-lecie Wielkopolskiej Ligi Matematycznej* (rec. J. Uryga) · 507
Aleksander Błaszczyk, Sławomir Turek, *Matematyka. Od podstaw do elementów matematyki wyższej* (rec. M. Krych) · 508
Włodzimierz Odyniec, *Imigracja do ZSRR do wybuchu wojny – profile matematyków* (rec. R. Duda) · 515
G. I. Sinkiewicz, *Georg Cantor i polska szkoła teorii mnogości* (rec. R. Duda) · 519

Książki nadesłane · 527
Miscellanea · 178, 214, 226, 240, 256, 280, 300, 310, 318, 336, 368, 376, 390, 422, 432, 456, 470, 484, 526

Contents

Editorial · 175
M. Lemańczyk, *On Sarnak's conjecture* · 179
W. Słomczyński, A. Szymusiak, *Complex equiangular lines and Zauner conjecture* · 197
F. Apéry, *Othello Shakespearean equation* · 215
S. Ghosh, Y. Lu, T. Nowicki, *Monte Carlo random walk according to Hamilton* · 227
A. Dąbrowski, *Chance – an enemy or an ally?* · 241
K. R. Apt, S. Simon, D. Wojtczak, *Potential games* · 257
J. Górnicki, *A pearl:* $e^{i\pi} + 1 = 0$ · 281
T. Nadzieja, *Half of a century of Professor's Andrzej Krzywicki's seminar* · 287
L. Maligranda, *The 100th anniversary of Stefan Banach's doctorate* · 301
M. Kokowski, *Has the tomb of Nicolaus Copernicus been discovered?* · 311
D. Ciesielska, L. Maligranda, *Archive records about the studies of Marian Rejewski in Göttingen* · 319
A conversation with Kazimierz Gęba · 337
K. M. Pawałowski, *My reflections on teaching topology* · 349
K. Ciesielski, *L'Hospital rule from a teacher's perspective* · 369
A. Bobrowski, M. Smoleń-Wawrzusiszyn, *Are mathematicians amenable?* · 377
K. Ciesielski, *A few remarks about translations* · 391
M. Szurek, *Mathematics – my way* · 403
K. Ciesielski, *An election triptych, or a mathematician's adventures with elections* · 423

Prize winners
Yuriy Tomilov (winner of the Stefan Banach Main PTM Award 2019) · 433
Adam Bobrowski (winner of the Hugo Steinhaus PTM Award 2019) · 437
Dominik Burek (winner of the Young Mathematicians PTM Award 2019) · 440
Agnieszka Hejna (winner of the Young Mathematicians PTM Prize 2019) · 445
Mateusz Wasilewski (winner of the Kazimierz Kuratowski Award 2020) · 447

A. Czarnecki, *A chapter from mathematical adventures of Little Nicholas – Tietze theorem* · 451
News and announcements · 457

Obituaries
Henryk Hudzik (1945–2019) · 467
Zdzisław Denkowski (1940–2019) · 471
Jan Stanisław Lipiński (1923–2019) · 475
Wojciech Okrasiński (1950–2020) · 479
Andrzej Zajtz (1934–2020) · 485
Julian Musielak (1928–2020) · 491

Reviews
Bartłomiej Bzdęga, *10^2 problems for the 10^{th} anniversary of the Greater Poland Mathematics League* (rev. J. Uryga) · 507
Aleksander Błaszczyk, Sławomir Turek, *Mathematics. From basics to elements of higher mathematics* (rev. M. Krych) · 508
Włodzimierz Odyniec, *Immigration to the Soviet Union before the outbreak of the war – mathematicians' profiles* (rev. R. Duda) · 515
G. I. Sinkiewicz, *George Cantor and the Polish school of set theory* (rev. R. Duda) · 519

Book announcements · 527
Miscellanea · 178, 214, 226, 240, 256, 280, 300, 310, 318, 336, 368, 376, 390, 422, 432, 456, 470, 484, 526

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 175–177
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Od redaktora

Stało się zwyczajem, że zeszyt *Wiadomości Matematycznych*, który jest ostatnim opracowanym pod kierunkiem redaktora kończącego pracę na tym stanowisku, rozpoczyna się od listu tegoż redaktora do czytelników. Tom 57 czasopisma będzie przygotowywany przez nową redakcję, nastał więc moment do podzielenia się pewnymi refleksjami.

Myślę, że udało się utrzymać wysoki merytoryczny i edytorski poziom *Wiadomości Matematycznych*. Zamieszczane przez trzy ostatnie lata teksty nieraz znacznie się różniły rodzajem przedstawianej w nich matematyki, stylem oraz formą, ale być może dzięki temu więcej czytelników znalazło coś dla siebie. Nie zaznaczając żadnego konkretnego artykułu, chciałbym wyróżnić kilka – dla mnie bardzo istotnych – efektów pracy redakcji.

Uczciliśmy jubileusz stulecia Polskiego Towarzystwa Matematycznego zeszytem, którego większa część związana była z tą rocznicą, wydanym w dwukrotnie większym nakładzie – otrzymali go wszyscy uczestnicy Zjazdu Stulecia PTM. Z okazji siedemdziesięciolecia Olimpiady Matematycznej część kolejnego zeszytu poświęciliśmy tematyce olimpijskiej. Sukcesem redakcyjnym jest, że w zeszycie wydanym natychmiast po ICM w Rio de Janeiro zamieściliśmy artykuły napisane dla nas przez obu matematyków z Polski, którzy wygłosili na kongresie zaproszone wykłady sekcyjne. Na naszych łamach można było przeczytać pięć wywiadów ze znamienitymi matematykami. Ukazywały się opisy działalności uznanych matematycznych seminariów na polskich uniwersytetach. Warto wspomnieć o przedrukach dwóch wspaniałych artykułów (oryginalnie opublikowanych dawno temu w wydawnictwach o minimalnym nakładzie) autorstwa nieżyjących już uczonych. Zamieszczaliśmy teksty pisane przez

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

niematematyków, niewątpliwie jednak pasujące do profilu czasopisma (o złamaniu szyfrów Armii Czerwonej w czasie wojny polsko-bolszewickiej pisał historyk, wysokiej klasy ekspert w tej tematyce, o grobie Kopernika – historyk nauki, również wybitny ekspert w odpowiedniej dziedzinie, o odsłonięciu w Getyndze tablicy Steinhausa – jego krewna, a o Kawiarni Szkockiej – wnuk właściciela kawiarni).

Tak jak w poprzednich latach, ogromna większość artykułów, które ukazywały się w *Wiadomościach Matematycznych*, została napisana na prośbę redakcji. W sześciu numerach tej trzyletniej kadencji pisało dla nas 138 autorów (a jeśli odliczymy wypowiedzi na nasze pytania w zeszycie związanym ze Stuleciem PTM, to 109).

Kilka zdań chciałbym poświęcić wybranym aspektom pracy redakcyjnej. Niezależnie od recenzji, każdy tekst był sprawdzany przez pięć osób pod kątem poprawności matematycznej, językowej (w szczególności stylistyki oraz interpunkcji), a także zasad edytorskich – zależało nam na tym, aby końcowy efekt był jak najwyższej jakości. Rzecz jasna, po takim sprawdzeniu i wprowadzeniu korekt wszystkie teksty były wysyłane do korekty autorskiej. A gdy złożony był już cały zeszyt, przez tydzień jeszcze wszystko było przez redakcję dokładnie sprawdzane i dopiero potem materiały wysyłaliśmy do druku. W efekcie usterki (które niestety się zdarzały) były bardzo nieliczne.

Kilkanaście lat temu *Wiadomości Matematyczne* przestały być przygotowywane do druku przez firmy składające teksty, a pracę tę zaczęli wykonywać sekretarze redakcji – drukarnia otrzymuje od nas przygotowane pliki wraz z odpowiednimi instrukcjami. Właściwy skład wymaga niezwykłych kompetencji i umiejętności. Uważam, że egzemplarze czasopisma, które dostawali do rąk czytelnicy, pod względem edytorskim nie odbiegały jakością od produktów najbardziej profesjonalnych wydawnictw.

Niektórych planów nie udało się – niestety – zrealizować. Pewne zamówione przez nas artykuły nie zostały napisane. Przykro mi z powodu opóźnień w wydaniu kolejnych zeszytów – najważniejsza dla nas była jednak jakość. *Wiadomości Matematyczne* nie są dziennikiem czy tygodnikiem, w przypadku których rozmaite teksty muszą się ukazać niemal natychmiast. Moim zdaniem lepiej jest, gdy zeszyt dotrze do czytelników trochę później, ale po odpowiednim przygotowaniu i z jak najmniejszą liczbą usterek. Poza tym nie wchodziło w grę, by ostateczna wersja jakiegokolwiek tekstu nie została zaakceptowana przez autora. A pod koniec kadencji w efekcie koronawirusa pojawiły się dodatkowe kłopoty, przesuwające wydruk i wysyłkę.

Chciałbym podziękować za pracę dla *Wiadomości Matematycznych* członkom Komitetu Redakcyjnego. Nikt spośród osób wchodzących w jego skład

nie był tym członkiem „wyłącznie na papierze". Kilku osobom przekazuję podziękowania szczególne. Przede wszystkim Tadeuszowi Nadziei. Nie chciał on być redaktorem w kolejnej kadencji, i trudno się dziwić – wcześniej przez dwanaście lat był zastępcą redaktora, a przez kolejnych jedenaście lat redaktorem *Wiadomości Matematycznych*. Na moją prośbę zgodził się w kadencji 2018–2020 pełnić funkcję zastępcy redaktora – jego rola w przygotowywaniu kolejnych numerów pisma oraz pomoc w rozmaitych sprawach była naprawdę nieoceniona. Ogromne podziękowanie winien jestem sekretarzom redakcji – Marcinowi Borkowskiemu i Pawłowi Mleczce. To, że *Wiadomości Matematyczne* wyglądają tak pięknie, jest w bardzo dużej mierze ich zasługą. Dodam, że obaj praktycznie pełnili również rolę zastępców redaktora. Serdecznie dziękuję redaktorom działów – Grzegorzowi Łysikowi odpowiedzialnemu za *Krótkie informacje* oraz Maciejowi Kandulskiemu i Romanowi Murawskiemu prowadzącym *Dział recenzji*. Oba działy pracowały wspaniale. Specjalne podziękowanie składam Joannie Zwierzyńskiej za wielką pomoc przy obróbce redakcyjno-językowej kolejnych zeszytów.

Bardzo dziękuję również wszystkim autorom. W czasach coraz bardziej rozwijającego się systemu punktowego (w tej „lidze" *Wiadomości Matematyczne* nie grają) pisanie dla nas powinno być szczególnie doceniane. Ciepłe słowa, które przekazywali nam czytelnicy (a za które jestem bardzo wdzięczny), pozwalają sądzić, że praca tak autorów, jak i redakcji, przyniosły pozytywne efekty. Kolejne podziękowania składam recenzentom artykułów – oni też mieli wpływ na jakość publikowanych materiałów.

Dodam na zakończenie jeszcze jedną uwagę na temat pracy „ścisłej redakcji" (czyli zespołu, który przygotowywał kolejne numery czasopisma – redaktor, zastępca/zastępcy redaktora oraz sekretarze). Dotyczy to trzech kadencji, podczas których byłem w tym gronie, przy czym w dwóch pierwszych z nich redaktorem był Tadeusz Nadzieja, sekretarzami Marcin Borkowski i Paweł Mleczko, a zastępców redaktora było dwóch – Krzysztof Pawałowski i ja. Otóż choć w sprawach redakcyjnych byliśmy zazwyczaj nad wyraz zgodni, czasem się zdarzało, że różniliśmy się poglądami – a bywało, że znacznie. Zawsze jednak udawało nam się dojść do porozumienia i uzgodnić wspólne stanowisko.

Krzysztof Ciesielski



Zeszyty *Wiadomości Matematycznych* wydane po II wojnie światowej – od zeszytu 1 (1) do 56 (1)

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 179–196
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Mariusz Lemańczyk (Toruń)

O gęstościowej hipotezie Sarnaka

Wstęp

Mija właśnie dziesięć lat od momentu, gdy Peter Sarnak ogłosił swoją słynną hipotezę o braku skorelowania ciągłych obserwowalnych w dowolnym deterministycznym układzie dynamicznym (X, T) z (arytmetyczną) funkcją Liouville'a $\boldsymbol{\lambda}$. Przypuszczał on[1], że dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon X \to \mathbb{C}$ oraz $x \in X$ zachodzi wzór

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \boldsymbol{\lambda}(n) f(T^n x) = 0.$$

Ta ciągle otwarta hipoteza, leżąca na pograniczu analitycznej teorii liczb oraz teorii układów dynamicznych, miała istotny wpływ na badania w obu tych obszarach matematyki w ostatnim dziesięcioleciu. Niniejszy artykuł stara się po części w elementarny sposób omówić relacje pomiędzy hipotezą Sarnaka i jej logarytmiczną wersją, której rozpatrywanie rozpoczął Terence Tao w 2015 roku, oraz ich związki z hipotezą Chowli z 1965 roku o autokorelacjach funkcji Liouville'a. Niejako przy okazji artykuł jest próbą przystępnego naszkicowania wzajemnych relacji pomiędzy zagadnieniami dotyczącymi różnych średnich funkcji arytmetycznych oraz teorią ergodyczną.

[1] W oryginalnej pracy Sarnaka [31] występuje funkcja Möbiusa $\boldsymbol{\mu}$. Wiadomo, że hipotezy Sarnaka z $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ są równoważne. O powodach użycia $\boldsymbol{\lambda}$ zob. przypis 15 w paragrafie 5.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

1. Średnie w sensie Cesàro i średnie logarytmiczne dla ciągów liczb rzeczywistych i zespolonych

Zacznijmy od bardzo prostej obserwacji. Niech $\underline{a} = (a_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych. Ustalmy oznaczenia:

$$V(\underline{a}) := \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n\leqslant N_k} a_n \text{ dla pewnego ciągu } N_k \to \infty \right\}$$

oraz

$$V^{\log}(\underline{a}) := \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{L_{N_k}} \sum_{n\leqslant N_k} \frac{a_n}{n} \text{ dla pewnego ciągu } N_k \to \infty \right\},$$

przy czym $L_M := \sum_{m\leqslant M} \frac{1}{m}$ dla $M \geqslant 1$. Interesują nas zatem punkty skupienia ciągu średnich w sensie Cesàro oraz średnich logarytmicznych. Oczywiście założenie ograniczoności obu ciągów gwarantuje nam niepustość obu zbiorów $V(\underline{a})$ i $V^{\log}(\underline{a})$. Z klasycznego wzoru na sumowanie przez części i po przyjęciu $s_n := \sum_{j\leqslant n} a_j$, $s_0 := 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{a_n}{n} &= \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{1}{n}(s_n - s_{n-1}) \\ &= \sum_{1\leqslant n\leqslant N-1} s_n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) + \frac{s_N}{N} = \sum_{n\leqslant N-1} \frac{s_n}{n}\frac{1}{n+1} + \frac{s_N}{N}, \end{aligned} \tag{1}$$

co w zasadzie mówi nam, że średnie logarytmiczne ciągu ograniczonego $\underline{a}$ są średnimi logarytmicznymi średnich w sensie Cesàro. W szczególności są one (w praktyce) kombinacjami wypukłymi średnich w sensie Cesàro. Popatrzmy teraz bliżej na własności zbioru $V(\underline{a})$. Po pierwsze,

$$V(\underline{a}) \text{ jest zbiorem niepustym, domkniętym i ograniczonym.} \tag{2}$$

Oczywiście $\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} a_n \in V(\underline{a})$ (podobną własność ma odpowiednia granica górna). Po drugie

$$V(\underline{a}) \text{ jest zbiorem spójnym}^2, \tag{3}$$

co prosto wnioskujemy z faktu, że

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n\leqslant N+1} a_n - \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} a_n = \frac{-1}{N(N+1)} \sum_{n\leqslant N+1} a_n + \frac{1}{N} a_{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, \tag{4}$$

[2] Ta własność implikuje, że albo $|V(\underline{a})| = 1$, tzn. ciąg średnich jest zbieżny, albo zbiór $V(\underline{a})$ jest nieprzeliczalny.

gdyż ciąg $\underline{a}$ jest ograniczony. Jeśli $V(\underline{a}) = A \cup B$ i oba zbiory A, B są domknięte oraz $A \cap B = \varnothing$, to odległość pomiędzy tymi zbiorami jest dodatnia, a ze względu na to, że „kroczki" we wzorze (4) zmierzają do zera, nie da się nieskończenie wiele razy oscylować pomiędzy zbiorami A i B (i stąd otrzymujemy fakt (3)). Z powyższych własności wnioskujemy łatwo, że

$$V(\underline{a}) = \left[\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} a_n,\ \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} a_n \right]. \tag{5}$$

Po powtórzeniu powyższych argumentów wnioskujemy równie łatwo, że zbiór $V^{\log}(\underline{a})$ ma własności (2), (3) oraz (5), przy czym rozpatrujemy granice dolną i górną średnich logarytmicznych. Ponadto wzór (1) implikuje, że jeśli $y \in V^{\log}(\underline{a})$, to

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} a_n \leqslant y \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} a_n,$$

a więc

$$V^{\log}(\underline{a}) \subset V(\underline{a}). \tag{6}$$

Co by się stało jednak, gdybyśmy zamiast (ograniczonych) ciągów liczb rzeczywistych rozpatrywali (ograniczone) ciągi liczb zespolonych? Własności (1), (2) i (3) oczywiście pozostają prawdziwe i w tym przypadku (mają one charakter uniwersalny i zachodzą w znacznie szerszym kontekście, czego przykład zobaczymy za chwilę), natomiast własność (6) używała wyraźnie topologicznej cechy zbioru liczb rzeczywistych, a mianowicie faktu, że podzbiory spójne zbioru $\mathbb{R}$ są przedziałami. Struktura zbiorów spójnych płaszczyzny jest bardziej skomplikowana, więc nie powinien specjalnie dziwić nas fakt, że własność (6) dla (ograniczonych) ciągów liczb zespolonych nie zachodzi i możemy dość łatwo wskazywać przykłady, dla których $V(\underline{a}) \cap V^{\log}(\underline{a}) = \varnothing$ (nie dotyczy to oczywiście sytuacji, gdy $|V(\underline{a})| = 1$, dla której $V(\underline{a}) = V^{\log}(\underline{a})$).

2. Dlaczego średnie logarytmiczne?

Oczywiście jesteśmy raczej przyzwyczajeni do średniowania w sensie Cesàro, średniowanie w sensie logarytmicznym wydaje się mniej intuicyjne. Podajmy jednak dwa przykłady, w których średniowanie w sensie logarytmicznym „wygrywa" ze średniowaniem w sensie Cesàro. Trzeci przykład, związany z aktualnym stanem badań nad hipotezą Sarnaka, omówiony zostanie nieco później.

Zacznijmy od tzw. zbiorów wielokrotności (tzn. podzbiorów zbioru liczb całkowitych zamkniętych na branie wielokrotności swoich elementów, zob. [20]). Niech $\varnothing \neq \mathcal{B} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zdefiniujmy

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}} := \bigcup_{b\in\mathcal{B}} b\mathbb{Z}.$$

Zbiory postaci $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ nazywamy *zbiorami wielokrotności*, a ich dopełnienia $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} := \mathbb{Z} \setminus \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ zbiorami $\mathcal{B}$*-wolnymi* (co zrozumiałe). Mniej więcej sto lat temu postawiono pytanie, czy zbiory $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ mają naturalną gęstość. Chcielibyśmy wiedzieć[3], czy istnieje granica

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leqslant n \leqslant N : n \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\}|}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mathbf{1}_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}}(n).^{4}$$

Besicovitch w [3] wykazał, że na ogół zbiory wielokrotności *nie* posiadają gęstości naturalnej. W pracy [10] Davenport i Erdős udowodnili jednak, że wszystkie zbiory wielokrotności (a więc i zbiory $\mathcal{B}$-wolne) mają gęstość logarytmiczną – granica

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{L_N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}}(n)$$

istnieje (i jest równa gęstości dolnej danego zbioru wielokrotności)! Dowód tego twierdzenia, mimo upływu lat, ciągle wydaje się jedną z perełek teorii zbiorów $\mathcal{B}$-wolnych.

Nasz drugi przykład będzie dotyczył teorii tzw. podstawień stałej długości (równoważnie, teorii ciągów automatowych). *Podstawienie* (stałej długości $\ell \geqslant 1$) nad alfabetem (skończonym) $\mathbb{A}$ dane jest przez odwzorowanie

$$\theta\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}^{\ell},$$

które, poprzez iteracje, z użyciem operacji konkatenacji słów, można rozszerzyć do odwzorowania $\overline{\theta}$ z $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ do $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ (jeżeli $\theta(a) = a_1 \dots a_\ell$, to $\theta^2(a) = \theta(a_1)\dots\theta(a_\ell)$ itd.). Następnie wykazujemy, że odwzorowanie $\overline{\theta}$ ma punkt

[3] Z historycznego punktu widzenia pytanie to pojawiło się w kontekście tzw. liczb nadmiarowych (liczb, których suma dzielników właściwych jest większa niż dana liczba) w pracy [4], a pozytywną odpowiedź na nie uzyskano (niezależnie!) w pracach [6, 9, 13]. Zbiór liczb nadmiarowych jest przykładem zbioru wielokrotności.

[4] Czytelnik może tu zwrócić uwagę, że badamy podzbiory zbioru liczb całkowitych, natomiast ich gęstość zależy jedynie od części dodatniej zbioru. Używanie podzbiorów $\mathbb{Z}$ wiąże się z tym, że gdy przejdziemy do języka układów dynamicznych, chcemy mieć do czynienia z układami odwracalnymi – oczywiście sprawa ma charakter czysto techniczny.

stały[5]. Dla przykładu, gdy (dodatkowo) dla pewnego $a \in \mathbb{A}$ mamy $\theta(a) = a_1 \dots a_\ell$ oraz $a_1 = a$, to ciągi słów skończonych $\theta^n(a)$ „zmierzają" do pewnego punktu stałego odwzorowania $\overline{\theta}$.

Niech więc $u \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ będzie punktem stałym odwzorowania $\overline{\theta}$. W naturalny sposób pojawia się teraz pytanie, czy istnieją frekwencje bloków na ciągu u, tzn. dla $B \in \mathbb{A}^k$ pytamy o istnienie granic

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\big|\{1 \leqslant n \leqslant N-k : u_n u_{n+1} \dots u_{n+k-1} = B\}\big|,$$

a więc granicę średnich w sensie Cesàro wystąpień bloku B na u. Okazuje się, że granica ta na ogół nie istnieje[6], ale w sensie logarytmicznym granice istnieją zawsze (zob. [8]).

3. Dynamika topologiczna, punkty quasi-generujące

Topologicznym układem dynamicznym nazywać będziemy parę (X, T), przy czym X jest przestrzenią metryczną zwartą, T zaś jej homeomorfizmem. Jednym z ważnych problemów dynamiki topologicznej jest opis wszystkich (probabilistycznych, borelowskich) miar niezmienniczych i – co ważniejsze – badanie własności ergodycznych miarowych układów dynamicznych wyznaczonych przez te miary. Oznaczmy przez $M(X)$ przestrzeń wszystkich miar probabilistycznych określonych na σ-algebrze $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ podzbiorów borelowskich zbioru X. Na $M(X)$ rozpatrujemy $*$-słabą topologię, która jest metryzowalna i w której $\nu_N \to \nu$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{N\to\infty} \int_X f \,\mathrm{d}\nu_N = \int_X f \,\mathrm{d}\nu \quad \text{dla dowolnej funkcji ciągłej } f \in C(X).$$

Kluczowe jest to, że otrzymana przestrzeń metryczna miar jest również zwarta. Następnie rozpatrujemy podzbiór miar *T-niezmienniczych*

$$M(X,T) := \left\{\nu \in M(X) : (\forall A \in \mathcal{B}(X))\ \nu(T^{-1}A) = \nu(A)\right\}.$$

Równoważnie, $\nu \in M(X,T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_X f \circ T \,\mathrm{d}\nu = \int_X f \,\mathrm{d}\nu$ dla dowolnej funkcji $f \in C(X)$.

[5] Otrzymane w ten sposób ciągi pokrywają się z klasą ciągów *automatowych*, tzn. ciągów akceptowanych przez skończone automaty deterministyczne. Równość ta jest treścią twierdzenia Cobhama, zob. [8].

[6] Niewielkie założenia dotyczące odwzorowania θ, na przykład tzw. warunek nieredukowalności, a więc pojawianie się wszystkich liter alfabetu w (dostatecznie dużych) iteracjach $\theta^n(a)$ dla wszystkich $a \in \mathbb{A}$, wystarczają do istnienia granic średnich w sensie Cesàro. Ciągi automatowe generują interesującą klasę przykładów układów dynamicznych z punktu widzenia teorii ergodycznej, zob. na przykład książkę [28].

Punktem startowym jest następująca obserwacja (w literaturze przedmiotu znana pod nazwą twierdzenia Kryłowa–Bogolubowa):

$$M(X,T) \neq \varnothing. \tag{7}$$

Prześledźmy (króciutki) dowód powyższego stwierdzenia. Ustalmy $x \in X$ i rozpatrzmy ciąg miar *empirycznych* $\nu_N := \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\delta_{T^n x} \in M(X)$, przy czym przez δ_z oznaczamy miarę Diraca w punkcie $z \in X$. Ze względu na zwartość przestrzeni $M(X)$, możemy założyć, że $\nu_{N_k} \to \nu$. Oczywiście $\nu \in M(X)$, ale dla dowolnej funkcji $f \in C(X)$ mamy

$$\int\limits_X f\circ T \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{N_k}\sum_{1\leqslant n\leqslant N_k}\delta_{T^n x}\right) = \frac{1}{N_k}\sum_{1\leqslant n\leqslant N_k} f(T^{n+1}x)$$

i stąd wnioskujemy, że $\int_X f\circ T \,\mathrm{d}\nu = \int_X f \,\mathrm{d}\nu$, co kończy dowód wzoru (7)[7].

Nietrudno spostrzec, że zbiór $M(X,T)$ jest domknięty (a więc zwarty) w $*$-słabej topologii oraz że jest on zbiorem wypukłym. Z twierdzenia Kreina–Milmana wynika więc, że $M(X,T)$ posiada punkty ekstremalne. Klasyczne twierdzenie dynamiki topologicznej orzeka, że punkty ekstremalne zbioru $M(X,T)$ są dokładnie miarami ergodycznymi. Przypomnijmy, że przez *ergodyczność miary* $\nu \in M(X,T)$ rozumiemy ergodyczność (miarowego) układu dynamicznego $(X,\mathcal{B},\nu,T)$, a więc fakt, że każdy zbiór niezmienniczy $A \in \mathcal{B}$ (tzn. $A = T^{-1}A$ ν-p.w.) ma miarę 0 lub 1 (równoważnie, każda mierzalna funkcja niezmiennicza jest prawie wszędzie stała). Zbiór miar ergodycznych oznaczmy przez $M^e(X,T)$.

Ustalmy $x \in X$ i zdefiniujmy

$$V(x) := \left\{\nu \in M(X,T) : \nu = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{N_k}\sum_{1\leqslant n\leqslant N_k}\delta_{T^n x} \text{ dla pewnego } N_k \to \infty\right\},$$

$$V^{\log}(x) := \left\{\nu \in M(X,T) : \nu = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{L_{N_k}}\sum_{1\leqslant n\leqslant N_k}\frac{1}{n}\delta_{T^n x} \text{ dla pewnego } N_k \to \infty\right\}.$$

Dowód niepustości zbioru w formule (7) (zob. również przypis 7) daje nam natychmiast niepustość zbiorów $V(x)$ oraz $V^{\log}(x)$. Oba te zbiory są dodat-

[7] Jako (na razie) ciekawostkę zauważmy, że dowód twierdzenia Kryłowa–Bogolubowa moglibyśmy przeprowadzić z wykorzystaniem średnich logarytmicznych: $\nu'_N := \frac{1}{L_N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{1}{n}\delta_{T^n x} \in M(X)$ i tego, że jeśli $\nu'_{N_k} \to \nu'$, to $\nu' \in M(X,T)$. Dwa lata temu spytałem Manfreda Denkera, współautora pierwszej (znakomitej) monografii [11] dotyczącej dynamiki topologicznej, dlaczego w zasadzie wszystkie średniowania „dynamiczne" są w sensie Cesàro. Manfred odparł, że autorzy książki [11] zdawali sobie sprawę, że i inne średniowania są „dobre", ale nie było najmniejszego zapotrzebowania na tego typu rozważania.

kowo domknięte. Punkt x nazywa się punktem *quasi-generującym* dla każdej miary $\nu \in V(x)$ (x nazywa się punktem *generującym* lub *generycznym*, gdy $V(x)$ jest jednoelementowy). Podobne definicje rozpatrujemy w przypadku logarytmicznym. Jak zapewne czytelnik się domyśla, na ogół nie ma żadnej relacji zawierania pomiędzy zbiorami $V(x)$ i $V^{\log}(x)$, może się nawet zdarzyć, że oba te zbiory są rozłączne, odpowiednie przykłady można znaleźć w pracy [17] (oczywiście jeśli x jest generujący, to jest on logarytmicznie generujący dla tej samej miary niezmienniczej). Jednakże, po wykorzystaniu m.in. aspektu wypukłości we wzorze na sumowanie przez części, wnioskujemy, że zachodzi następujący fakt:

Twierdzenie 3.1 [17]**.** *Mamy* $V^{\log}(x) \subset \overline{\mathrm{conv}}(V(x))$*, przy czym* $\overline{\mathrm{conv}}(V(x))$ *oznacza domkniętą otoczkę wypukłą zbioru* $V(x)$*.*

Przypomnijmy klasyczne twierdzenie Milmana (zob. na przykład [30]) dotyczące punktów ekstremalnych uwypuklenia danego zbioru.

Twierdzenie. *Jeśli K jest zwartym podzbiorem w przestrzeni lokalnie wypukłej oraz zbiór* $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ *jest zwarty, to* $\mathrm{ex}(\overline{\mathrm{conv}}(K)) \subset K$[8]*.*

Rozważmy teraz $K = V(x)$ i zauważmy, że zwartość przestrzeni $M(X, T)$ (pozwalająca na użycie twierdzenia Milmana), twierdzenie 3.1 oraz fakt, że punkt ekstremalny zbioru wypukłego jest tym bardziej punktem ekstremalnym jego podzbioru implikują, iż

$$V^{\log}(x) \cap M^e(X, T) \subset \overline{\mathrm{conv}}(V(x)) \cap M^e(X, T) \subset \mathrm{ex}(\overline{\mathrm{conv}}(V(x))) \subset V(x).$$

Zachodzi zatem następujący fakt.

Wniosek 3.2 [17]**.** *Jeśli x jest punktem logarytmicznie quasi-generującym dla miary* ergodycznej $\nu \in M^e(X, T)$*, to x jest również punktem quasi-generującym dla ν.*

Uzyskany w powyższym wniosku rezultat nie wygląda specjalnie imponująco, niemniej ma on nieoczywiste konsekwencje w teorii liczb, co zobaczymy za chwilę.

4. Układy Furstenberga ograniczonych funkcji arytmetycznych

Przez *funkcję arytmetyczną* rozumiemy dowolny ciąg liczb zespolonych $\boldsymbol{u}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Zakładamy, że funkcja $\boldsymbol{u}$ jest ograniczona i niech $E := \overline{\{\boldsymbol{u}(n) : n \in \mathbb{Z}\}}$.

[8] Przez $\mathrm{ex}(L)$ oznaczamy zbiór punktów ekstremalnych zbioru L.

Możemy zatem traktować $\boldsymbol{u}$ jako ciąg dwustronny o współrzędnych w zbiorze E i pisać $\boldsymbol{u} \in E^{\mathbb{Z}}$. Przestrzeń $E^{\mathbb{Z}}$ z metryką zbieżności po współrzędnych jest zwarta – rozpatrujemy na niej naturalny homeomorfizm S przesuwający ciągi o jedną pozycję w lewo, tzn.

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) := (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \text{ przy czym } y_n = x_{n+1} \text{ dla } n \in \mathbb{Z}.$$

Topologiczny układ dynamiczny, który będzie nas interesował, to *subshift* wyznaczony przez $\boldsymbol{u}$, czyli $(X_{\boldsymbol{u}}, S)$, przy czym

$$X_{\boldsymbol{u}} := \overline{\{S^n\boldsymbol{u} : n \in \mathbb{Z}\}}.$$

Oczywiście $X_{\boldsymbol{u}}$ jest podzbiorem domkniętym i S-niezmienniczym.

Ponieważ $\boldsymbol{u} \in X_{\boldsymbol{u}}$, możemy rozpatrywać miary empiryczne na $X_{\boldsymbol{u}}$ dane wzorem $\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\delta_{S^n\boldsymbol{u}}$, przy czym $N \geqslant 1$. Miarowe układy dynamiczne postaci $(X_{\boldsymbol{u}}, \mathcal{B}(X_{\boldsymbol{u}}), \nu, S)$ dla $\nu \in V(\boldsymbol{u})$ nazywamy *układami Furstenberga* funkcji arytmetycznej $\boldsymbol{u}$.

Jako przykład rozpatrzmy funkcję Liouville'a $\boldsymbol{\lambda}$, którą definiujemy wzorem $\boldsymbol{\lambda}(1) = 1$, $\boldsymbol{\lambda}(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ dla $n \geqslant 2$, przy czym $\Omega(n)$ oznacza liczbę dzielników pierwszych liczby n liczonych wraz z krotnościami. Rozszerzmy $\boldsymbol{\lambda}$ na cały zbiór liczb całkowitych, określając $\boldsymbol{\lambda}(0) = 1$ oraz, dla $n \geqslant 1$, $\boldsymbol{\lambda}(-n) = \boldsymbol{\lambda}(n)$. Wówczas $E = \{-1, 1\}$ i dla subshiftu Liouville'a $X_{\boldsymbol{\lambda}}$ mamy $X_{\boldsymbol{\lambda}} \subset \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Interesują nas układy Furstenberga funkcji Liouville'a. Jaka ogólna strategia ewentualnych zastosowań kryje się za układami Furstenberga? Otóż mamy prawo oczekiwać, że własności kombinatoryczne funkcji arytmetycznej (na przykład funkcja Liouville'a jest funkcją *całkowicie multiplikatywną*, tzn. $\boldsymbol{\lambda}(mn) = \boldsymbol{\lambda}(m)\boldsymbol{\lambda}(n)$ dla $m, n \geqslant 1$) będą wpływały na własności ergodyczne układów Furstenberga. Następnie będziemy pracowali, używając narzędzi układów dynamicznych, oczekując uzyskania o nich pogłębionych informacji, by w końcu, po powrocie do wyjściowej funkcji arytmetycznej, liczyć na otrzymanie nowych jej własności. Prześledzimy „działanie" tej strategii na w miarę prostych sytuacjach opisanych w artykule przeglądowym [14]. Będzie to nam pomocne w rozumieniu następnych paragrafów, w których będziemy dyskutowali możliwą równoważność słynnych hipotez Sarnaka i Chowli.

Niech $\kappa \in V(\boldsymbol{\lambda})$, $\kappa = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{N_k}\sum_{n\leqslant N_k}\delta_{S^n\boldsymbol{\lambda}}$ i niech $\pi_0 \colon X_{\boldsymbol{\lambda}} \to \{-1, 1\}$, $\pi_0(y) := y_0$ dla $y \in X_{\boldsymbol{\lambda}}$. Jak wykazać, że funkcja π_0 nie jest S-niezmiennicza κ-p.w.? Udowodnimy nawet więcej, a mianowicie, że $\mathbb{E}(\pi_0|\mathcal{I}_\kappa) = 0$, przy czym przez $\mathcal{I}_\kappa$ oznaczamy σ-algebrę zbiorów S-niezmienniczych κ-p.w. Innymi słowy, chcemy wykazać, że każdy układ Furstenberga funkcji Liouville'a jest „choć trochę" ergodyczny ($\int_{X_{\boldsymbol{\lambda}}}\pi_0\,\mathrm{d}\kappa = 0$, zob. przypis 13). Klasyczne twierdzenie

ergodyczne von Neumanna orzeka, że w przestrzeni $L^2(X_{\boldsymbol{\lambda}}, \kappa)$ mamy zbieżność

$$\lim_{H\to\infty} \frac{1}{H} \sum_{h\leqslant H} \pi_0 \circ S^h = \mathbb{E}(\pi_0|\mathcal{I}_\kappa).$$

Chcielibyśmy zatem wykazać, że $\int_{X_{\boldsymbol{\lambda}}} \left|\frac{1}{H}\sum_{h\leqslant H} \pi_0 \circ S^h\right|^2 \mathrm{d}\kappa \to 0$, gdy $H \to \infty$. Skorzystajmy teraz z tego, że funkcje podcałkowe są ciągłe, a więc ich całki mogą być obliczane jako granice całek po odpowiednich miarach empirycznych. Stąd

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n\leqslant N_k} \left|\frac{1}{H} \sum_{h\leqslant H} \pi_0 \circ S^h(S^n\boldsymbol{\lambda})\right|^2 = \int\limits_{X_{\boldsymbol{\lambda}}} \left|\frac{1}{H} \sum_{h\leqslant H} \pi_0 \circ S^h\right|^2 \mathrm{d}\kappa.$$

Wystarczyłoby zatem wiedzieć, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dla wszystkich $H \geqslant 1$ wystarczająco dużych, mamy

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n\leqslant N_k} \left|\frac{1}{H} \sum_{h\leqslant H} \boldsymbol{\lambda}(n+h)\right|^2 \leqslant \varepsilon.$$

Otóż powyższy fakt rzeczywiście zachodzi, ale wymaga to użycia głębokiego twierdzenia Matomäki i Radziwiłła z 2015 roku (zob. [24]), które orzeka, że dla „typowego" n suma $\left|\frac{1}{H}\sum_{n\leqslant h\leqslant n+H} \boldsymbol{\lambda}(h)\right|$ jest rzeczywiście mała[9].

W pracy [25] Matomäki, Radziwiłł i Tao udowodnili, że przy $H \to \infty$ (dowolnie wolno) oraz $N \to \infty$ ($H \leqslant N$) mamy

$$\sum_{h\leqslant H} \left|\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \boldsymbol{\lambda}(n)\boldsymbol{\lambda}(n+h)\right| = o(HN).$$

Jak wykazano w artykule [14], z ergodycznego punktu widzenia ten rezultat wzmacnia naszą poprzednią uwagę o własnościach funkcji π_0. A mianowicie, dla dowolnej $\kappa \in V(\boldsymbol{\lambda})$ miara spektralna[10] σ_{π_0} funkcji π_0 jest bezatomowa. Ten fakt ma już swoje konsekwencje (a więc nasza strategia działa!) – po pewnym zastosowaniu teorii spektralnej układów dynamicznych otrzymujemy, że hipoteza Sarnaka zachodzi w dowolnym układzie dynamicznym (X, T), w którym *wszystkie* miary niezmiennicze indukują układy dynamiczne z wid-

[9] Czytelnik może zwrócić uwagę, że naiwnością byłoby oczekiwanie, iż na *wszystkich* „krótkich" przedziałach $[n, n+H]$ średnie funkcji Liouville'a są małe – hipoteza Chowli implikuje w szczególności, że w ciągu $\boldsymbol{\lambda}$ muszą wystąpić dowolnie długie ciągi samych jedynek (lub minus jedynek).

[10] Chodzi o miarę na okręgu $\mathbb{S}^1$ o transformacie Fouriera spełniającej warunek

$$\widehat{\sigma}_{\pi_0}(k) := \int\limits_{\mathbb{S}^1} z^k \,\mathrm{d}\sigma_{\pi_0}(z) = \int\limits_{X_{\boldsymbol{\lambda}}} \pi_0 \cdot \pi_0 \circ S^k \mathrm{d}\kappa \text{ dla dowolnego } k \in \mathbb{Z}.$$

Istnienie (i jedyność) takiej miary wynika z twierdzenia Herglotza.

mem dyskretnym[11]. W szczególności, hipoteza Sarnaka zachodzi dla dowolnego układu przeliczalnego. W sposób oczywisty $\boldsymbol{\lambda}$ nie jest ortogonalna do obserwowalnej $(\pi_0(S^n\boldsymbol{\lambda}))_{n\in\mathbb{Z}}$, więc układ Liouville'a $X_{\boldsymbol{\lambda}}$ nie może być przeliczalny[12]! Gdyby czytelnikowi wydawało się, że jest jakaś prosta metoda wykazywania nieprzeliczalności subshiftów pochodzących od klasycznych funkcji arytmetycznych, to przypomnijmy, że nieprzeliczalność subshiftu generowanego przez funkcję charakterystyczną zbioru liczb pierwszych jest problemem otwartym.

5. Hipoteza Chowli i hipoteza Sarnaka

Przypomnijmy najpierw (ciągle otwartą) hipotezę Chowli (zob. [7]). Przypuszcza się, że dla dowolnych $k \geqslant 1$ oraz $0 \leqslant r_1 < \cdots < r_k$ zachodzi równość

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \boldsymbol{\lambda}(n+r_1)\ldots\boldsymbol{\lambda}(n+r_k) = 0. \tag{Ch}$$

Powyższa formuła zachodzi dla $k = 1$ – jest to klasyczny warunek równoważny twierdzeniu o asymptotyce liczb pierwszych w przedziale $[1, x]$, tzn. $\pi(x)/(x/\log x) \to 1$, gdy $x \to \infty$.[13] Hipoteza Chowli z nieco innego niż hipoteza Riemanna punktu widzenia wyraża (o czym za chwilę) fakt silnej losowości funkcji Liouville'a, a w konsekwencji oddaje intuicję, że liczby pierwsze pojawiają się „losowo" w ciągu liczb naturalnych. Mianowicie, zachodzi następujący fakt (zob. na przykład [1]):

$$\begin{gathered}\text{(Ch) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy } \boldsymbol{\lambda} \text{ jest punktem}\\ \text{generującym dla miary Bernoulliego } B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ na } \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}.\end{gathered} \tag{8}$$

Innymi słowy, funkcja Liouville'a ma tylko jeden układ Furstenberga, którym jest (najbardziej „losowy", w szczególności ergodyczny) miarowy układ dynamiczny Bernoulliego na dwóch równoprawdopodobnych symbolach.

Sformułujmy teraz hipotezę Sarnaka z 2010 roku (zob. [31]).

---

[11] Jest to jedno z niewielu ogólnych (raczej skromnych w stosunku do oczekiwanego rezultatu) twierdzeń o hipotezie Sarnaka, udowodnione po raz pierwszy w artykule [22]. Uogólnienia tego twierdzenia znajdują się w pracach [21, 23]. Przypomnijmy, że jeśli $\mu \in M(X, T)$, to układ (X, μ, T) ma *widmo dyskretne*, gdy przestrzeń $L^2(X, \mu)$ jest generowana przez funkcje własne operatora Koopmana $f \mapsto f \circ T$.

[12] Pytanie, czy zbiór $X_{\boldsymbol{\lambda}}$ jest nieprzeliczalny, zadał w rozmowie z Krzysztofem Frączkiem i ze mną Peter Sarnak w czasie konferencji w Jerozolimie honorującej Marinę Ratner, w 2013 roku. Do dziś nie wiadomo, czy entropia $(X_{\boldsymbol{\lambda}}, S)$ jest dodatnia. Najnowszy rezultat o złożoności superwielomianowej funkcji Liouville'a znajduje się w artykule [26].

[13] Czytelnik może tu zauważyć, że wynika stąd, iż twierdzenie o liczbach pierwszych jest równoważne warunkowi $\int_{X_{\boldsymbol{\lambda}}} \pi_0 \, \mathrm{d}\kappa = 0$ dla dowolnej miary $\kappa \in V(\boldsymbol{\lambda})$.

Hipoteza. Dla dowolnego homeomorfizmu T o zerowej entropii[14] działającego na przestrzeni metrycznej zwartej X zachodzi równość

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \boldsymbol{\lambda}(n) f(T^n x) = 0 \tag{S}$$

dla dowolnej funkcji $f \in C(X)$ i dowolnego $x \in X$.[15]

Hipoteza Sarnaka wskazuje na inny aspekt „losowości" funkcji Liouville'a, a mianowicie brak korelacji z ciągłymi obserwowalnymi, które są deterministyczne[16]. Główna motywacja Petera Sarnaka do sformułowania hipotezy (S) wynikała z następującego faktu.

Twierdzenie 5.1 [31]**.** *Hipoteza Chowli implikuje hipotezę Sarnaka.*

Wprawdzie dowodu w oryginalnym artykule Sarnaka [31] nie było, ale dowód ten ze wszystkimi szczegółami został opublikowany przez Terence'a Tao na jego blogu [32] (zob. również [34]). Dowód wskazujący na czysto ergodyczne korzenie implikacji „(Ch) ⇒ (S)" został opublikowany w artykule [1], jest on już jednak sugerowany przez Sarnaka w [31]. Bazuje on na fakcie (8) i polega na studiowaniu miar w $V(\boldsymbol{\lambda}, x)$ (względem homeomorfizmu $S \times T$), a następnie zastosowaniu twierdzeń o rozłączności (w sensie Furstenberga) odpowiednich układów dynamicznych.

W latach 2010–2018 opublikowanych zostało wiele artykułów potwierdzających hipotezę Sarnaka dla licznych przykładów układów dynamicznych o zerowej entropii (zainteresowanego czytelnika odsyłam do bibliografii w artykule [14]), duża część z nich wykorzystywała przełomową pracę [24] dotyczącą własności funkcji multiplikatywnych na krótkich przedziałach. Większość

[14] Nie będziemy tu przypominali definicji entropii, zainteresowany czytelnik może znaleźć bogate informacje na ten temat na przykład w monografii T. Downarowicza [12].

[15] Jak zauważyliśmy we wstępie, hipoteza Sarnaka (S) została sformułowana dla funkcji Möbiusa $\boldsymbol{\mu}$. Jednakże, jak wykazano w pracy [14], hipoteza (S) jest równoważna analogicznej hipotezie, w której występuje $\boldsymbol{\mu}$ w miejscu $\boldsymbol{\lambda}$. Również hipoteza Chowli może być sformułowana dla funkcji Möbiusa. Nie jest do końca jasne, czy (Ch) w sformułowaniach dla $\boldsymbol{\lambda}$ i $\boldsymbol{\mu}$ są równoważne, o czym można przeczytać w bardzo ciekawym artykule O. Ramaré [29]. Autor obecnego artykułu używa wszędzie funkcji Liouville'a, głównie ze względu na prostsze sformułowania problemów ergodycznych. W przypadku funkcji Möbiusa musimy uwzględnić fakt, że subshift $(X_{\boldsymbol{\mu}}, S)$ ma jako swój faktor subshift $(X_{\boldsymbol{\mu}^2}, S)$ ($\boldsymbol{\mu}^2$ jest funkcją charakterystyczną zbioru liczb bezkwadratowych). Ciąg $\boldsymbol{\mu}^2$ jest punktem generującym dla tzw. miary Mirsky'ego $\nu_{\boldsymbol{\mu}^2}$ (która ma zerową entropię!). Stąd *każdy* układ Furstenberga $(X_{\boldsymbol{\mu}}, \kappa, S)$ dla $\boldsymbol{\mu}$ ma $(X_{\boldsymbol{\mu}^2}, \nu_{\boldsymbol{\mu}^2}, S)$ jako swój faktor miarowy. W odróżnieniu więc od funkcji Liouville'a musimy zatem stosować *relatywne* odpowiedniki twierdzeń teorii ergodycznej, co prowadzi do pewnych komplikacji.

[16] W teorii układów dynamicznych pojęcia determinizmu i zerowej entropii są używane zamiennie.

z nich bazowała na bardzo specyficznych własnościach rozpatrywanej rodziny przykładów. Nietrudno zgadnąć, że prace te wywołały w części środowiska matematycznego, przede wszystkim grona zajmującego się układami dynamicznymi, kontrowersje. Gdybyśmy znaleźli kontrprzykład na hipotezę (S), mielibyśmy rozwiązany problem (nie)prawdziwości hipotezy (Ch), ale wszyscy wierzą, że (Ch) zachodzi, więc nawet pełny dowód hipotezy (S), a tym bardziej działalność potwierdzająca (S) dla kolejnych przykładów układów deterministycznych, nie wydaje się prowadzić do lepszego zrozumienia hipotezy Chowli (co było oryginalną motywacją Sarnaka). Sytuacja zmieniłaby się radykalnie, gdybyśmy mogli udowodnić, że hipotezy Chowli i Sarnaka są równoważne, o czym za chwilę.

6. Logarytmiczne wersje hipotezy Chowli i hipotezy Sarnaka

Możemy oczywiście rozpatrywać logarytmiczne wersje hipotez Sarnaka i Chowli, w których (S) jest zamienione na

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{L_N} \sum_{n\leqslant N} \frac{1}{n} \boldsymbol{\lambda}(n) f(T^n x) = 0, \tag{log S}$$

(Ch) zaś na

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{L_N} \sum_{n\leqslant N} \frac{1}{n} \boldsymbol{\lambda}(n+r_1)\dots\boldsymbol{\lambda}(n+r_k) = 0. \tag{log Ch}$$

W 2016 roku Tao w dość sensacyjnej pracy [34] udowodnił następujący wynik.

Twierdzenie 6.1. *Logarytmiczne hipotezy Sarnaka i Chowli są równoważne.*

Nie ma tu możliwości choćby bardzo pobieżnego przedstawienia idei dowodu głównego twierdzenia pracy [34]. Tao używał aparatu norm Gowersa, teorii układów dynamicznych na nil-rozmaitościach i odkrytego przez siebie wcześniej specjalnego zjawiska „ubytku entropii", co w jednym z kluczowych elementów dowodu pozwala otrzymać dodatkowy czynnik logarytmiczny w oszacowaniach.

Wartość tego głębokiego rezultatu dla oryginalnej hipotezy Chowli spowodowała jednak pewne dyskusje. Autor artykułu – nie będący specjalistą z analitycznej teorii liczb – przypuszcza, że wynika to z faktu, że badanie średnich logarytmicznych wydaje się oddalać nas od liczb pierwszych, na przykład wspomnieliśmy już, że twierdzenie o liczbach pierwszych jest równoważne zmierzaniu do zera średnich (w sensie Cesàro!) funkcji Liouville'a, gdy tymczasem

zmierzanie do zera średnich logarytmicznych funkcji Liouville'a jest prostym ćwiczeniem (więc trudno oczekiwać głębszych konsekwencji)[17].

Zauważmy jednak, że hipoteza Sarnaka implikuje logarytmiczną hipotezę Sarnaka (zob. paragraf 1) i – jak w przypadku równoważności (8) – logarytmiczna hipoteza Chowli jest w dalszym ciągu równoważna faktowi, iż $V^{\log}(\boldsymbol{\lambda}) = \{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$, przy czym miarowy układ dynamiczny $(X_{\boldsymbol{\lambda}}, \mathcal{B}(X_{\boldsymbol{\lambda}}), B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), S)$ jest ergodyczny. Po skorzystaniu zatem z twierdzenia 6.1 oraz wniosku 3.2, otrzymujemy następujący fakt.

Wniosek 6.2 [17]**.** *Jeśli zachodzi hipoteza Sarnaka, to* $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in V(\boldsymbol{\lambda})$. *Innymi słowy, hipoteza Sarnaka implikuje hipotezę Chowli wzdłuż podciągu.*

Już dzień (!) po ukazaniu się pracy [17] w serwisie arXiv.org Tao napisał na swoim blogu [35][18]:

> W utrwalającym się powoli poglądzie, że uśredniona logarytmicznie hipoteza Chowli jest łatwiejsza niż ta zwykła, z pewnym zaskoczeniem przeczytałem niedawną pracę Gomilki, Kwietniaka i Lemańczyka, którzy podali między innymi następujący wynik [tu następuje wniosek 6.2].

Co więcej, Tao nie poprzestał na jednym zdaniu – pisze dalej[19]:

> Z drugiej strony, wiele wyników w tej dziedzinie udowodnionych najpierw metodami teorii ergodycznej zostało później ponownie wykazanych bardziej kombinatorycznymi sposobami – moja druga praca z Teravainenem jest tego przykładem. Jak się okazuje, twierdzenie 1 [tzn. wniosek 6.2] również można udowodnić standardową techniką kombinatoryczną (czy też probablisityczną) znaną jako metoda drugiego momentu. W istocie można wykazać nawet więcej.
>
> **Twierdzenie 2.** Jeśli zachodzi logarytmiczna hipoteza Chowli, to istnieje taki podzbiór $A \subset \mathbb{N}$ o *pełnej gęstości logarytmicznej*, że hipoteza Chowli zachodzi wzdłuż tego podciągu[20].

Argumenty Tao prowadzące do konstrukcji zbioru o gęstości logarytmicznej 1 są rzeczywiście bardziej elementarne i, co nie powinno dziwić, charakteryzują się pewną głębią pozwalającą na niebanalne uogólnienia. Poniższe twierdzenie jest tego ilustracją.

[17] W artykule [18] zauważono jednak, że już logarytmiczna hipoteza Chowli rzędu 2 (udowodniona przez Tao w [33]) implikuje pewną gęstościową wersję twierdzenia o liczbach pierwszych.

[18] Tłumaczenie redakcji

[19] Tłumaczenie redakcji

[20] W istocie rzeczy Tao zakłada, że warunek (log Ch) zachodzi dla korelacji długości parzystej. Zob. prace [36, 37] dotyczące najnowszych wyników związanych z hipotezą Chowli.

Twierdzenie 6.3 [18]**.** *Niech* $(\mathcal{B}_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, 2$, *będą przestrzeniami unormowanymi, a ponadto niech* $\mathcal{B}_1$ *będzie ośrodkowa. Niech* $(S_k)_{k\geqslant 1}$ *będzie ciągiem operatorów liniowych i wspólnie ograniczonych z* $\mathcal{B}_1$ *do* $\mathcal{B}_2$*. Załóżmy, że* $(S_k)_{k\geqslant 1}$ *spełnia następującą własność*: *dla wszystkich rosnących ciągów* $(b_k) \subset \mathbb{N}$*, dla których* $b_{k+1} - b_k \to \infty$*, oraz* $f \in \mathcal{B}_1$ *zachodzi*

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{\log b_{K+1}} \sum_{k\leqslant K} \Big\| \sum_{b_k\leqslant n<b_{k+1}} \tfrac{1}{n} S_n f \Big\|_2 = 0.$$

Wówczas istnieje taki podzbiór $A \subset \mathbb{N}$ *o pełnej gęstości logarytmicznej, że dla dowolnego* $f \in \mathcal{B}_1$

$$\lim_{A\ni N\to\infty} \Big\| \tfrac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} S_n f \Big\|_2 = 0.$$

7. Gęstościowa hipoteza Sarnaka

Nasze dotychczasowe rozważania dotyczyły w dużej mierze prawdziwości logicznej pewnych implikacji. Co jednak zrobić, gdy mamy na przykład udowodnioną logarytmiczną hipotezę Sarnaka dla *pewnego* układu dynamicznego, a chcielibyśmy mieć prawdziwość oryginalnej hipotezy Sarnaka dla tego układu (na przykład wzdłuż podciągu)? Kłopotem jest to, że nie widać, jak w tej sytuacji zastosować twierdzenie Milmana. Dodatkową motywacją dla tego kierunku badań jest to, że w odróżnieniu od samej hipotezy Sarnaka, dla której mamy niewiele ogólnych rezultatów, w pracy [16] logarytmiczna hipoteza Sarnaka została udowodniona dla szerokiej klasy topologicznych układów dynamicznych. A mianowicie, Frantzikinakis i Host udowodnili w pracy [16] następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.1. *Logarytmiczna hipoteza Sarnaka zachodzi dla* wszystkich *układów topologicznych* (X, T) *o zerowej entropii, dla których zbiór* $M^e(X, T)$ *jest przeliczalny.*

Praca Frantzikinakisa i Hosta jest wielkim sukcesem teorii ergodycznej. Autorzy najpierw wykazali, przy wykorzystaniu pewnej tożsamości[21] używającej średnich logarytmicznych ciągów liczbowych udowodnionej wcześniej przez Tao, że układy Furstenberga arytmetycznych funkcji multiplikatywnych „bliskich" funkcji Liouville'a są faktorami układów dynamicznych wyznaczonych

[21] W jednym z wykładów prezentujących dowód twierdzenia 7.1, B. Host nazwał tożsamość Tao „kosmiczną". Patrz również strategia opisana w paragrafie 4.

przez pewne procesy *silnie stacjonarne*[22]. Teoria ergodyczna takich procesów jest w miarę znana – rozkłady na składowe ergodyczne odpowiadającego układu dynamicznego są „mieszanką" układów Bernoulliego i nilautomorfizmów [15]. Po udowodnieniu nowych twierdzeń o rozłączności w teorii ergodycznej i zastosowaniu ogólnej strategii używania teorii ergodycznej w problemie ortogonalności ciągłych obserwowalnych, Frantzikinakis i Host byli w stanie udowodnić twierdzenie 7.1.

Okazuje się, że metoda zaprezentowana przez Tao dla dowodu gęstościowej hipotezy Chowli w przypadku funkcji Liouville'a może być zaadaptowana do znacznie szerszej sytuacji, jeśli tylko „wzmocnimy" samą hipotezę Sarnaka. Powiemy, że układ dynamiczny (X, T) spełnia własność silnego LOMO[23], gdy

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{b_K} \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \left\| \sum_{b_k\leqslant n<b_{k+1}} \boldsymbol{\lambda}(n) f\circ T^n \right\|_{C(X)} = 0$$

dla dowolnej funkcji $f \in C(X)$ i dowolnego rosnącego ciągu (b_k), dla którego $b_{k+1} - b_k \to \infty$, gdy $k \to \infty$ (zob. [2,18]). Nietrudno spostrzec, że własność silnego LOMO implikuje zwykłą hipotezę Sarnaka (nawet w jej wersji jednostajnej względem $x \in X$). Co może dziwić na pierwszy rzut oka, w pracy [2] udowodniono, że hipoteza Sarnaka jest równoważna spełnianiu własności silnego LOMO dla dowolnego układu z zerową entropią. Podobnie możemy wprowadzić własność logarytmicznego silnego LOMO (por. z założeniami twierdzenia 6.3). Stosując dodatkowo pewne idee z pracy [2] i korzystając z twierdzenia 6.3, w artykule [18] udowodniono następującą (lokalną!) gęstościową hipotezę Sarnaka[24].

Twierdzenie 7.2 [18]**.** *Jeśli układ topologiczny* (X, T) *spełnia własność* logarytmicznego *silnego LOMO, to spełnia on gęstościową hipotezę Sarnaka, tzn. istnieje taki* $A = A(X, T) \subset \mathbb{N}$ *o pełnej gęstości logarytmicznej, że*

$$\lim_{A\ni N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \boldsymbol{\lambda}(n) f\circ T^n \right\|_{C(X)} = 0.$$

W szczególności, dla (X, T) *zachodzi hipoteza Sarnaka wzdłuż podciągu* A.

---

[22] Proces stacjonarny $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nazywa się *silnie stacjonarnym*, gdy rozkłady wektorów losowych $(Y_{n_1}, \dots, Y_{n_k})$ i $(Y_{rn_1}, \dots, Y_{rn_k})$ dla dowolnego $r \geqslant 1$ oraz dowolnych $n_1 < \cdots < n_k$ są takie same. Jeśli $\kappa \in V(\boldsymbol{\lambda})$, to κ wyznacza proces stacjonarny $(\pi_0 \circ S^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Używając języka probabilistycznego, Frantzikinakis i Host wykazali, że $(\pi_0 \circ S^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ jest funkcją pewnego procesu silnie stacjonarnego.

[23] Akronim powstał z „Liouville orthogonality of moving orbits".

[24] Zwróćmy uwagę, że autorzy pracy [18] nie byli w stanie udowodnić „naturalnej" implikacji (log S) ⇒ (S) gęstościowy.

W pracy [18] wykazano również, że wszystkie układy o zerowej entropii i przeliczalnym zbiorze ergodycznych miar niezmienniczych spełniają własność silnego LOMO. Jak się wydaje, klasa układów dynamicznych w poniższym wniosku jest obecnie najszerszą klasą układów, dla których jesteśmy w stanie udowodnić gęstościową hipotezę Sarnaka.

Wniosek 7.3. *Jeśli* (X, T) *ma zerową entropię oraz zbiór* $M^e(X, T)$ *jest przeliczalny, to* (X, T) *spełnia gęstościową hipotezę Sarnaka.*

Podziękowania. Chciałbym podziękować Joannie Kuładze-Przymus, Krzysztofowi Frączkowi, Adamowi Kanigowskiemu i Dominikowi Kwietniakowi za uwagi dotyczące pierwszej wersji tego artykułu. Specjalne podziękowania dla Jerzego Kaczorowskiego za zaproszenie do wygłoszenia referatu o logarytmicznych wersjach hipotez Sarnaka i Chowli na seminarium z teorii liczb WMiI UAM – przygotowane materiały zostały wykorzystane w części tego artykułu.

Bibliografia

[1] E. H. El Abdalaoui, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *The Chowla and the Sarnak conjectures from ergodic theory point of view*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 37 (2017), 2899–2944.

[2] E. H. El Abdalaoui, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *Möbius disjointness for models of an ergodic system and beyond*, Israel J. Math. 228 (2018), 707–751.

[3] A. S. Besicovitch, *On the density of certain sequences of integers*, Math. Ann. 110 (1935), 336–341.

[4] E. Bessel-Hagen, *Zahlentheorie*, Teubner, Leipzig 1929.

[5] J. Bourgain, P. Sarnak, T. Ziegler, *Disjointness of Möbius from horocycle flows*, t. 28, Springer, New York 2013.

[6] S. Chowla, *On abundant numbers*, J. Indian Math. Soc., New Ser. 1 (1934), 41–44.

[7] S. Chowla, *The Riemann hypothesis and Hilbert's tenth problem*, Mathematics and Its Applications, t. 4, Gordon and Breach Science Publishers, New York 1965.

[8] A. Cobham, *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory 6 (1972), 164–192.

[9] H. Davenport, *Über numeri abundantes*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1933), 830–837.

[10] H. Davenport, P. Erdős, *On sequences of positive integers*, Acta Arith. 2 (1936), 147–151.

[11] M. Denker, C. Grillenberger, K. Sigmund, *Ergodic Theory on Compact Spaces*, Lecture Notes in Math., t. 527, Springer, New York 1976.

[12] T. Downarowicz, *Entropy in Dynamical Systems*, New Mathematical Monographs, t. 18, Cambridge University Press, Cambridge 2011.
[13] P. Erdős, *On the density of the abundant numbers*, J. London Math. Soc. 9 (1934), 278–282.
[14] S. Ferenczi, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, *Sarnak's conjecture, what's new*, [w:] *Ergodic theory and dynamical systems in their interactions with arithmetics and combinatorics* (S. Ferenczi, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, red.), Lecture Notes in Math., t. 2213, Springer, Cham, 163–235.
[15] N. Frantzikinakis, *The structure of strongly stationary systems*, J. Anal. Math. 93 (2004), 359–388.
[16] N. Frantzikinakis, B. Host, *The logarithmic Sarnak conjecture for ergodic weights*, Ann. of Math. 187 (2018), 869–931.
[17] A. Gomilko, D. Kwietniak, M. Lemańczyk, *Sarnak's conjecture implies the Chowla conjecture along a subsequence*, [w:] *Ergodic theory and dynamical systems in their interactions with arithmetics and combinatorics* (S. Ferenczi, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, red.), Lecture Notes in Math., t. 2213, Springer, Cham, 237–247.
[18] A. Gomilko, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *Möbius orthogonality in density for zero entropy dynamical systems*, Pure and Applied Functional Analysis 5 (2020), 1357–1376.
[19] B. Green, T. Tao, *The Möbius function is strongly orthogonal to nilsequences*, Ann. of Math. 175 (2012), nr 2, 541–566.
[20] R. R. Hall, *Sets of multiples*, Cambridge Tracts in Math., t. 118, Cambridge University Press, Cambridge 1996.
[21] W. Huang, Z. Wang, X. Ye, *Measure complexity and Möbius disjointness*, Adv. Math. 347 (2019), 827–858.
[22] W. Huang, Z. Wang, G. Zhang, *Möbius disjointness for topological models of ergodic systems with discrete spectrum*, J. Modern Dynamics 14 (2019), 277–290.
[23] A. Kanigowski, M. Lemańczyk, M. Radziwiłł, *Rigidity in dynamics and Möbius disjointness*, ukaże się w Fundamenta Mathematicae.
[24] K. Matomäki, M. Radziwiłł, *Multiplicative functions in short intervals*, Ann. of Math. 183 (2016), nr 2, 1015–1056.
[25] K. Matomäki, M. Radziwiłł, T. Tao, *An averaged form of Chowla's conjecture*, Algebra Number Theory 9 (2015), 2167–2196.
[26] K. Matomäki, M. Radziwiłł, T. Tao, J. Teräväinen, T. Ziegler, *Higher uniformity of bounded multiplicative functions in short intervals on average*, preprint.
[27] C. Müllner, *Automatic sequences fulfill the Sarnak conjecture*, Duke Math. J. 166 (2017), 3219–3290.
[28] M. Queffélec, *Substitution dynamical systems. Spectral analysis*, wyd. 2, Lecture Notes in Math., t. 1294, Springer, Dordrecht 2010.
[29] O. Ramaré, *Chowla's conjecture: from the Liouville function to the Möbius function*, [w:] *Ergodic theory and dynamical systems in their interactions with arithmetics and combinatorics* (S. Ferenczi, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, red.), Lecture Notes in Math., t. 2213, Springer, Cham, 317–323.

[30] W. Rudin, *Functional analysis*, wyd. 2, McGraw-Hill Inc., New York 1991.
[31] P. Sarnak, *Three lectures on the Möbius function, randomness and dynamics*, dostępne pod adresem http://publications.ias.edu/sarnak/paper/512 (dostęp: 2020-10-22).
[32] T. Tao, *The Chowla conjecture and the Sarnak conjecture*, dostępne pod adresem https://terrytao.wordpress.com/2012/10/14/the-chowla-conjecture-and-the-sarnak-conjecture (dostęp: 2020-10-22).
[33] T. Tao, *The logarithmically averaged Chowla and Elliot conjectures for two-point correlations*, Forum Math. Pi 4 E8 (2016).
[34] T. Tao, *Equivalence of the logarithmically averaged Chowla and Sarnak conjectures*, [w:] *Number theory – diophantine problems, uniform distribution and applications* (C. Elsholtz, P. Grabner, red.), Springer, Cham 2017, 391–421.
[35] T. Tao, *The logarithmically averaged and non-logarithmically averaged Chowla conjectures*, dostępne pod adresem https://terrytao.wordpress.com/2017/10/20/the-logarithmically-averaged-and-non-logarithmically-averaged-chowla-conjectures/ (dostęp: 2020-10-22).
[36] T. Tao, J. Teräväinen, *Odd order cases of the logarithmically averaged Chowla conjecture*, J. Théor. Nombres Bordeaux 30 (2018), 997–1015.
[37] T. Tao, J. Teräväinen, *The structure of logarithmically averaged correlations of multiplicative functions, with applications to the Chowla and Elliot conjectures*, Duke Math. J. 168 (2019), 1977–2027.
[38] Z. Wang, *Möbius disjointness for analytic skew products*, Invent. Math. 209, 175–196.

Mariusz Lemańczyk
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
mlem@mat.umk.pl

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 197–213
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Wojciech Słomczyński, Anna Szymusiak (Kraków)

Zespolone proste równokątne i hipoteza Zaunera

Prosta zespolona w d-wymiarowej przestrzeni zespolonej to jednowymiarowa afiniczna podprzestrzeń zespolona. W szczególności dla dwóch takich prostych $[w]$ oraz $[z]$ przechodzących przez 0 (tylko takie będziemy dalej rozważać) generowanych odpowiednio przez $w, z \in \mathbb{C}^d$, przy czym $\|w\| = \|z\| = 1$, *kąt* (hermitowski, zob. [33]) między nimi definiujemy jako $\arccos|(w, z)|$. Powstaje więc pytanie: *jak wiele można umieścić w $\mathbb{C}^d$ prostych zespolonych tak, aby każde dwie z nich przecinały się pod tym samym kątem?* Jest to naturalne uogólnienie problemu istnienia rzeczywistych prostych równokątnych, o którym pisał niedawno na tych łamach Andrzej Grzesik (zob. [20]). Mimo pozornego podobieństwa, przejście do świata zespolonego sprawia jednak, że zagadnienia te różnią się w sposób jakościowy, a przypadek rzeczywisty jest pod pewnymi względami łatwiejszy, pod innymi zaś trudniejszy od zespolonego. Wynika to z samej definicji kąta (lub prostej), który w pierwszym przypadku dany jest z dokładnością do mnożenia wektorów przez ± 1, w drugim zaś przez liczbę zespoloną o module 1, czyli – używając terminologii fizycznej – przez fazę. Dlatego też przypadek rzeczywisty można w znacznej mierze badać metodami matematyki dyskretnej, co nie wydaje się możliwe w przypadku zespolonym, gdzie metody algebraiczne i geometryczne zdają się odgrywać większą rolę. Niewątpliwie problem znalezienia maksymalnej liczebności zbioru zespolonych prostych równokątnych stanowi jedno z ważniejszych i bardziej fascynujących zagadnień zarówno geometrii przestrzeni zespolonych, jak i teorii informacji kwantowej, od kilkunastu lat zajmując poczesne miejsce na listach słynnych problemów otwartych w tych dziedzinach (zob. [24, 40]).

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Rozpatrywane zagadnienie ma też dwie elementarne interpretacje geometryczne. Zauważmy, że zbiór prostych zespolonych w $\mathbb{C}^d$ można utożsamić z elementami *zespolonej przestrzeni rzutowej* $\mathbb{CP}^{d-1}$, której wymiar rzeczywisty wynosi $2d-2$. Jeżeli w tej przestrzeni rozważymy jedyną (z dokładnością do stałej) unitarnie niezmienniczą *metrykę Fubiniego–Study'ego* d_{FS} zadaną przez kąt, czyli wzorem $d_{FS}([w],[z]) := \arccos|(w,z)|$ dla $w,z \in S(\mathbb{C}^d)$, przy czym $S(\mathbb{C}^d)$ oznacza tu jednostkową sferę zespoloną w $\mathbb{C}^d$, to zbiorowi prostych równokątnych będzie odpowiadał zbiór równoodległych od siebie punktów w $(\mathbb{CP}^{d-1}, d_{FS})$. Dla dowolnej przestrzeni metrycznej maksymalną liczbę takich punktów nazywa się czasem *wymiarem równobocznym* (*equilateral dimension*) – pytanie o maksymalną liczbę prostych równokątnych jest więc zarazem pytaniem o wymiar równoboczny zespolonych przestrzeni rzutowych. Takie sformułowanie sugeruje od razu, że problem może być trudny, gdyż dla niewielu rozmaitości wymiary równoboczne udało się dotychczas znaleźć (zob. [28])[1].

Po utożsamieniu prostej zespolonej $[z] \in \mathbb{CP}^{d-1}$, przy czym $z \in S(\mathbb{C}^d)$, z rzutem ortogonalnym P_z na tę prostą, otrzymujemy z kolei naturalne zanurzenie zespolonej przestrzeni rzutowej w przestrzeń $\mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d)$ odwzorowań hermitowskich (samosprzężonych) w $\mathbb{C}^d$. Po złożeniu go z przesunięciem $\mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d) \ni P \mapsto P - I/d \in \mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d)$, przy czym I oznacza odwzorowanie identycznościowe na $\mathbb{C}^d$, uzyskujemy zanurzenie $\mathbb{CP}^{d-1}$ w przestrzeń $\mathcal{L}_s^0(\mathbb{C}^d)$ hermitowskich odwzorowań o śladzie 0 (gdyż $\operatorname{tr}(P_z - I/d) = 1 - d/d = 0$). Zauważmy tu dwa proste fakty. Po pierwsze, $\mathcal{L}_s^0(\mathbb{C}^d)$ jest *rzeczywistą* przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym (*Hilberta–Schmidta*) danym wzorem $(P,Q)_{HS} := \operatorname{tr}(PQ)$ dla $P,Q \in \mathcal{L}_s^0(\mathbb{C}^d)$, a jej wymiar rzeczywisty, co łatwo sprawdzić, wynosi d^2-1. Po drugie zaś, nasze zanurzenie odwzorowuje izometrycznie przestrzeń rzutową $(\mathbb{CP}^{d-1}, d_{FS})$ w sferę w $\mathcal{L}_s^0(\mathbb{C}^d)$ o promieniu $\sqrt{1-1/d}$ (gdyż $\operatorname{tr}(P_wP_z) = |(w,z)|^2$, a więc $\operatorname{tr}(P_w - I/d)(P_z - I/d) = |(w,z)|^2 - 1/d$ dla $w,z \in S(\mathbb{C}^d)$), a szukany zbiór punktów równoodległych przekształca w sympleks foremny wpisany w tę sferę.

Wynikają stąd dwie podstawowe własności zbiorów prostych równokątnych. Po pierwsze, ich maksymalna liczba wynosi d^2, bo nie jest możliwe wpisanie sympleksu o większej liczbie wierzchołków w sferę w przestrzeni (d^2-1)-wymiarowej. Po drugie, co wynika wprost z geometrii sfery rzeczywistej, jeżeli uda się skonstruować d^2 prostych równokątnych w $\mathbb{C}^d$, to cosinus kąta między dowolnymi dwiema takimi prostymi wyniesie $1/\sqrt{d+1}$. Jeszcze inaczej argumentując, można wykazać, że rzutowania na proste równokątne

[1] Na przykład nie tak łatwo znaleźć maksymalny pięcioelementowy zbiór równoodległych punktów na „płaskim" dwuwymiarowym torusie $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

muszą tworzyć zbiór wektorów niezależnych w $\mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d)$, a więc ich liczba nie może przekraczać $\dim \mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d) = d^2$. Warto zauważyć, że podobne rozumowanie w przypadku rzeczywistym pozwala oszacować od góry liczbę rzeczywistych prostych równokątnych przez $d(d+1)/2$, czyli przez wymiar przestrzeni rzeczywistych macierzy symetrycznych. Jest to tzw. *ograniczenie Gerzona*, o którym pisze Grzesik we wspomnianym wyżej artykule [20]. Ale na tym właściwie podobieństwo obu przypadków się kończy.

Obraz przestrzeni rzutowej w $\mathcal{L}_s^0(\mathbb{C}^d)$ przez omówione wyżej zanurzenie nazywa się czasem *zbiorem Blocha* od nazwiska Feliksa Blocha, laureata Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki z 1952 roku, który jako pierwszy z fizyków rozważał taką reprezentację zespolonej przestrzeni rzutowej. Zbiór Blocha stanowi więc $(2d-2)$-wymiarową podrozmaitość sfery (d^2-2)-wymiarowej. Dla $d = 2$ zbiór Blocha wypełnia całą sferę, ale dla $d > 2$ stanowi jej podzbiór miary zero. Przykładowo dla $d = 3$ otrzymujemy 4-wymiarową podrozmaitość 7-wymiarowej sfery w $\mathbb{R}^8$. Łatwo jest w sferę (d^2-2)-wymiarową wpisać sympleks foremny o d^2 wierzchołkach, ale powstaje pytanie, czy da się to zrobić tak, aby wszystkie te wierzchołki trafiły do zbioru Blocha. Tylko wtedy bowiem uda się skonstruować d^2 prostych równokątnych i ograniczenie górne na ich liczbę zostanie osiągnięte. Na pierwszy rzut oka takie wpisanie sympleksu w sferę zdaje się być dla $d > 2$ wysoce nieprawdopodobne. Mogłoby się więc wydawać, że – podobnie jak to jest dla ograniczenia Gerzona w przypadku rzeczywistym, gdzie być może jest ono osiągane jedynie dla wymiarów $d = 2, 3, 7$ i 23 – także maksymalne ograniczenie w przypadku zespolonym rzadko będzie wysycone. Nieoczekiwanie, jak się przekonamy, sytuacja jest w tym przypadku całkiem inna.

W porównaniu z problemem rzeczywistym, analizowanym już od lat czterdziestych XX wieku, jego zespolony odpowiednik ma o wiele krótszą historię. W sposób systematyczny zespolone proste równokątne badali bowiem po raz pierwszy w 1975 roku w pracy [11] Philippe Delsarte, Jean-Marie Goethals i Johan Seidel. Wykazali oni ich podstawową własność, której dowód zarysowaliśmy powyżej.

Twierdzenie 1. *Dowolny zbiór zespolonych prostych równokątnych w przestrzeni $\mathbb{C}^d$ ma moc nie większą niż d^2. Ponadto, jeżeli ich liczba wynosi dokładnie d^2, to cosinus kąta między dowolnymi dwiema takimi prostymi równa się $1/\sqrt{d+1}$.*

Przykłady, zresztą w zasadzie już znane od dawna, w których to oszacowanie jest osiągane, autorzy pracy podali jednak jedynie dla dwóch najmniejszych wymiarów: $d = 2$ oraz $d = 3$. Żeby bliżej się przyjrzeć tym konstrukcjom, podkreślmy raz jeszcze, że problem istnienia d^2 prostych równokątnych w $\mathbb{C}^d$ można równoważnie sformułować jako zagadnienie istnienia takich d^2

wektorów jednostkowych $f_1, f_2, \ldots, f_{d^2}$ w $\mathbb{C}^d$, że $|(f_j, f_k)|^2 = \frac{1}{d+1}$ dla wszystkich $j \neq k$. Znalezienie tych wektorów można zatem sprowadzić do rozwiązania (w liczbach rzeczywistych) układu $\binom{d^2+1}{2}$ równań algebraicznych (d^2 kwadratowych i $\binom{d^2}{2}$ czwartego stopnia) dla $2d^3$ zmiennych.

W wymiarze $d = 2$ poprawność rozwiązania

$$(1,0), \quad \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\sqrt{2}), \quad \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\sqrt{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}), \quad \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\sqrt{2}e^{-\frac{2\pi i}{3}})$$

można sprawdzić w pamięci. Nietrudno też zauważyć, że w reprezentacji Blocha wektorom tym odpowiadać będą wierzchołki *czworościanu foremnego* wpisanego w sferę w przestrzeni trójwymiarowej o promieniu $1/\sqrt{2}$. Pierwsza znana konstrukcja dla wymiaru $d = 3$ wydaje się być znacznie ciekawsza i pochodzi z pracy [10] matematyka kanadyjskiego Harolda S. M. Coxetera. Jest to dziewięć *przekątnych wielościanu Hessego*, regularnego wielościanu zespolonego o 27 wierzchołkach w $\mathbb{C}^3$. Zauważmy, że w przypadku wypukłych wielościanów rzeczywistych dokładnie dwa wierzchołki leżą na przekątnej, ale w przypadku zespolonym przekątne są prostymi zespolonymi i mogą zawierać więcej wierzchołków; w przypadku wielościanu Hessego zawierają 3, stąd otrzymujemy 9 przekątnych. W zapisie wektorowym opisane są one przez wszystkie cykliczne permutacje współrzędnych wektorów postaci $(0, 1, -\omega^j)$, przy czym $j \in \{0, 1, 2\}$ oraz $\omega := \exp \frac{2\pi i}{3}$. Warto w tym miejscu wspomnieć, że nazwiskiem Ludwiga Hessego ochrzcił ten wielościan właśnie Coxeter, zauważając, że jego przekątne, rozważane jako elementy zespolonej płaszczyzny rzutowej $\mathbb{CP}^2$ stanowią realizację *konfiguracji Hessego* znanej z teorii krzywych eliptycznych. Innymi słowy, jest to dziewięć punktów w $\mathbb{CP}^2$ położonych na dwunastu zespolonych prostych rzutowych w taki sposób, że na każdej z tych prostych znajdują się trzy punkty oraz przez każdy punkt przechodzą cztery proste.

Na znalezienie kolejnego przykładu maksymalnego zbioru zespolonych prostych równokątnych trzeba było czekać aż sześć lat. Podał go Stuart G. Hoggar w 1981 roku w pracy [21]. Są to tzw. *proste Hoggara* w wymiarze $d = 8$. Ponownie mamy do czynienia z przekątnymi wielościanu, tym razem jednak jest to wielościan kwaternionowy w $\mathbb{H}^4$ o 128 wierzchołkach, a proste Hoggara są kompleksyfikacją jego 64 przekątnych. Ciekawostkę stanowi fakt, że Hoggar sprawdził swój wynik jedynie na komputerze, a formalny dowód opublikował w artykule [23] dopiero siedemnaście lat później. Dziś znamy zresztą wiele równoważnych konstrukcji prostych Hoggara (zob. [26, 38]). Niemal do końca XX wieku te rozwiązania dla wymiarów $d = 2$, 3 i 8 były jedynymi przykładami maksymalnych zbiorów zespolonych prostych równokątnych. Co ciekawsze, jak się później okazało, były to w gruncie rzeczy przykłady wyjątkowe, charaktery-

zujące się wysoką symetrią, a sam przykład podany przez Hoggara jest w ogóle jedyny w swoim rodzaju. Wrócimy jeszcze do tej kwestii pod koniec artykułu.

Zainteresowania Hoggara nie były jednak ściśle związane z prostymi równokątnymi. Badał je niejako przy okazji, w szerszym kontekście opisanym dokładnie w pracy [22] poświęconej *rzutowym t-wzorcom* (*projective t-designs*), czyli odpowiednikom t-wzorców sferycznych w $\mathbb{C}^d$ w przestrzeniach rzutowych – nie tylko rzeczywistych, ale również zespolonych, kwaternionowych, a nawet oktonionowych. Takie przestrzenie spełniają aksjomatykę *przestrzeni Delsarte'a* wprowadzonych przez wiedeńskiego matematyka Arnolda Neumaiera w nieopublikowanych wykładach [29] z 1981 roku, a zatem można do nich zastosować jego abstrakcyjną teorię t-wzorców.

Czym są zespolone rzutowe t-wzorce? Można w ich definicji wyjść zarówno od pojęcia przestrzeni rzutowej $\mathcal{P}(\mathbb{C}^d)$, rozumianej jako przestrzeń jednowymiarowych projekcji ortogonalnych, jak i bezpośrednio od jednostkowej sfery zespolonej $S(\mathbb{C}^d)$. W tym drugim przypadku mówimy zwykle o (zespolonych) sferycznych (t,t)-wzorcach lub zespolonych t-wzorcach. To podejście może być bardziej intuicyjne, jeżeli powiemy, że interesuje nas tu dyskretna i regularna aproksymacja sfery zespolonej. Na czym taka aproksymacja miałaby polegać? Analogicznie jak w przypadku (rzeczywistych) t-wzorców, chcemy, żeby średnia arytmetyczna wartości pewnych wielomianów w punktach wzorca była równa całce takiego wielomianu po sferze $S(\mathbb{C}^d)$ względem unormowanej miary Haara (unitarnie niezmienniczej). O ile w przypadku rzeczywistym rozważamy po prostu wielomiany (jednorodne) stopnia t, to w przypadku zespolonym bierzemy wielomiany jednorodne stopnia t zarówno względem z, jak i $\bar{z}$:

$$\operatorname{Hom}(t,t;d) := \operatorname{span}\left\{ z \mapsto z^\alpha \bar{z}^\beta : \ z \in \mathbb{C}^d,\ \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| = |\beta| = t \right\},$$

co prowadzi do następującej definicji.

Definicja 1. Zbiór $\{f_j\}_{j=1}^n \subset S(\mathbb{C}^d)$ nazywamy *sferycznym* (t,t)*-wzorcem*, jeżeli dla każdego $p \in \operatorname{Hom}(t,t;d)$,

$$\int\limits_{S(\mathbb{C}^d)} p \,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} p(f_j)$$

przy czym σ jest unormowaną miarą Haara na sferze $S(\mathbb{C}^d)$.

Gdy $s = 1, \ldots, t-1$ i $q \in \operatorname{Hom}(s,s;d)$, mamy $\|\cdot\|^{2(t-s)} q \in \operatorname{Hom}(t,t;d)$, a zatem każdy sferyczny (t,t)-wzorzec jest również sferycznym (s,s)-wzorcem, jeżeli $1 \leqslant s < t$. Można też podać definicję równoważną, trudniejszą do interpretacji, ale za to łatwiejszą do sprawdzenia, opierającą się na *tożsamości Welcha*,

która charakteryzuje (t,t)-wzorce:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n}|(f_j,f_k)|^{2t}=\binom{d+t-1}{t}^{-1}.$$

Warto zauważyć, że dla dowolnego układu wektorów jednostkowych w $\mathbb{C}^d$ lewa strona powyższej równości, która może być interpretowana jako pewna miara jednostajnego rozłożenia kierunków na sferze, nie może być mniejsza od prawej, co wykazał Lloyd R. Welch w 1974 roku w artykule [39]. Sferyczne (t,t)-wzorce są zatem układami punktów minimalizującymi tę miarę. Ponieważ widać, że definicja ta nie zależy od fazy, przechodząc do przestrzeni $\mathcal{P}(\mathbb{C}^d)$ możemy podobnie zdefiniować *zespolony rzutowy t-wzorzec* jako zbiór $\{P_j\}_{j=1}^n$ jednowymiarowych projekcji ortogonalnych spełniających równość:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n}(P_j,P_k)_{HS}^{t}=\binom{d+t-1}{t}^{-1}.$$

W szczególności sferyczne $(1,1)$-wzorce są ściśle związane z *ramkami ciasnymi* (*tight frames*), czyli układami wektorów w $\mathbb{C}^d$ stanowiącymi w pewnym sensie naturalne uogólnienie baz ortonormalnych. W definicji ramki ciasnej wymagamy mianowicie, aby taki układ $\{f_j\}_{j=1}^n\subset\mathbb{C}^d$ umożliwiał rozpisanie dowolnego wektora $f\in\mathbb{C}^d$ w postaci przypominającej szereg Fouriera, to znaczy

$$f=A\sum_{j=1}^{n}(f,f_j)f_j$$

dla pewnego $A>0$. Jeśli założymy dodatkowo, że wektory $\{f_j\}_{j=1}^n$ leżą na sferze jednostkowej (wtedy $A=d/n$), to łatwo udowodnić, że otrzymamy równoważną definicję zespolonego sferycznego $(1,1)$-wzorca. Elementarne obliczenia natomiast dowodzą, że dla $n=d^2$ pojęcia zespolonego sferycznego $(2,2)$-wzorca i układu wektorów równokątnych na sferze zespolonej pokrywają się.

Te związki prostych równokątnych z ramkami i wzorcami można więc podsumować za pomocą poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Niech $f_1,\dots,f_{d^2}\in S(\mathbb{C}^d)$ oraz niech $P_1,\dots,P_{d^2}$ będą odpowiadającymi im projekcjami ortogonalnymi. Następujące warunki są równoważne*:

(a) *Proste generowane przez f_j $(j=1,\dots,d^2)$ są równokątne*,
(b) $|(f_j,f_k)|^2=\frac{1}{d+1}$ *dla dowolnych $j\neq k$*,
(c) $(P_j,P_k)_{HS}=\frac{1}{d+1}$ *dla dowolnych $j\neq k$*,
(d) $\{f_j\}_{j=1}^{d^2}$ *jest równokątną ramką ciasną*,

(e) $\sum_{j,k=1}^{d^2} |(f_j, f_k)|^4 = \frac{2d^3}{d+1}$ (*czyli* $\{f_j\}_{j=1}^{d^2}$ *jest zespolonym sferycznym* $(2,2)$*-wzorcem*),
(f) $\sum_{j,k=1}^{d^2} (P_j, P_k)_{HS}^2 = \frac{2d^3}{d+1}$ (*czyli* $\{P_j\}_{j=1}^{d^2}$ *jest zespolonym rzutowym* 2*-wzorcem*).

Co ciekawe, w przeciwieństwie do przypadku rzeczywistego, problem istnienia maksymalnych zbiorów zespolonych prostych równokątnych nie był w ogóle rozważany przez blisko dwadzieścia lat. Prawdziwy przełom nastąpił dopiero w momencie, gdy zagadnieniem zainteresowali się, z powodów, o których jeszcze opowiemy, fizycy zajmujący się teorią informacji kwantowej. I tak w 2003 roku Joseph M. Renes, Robin Blume-Kohout, Andrew J. Scott i Carlton M. Caves opublikowali pracę [32], w której skonstruowali nieskończoną jednoparametrową rodzinę unitarnie nierównoważnych układów dziewięciu prostych równokątnych w wymiarze 3 oraz przykład szesnastu prostych równokątnych w wymiarze 4. Co więcej, znaleźli numerycznie takie przybliżone konstrukcje we wszystkich wymiarach $d \leqslant 45$, co pozwalało postawić hipotezę, że w dowolnym wymiarze d istnieje d^2 zespolonych prostych równokątnych. Ogólny dowód istnienia maksymalnego zbioru prostych równokątnych we wszystkich skończonych wymiarach określili jako „zwodniczo (*tantalizingly*) bliski, ale jednocześnie w jakiś sposób odległy". Dziś można by śmiało to stwierdzenie powtórzyć. Hipoteza, którą postawili w pracy, szła zresztą nawet o krok dalej, postulując nie tylko istnienie, ale także określoną symetrię takich rozwiązań. Wkrótce jednak okazało się, że w swoich przypuszczeniach wcale nie byli pierwsi.

Cztery lata wcześniej Gerhard Zauner, doktorant na Uniwersytecie Wiedeńskim, obronił pod kierunkiem Neumaiera rozprawę doktorską [41] o *wzorcach kwantowych*, pewnym uogólnieniu wzorców rzutowych, a jednocześnie odpowiedniku wzorców (*designs*) znanych z kombinatoryki, gdzie rolę mocy zbiorów pełniły ślady operatorów. Wśród rozmaitych wyników znalazło się tam też kilka dotyczących d^2 zespolonych prostych równokątnych w $\mathbb{C}^d$, które Zauner nazywał *Maximale Quantendesigns*: analityczne przykłady w wymiarach 3, 4 (równoważne tym podanym w pracy [32]) i 5, jak również numeryczne przybliżone rozwiązania w wymiarach 6 i 7, a także śmiała hipoteza dotycząca postaci rozwiązań w dowolnym wymiarze. Rozprawa, napisana w języku niemieckim, została udostępniona na stronie promotora, jednak sam autor po uzyskaniu doktoratu nie wybrał zawodowej kariery naukowej, lecz pracę w sektorze IT i zapewne dlatego jego wyniki nie zostały początkowo zauważone. I na tym historia Zaunera i jego doktoratu mogłaby się zakończyć, gdyby kilka lat później Andreas Klappenecker i Martin Roetteler, zajmujący się podobną tematyką, nie „odkryli" jego rozprawy, a w niej hipotezy dużo mocniejszej niż ta

z pracy [32]. Wkrótce rozprawa [41] miała już dziesiątki cytowań, ze względu na nieustające zainteresowanie została przetłumaczona na język angielski, a w 2011 roku przekład doktoratu [42] został opublikowany w *International Journal of Quantum Information*. Wspomnianą hipotezę nazywa się dziś powszechnie *hipotezą Zaunera*, a cytowania pracy [41] można obecnie liczyć już w setkach.

Zanim przejdziemy do omówienia hipotezy Zaunera, zobaczmy, dlaczego problem zespolonych prostych równokątnych do tego stopnia zafascynował środowisko fizyków kwantowych, że dzisiaj – jeżeli ktoś jest zainteresowany tym tematem – to w wyszukiwarce nie powinien wpisywać frazy „complex equiangular lines", lecz raczej „*SIC-POVM*", które to hasło jest akronimem wyrażenia *symmetric informationally complete positive operator-valued measure*. Nazwa ta, wprowadzona w pracy [32], bardzo szybko przyjęła się w środowisku fizyków. W użyciu jest też skrócona forma *SIC* – zwykle w odniesieniu do elementów sfery $S(\mathbb{C}^d)$ lub przestrzeni rzutowej $\mathbb{CP}^{d-1}$ – będziemy też stosowali ją dalej w tym artykule[2]. Skrót *POVM* nie oznacza nic innego, jak tylko miarę półspektralną, będącą w fizyce kwantowej matematyczną reprezentacją pomiaru kwantowego (czy też, mówiąc bardziej precyzyjnie, obserwabli, czyli obserwowanej wielkości fizycznej). W przypadku skończonym pojęcie to można zredukować do zbioru $\{\Pi_j\}_{j=1}^n$ operatorów nieujemnie określonych na $\mathbb{C}^d$ sumujących się do identyczności: $\sum_{j=1}^n \Pi_j = I$. Informacyjna zupełność (*IC*) oznacza z kolei fizycznie możliwość odtworzenia stanu układu przed pomiarem na podstawie jego statystyk, matematycznie sprowadza się zaś ona do warunku $\operatorname{span}\{\Pi_j : j = 1, \ldots, n\} = \mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d)$. W definicji SIC-POVM zakładamy ponadto, że n jest minimalne, to znaczy równe d^2, wszystkie operatory Π_j są rzędu 1, natomiast symetryczność (*S*) związana jest z warunkiem $(\Pi_j, \Pi_k)_{HS} = \frac{1}{d^2(d+1)}$ dla $j \neq k$. Taka definicja, co łatwo widać, oznacza, że operatory Π_j są przeskalowanymi projekcjami ortogonalnymi na jednowymiarowe podprzestrzenie generowane przez układ d^2 zespolonych prostych równokątnych. Dzięki swoim własnościom SIC-POVM znajdują zastosowanie między innymi w problemach tomografii stanu kwantowego czy też kryptografii kwantowej. Wydaje się jednak, że symetryczność w ich nazwie jest związana z czymś głębszym niż tylko równością poszczególnych iloczynów skalarnych, bowiem kryje się za nią na ogół (a być może zawsze) prawdziwa matematyczna symetria tych zbiorów.

Aby się bliżej przyjrzeć tym symetriom zauważmy, że – jak stwierdza twierdzenie Wignera (zob. [13]) – grupę izometrii przestrzeni rzutowej $\mathbb{CP}^{d-1}$ z me-

[2] Temat jest na tyle gorący, że dyskutowano nawet, jak powinno się wymawiać „SIC". Obecnie obowiązujący konsensus opowiada się za wymową „seek" zamiast początkowo używanej „sick".

tryką Fubiniego–Study'ego można utożsamić z grupą $PUA(d) = UA(d)/U(1)$ złożoną z klas równoważności odwzorowań unitarnych i antyunitarnych przestrzeni $\mathbb{C}^d$ określonych z dokładnością do czynnika fazowego. Klasy równoważności izometrii unitarnych $PU(d)$ stanowią podgrupę normalną $PUA(d)$ o indeksie 2. W dalszym ciągu skupimy się głównie na nich.

Definicja 2. Rozważmy dowolną grupę G. Mówimy, że SIC $\{f_j\}_{j=1}^{d^2} \subset S(\mathbb{C}^d)$ jest (*rzutowo*) *G-kowariantny*, jeżeli istnieje taka projektywnie unitarna reprezentacja G (czyli homomorfizm G w podgrupę $PU(d)$) dana przez $G \ni g \mapsto [U_g] \in PU(d)$ oraz taka surjekcja $\sigma : G \to \{1, \ldots, d^2\}$, że $[U_g f_{\sigma(h)}] = [f_{\sigma(gh)}]$. Będziemy też w tej sytuacji mówić o kowariantności względem konkretnej reprezentacji.

Oczywiście $\{[U_g]\}_{g\in G}$ jest w tej sytuacji działającą tranzytywnie podgrupą grupy symetrii (izometrii własnych) $\{[f_j]\}_{j=1}^{d^2}$. Ogólnie, wektor $f \in S(\mathbb{C}^d)$, dla którego $\{U_g f\}_{g\in G}$ tworzy (z definicji G-kowariantny) SIC, nazywa się *wektorem generującym* (*fiducial vector*).

Widać teraz, że poszukiwanie kowariantnych względem danej reprezentacji SIC jest dużo łatwiejsze niż poszukiwanie SIC w ogóle, gdyż musimy znaleźć jedynie odpowiedni pojedynczy wektor, nie zaś układ d^2 wektorów. Kwestią otwartą jest odpowiedni dobór grupy. Zarówno w pracy [32], jak i w rozprawie [41] zauważono, analizując przykłady SIC w niskich wymiarach, że (*dyskretna*) *grupa Weyla–Heisenberga* H_d, której prezentacja wygląda następująco:

$$\langle x, y, z | x^d, y^d, z^d, zx = xz, zy = yz, x^r y^s = z^{rs} y^s x^r, z = xyx^{-1}y^{-1} \rangle$$

jest naturalnym kandydatem do roli grupy symetrii SIC. Projektywnie unitarną reprezentację H_d w $\mathbb{C}^d$ otrzymujemy w następujący sposób. Dla $(e_1, \ldots, e_d)$ – kanonicznej bazy ortonormalnej $\mathbb{C}^d$ – definiujemy operatory S (*przesunięcia*) oraz T (*fazy* lub *zegara*) wzorami $Se_r := e_{r\oplus 1 (\mathrm{mod}\, d)}$, $Te_r := \omega^r e_r$ dla $r = 1, \ldots, d$, przy czym $\omega := \exp(2\pi i/d)$ (konstrukcja ta pochodzi od Jamesa J. Sylvestera). Następnie definiujemy operatory $D_{\mathbf{p}}$ dla $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}_d^2$, nazywane *dyskretnymi operatorami Weyla* lub *uogólnionymi macierzami Pauliego*: $D_{\mathbf{p}} = D_{(p_1,p_2)} := \tau^{p_1 p_2} S^{p_1} T^{p_2}$, przy czym $\tau := -\exp(\pi i/d)$. Mamy wtedy $D_{\mathbf{p}}^* = D_{-\mathbf{p}}$ oraz $D_{\mathbf{p}} D_{\mathbf{q}} = \tau^{\langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle} D_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$ dla $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}_d^2$, przy czym $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle := p_2 q_1 - p_1 q_2$ jest formą symplektyczną. Operatory te mają ślad zero, są unitarne, ale hermitowskie jedynie dla $d = 2$. Ostatecznie otrzymujemy nieprzywiedlną unitarną reprezentację H_d:

$$h: H_d \to \{\omega^{p_3} S^{p_1} T^{p_2} | p \in \mathbb{Z}_d^3\}, \quad h(x) := S, \quad h(y) := T, \quad h(z) := \omega I,$$

reprezentację rzutową dostajemy zaś biorąc dla $p \in \mathbb{Z}_d^3$ klasy równoważności

$$[\omega^{p_3} S^{p_1} T^{p_2}] = [D_{(p_1,p_2)}].$$

Wówczas $\{[D_{\mathbf{p}}] : \mathbf{p} := (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}_d^2\}$ tworzą grupę będącą wierną reprezentacją rzutową grupy $\mathbb{Z}_d \otimes \mathbb{Z}_d$. W dalszym ciągu, pisząc o *WH-kowariantności*, będziemy mieć na myśli grupową kowariantność względem tej reprezentacji. Możemy teraz sformułować kluczowe, otwarte po dziś dzień, hipotezy dotyczące SIC.

Hipoteza 1 (Renes, Blume-Kohout, Scott, Caves, 2003)**.** W każdym wymiarze d istnieje wektor generujący WH-kowariantny SIC.

Odnotujmy, że dla sprawdzenia, czy $f \in S(\mathbb{C}^d)$ jest takim wektorem wystarczy wykazać, że $|(D_{\mathbf{p}} f, f)|^2 = \frac{1}{d+1}$ dla każdego $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}_d^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, co bardzo upraszcza poszukiwanie SIC. Hipoteza Zaunera idzie o krok dalej, mówiąc mianowicie, gdzie należy szukać wektora generującego.

Hipoteza 2 (Zauner, 1999)**.** W każdym wymiarze d istnieje wektor generujący WH-kowariantny SIC, który jest wektorem własnym operatora Z zdefiniowanego następująco:

$$(Ze_k, e_j) = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{i\pi(d-1)/12} e^{i\pi(2jk+(d+1)k^2)/d}$$

dla $j, k = 1, \ldots, d$.

Zauważmy, że operator Z jest unitarny oraz $Z^3 = I$. Ponadto $Z^{-1}SZ = T$ oraz $Z^{-1}TZ = e^{i\pi(d-1)/d} S^{-1}T^{-1}$, a zatem Z jest elementem normalizatora grupy Weyla–Heisenberga w $U(d)$ – grupy znanej pod nazwą *grupy Clifforda* $C(d)$ lub *grupy Jacobiego*. Nazywany jest on *operatorem unitarnym Zaunera*. Nietrudno wykazać (zob. [2,16]), że jeśli mamy dany wektor f generujący WH-kowariantny SIC, to Uf jest również takim wektorem dla dowolnego $U \in C(d)$. W 2005 roku Marcus Appleby postawił w pracy [2] hipotezę, że w każdym wymiarze d istnieje wektor generujący WH-kowariantny SIC i *każdy* taki wektor jest wektorem własnym pewnego operatora unitarnego $U \in C(d)$ szczególnego typu, między innymi spełniającego warunek $U^3 = I$. Operatory te znane są pod nazwą *kanonicznych operatorów unitarnych rzędu* 3 (*canonical order* 3 *unitaries*), a operator Z jest jednym z elementów tej klasy.

Zilustrujmy te rozważania analizując dokładniej przypadek $d = 2$ w reprezentacji Blocha. W tej reprezentacji klasom abstrakcji operatorów unitarnych z $PU(2)$ odpowiadają elementy grupy obrotów rzeczywistej przestrzeni trójwymiarowej $SO(3)$. Jak już wspominaliśmy, jedyne SIC w tym wymiarze to czworościany foremne. Dla takiego czworościanu zbiór klas abstrakcji operatorów

Weyla odpowiada identyczności i trzem obrotom o kąt π wokół prostopadłych osi łączących pary przeciwległych krawędzi czworościanu. Tworzy on tzw. grupę diedralną, izomorficzną z grupą czwórkową Kleina $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ośmiu kanonicznym operatorom unitarnym rzędu 3 odpowiadają tu obroty o kąty $\pm 2\pi/3$ wokół osi przechodzących przez jeden z czterech wierzchołków czworościanu i środek przeciwległej ściany. W wyniku działania grupy Clifforda na SIC otrzymujemy oprócz niego dodatkowo drugi bliźniaczy czworościan (SIC), tworzący z nim ośmiościan gwiaździsty (*stella octangula*), o tej samej grupie symetrii co wyjściowy. Wierzchołki obu czworościanów tworzą sześcian, którego 24-elementowa grupa obrotów może być utożsamiona z klasami równoważności elementów grupy Clifforda. Jest to tzw. chiralna grupa oktaedralna O, izomorficzna z S_4.

Założenie WH-kowariantności połączone z hipotezą Zaunera (lub późniejszą hipotezą Appleby'ego) istotnie pomogło w poszukiwaniu rozwiązań – zarówno analitycznych, jak i numerycznych. W szczególności, w 2004 roku Grassl w wystąpieniu [16] wykazał po raz pierwszy istnienie SIC w wymiarze nie będącym potęgą liczby pierwszej. Od tej pory niemal co roku poszerzała się lista wymiarów, dla których hipoteza Zaunera okazywała się prawdziwa. W tabeli poniżej uwzględniono jedynie wyniki otrzymane przed 2009 rokiem.

Wymiar d	**Autorzy**	**Rok**
2	znane od dawna	–
3	Coxeter (zob. [10])	1940
8	Hoggar (zob. [21])	1981
3, 4, 5	Zauner (zob. [41])	1999
3, 4	Renes, Blume-Kohout, Scott, Caves (zob. [32])	2003
6	Grassl (zob. [16])	2004
7, 19	Appleby (zob. [2])	2005
8, 9, 10, 12	Grassl (zob. [17])	2005
11, 15	Grassl (zob. [18])	2006
14, 24, 35, 48	Scott, Grassl (zob. [35])	2009

Rozwiązania analityczne opierały się początkowo (dla mniejszych wymiarów) na rozwiązywaniu układu równań algebraicznych z zastosowaniem baz Gröbnera. Z kolei Scott i Grassl w pracach [34, 35] wskazali, jak można numeryczne poszukiwania wektorów generujących sprowadzić do rozwiązania pewnego problemu optymalizacyjnego, a Appleby, Tuan-Yow Chien, Steven Flammia i Shayne Waldron opracowali metodę przekształcania rozwiązań przy-

bliżonych w dokładne, którą przedstawili w artykule [5]. Do tej pory udało się potwierdzić istnienie SIC-POVM w wymiarach $d \leqslant 53$ oraz

$$\begin{aligned} d = {} & 57, 61, 62, 63, 65, 67, 73, 74, 76, 78, 79, 80, 84, 86, 91, 93, 95, 97, \\ & 98, 99, 103, 109, 111, 120, 122, 124, 127, 129, 133, 134, 139, 143, 146, \\ & 147, 151, 155, 157, 163, 168, 169, 172, 181, 182, 183, 193, 195, 199, 201, \\ & 228, 259, 292, 323, 327, 364, 399, 403, 487, 489, 725, 787, 844, 1299, 5799. \end{aligned}$$

Ponadto znane są przybliżone rozwiązania numeryczne dla wszystkich wymiarów $d \leqslant 193$ oraz dla kilku większych: $d = 204, 224, 255, 288, 528, 1155, 2208$.[3] W sieci znajdują się trzy katalogi, w których zebrana jest większość powyższych rozwiązań, zarówno analitycznych jak i numerycznych (zob. [12,19,30]). Niemal wszystkie znane SIC są WH-kowariantne, a ich wektory generujące spełniają hipotezę Zaunera (z dokładnością do przekształcenia unitarnego). Jedynym do tej pory przypadkiem wykraczającym poza ten schemat są wspomniane wyżej proste Hoggara w wymiarze 8. Są one grupowo kowariantne względem grupy $H_2^{\otimes 3}$ zamiast H_8, czyli ich grupa symetrii zawiera podgrupę izomorficzną z $(\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2)^{\otimes 3}$, nie zaś z $\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_8$, niemniej jednak grupa Weyla–Heisenberga również jest, jak widać, w pewien sposób z ich symetrią powiązana. Warte podkreślenia jest, że nie znamy żadnego SIC, który nie byłby grupowo kowariantny, aczkolwiek poszukiwania takich zbiorów zwykle zakładały grupową kowariantność (w szczególności Scott i Grassl rozważali również inne możliwe grupy). W 2010 roku Huangjun Zhu w pracy [43] opublikował następujący wiążący się z tym wynik.

Twierdzenie 3. *Jeśli d jest liczbą pierwszą, to z grupowej kowariantności SIC wynika WH-kowariantność.*

Sama G-kowariantność gwarantuje, że grupa symetrii SIC (która może być większa niż G) działa tranzytywnie na elementach SIC, a więc każdy grupowo kowariantny SIC jest zbiorem symetrycznym. Możemy jednak wyróżnić wśrod nich zbiory *bardziej* symetryczne.

Definicja 3. Mówimy, że SIC jest *supersymetryczny*, jeśli jego pełna grupa symetrii działa na elementach SIC podwójnie tranzytywnie, tzn. każde dwa elementy można poprzez działanie tej grupy przekształcić na dowolne dwa inne.

[3] Informację o aktualnych listach wymiarów, dla których istnieje zbiór prostych równokątnych o maksymalnej liczebności (w części wyniki te są jeszcze nieopublikowane), autorzy zawdzięczają Markusowi Grasslowi.

Przedrostek „super-" wiąże się z faktem, że działanie pełnej grupy symetrii SIC nie może być potrójnie tranzytywne. Co więcej, okazuje się, jak udowodnił Zhu w pracy [44], że nawet supersymetrycznych SIC nie ma wiele.

Twierdzenie 4. *Istnieją trzy* (*z dokładnością do rzutowej unitarno-antyunitarnej równoważności*) *supersymetryczne SIC*:
- $d = 2$ (*czworościan*),
- $d = 3$ (*konfiguracja Hessego*),
- $d = 8$ (*proste Hoggara*).

Przypomnijmy, że są to pierwsze (i jednocześnie do 1999 roku jedyne) znane maksymalne zbiory zespolonych prostych równokątnych. Pierwsze, a jednocześnie nietypowe i dlatego zostały nazwane przez Blake'a C. Staceya w pracy [37] *sporadycznymi*. W 2015 roku w pracy [26] Jonathan Jedwab i Amy Wiebe zaproponowali pewną elementarną konstrukcję SIC w $\mathbb{C}^d$ wykorzystującą d-wymiarowe *macierze Hadamarda*, czyli macierze unitarne, w których wszystkie wyrazy mają ten sam moduł. Polega ona na braniu jako wektorów kolejnych d wierszy macierzy i zastępowaniu kolejno każdego z d wyrazów w takim wektorze przez ten wyraz pomnożony przez ustalony skalar. Otrzymać można w jej wyniku dokładnie powyższe trzy sporadyczne SIC, przy czym jest to niewątpliwie najprostszy znany sposób przedstawienia linii Hoggara.

Wspominaliśmy już, że rola SIC w *kwantowej teorii informacji* wynika z tego, że reprezentują one pewne obserwable i ich pomiar. *Stany* (*czyste*) układu kwantowego o d stopniach swobody możemy utożsamiać z elementami przestrzeni $\mathcal{P}(\mathbb{C}^d)$. Wówczas pomiar $\{\Pi_j\}_{j=1}^{d^2}$ reprezentowany przez SIC może dać d^2 różnych wyników. Jest to zjawisko losowe, a prawdopodobieństwo otrzymania k-tego wyniku ($k = 1, \ldots, d^2$) opisywane jest *wzorem Borna* (od nazwiska Maxa Borna, noblisty z fizyki w 1954 roku) $p_k(P) := \mathrm{tr}(\Pi_k P)$ dla $P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^d)$ reprezentującego stan przed pomiarem. Ponieważ pomiar SIC jest informacyjnie zupełny, możemy jednoznacznie odtworzyć stan P przed pomiarem na podstawie znajomości wektora prawdopodobieństw $p(P)$ leżącego w standardowym sympleksie $\Delta_{d^2} := \{p \in \mathbb{R}^{d^2} : \sum_{j=1}^{d^2} p_j = 1, p_k \geqslant 0, k = 1, \ldots, d^2\}$, utożsamiając niejako stany kwantowe z pewnymi elementami Δ_{d^2}. To spostrzeżenie stało się punktem wyjścia dla współcześnie najmodniejszego z nowych podejść do podstaw mechaniki kwantowej nazywanego *KUBizmem* (*QBism*) (lub dawniej też *kwantowym bayesianizmem*, *Quantum Bayesianism* – stąd skrót) zaproponowanego w drugiej dekadzie XXI wieku przez Christophera A. Fuchsa oraz Ruedigera Schacka w pracy [15] i rozwijane-

go od tego czasu przez wielu autorów. Podzbiór Δ_{d^2}, będący otoczką wypukłą takich wektorów prawdopodobieństwa otrzymanych dla różnych elementów $\mathcal{P}(\mathbb{C}^d)$ nosi nazwę *kupleksu* (*qplex*) i ma piękną strukturę geometryczną oraz ciekawe własności algebraiczne przedstawione w pracach [6, 8, 36].

Istotną przeszkodę dla hipotetycznej „kubistycznej" rewizji podstaw mechaniki kwantowej i oparcia jej na pojęciu SIC stanowi fakt, że ich istnienie w dowolnym wymiarze wciąż stanowi problem otwarty. Chociaż znajdowane są, jak widzieliśmy, analityczne rozwiązania tego problemu w coraz to wyższych wymiarach, ich złożoność rośnie bardzo szybko (zob. [14]), być może nawet, co sugerują autorzy artykułu [27], jak d^4. Obecnie zarysowują się dwie drogi prowadzące do dowodu istnienia SIC. Pierwsza zaczyna się od obserwacji, że z wyjątkiem $d = 3$ (ogół SIC w tym wymiarze został sklasyfikowany w pracy [25]), we wszystkich pozostałych wymiarach współrzędne (w bazie kanonicznej) wektorów generujących są liczbami algebraicznymi i – co więcej – wyrażają się przez pierwiastniki. Dalsze rozważania prowadzone metodami algebraicznej teorii liczb prowadzą do hipotezy, częściowo potwierdzonej numerycznie, że każdy SIC w wymiarze d ma swój odpowiednik w wymiarze $d(d-2)$, zob. prace [1, 4]. Gdyby hipoteza ta była prawdziwa, pozwoliłaby na skonstruowanie nieskończonych „wież" wymiarów, w których istnienie SIC byłoby zagwarantowane, swoistej, jak to określił Ingemar Bengtsson w artykule [9], „drabiny do nieba". Można byłoby też myśleć o wykorzystaniu rozmaitych równoważnych sformułowań problemu omówionych w pracy [3] w języku teorii grup, algebr Liego czy też algebr Jordana, a także w artykule [31] w terminach kanałów kwantowych łamiących splątanie. Drugie podejście, radykalnie odmienne, polegałoby na próbie zbudowania niekonstruktywnego dowodu istnienia SIC, co proponował już w 2010 roku wybitny amerykański informatyk Peter Shor. Autorzy artykułu wiedzą jednak tylko o jednej niedawnej próbie tego rodzaju – w pracy [27] zarysowano hipotetyczny szkic takiego dowodu.

Zapewne trudność i waga problemu istnienia SIC skłoniła Krajowe Centrum Informatyki Kwantowej[4] do umieszczenia go na czele krótkiej listy pięciu ważnych problemów matematycznych z kwantowej teorii informacji. Za rozwiązanie każdego z nich oferowana jest międzynarodowa Złota Nagroda (*Golden Award*) wynosząca $N + 1$ euro, przy czym N oznacza rok, w którym problem zostanie rozstrzygnięty, zob. preprint [24]. Do otrzymania nagrody wystarczy jedynie rozwiązanie problemu dla nieskończonej liczby wymiarów, nie trzeba tego zrobić w dowolnym wymiarze, ani tym bardziej w formie podanej w hi-

[4] Jest to wspólna jednostka badawcza z siedzibą w Sopocie, utworzona w 2007 roku przez PAN i siedem czołowych polskich uczelni, której misją jest tworzenie platformy dla interdyscyplinarnych badań w obszarze informacji kwantowej i podstaw fizyki.

potezie Zaunera. Nawet jednak w tej wersji udzielenie odpowiedzi na pytanie o maksymalną liczbę zespolonych prostych równokątnych wydaje się stanowić trudne wyzwanie zarówno dla fizyków, jak i matematyków.

Bibliografia

[1] O. Andersson, I. Dumitru, *Aligned SICs and embedded tight frames in even dimensions*, J. Phys. A 52 (2019), 425302.

[2] D. M. Appleby, *SIC-POVMs and the extended Clifford Group*, J. Math. Phys. 46 (2005), 052107.

[3] M. Appleby, C. A. Fuchs, H. Zhu, *Group theoretic, Lie algebraic and Jordan algebraic formulations of the SIC existence problem*, Quantum Inf. Comput. 15 (2015), 61–94.

[4] M. Appleby, I. Bengtsson, I. Dumitru, S. Flammia, *Dimension towers of SICs. I. Aligned SICs and embedded tight frames*, J. Math. Phys. 58 (2017), 112201.

[5] M. Appleby, T.-Y. Chien, S. Flammia, S. Waldron, *Constructing exact symmetric informationally complete measurements from numerical solutions*, J. Phys. A 51 (2018), 165302.

[6] D. M. Appleby, Å. Ericsson, C. A. Fuchs, *Properties of QBist state spaces*, Found. Phys. 41 (2011), 564–579.

[7] M. Appleby, S. Flammia, G. McConnell, J. Yard, *Generating ray class fields of real quadratic fields via complex equiangular lines*, Acta Arith. 192 (2020), 211–233.

[8] M. Appleby, C. A. Fuchs, B. C. Stacey, H. Zhu, *Introducing the Qplex: a novel arena for quantum theory*, Eur. Phys. J. D 71 (2017), 197.

[9] I. Bengtsson, *SICs: Some Explanations*, Found. Phys. 50 (2020), 1794–1808.

[10] H. S. M. Coxeter, *The polytope 221 whose twenty-seven vertices correspond to the lines to the general cubic surface*, Amer. J. Math. 62 (1940), 457–486.

[11] P. Delsarte, J. Goethals, J. Seidel, *Bounds for systems of lines, and Jacobi polynomials*, Philips Res. Rep. 30 (1975), 91–105.

[12] S. Flammia, Exact SIC fiducial vectors, http://www.physics.usyd.edu.au/~sflammia/SIC/ (dostęp: 2020-12-20).

[13] D. S. Freed, *On Wigner's theorem*, Geom. Topol. Monogr. 18 (2012), 83–89.

[14] C. A. Fuchs, M. C. Hoang, B. C. Stacey, *The SIC Question: History and State of Play*, Axioms 6 (2017), 21.

[15] C. A. Fuchs, R. Schack, *Quantum-Bayesian coherence*, Rev. Modern Phys. 85 (2013), 16931715.

[16] M. Grassl, *On SIC-POVMs and MUBs in dimension* 6, Proceedings ERATO Conference on Quantum Information Science (EQIS 2004), Tokyo, 2004, 60–61.

[17] M. Grassl, *Tomography of quantum states in small dimensions*, Electron. Notes Discrete Math. 20 (2005), 151–164.

[18] M. Grassl, *Finding equiangular lines in complex space*, MAGMA 2006 Conference (Technische Universität Berlin, July, 2006), http://magma.maths.usyd.edu.au/conferences/Magma2006/talks/Grassl_Berlin.pdf (dostęp: 2020-12-12).

[19] M. Grassl, SIC-POVMs, http://sicpovm.markus-grassl.de/ (dostęp: 2020-12-20).
[20] A. Grzesik, *Proste równokątne*, Wiad. Mat. 55 (2019), 377–381.
[21] S. G. Hoggar, *Two quaternionic 4-polytopes*, [w:] *The Geometric Vein. The Coxeter Festschrift* (C. Davis, B. Grnbaum, F. A. Sherk, red.), Springer Verlag, New York 1981, 219–230.
[22] S. G. Hoggar, *t-designs in projective spaces*, European J. Combin. 3 (1982), 233–254.
[23] S. G. Hoggar, *64 Lines from a Quaternionic Polytope*, Geom. Dedicata 69 (1998), 287–289.
[24] P. Horodecki, Ł. Rudnicki, K. Życzkowski, *Five open problems in quantum information*, przyjęte do druku w PRX Quantum.
[25] L. P. Hughston, S. M. Salamon, *Surveying points in the complex projective plane*, Adv. Math. 286 (2016), 1017–1052.
[26] J. Jedwab, A. Wiebe, *A simple construction of complex equiangular lines*, [w:] *Algebraic Design Theory and Hadamard Matrices. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* (C. Colbourn, red.), Springer, Cham 2015, 159–169.
[27] M. Magsino, D. G. Mixon, *Biangular Gabor frames and Zauner's conjecture*, Proceedings SPIE 11138, Wavelets and Sparsity XVIII, 111381G (9 September 2019), arXiv:1908.02801 [math.MG].
[28] J. Mann, *Equilateral dimension of Riemannian manifolds with bounded curvature*, Rose-Hulman Undergrad. Math. J. 14 (2013), 101–111.
[29] A. Neumaier, *Combinatorial configurations in terms of distances, Memorandum 81-09 (Dept. of Mathematics)*, Eindhoven University of Technology 1981.
[30] QBism Group UMass Boston, http://www.physics.umb.edu/Research/QBism/solutions.html (dostęp: 2020-12-20).
[31] S. K. Pandey, V. I. Paulsen, J. Prakash, M. Rahaman, *Entanglement breaking rank and the existence of SIC POVMs*, J. Math. Phys. 61 (2020), 042203.
[32] J. M. Renes, R. Blume-Kohout, A. J. Scott, C. Caves, *Symmetric informationally complete quantum measurements*, J. Math. Phys. 45 (2004), 2171–2180.
[33] K. Scharnhorst, *Angles in complex vector spaces*, Acta Appl. Math. 69 (2001), 95–103.
[34] A. J. Scott, *SICs: Extending the list of solutions*, arXiv:1703.03993 [quant-ph].
[35] A. J. Scott, M. Grassl, *SICs: A new computer study*, J. Math. Phys. 51 (2010), 042203.
[36] W. Słomczyński, A. Szymusiak, *Morphophoric POVMs, generalised qplexes, and 2-designs*, Quantum 4 (2020), 338.
[37] B. C. Stacey, *Sporadic SICs and the Normed Division Algebras*, Found. Phys. 47 (2017), 1060–1064.
[38] A. Szymusiak, W. Słomczyński, *Informational power of the Hoggar symmetric informationally complete positive operator-valued measure*, Phys. Rev. A 94 (2016), 012122.
[39] L. R. Welch, *Lower bounds on the maximum cross correlation of signals*, IEEE Trans. Inform. Theory 20 (1974), 397–399.
[40] R. F. Werner, Open quantum problems, https://oqp.iqoqi.univie.ac.at/ (dostęp: 2020-12-20).

[41] G. Zauner, *Quantendesigns, Grundzüge einer nichtkommutativen Designtheorie*, Ph.D. thesis, Universität Wien 1999.
[42] G. Zauner, *Quantum designs: foundations of a noncommutative design theory*, Int. J. Quantum Inf. 9 (2011), 445–507.
[43] H. Zhu, *SIC-POVMs and Clifford groups in prime dimensions*, J. Phys. A 43 (2010), 305305.
[44] H. Zhu, *Super-symmetric informationally complete measurements*, Ann. Physics 362 (2015), 311–326.

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
wojciech.slomczynski@uj.edu.pl
anna.szymusiak@uj.edu.pl

Uchwała Zarządu Głównego PTM nr 24/1719/zg z dnia 15.12.2018

Temat uchwały: Wydawnicze cele strategiczne PTM

W celu wzmocnienia merytorycznego czasopism PTM oraz zwiększenia częstotliwości ich ukazywania się, Zarząd Główny PTM proponuje przyjęcie następujących celów strategicznych:

1. Przekształcenie Commentationes Mathematicae w główne naukowe czasopismo PTM. Wymagać to będzie rozszerzenia tematyki o wszystkie działy matematyki, w szczególności o matematykę stosowaną i dydaktykę matematyki, oraz odpowiedniego doboru redaktorów w przyszłej kadencji.

2. Rozszerzenie tematyki Wiadomości Matematycznych poprzez zamieszczanie prac przeglądowych dotyczących najnowszych wyników i trendów matematyki światowej, artykułów poświęconych historii matematyki polskiej oraz różnego rodzaju analiz i problemów szeroko pojętego polskiego środowiska matematycznego. Wymagać to będzie odpowiedniego doboru redaktorów w przyszłej kadencji.

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 215–225
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

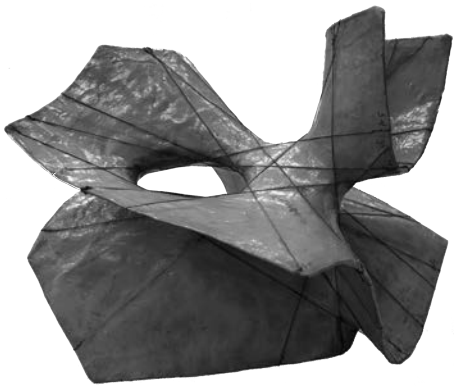
François Apéry (St-Contest)

Szekspirowskie równanie Otella

1. Wstęp

Znalezienie równań obiektu postrzeganego jako matematyczny, ale którego dokładna definicja zaginęła, nie jest wyłącznie ćwiczeniem. Jest konieczne w sytuacji, gdy ten obiekt chcemy odtworzyć, jednocześnie eliminując ewentualne jego wady lub dołączając dodatkowe dane.

Przyjrzyjmy się termoplastycznej powierzchni kubicznej wraz z dwudziestoma siedmioma liniami prostymi, należącej do Institut Henri Poincaré (IHP) w Paryżu (rys. 1). Fotograf i malarz surrealistyczny Man Ray w 1935 roku w książce [6] nazwał ją „Otello".



1. Otello (z kolekcji IHP)

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

W tamtym czasie odkrył on kolekcję podobnych modeli w IHP i postanowił sfotografować niektóre z nich, nadając im nazwy pochodzące ze sztuk Szekspira – stąd określenie „równanie Otella".

Można wyobrazić sobie dwa podejścia do ustalenia równań Otella. Rozwiązaniem empirycznym byłoby zeskanowanie obiektu w celu wyznaczenia pewnej liczby jego punktów, a następnie zastosowanie metody najmniejszych kwadratów, aby określić powierzchnię kubiczną, która najlepiej przybliża te punkty. Druga możliwość – którą wybraliśmy – opiera się na opisie struktury geometrycznej, w tym przypadku istnienia dwudziestu siedmiu prostych leżących na powierzchni.

2. O modelach powierzchni kubicznych zawierających dwadzieścia siedem linii

W 1849 roku Arthur Cayley i George Salmon udowodnili następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Na każdej nieprostokreślnej powierzchni kubicznej jest przynajmniej jedna, a co najwyżej 27 prostych.*

To twierdzenie pozostaje prawdziwe w przypadku zespolonej przestrzeni rzutowej. W tym przypadku maksimum zostaje osiągnięte przy pewnych dość ogólnych założeniach, na przykład gdy powierzchnia jest gładka albo gdy uwzględnimy krotności ewentualnych prostych podwójnych i potrójnych. Natychmiast nasuwa się pytanie, czy może się zdarzyć, że wszystkie dwadzieścia siedem prostych jest rzeczywistych, gdy powierzchnia jest rzeczywista. Ludwig Schläfli udowodnił, że jedynymi możliwymi liczbami prostych rzeczywistych są dwadzieścia siedem, piętnaście, siedem i trzy.

Wielu matematyków próbowało wykonać modele powierzchni kubicznych z dwudziestoma siedmioma liniami prostymi. Lista jest długa, choć pewnie najbardziej znaną – z uwagi na symetrię równania i samej powierzchni – jest przekątniowa powierzchnia Alfreda Clebscha opisana równaniem

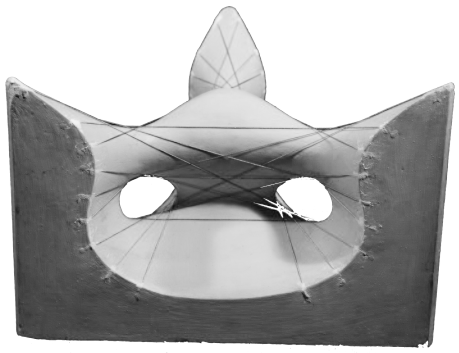
$$w^3 + x^3 + y^3 + z^3 - (w + x + y + z)^3 = 0.$$

Pierwszym modelem takiej powierzchni jest niewątpliwie ten z 1869 roku, pochodzący od Christiana Wienera. Szczegóły tej historii znajdują się w rozprawie [3] François Lê.

3. Modele Carona

Trzy modele powierzchni kubicznych z dwudziestoma siedmioma liniami należące do kolekcji IHP są nieznanego pochodzenia. Są jednak powody, by przypuszczać, że ich autorem jest Joseph Caron. Kierował on pracami graficznymi w École Normale Supérieure w Paryżu od 1872 roku i sam wykonał wiele modeli matematycznych z drewna, kartonu i drutów. W szczególności zrobił model druciany gładkiej powierzchni kubicznej, której siedem z dwudziestu siedmiu linii prostych jest rzeczywistych, podpisany jego ręką w 1912 roku. Dodatkowo, w 1880 roku, napisał artykuł [4] o rysowaniu dwudziestu siedmiu rzeczywistych linii prostych na powierzchni kubicznej.

Pierwszym z trzech wyżej wymienionych obiektów jest model gipsowy gładkiej powierzchni kubicznej z potrójną symetrią, na której dwadzieścia siedem linii jest reprezentowanych napiętymi sznurkami.

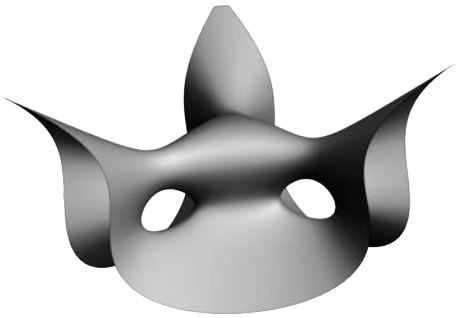


2. Dwadzieścia siedem linii na powierzchni kubicznej
– *Poskromienie złośnicy* – wg nazewnictwa Mana Raya

Różni się ona od tej Clebscha, gdyż brakuje na niej punktów Eckardta, gdzie przecinają się trójki linii. Z tego powodu wydaje się ona mniej interesująca i nie została odtworzona. Mimo to, wybranie jej przez Mana Raya ocaliło ją od zapomnienia. Tak więc ktokolwiek, kto chciałby zrobić jej kopię, musiałby na nowo wyznaczyć jej zaginione równanie. W tym przypadku nie jest to trudne. Zaproponuję następujące równanie (zob. rys. 3):

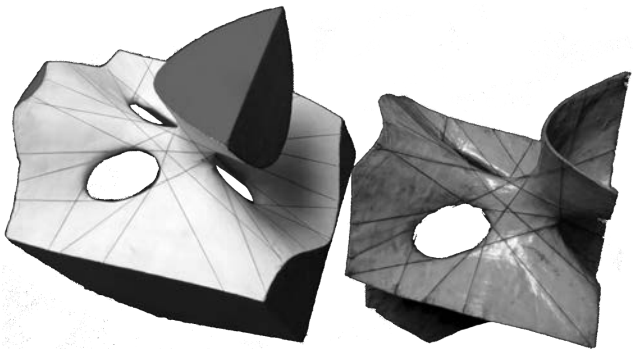
$$2z(4z^2 - 1) - (2x + 1)((x - 1)^2 - 3y^2) = 0$$

Tak czy owak, interesują nas pozostałe dwa modele, a właściwie jeden, gdyż – jak widać na rysunku 4 – są one identyczne: model gipsowy po lewej stronie był użyty do wytworzenia z masy termoplastycznej modelu po prawej,



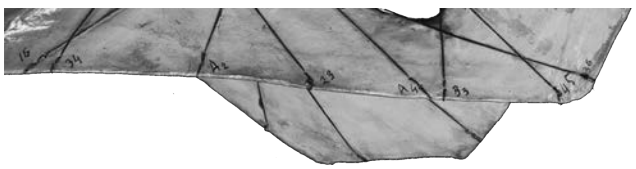
3. Gładka powierzchnia kubiczna z potrójną symetrią

nazwanego Otello. Odpowiadająca mu powierzchnia nie ma potrójnej osi symetrii, ale jedynie przybliżoną podwójną. Różni się tym zarówno od *Poskromienia złośnicy*, jak i od powierzchni Clebscha.



4. Otello (po prawej) i jego model gipsowy (po lewej)

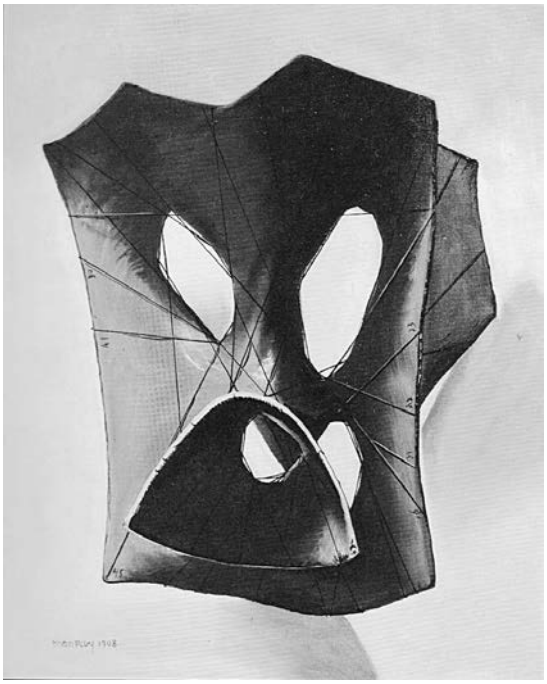
Przypisanie jej Caronowi – niezależnie od argumentów podanych na początku paragrafu – jest uprawdopodobnione inskrypcjami na brzegach Otella (zob. rys. 5), podobnymi do tych z artykułu [4].



5. Notacja linii Otella

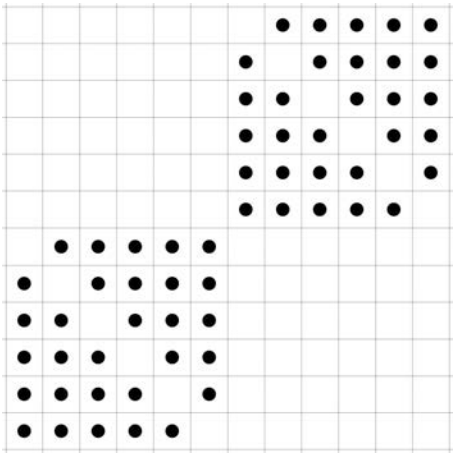
4. Metoda Cayleya

Równanie Otella ustalimy tą samą metodą, której użył Cayley do wyliczenia równania pierwszego znanego modelu powierzchni kubicznej z dwudziestoma siedmioma prostymi rzeczywistymi – tego skonstruowanego przez Christiana Wienera w 1869 roku (zob. [2]). Opiera się ona na spostrzeżeniu, że powierzchnia jest wyznaczona jednoznacznie za pomocą pewnych z jej dwudziestu siedmiu prostych.



6. Maska namalowana przez Mana Raya w 1948 roku

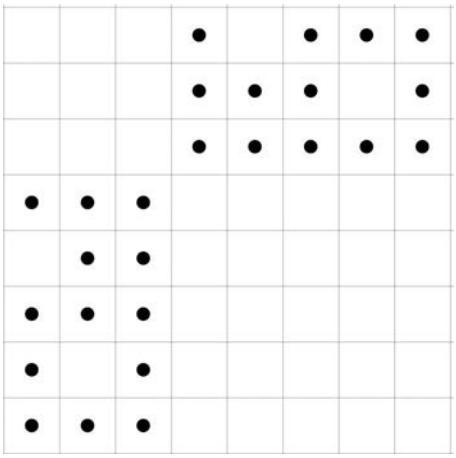
Założymy, że powierzchnia przypominająca maskę na obrazie Mana Raya (rys. 6) ma powierzchnię symetrii odpowiadającą symetrii twarzy ukrytej pod maską. Schläfli wprowadził pojęcie „podwójnej szóstki", czyli konfiguracji dwunastu linii, podzielonych na dwa układy przecinające się w sposób zilustrowany na rysunku 7. Z obliczeń Cayleya wynika, że istnieje dokładnie jedna powierzchnia kubiczna zawierająca daną podwójną szóstkę – innymi słowy, jeżeli znajdziemy ją na Otellu, możemy wydedukować jego równanie.



7. Schemat przecięć „podwójnej szóstki”

5. Powierzchnia kubiczna wyznaczona przez układ pięć-trzy

Okazuje się, że nie trzeba znać wszystkich dwunastu prostych podwójnej szóstki, by wyznaczyć równanie powierzchni kubicznej. W istocie, wystarczy jedynie osiem prostych (które nazwiemy „układem pięć-trzy”), przecinających się w sposób opisany na schemacie 8.



8. Schemat przecięć „układu pięć-trzy”

Wybierzmy stosowny układ odniesienia, by osiem prostych, oznaczonych a_2, a_4, a_6 i b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 i spełniających następujące warunki wynikające ze

schematu przecięć na rysunku 8:

$$\begin{cases} b_i \cap b_j = \varnothing & \text{dla wszystkich } i \neq j \\ a_i \cap a_j = \varnothing & \text{dla wszystkich } i \neq j \\ a_i \cap b_j \neq \varnothing & \Leftrightarrow i \neq j \end{cases}$$

miało – w układzie współrzędnych rzutowych $(w : x : y : z)$ – poniższe równania:

$$a_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad a_4 : \begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \qquad a_6 : \begin{cases} w = x \\ y = z \end{cases}$$

$$b_1 : \begin{cases} w = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad b_2 : \begin{cases} w = \alpha z \\ x = \beta y + (\alpha - \beta) z \end{cases} \qquad b_3 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$b_4 : \begin{cases} x = \gamma y \\ z = \delta w + (1 - \gamma\delta) y \end{cases} \qquad b_5 : \begin{cases} x = y \\ z = w. \end{cases}$$

Równania koincydencji są równoważne warunkom

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \gamma\delta, \beta\delta \neq 0, 1, \quad \alpha \neq \beta, \gamma.$$

Równanie jedynej powierzchni kubicznej zawierającej układ pięć-trzy to

$$(wy - xz)(aw + bx + cy + dz) + exz(w - x + y - z) = 0, \tag{1}$$

przy czym

$$\begin{cases} a = \gamma\delta(\alpha - \beta)(\gamma - 1), \\ b = (1 - \gamma\delta)(\gamma(\alpha - \beta) + \alpha(\beta - 1)) \\ c = \beta\gamma(1 - \alpha)(1 - \gamma\delta), \\ d = \gamma(\alpha - \beta)(1 - \alpha + \delta(\alpha - \gamma)) \\ e = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(1 - \gamma\delta). \end{cases}$$

6. Równanie Otella

Znaleźliśmy osiem prostych tworzących układ pięć-trzy. Wyznaczmy ich współrzędne w systemie współrzędnych jednorodnych $W : X : Y : Z$ względem

przyjętego układu odniesienia.

$$a_2 : \begin{cases} -0{,}043 \cdot W + Y + 1{,}011 \cdot Z = 0 \\ 3{,}64 \cdot W + 2{,}297 \cdot X + 4{,}912 \cdot Z = 0 \end{cases}$$
$$a_4 : \begin{cases} -0{,}559 \cdot W + Y + 0{,}62 \cdot Z = 0 \\ 1{,}105 \cdot W + 1{,}443 \cdot X - 0{,}514 \cdot Z = 0 \end{cases}$$
$$a_6 : \begin{cases} -0{,}283 \cdot W + Y = 0 \\ 0{,}309 \cdot W + Z = 0 \end{cases}$$
$$b_1 : \begin{cases} 0{,}921 \cdot W + Y + 3{,}897 \cdot Z = 0 \\ 1{,}565 \cdot W + 2{,}203 \cdot X - 1{,}056 \cdot Z = 0 \end{cases}$$
$$b_2 : \begin{cases} 1{,}725 \cdot W - Y = 0 \\ 1{,}882 \cdot W + Z = 0 \end{cases}$$
$$b_3 : \begin{cases} 0{,}146 \cdot W + Y + 1{,}388 \cdot Z = 0 \\ 0{,}155 \cdot W - 0{,}872 \cdot X + 1{,}207 \cdot Z = 0 \end{cases}$$
$$b_4 : \begin{cases} -0{,}166 \cdot W + Y + 0{,}381 \cdot Z = 0 \\ 5{,}877 \cdot W + 5{,}722 \cdot X - 4{,}179 \cdot Z = 0 \end{cases}$$
$$b_5 : \begin{cases} -0{,}372 \cdot W + Y - 0{,}288 \cdot Z = 0 \\ 0{,}905 \cdot W + 1{,}064 \cdot X - 0{,}811 \cdot Z = 0 \end{cases}$$

Otrzymujemy następujące współrzędne jednorodne:

$$a_2 \cap b_3 = (1 : -0{,}515 : 0{,}549 : -0{,}5)$$
$$a_4 \cap b_3 = (1 : -1{,}093 : 1{,}128 : -0{,}917)$$
$$a_4 \cap b_1 = (1 : -0{,}927 : 0{,}839 : -0{,}452)$$
$$a_2 \cap b_1 = (1 : -0{,}871 : 0{,}381 : -0{,}334)$$
$$a_6 \cap b_5 = (1 : -1{,}085 : 0{,}283 : -0{,}309)$$

Kontynuujemy zmianę współrzędnych, by w efekcie w nowym układzie $(w : x : y : z)$ otrzymać

$$a_2 \cap b_3 = (1 : 0 : 0 : 0)$$
$$a_4 \cap b_3 = (0 : 1 : 0 : 0)$$
$$a_4 \cap b_1 = (0 : 0 : 1 : 0)$$
$$a_2 \cap b_1 = (0 : 0 : 0 : 1)$$
$$a_6 \cap b_5 = (1 : 1 : 1 : 1)$$

Następnie rozważamy macierz, której wierszami są współrzędne $a_i \cap b_j$ w układzie (W, X, Y, Z):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}515 & 0{,}549 & -0{,}5 \\ 1 & -1{,}093 & 1{,}128 & -0{,}917 \\ 1 & -0{,}927 & 0{,}839 & -0{,}452 \\ 1 & -0{,}871 & 0{,}381 & -0{,}334 \end{pmatrix}.$$

Ponadto, po rozważeniu współrzędnych $a_6 \cap b_5$, otrzymujemy

$$(\lambda, \mu, \nu, \xi) = (1, -1{,}085, 0{,}283, -0{,}309)A^{-1},$$

a zatem macierzą zamiany współrzędnych jest

$$P = \operatorname{diag}(\lambda, \mu, \nu, \xi) \cdot A = \begin{pmatrix} -0{,}543 & 0{,}28 & -0{,}298 & 0{,}272 \\ 0{,}171 & -0{,}187 & 0{,}192 & -0{,}157 \\ -0{,}292 & 0{,}27 & -0{,}245 & 0{,}132 \\ 1{,}664 & -1{,}449 & 0{,}633 & -0{,}556 \end{pmatrix}.$$

Z dokładnością do mnożenia przez niezerowy skalar, wzór na zamianę współrzędnych ma postać

$$(W, X, Y, Z) = (w, x, y, z)P.$$

W nowych współrzędnych równania prostej b_2 są:

$$b_2 : \begin{cases} (w, x, y, z)P \cdot {}^t(1{,}882, 0, 0, 1) = -0{,}75w + 0{,}165x - 0{,}417y + 2{,}576z = 0 \\ (w, x, y, z)P \cdot {}^t(-1{,}725, 0, 1, 0) = 0{,}639w - 0{,}102x + 0{,}258y - 2{,}237z = 0. \end{cases}$$

Po odpowiednich przekształceniach liniowych otrzymujemy następujący układ:

$$b_2 : \begin{cases} 0{,}029w - 0{,}106z = 0 \\ 0{,}029x - 0{,}073y - 0{,}033z = 0, \end{cases}$$

z którego dostajemy

$$\alpha = 3{,}687\ldots, \quad \beta = 2{,}533\ldots$$

Po analogicznej analizie prostej b_4 otrzymujemy

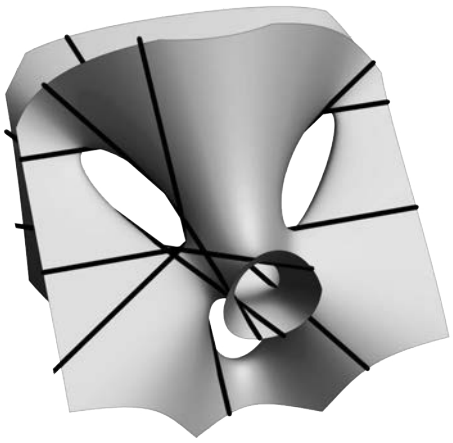
$$\gamma = 1{,}448\ldots, \quad \delta = 0{,}715\ldots$$

Dalej,

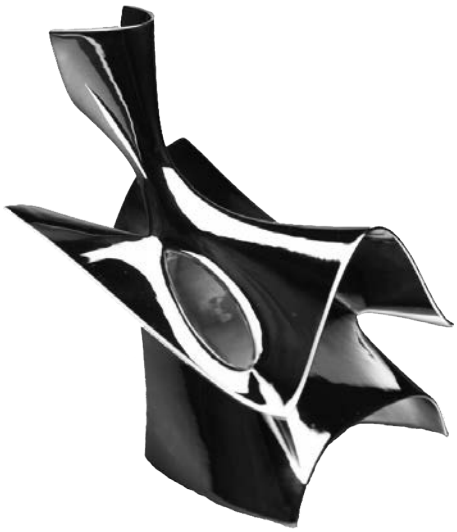
$$a = 0{,}536\ldots \qquad b = -0{,}264\ldots \qquad c = 0{,}356\ldots$$
$$d = -1{,}815\ldots \qquad e = -0{,}093\ldots$$

Po zastąpieniu (w, x, y, z) przez $(W, X, Y, Z)P^{-1}$ we wzorze (1), zaokrągleniu współczynników do liczb całkowitych i ustaleniu $w = 1$, otrzymujemy równanie (zob. rys. 9):

$$12x^2y + 11x^2z - 7y + 2y^2 + 2y^3 - 8z + 10yz + 7y^2z + 14z^2 - 7yz^2 - 7z^3 = 1.$$



9. Otello w podanym układzie współrzędnych i osiem prostych w układzie pięć-trzy



10. Otello ze złotego mosiądzu

Bibliografia

[1] A. Cayley, *A memoir on cubic surfaces*, Phil. Trans. Roy. Soc. London 159 (1869), nr 1, 231–326.
[2] A. Cayley, *On dr. Wiener's model of a cubic surface with 27 real lines and on the construction of a double-sixer*, Trans. Cambridge Philos. Soc. 12 (1873), nr 1, 366–383.
[3] F. Lê, *Vingt-sept droites sur une surface cubique: rencontres entre groupes, équations et géométrie dans la deuxième moitié du XIXe siècle*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris 2015.
[4] J. Caron, *Sur l'épure des 27 droites d'une surface du troisième degré dans le cas où ses droites sont réelles*, Bull. de la Soc. Math. de France 8 (1880), 73–74.
[5] L. Schläfli, *On the distribution of surfaces of third order into species*, Phil. Trans. Roy. Soc. London 153 (1864), 193–247.
[6] W. A. Grossman, E. Sebline (red.), *Man Ray: human equations. A journey from mathematics to Shakespeare*, Hatje Cantz Verlag, Berlin 2015.

François Apéry
Université de Haute-Alsace
francois.apery@uha.fr

Tłumaczenie: Marcin Borkowski.

Od redakcji. François Apéry jest dyrektorem naukowym kolekcji matematycznych modeli w Institut Henri Poincaré w Paryżu oraz emerytowanym profesorem Université de Haute-Alsace w Mulhouseprac. Doktorat uzyskał w 1984 roku, promotorem był Bernard Morin. Apéry jest autorem wyników dotyczących różnych zagadnień geometrycznych, w tym związanych z wizualizacją geometrii i topologii. Znany jako artysta tworzący geometryczne modele za pomocą grafiki komputerowej i druku 3D. Oryginalne opisy rozmaitych powierzchni zawarł w pięknie ilustrowanej książce *Models of the Real Projective Plane* (pierwsze wydanie w 1987 roku). Jesienią 2019 roku gościł w Krakowie. Artykuł napisał na prośbę redakcji *Wiadomości Matematycznych*. W kolekcji IHP, której jest dyrektorem, znajduje się ponad sześćset obiektów. Więcej o tej kolekcji można przeczytać w jego artykule opublikowanym w numerze 3 (2020) *Kwartalnika Historii Nauki i Techniki* (https://www.ejournals.eu/KHNT/2020/3-2020/art/17658/). Kolekcji tej poświęcona jest książka *Objets mathématiques* wydana przez *Centre national de la recherche scientifique* z przedmową Cedrica Villaniego i Jean-Philippe Uzana.

Podsłuchana, autentyczna, rozmowa dwóch robotników pracujących przy remoncie domu.

Jeden z robotników prosi kolegę, aby zmierzył ścianę, bo musi odpowiednio przyciąć styropian.

Ten bierze miarkę i kilka razy przykłada ją do ściany, w końcu mówi:

– Słuchaj, ta ściana jest jakaś niemierzalna!

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 227–239
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Soumyadip Ghosh, Yingdong Lu, Tomasz Nowicki
(Yorktown Heights, NY)

Błądzenie Monte Carlo według przepisu Hamiltona

1. Co to jest HMC?

Hamiltonowskie Monte Carlo (ang. *Hamiltonian Monte Carlo*) albo hybrydowe Monte Carlo (ang. *Hybrid Monte Carlo*) jest to algorytm otrzymania próbek losowych z docelowego rozkładu $\mathfrak{f}/\int_{\mathbb{Q}}\mathfrak{f}$ na przestrzeni $\mathbb{Q}$, którego gęstość znamy z dokładnością do czynnika, to znaczy, że chociaż znamy $\mathfrak{f}$, to nie znamy $\int_{\mathbb{Q}}\mathfrak{f}$ albo całka ta jest bardzo trudna lub kosztowna do obliczenia.

Założenia programowe, nasz punkt widzenia. Rozwój i wykorzystywanie sztucznej inteligencji, eksploracji danych (ang. *data mining*) i nauczania maszynowego (ang. *machine learning*) powoduje powstanie nowych lub odświeżanie starych algorytmów, których zadaniem jest obróbka ogromnych zbiorów danych, czy to już zebranych, czy ciągle nadchodzących w postaci strumienia. Te nowe lub odnowione metody są zazwyczaj najpierw testowane na specjalnych zbiorach, zazwyczaj mniejszych i dobrze znanych. Jednak nie zawsze podlegają one abstrakcyjnemu, lub – jak kto woli – teoretycznemu sprawdzeniu spójności, skuteczności i zbieżności do zaplanowanego celu. Algorytmy i ich implementacje komputerowe operują na zbiorach dyskretnych. Natura dużych zbiorów danych, wielkiej liczby parametrów czy wręcz metodologiczne korzystanie z randomizacji wskazują jednak, że ciągły punkt widzenia może być jak najbardziej przydatny.

Naszym zdaniem powinno się pójść znacznie dalej – należałoby nie tylko uciąglać przestrzeń parametrów i stanów algorytmów, ale obiektami powinny być bardzo ogólne właściwości danych, takie jak ich rozkłady.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

W naszym rozumieniu algorytmy są procedurami iteracyjnymi, które przekształcają punkty z przestrzeni stanów w inne punkty z tej przestrzeni, aż do momentu, kiedy punkt taki znajdzie się w akceptowalnym podzbiorze, najlepiej niezmienniczym wobec algorytmu. Otóż zamiast zajmować się punktami ze zbioru skończonego albo w ciągłym przybliżeniu wektorami z przestrzeni skończenie wymiarowych (reprezentacje aspektów danych w postaci współrzędnych) będącymi realizacją pewnych zmiennych losowych postulujemy, żeby za stany algorytmu przyjąć od razu obiekty wyższego rzędu, takie jak na przykład miary, albo rozkłady prawdopodobieństwa określone na przestrzeni, w której leżą te wektory. W tej perspektywie poszczególne realizacje stanów mogą być traktowane jako miary Diraca.

Zamiast iterować skomplikowane przekształcenie w prostej przestrzni (na przykład euklidesowej skończonego wymiaru), chcemy iterować znacznie prostsze (miejmy nadzieję) przekształcenie w znacznie bogatszej przestrzeni funkcyjnej.

Przykład zastosowania: miara i całka. Wróćmy do HMC. Załóżmy, że chcemy znaleźć miarę (objętość) pewnego obszaru, przy czym możemy łatwo sprawdzić, czy dany punkt do niego należy, czy nie. Znamy funkcję $\mathfrak{f}$, jest to funkcja charakterystyczna równa jeden w obszarze i zero poza nim, ale nie znamy czynnika normującego, czyli miary obszaru. Idąc dalej, możemy potrzebować średniej wartości z funkcji ϕ na tym obszarze względem gęstości proporcjonalnej do $\mathfrak{f}$. Można by wziąć losową próbkę zgodną z rozkładem i obliczyć średnią z ϕ na punktach próbki, ale bez znajomości czynnika normującego nie jest to możliwe. Zobaczymy, że HMC dostarcza sposobu generowania takich próbek.

Przykład zastosowania: aproksymacja bayesowska. Załóżmy, że szukamy rozkładu parametru, który wpływa na wyniki eksperymentu. Dla przykładu: mamy kilka monet i chcemy ocenić, jaki jest rozkład $\rho(x)$ ich asymetrii mierzonej prawdopodobieństwem wypadnięcia reszki, czyli ile jest monet preferujących reszki i jak bardzo, a ile orły. Jeśli moneta ma asymetrię x, to prawdopodobieństwo otrzymania reszki wynosi $P(R|x) = x$, a orła $P(O|x) = 1 - x$. Zaczynamy od rozkładu $\pi(x)$ przybliżającego $\rho(x)$ po wykonaniu rzutu losową monetą i otrzymaniu wyniku D (orzeł lub reszka) proponujemy – korzystając ze wzoru Bayesa – kolejne przybliżenie $\hat{\pi}(x) = P_\pi(x|D) = \pi(x \cdot P(D|x))/\sum_y P(y|D)\pi(y)$. Ta procedura daje całkiem dobre rezultaty, ale suma (całka) w mianowniku, czyli czynnik normujący, może być trudna do obliczenia. Jest to wartość oczekiwana znanej funkcji $P(y|D)$ względem miary π, którą znamy z poprzedniego szacowania, znowu jedynie z dokładnością do czynnika normującego.

Mamy tu do czynienia ze spiętrzeniem algorytmów – każdy krok w aproksymacji bayesowskiej wymaga algorytmu wyznaczającego czynnik normujący.

Na marginesie zauważmy, że podobny problem występuje przy normalizacji prawdopodobieństw w termodynamice, przy czym prawdopodopieństwo zależy od energii (i temperatury) i jest proporcjonalne do $\exp(-E/T)$. Suma tych wyrażeń po wszystkich stanach energetycznych nie jest prosta do obliczenia.

Algorytm typu Metropolisa–Hastingsa. HMC jest algorytmem znanym już od dość dawna (zob. [1]). Jest to algorytm typu Metropolisa–Hastingsa. Takie algorytmy są używane do szacowania całek. Próbki punktów z przestrzeni wybierane są metodą błądzenia, z losowym procesem decyzyjnym czy ruch zostanie wykonany, czy też nie (przy czym decyzje na „nie" bardzo spowalniają te algorytmy). Szczęśliwie HMC unika większości decyzji o bezruchu.

Znane są dowody zbieżności HMC (zob. [2]). Są one techniczne i skomplikowane. Naszym celem jest wykazanie, że stosując zareklamowane wyżej podejście funkcjonalne, można zrozumieć, dlaczego HMC jest zbieżne. W naszych pracach [3–5] przedstawiamy szczegóły techniczne problemu w trzech aspektach: funkcjonalnym, stochastycznym i algorytmicznym. Tu nakreślimy główne idee dowodu analitycznego.

Algorytm. HMC wykonuje iteracje, z których każda składa się z trzech kroków. Szukamy docelowego rozkładu w przestrzeni $\mathbb{Q}$, proporcjonalnego do danej gęstości $\mathfrak{f}$ (lub inaczej, całki $\int_{\mathbb{Q}} \mathfrak{f}$). Inaczej, ale równoważnie, chcemy znaleźć próbkę wybraną zgodnie z rozkładem proporcjonalnym do $\mathfrak{f}$.

Niech h będzie pewnym rozkładem w przestrzeni $\mathbb{Q}$, czyli $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ będzie próbką punktów z $\mathbb{Q}$. Do przestrzeni $\mathbb{Q}$ domnażamy kartezjańsko przestrzeń $\mathbb{P}$ izomorficzną z $\mathbb{Q}$.

Krok I: Rozrzucanie. W tej przestrzeni $\mathbb{P}$ wybieramy ustalony rozkład $\mathfrak{g}$ i na przestrzeni $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$ konstruujemy rozkład $h \cdot \mathfrak{g}$ (traktujemy zmienne jako niezależne). Inaczej rzecz ujmując, dla każdej punktu próbki w $\mathbb{Q}$ losujemy niezależnie próbkę $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{P}^n$ zgodnie z $\mathfrak{g}$, otrzymując $((q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n))$. Możemy to zrobic, bo wybraliśmy znane $\mathfrak{g}$.

Krok II: Przekręcanie. Teraz rozkład $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g}$ przekształcamy za pomocą transformacji $H\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{P} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{P}$ o specjalnych własnościach zależnych tylko od $\mathfrak{f}$ i $\mathfrak{g}$, tzn. przesuwamy punkty skonstruowanej próbki z $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$ za pomocą H na nowe miejsca $((Q_1, P_1), \ldots (Q_n, P_n)) = (H(q_1, p_1), \ldots, H(q_n, p_n)) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{P})^n$.

Krok III: Rzutowanie. Na koniec rzutujemy otrzymaną gęstość na przestrzeń $\mathbb{Q}$. W ten sposób z próbki po transformacji wybieramy tylko współrzędną z $\mathbb{Q}$, czyli $(Q_1, \ldots, Q_n) \in \mathbb{Q}^n$.

Otrzymana nowa gęstość $\hat{h}$ jest obrazem gęstości w jednej iteracji algorytmu, tzn. próbka Q jest obrazem próbki q. Jest zdumiewające, że można tak dobrać przekształcenie H, by iterowana procedura zbiegała do docelowej gęstości $\mathfrak{f}/\int_{\mathbb{Q}} \mathfrak{f}$ (tj. do próbki ze znormalizowanego rozkładu proporcjonalnego do $\mathfrak{f}$).

Parę słów o przekształceniu H. Sukces algorytmu HMC zależy od doboru ruchu H punktów w przestrzeni $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$. Oryginalnie ruch ten był wyprowadzany z równań Hamiltona mechaniki klasycznej. Mianowicie, dla docelowej gęstości $\mathfrak{f}$ i wybranej przez nas gęstości pomocniczej $\mathfrak{g}$ definiujemy energię (hamiltonowską, hamiltonian) $\mathcal{H}(q,p) = -\log(\mathfrak{f}(q) \cdot \mathfrak{g}(p)) = \mathcal{U}(q) + \mathcal{V}(p)$, interpretując q jako położenie, a p jako pęd poruszającej się cząsteczki. W tym kontekście $\mathcal{V}(p)$ można nazwać energią kinetyczną, a $\mathcal{U}(q)$ energią potencjalną. Ruch cząsteczki jest zadany układem równań $\dot{Q} = \partial\mathcal{H}(Q,P)/\partial P$, $\dot{P} = -\partial\mathcal{H}(Q,P)/\partial Q$, przy czym kropka nad zmiennymi oznacza tradycyjnie pochodną po czasie. Rozwiązanie tego układu po ustalonym czasie t wyznacza transformację H zależności stanu końcowego (Q,P) (w przestrzeni fazowej $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$) od początkowego (q,p).

Należy przy tym pamiętać, że w naszym modelu taka energia i taka transformacja nie muszą reprezentować jakiegoś faktycznego układu fizycznego. Korzystamy tu li tylko z osiągnięć formalizmu hamiltonowskiego.

Ruch hamiltonowski ma wiele ważnych własności, z których będziemy wykorzystywać zachowanie miary i energii.

– *Miara* – przekształcenie H zachowuje miarę (Lebesgue'a) $d(q,p)$, w szczególności dla dowolnej funkcji całkowalnej A na $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$ mamy (całkowania po $d(q,p)$):

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}\times\mathbb{P}} A \circ H = \iint\limits_{\mathbb{Q}\times\mathbb{P}} A\,. \tag{1}$$

– *Energia* – przekształcenie H zachowuje energię (trajektoria zawiera się w poziomicach $\mathcal{H}$), a zatem również funkcje energii, w szczególności $\mathfrak{f}(q) \cdot \mathfrak{g}(p) = \mathfrak{f}(Q) \cdot \mathfrak{g}(P)$, lub inaczej:

$$\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g} = (\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g}) \circ H\,. \tag{2}$$

Możemy teraz opisać algorytm HMC w terminach iteracji przekształcenia działającego na gęstościach. Najpierw dobieramy gęstość $\mathfrak{g}$ na $\mathbb{P}$, $\mathfrak{g} \geqslant 0$, $\int_{\mathbb{P}} \mathfrak{g} = 1$

oraz czas t i liczymy $(Q, P) = H(q, p)$. Niech h będzie dowolną gęstością (albo nawet funkcją całkowalną) na $\mathbb{Q}$.

Krok I: Rozrzucanie. Gęstość $h(q)$ na $\mathbb{Q}$ przechodzi na gęstość $h(q) \cdot \mathfrak{g}(p)$ na $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$.

Krok II: Przekręcanie. Gęstość $h(q) \cdot \mathfrak{g}(p)$ przeprowadzamy na gęstość $h(Q) \cdot \mathfrak{g}(P)$, albo w skrócie z $h \cdot \mathfrak{g}$ robimy $(h \cdot \mathfrak{g}) \circ H$ – jest to nowa gęstość na $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$.

Krok III: Rzutowanie. Na koniec rzutujemy tę nową gęstość na przestrzeń $\mathbb{Q}$. Inaczej, otrzymujemy gęstość $\int_{\mathbb{P}} (h \cdot \mathfrak{g}) \circ H(q, p)\, \mathrm{d}p$, zależną tylko od $q \in \mathbb{Q}$.

Otrzymujemy przekształcenie z gęstości na $\mathbb{Q}$ w inne gęstości na $\mathbb{Q}$:

$$\mathcal{T}(h)(q) = \int_{\mathbb{P}} (h \cdot \mathfrak{g}) \circ H(q, p)\, \mathrm{d}p. \tag{3}$$

Ze skomplikowanego algorytmu na punktach przestrzeni $\mathbb{Q}$ zrobiliśmy operator liniowy (względem h) na gęstościach.

Uwaga 1.1 (o przekształceniu $\mathcal{T}$).

- Poniżej zdefiniujemy dokładnie, w jakiej przestrzeni mieszczą się gęstości h i wykażemy, że przekształcenie $\mathcal{T}$ jest dobrze określone. Będzie to przestrzeń L^2 funkcji całkowalnych z kwadratem, ale według specjalnej formuły.
- Większość wyników przenosi się na przestrzenie $L^{\mathfrak{q}}$ dla $\mathfrak{q} > 1$, bezboleśnie dla $\mathfrak{q} < \infty$.
- Rozkład $\mathfrak{g}$ może zależeć od punktu q, $\mathfrak{g}(p|q)$, o ile dla (prawie) każdego q spełnia wymagane warunki (jest gęstością), wtedy też energia kinetyczna $\mathcal{V}(p|q)$ bedzie zależeć od położenia. Nie zajmujemy się tu tym uogólnieniem.
- Nasz ruch hamiltonowski nie zależy od stałych czynników normujących, ponieważ w równaniach ruchu znikają one przez logarytm i pochodną po czasie. Zmienią się poziomy energii, ale nie sam ruch.
- W praktyce ruch H jest implementowany dyskretnie żabimi skokami (*leap-frog algorithm*), w efekcie naprzemiennego całkowania numerycznego raz po jednej, a raz po drugiej zmiennej. Własności niezmiennicze są wtedy również zachowane, ale trzeba (z rzadka) podejmować decycje o ruchu, bądź bezruchu, zależnie od wylosowanego pędu p. To jest ważny szczegół, ale nie będziemy się tu zajmować implementacją.

Przykład 1.1. Na tym przykładzie pokażemy mechanizm przekształcenia, bo oczywiście szukana stała normująca jest tu znana. Załóżmy, że $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ i niech

docelowa gęstość będzie proporcjonalna do gęstości standardowego rozkładu normalnego $\mathfrak{f}(q) = \exp(-q^2/2)$. Dobieramy $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ i standardowo $\mathfrak{g}(p) = \exp(-p^2/2)/\sqrt{2\pi}$. Otrzymujemy hamiltonian $\mathcal{H}(q,p) = -\log(\mathfrak{f}(q)\cdot\mathfrak{g}(p)) = q^2/2 + p^2/2 - 1/2\log(2\pi)$. Równania ruchu mają postać $\dot{Q} = \partial\mathcal{H}(Q,P)/\partial P = P$ oraz $\dot{P} = -\partial\mathcal{H}(Q,P)/\partial Q = -Q$. Rozwiązaniem po czasie t jest obrót o kąt t. Punkt $(Q(t), P(t))$ będący w czasie t końcem trajektorii startującej w chwili $t = 0$ z punktu (q,p) leży na okręgu $Q^2 + P^2 = q^2 + p^2$, będącym poziomicą energii $\mathcal{H}$. Rozwiązanie dane jest wzorami

$$Q(t) = q\cos t + p\sin t, \quad P(t) = -q\sin t + p\cos(t).$$

Wyobraźmy sobie, że początkowa gęstość $h(q)$ też ma rozkład normalny, ze średnią 0 i odchyleniem standardowym σ. W kroku I algorytmu otrzymujemy dwuwymiarowy rozkład normalny $h\cdot\mathfrak{g}$ o średniej $(0,0)$ i diagonalnej macierzy kowariancji z przekątną $(\sigma^2, 1)$, której poziomicami są elipsy z półosiami równoległymi do osi współrzędnych. Jeśli $\sigma > 1$, to elipsy są rozciągnięte w poziomie, wzdłuż osi $\mathbb{Q}$ (szerokie i niskie), jeśli $\sigma < 1$, to są one rozciągnięte w pionie, wzdłuż osi $\mathbb{P}$ (wąskie i wysokie). W kroku II obracamy te elipsy o stały kąt względem punktu $(0,0)$. Jeśli kąt jest „rozsądny", $t \in (0, \pi/2)$, to otrzymamy elipsy ukośne odpowiadające poziomicom gęstości $\exp(-Q^2/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi\sigma}\cdot\exp(-P^2/2)/\sqrt{2\pi}$, przy czym pod Q i P należy podstawić wzory z q i p z rozwiązania. Macierzą kowariancji będzie poprzednia macierz diagonalna pomnożona przez macierz obrotu, zmienne Q i P będą po obrocie skorelowane. Po zrzutowaniu dwuwymiarowego rozkładu normalnego otrzymujemy znowu rozkład normalny. Zauważmy, że szerokie elipsy skrócą się, a wąskie wydłużą. W tym szczególnym przypadku, w klasie rozkładów normalnych, h z rozkładu o wariancji odległej od docelowej równej jeden otrzymaliśmy rozkłady $\mathcal{T}h$ o wariancjach bliższych docelowej jedynki. Rozważania dotyczące zmiany wartości średniej między h a $\mathcal{T}h$ w tym przykładzie zostawiamy jako ćwiczenie.

Ograniczając dziedzinę do nośnika $\mathfrak{f}$, możemy zakładać, że $\mathfrak{f} > 0$ na $\mathbb{Q}$.

2. Wyniki

Jeśli założymy, że nieujemna funkcja $\mathfrak{f}$ jest całkowalna, czyli $\int_{\mathbb{Q}}\mathfrak{f} < \infty$, to gęstości, o których mowa, będziemy umieszczać w przestrzeni $L^2_{\mathfrak{f}}$:

$$L^2_{\mathfrak{f}} = \left\{ h\colon \mathbb{Q}\to\mathbb{R} \;:\; \|h\|^2_{\mathfrak{f}} = \int\limits_{\mathbb{Q}} \frac{h^2}{\mathfrak{f}} < \infty \right\}. \tag{4}$$

Uwaga 2.1 (wiarygodność). Funkcję $\tilde{h} = h/\mathfrak{f}$ nazwiemy *wiarygodnością* gęstości h względem (prawie gęstości) $\mathfrak{f}$. Przestrzeń $\widetilde{L^2} = \{\tilde{h} : \int_{\mathbb{Q}} |\tilde{h}|^2 \mathfrak{f} < \infty\}$ wiarygodności $\tilde{h} = h/\mathfrak{f}$ z normą $\|\tilde{h}\|^2 = \int_{\mathbb{Q}} |\tilde{h}|^2 \cdot \mathfrak{f}$ jest izometryczna z L^2. Będzie się to przewijać przez obliczenia. W tej przestrzeni operator zadany jest wzorem $\widetilde{\mathcal{T}}\tilde{h} = \int_{\mathbb{P}} \tilde{h} \circ H \cdot \mathfrak{g}$.

W przestrzeni $L^2_{\mathfrak{f}}$ mamy poprawnie określony iloczyn skalarny $\langle a, b\rangle = \int_{\mathbb{Q}} ab/\mathfrak{f}$. Dla wygody będziemy pisać L^2 zamiast $L^2_{\mathfrak{f}}$. Mówimy, że operator $\mathcal{T}\colon L^2 \to L^2$ jest *samosprzężony*, jeśli $\langle a, \mathcal{T}b\rangle = \langle \mathcal{T}a, b\rangle$ dla dowolnych funkcji $a, b \in L^2$. Szczęśliwie, w przypadku ruchu hamiltonowskiego operator $\mathcal{T}$ jest samosprzężony zawsze, kiedy gęstość $\mathfrak{g}$ jest parzysta, czyli gdy $\mathfrak{g}(p) = \mathfrak{g}(-p)$ (zob. uwagę 4.1).

Ponieważ naszym celem jest wykazanie zbieżności iteracji operatora $\mathcal{T}$, chcemy wykluczyć sytuacje, kiedy z oczywistych powodów nie ma jedynej granicy. Jeśli dziedzinę $\mathbb{Q}$ można rozbić na dwa rozłączne zbiory, na których H działa niezmienniczo, to na każdym takim niezmienniczym podzbiorze będziemy mieli osobną granicę. W naszym przypadku dla uproszczenia przyjmiemy (zbyt) silną *własność pokrycia*:

$$Q(q, \mathbb{P}) = \mathbb{Q} \text{ dla prawie każdego } q \in \mathbb{Q}. \tag{5}$$

Dla przykładu 1.1 z obrotem oznacza to, że w rzutowaniu obrazem pionowej linii $(q, \mathbb{P})$ po obrocie jest całe $\mathbb{Q}$. Obrót o kąt $t = \pi$ nie spełnia tego warunku, bo wtedy $H(q, \mathbb{P}) = (-q, \mathbb{P})$ i obraz prostej pionowej jest też pionową prostą, a jej rzut na $\mathbb{Q}$ jest jednym punktem $-q$.

Iteracje operatora definiujemy: $\mathcal{T}^0 h = h$ i $\mathcal{T}^{n+1} = \mathcal{T} \circ \mathcal{T}^n$.

Twierdzenie 2.1. *Załóżmy, że dla docelowej gęstości proporcjonalnej do* $\mathfrak{f}$ *na* $\mathbb{Q}$ *dobierzemy gęstość* $\mathfrak{g}$ *na* $\mathbb{P}$ *i odwracalną transformację* $H\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{P} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{P}$ *mającą* własności niezmienniczości i pokrycia (1), (2) *i* (5). *Załóżmy dodatkowo, że przekształcenie* $\mathcal{T}\colon L^2_{\mathfrak{f}} \to L^2_{\mathfrak{f}}$ *zdefiniowane wzorem* (3) *jest samosprzężone. Wtedy dla każdego* $h \in L^2_{\mathfrak{f}}$ *iteracje przekształcenia są silnie zbieżne* (*zob.* (4)) *do granicy* $\alpha \cdot \mathfrak{f}$, *przy czym* $\alpha = \int_{\mathbb{Q}} h \,/ \int_{\mathbb{Q}} \mathfrak{f}$, *a mianowicie*:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \mathcal{T}^n h - \frac{\int_Q h}{\int_Q \mathfrak{f}} \cdot \mathfrak{f} \right\|^2_{\mathfrak{f}} = 0.$$

Twierdzenie uogólnia się na przestrzenie $L^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{f}}$.

Dowód nie jest zbyt trudny. Zauważymy dalej, że operator $\mathcal{T}$ w pewnym sensie uśrednia argument (zob. wzór (8)), wobec tego, z powodu wypukłości funkcji $x \mapsto x^2$, nie powiększa normy argumentu, a wręcz poza punktami

stałymi ją zmniejsza (zob. nierówność (11)). W L^2 ciągi ograniczone mają punkty skupienia w sensie słabej zbieżności. Używając samosprzężenia (lemat 5.1) dowodzimy, że każdy punkt skupienia ciągu iteracji $\mathcal{T}^n h$ musi mieć postać $\alpha\mathfrak{f}$, co prowadzi (stwierdzenie 5.2) do słabej zbieżności iteracji. Dodatkowo, dowód zbieżności norm do normy granicy daje (wniosek 5.3) zbieżność silną.

Uwaga 2.2 (zbieżność wykładnicza). Dla szczególnego przypadku ruchu hamiltonowskiego z wyborem pomocniczego rozkładu $\mathfrak{g}$ w standardowej postaci normalnej można udowodnić, zakładając logarytmiczną wypukłość $\mathfrak{f}$ (czyli że $-\log\mathfrak{f}$ jest jednostajnie wypukły, co oznacza, że rozkład $\mathfrak{f}$ jest bardzo podobny do rozkładu normalnego), że zbieżność jest wykładnicza. Dowodu tego tu nie prezentujemy.

Jak widać, korzystamy pełną garścią z klasycznych, znanych narzędzi analizy funkcjonalnej. To jest właśnie zysk z zamiany nietypowych, trudnych operatorów w prostych przestrzeniach, wymagających za każdym razem indywidualnego podejścia na proste, liniowe operatory w przestrzeniach funkcyjnych, dla których bogata teoria jest znana i zbadana.

3. Operator $\mathcal{T}$ w L^2

Dla prostoty zapisu przyjmujemy, że h jest gęstością, to znaczy $h \geqslant 0$ i $\int_{\mathbb{Q}} h = 1$.

Lemat 3.1. *Zachodzą następujące własności:*

$$\mathfrak{f} \in L^2 \quad \textit{oraz} \quad \|\mathfrak{f}\|^2 = \int\limits_{\mathbb{Q}} \mathfrak{f}, \tag{6}$$

$$\mathcal{T}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}, \tag{7}$$

$$\mathcal{T}h = \mathfrak{f} \cdot \int\limits_{\mathbb{P}} \frac{h}{\mathfrak{f}} \circ H \cdot \mathfrak{g}, \tag{8}$$

$$\int\limits_{\mathbb{Q}} h = \langle h, \mathfrak{f}\rangle, \tag{9}$$

$$\int\limits_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}h = \int\limits_{\mathbb{Q}} h, \tag{10}$$

$$\|\mathcal{T}h\| \leqslant \|h\|. \tag{11}$$

Równość w nierówności (11) *zachodzi tylko w przypadku* $h = \alpha \cdot \mathfrak{f}$ ($\mathfrak{f}$ *prawie wszędzie*), *przy czym* $\alpha = \alpha(h) = \int h \,/\, \int \mathfrak{f}$.

Dowód. Równość (6) uzyskujemy przez podstawienie do wzoru na normę, tożsamość (7) wynika bezpośrednio z równości (8), dla dowodu wzoru (8) używamy własności niezmienniczych: $\int_{\mathbb{P}} \frac{h}{\mathfrak{f}} \circ H \cdot (\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g}) \circ H = \int_{\mathbb{P}} \frac{h}{\mathfrak{f}} \circ H \cdot (\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g})$, przy czym $\mathfrak{f}$ nie zależy od $p \in \mathbb{P}$. Równość (9) otrzymujemy bezpośrednio z definicji iloczynu skalarnego w przestrzeni $L^2_{\mathfrak{f}}$, natomiast tożsamość (10) jest konsekwencją równości $\int_{\mathbb{Q}} \int_{\mathbb{P}} (h \cdot \mathfrak{g}) \circ H = \iint_{\mathbb{Q}\times\mathbb{P}} (h \cdot \mathfrak{g}) = \left(\int_{\mathbb{Q}} h\right)\left(\int_{\mathbb{P}} \mathfrak{g}\right)$. Nierówność (11) wynika z następującego oszacowania:

$$\|\mathcal{T}h\|^2 = \int\limits_{\mathbb{Q}} \left| \int\limits_{\mathbb{P}} \frac{h}{\mathfrak{f}} \circ H \cdot \mathfrak{g} \right|^2 \mathfrak{f} \leqslant \int\limits_{\mathbb{Q}} \int\limits_{\mathbb{P}} \left| \frac{h}{\mathfrak{f}} \circ H \right|^2 \mathfrak{g}\,\mathfrak{f} =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{Q}\times\mathbb{P}} \left| \frac{h}{\mathfrak{f}} \right|^2 \circ H \cdot (\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{f}) \circ H = \iint\limits_{\mathbb{Q}\times\mathbb{P}} \left| \frac{h}{\mathfrak{f}} \right|^2 \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{f}.$$

To ostatnie wyrażenie jest równe $\left(\int_{\mathbb{Q}} \left|\frac{h}{\mathfrak{f}}\right|^2 \mathfrak{f}\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{P}} \mathfrak{g}\right) = \|h\|^2$, ponieważ po zlikwidowaniu H dzięki niezmienniczości otrzymaliśmy rozdzielone zmienne oraz $\mathfrak{g} \geqslant 0$ i $\int_{\mathbb{P}} \mathfrak{g} = 1$.

Przy ustalonym $q \in \mathbb{Q}$ równość zachodzi tylko wtedy, jeśli $(h/\mathfrak{f})(H(q,p))$ jest stałe dla $\mathfrak{g}$-prawie wszystkich p. Z własności pokrycia oznacza to, że $h/\mathfrak{f}$ jest stałe na $\mathfrak{f}$-prawie całym $\mathbb{Q}$. Stała jest wyliczona z równości (10). □

Wniosek 3.2. *Operator* $\mathcal{T}$ *jest dobrze zdefiniowanym ciągłym* (*ograniczonym*) *przekształceniem* $\mathcal{T}\colon L^2 \to L^2$. *Ma on wartość własną* 1 *o wielokrotności* 1, *której odpowiada kierunek własny wyznaczony przez* $\mathfrak{f}$. *Pozostała część widma leży wewnątrz koła jednostkowego.*

A priori nie jest pewne, czy wartość własna 1 jest izolowana. Gdyby tak było, to zbieżność wykładnicza do kierunku własnego byłaby zapewniona.

Uwaga 3.1 (wzór na wariancję). Dowód kluczowej nierówności (11) można w istocie interpretować jako wzór na wariancję zmiennej losowej: $D^2X = E(X^2) - (EX)^2$, przy czym zmienna $X(p)$ jest wiarygodnością $h/\mathfrak{f} \circ H(q,p)$ przy ustalonym q względem prawdopodobieństwa $\mathfrak{g}(p)$. Normy $\|h\|^2$ i $\|\mathcal{T}h\|^2$ są całkami odpowiednio z $E(X^2)$ i $(EX)^2$ po $\mathbb{Q}$ względem miary $\mathfrak{f}$. Ich różnica dla każdego q jest nieujemna, wobec tego całki są równe, o ile dla każdego ustalonego q zmienna X jest stała. Własność pokrycia zapewnia, że stała ta jest taka sama dla wszystkich q.

4. Operator sprzężony $\mathcal{T}^\dagger$

Założyliśmy, że ruch H jest odwracalny, wobec tego ruch H^{-1} jest dobrze określony i ma te same własności niezmiennicze co H. Zdefiniujmy operator $\mathcal{T}^\dagger$ przy pomocy H^{-1}:

$$\mathcal{T}^\dagger h = \int_{\mathbb{P}} (h \cdot \mathfrak{g}) \circ H^{-1}.$$

Lemat 4.1. *Operator $\mathcal{T}^\dagger$ jest sprzężony do $\mathcal{T}$. Ponadto dla $a, b \in L^2$ mamy*

$$\langle \mathcal{T} a, b \rangle = \langle a, \mathcal{T}^\dagger b \rangle.$$

Dowód. Wykorzystamy równość (8) i niezmienniczość. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{T} h, k \rangle &= \int_{\mathbb{Q}} \left(\int_{\mathbb{P}} \frac{h}{\mathfrak{f}} \circ H \cdot \mathfrak{g} \right) \cdot k = \\
&= \iint_{\mathbb{Q}\times\mathbb{P}} \frac{h}{\mathfrak{f}} \cdot (\mathfrak{g} \cdot k) \circ H^{-1} = \\
&= \iint_{\mathbb{Q}\times\mathbb{P}} \frac{h}{\mathfrak{f}} \cdot \left(\frac{k}{\mathfrak{f}}\right) \circ H^{-1} \cdot (\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{f}) \circ H^{-1} = \\
&= \iint_{\mathbb{Q}\times\mathbb{P}} \frac{h}{\mathfrak{f}} \cdot \left(\frac{k}{\mathfrak{f}} \circ H^{-1}\right) \cdot (\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{f}) = \int_{\mathbb{Q}} h \left(\int_{\mathbb{P}} \frac{k}{\mathfrak{f}} \circ H^{-1} \cdot \mathfrak{g} \right) = \langle h, \mathcal{T}^\dagger k \rangle.
\end{aligned}$$

□

Uwaga 4.1. Dla ruchu hamiltonowskiego i parzystej gęstości $\mathfrak{g}$ operator $\mathcal{T}$ jest samosprzężony.

Dowód lematu 4.1 – *wytłumaczenie inżynierskie.* Jeśli H był określony przez ruch po czasie t, to H^{-1} jest ruchem po czasie $-t$. Z parzystości $\mathfrak{g}(p)$ wynika parzystość $\mathcal{V}(p) = -\log(\mathfrak{g}(p))$ i nieparzystość $\mathcal{V}'(p) = \partial\mathcal{H}/\partial p$. Po podstawieniu do równań ruchu $-t$ zamiast t otrzymujemy $-\dot{Q} = \mathcal{V}'(P)$ i $-\dot{P} = -\mathcal{U}'(Q)$. Po podstawieniu $-P$ zamiast P otrzymujemy $-\dot{Q} = \mathcal{V}'(-P) = -\mathcal{V}'(P)$ oraz $\dot{P} = -(-\dot{P}) = -\mathcal{U}'(Q)$, czyli te same równania, co dla H. Oznacza to, że jeśli ruch (wprost) startujący z punktu (q, p) po czasie t znajduje się w punkcie (Q, P), to startujący z punktu $(q, -p)$ ruch (wstecz) po czasie $-t$ znajduje się w punkcie $(Q, -P)$.

Aby zobaczyć, ile miary zebrało się w punkcie q po zadziałaniu operatora $\mathcal{T}$, musimy pozbierać po wszystkich p cząsteczki miary z punktów $(Q,P) = H(q,p)$. Analogicznie dla operatora $\mathcal{T}^\dagger$ zbieramy cząsteczki miary z punktów $(Q^\dagger,P^\dagger) = H^{-1}(q,p)$. Zauważmy jednak, że miara w punkcie (Q,P) jest równa $h(Q)\,\mathrm{d}Q\cdot\mathfrak{g}(P)\,\mathrm{d}P$ i jest, dzięki parzystości $\mathfrak{g}$, taka sama jak miara w punkcie $(Q,-P)$, bo tam jest równa $h(Q)\,\mathrm{d}Q\cdot\mathfrak{g}(-P)\,\mathrm{d}P$. Pierwsza z nich, kiedy stosujemy operator $\mathcal{T}$, jest przenoszona do punktu (q,p), a druga, kiedy stosujemy $\mathcal{T}^\dagger$, do punktu $(q,-p)$. Po zrzutowaniu na q, czyli zsumowaniu po wszystkich p tych cząsteczek, otrzymujemy tę samą miarę dla $\mathcal{T}h$ i $\mathcal{T}^\dagger h$ w punkcie q. A to oznacza, że $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\dagger$.

Obserwację tę można rozszerzyć na inne inwolucje w $\mathbb{P}$, ale wtedy trzeba starannie wymienić wszystkie niezbędne warunki.

Puryści mają tu pole do popisu, korekt i uściśleń. □

5. Granice iteracji $\mathcal{T}^n$ operatora samosprzężonego.

Z nierówności $\|\mathcal{T}h\| \leqslant \|h\|$ wnioskujemy przez indukcję, że $\|\mathcal{T}^n h\| < \|h\|$, chyba że $h = \alpha\mathfrak{f}$ – wtedy zachodzi równość. Dla $h \in L^2$ definiujemy

$$V(h) = \inf_n \|T^n h\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|T^n h\|^2.$$

Granica ta istnieje dzięki monotoniczności i ograniczoności ciągu norm.

Oczywiście dla dowolnej iteracji mamy $V(h) = V(\mathcal{T}^N(h))$. Ponieważ interesują nas granice iteracji, dla danego h_0 i $\varepsilon > 0$ będziemy dobierać odpowiednio dużą iterację $h = \mathcal{T}^M h_0$, tak, by $V(h_0) \leqslant \|h\|^2 < V(h_0) + \varepsilon = V(h) + \varepsilon$.

Z twierdzenia Alaoglu wynika, że nieskończone, ograniczone zbiory w L^2 mają punkty skupienia w słabej (w L^2 to to samo, co w *-słabej) topologii. To oznacza, że z ciągu $\mathcal{T}^n h_0$ możemy wybrać podciąg $\mathcal{T}^{k_n}$ zbieżny słabo do pewnego $h_\infty \in L^2$. Jeden z ciągów indeksów $(k_n - M)$ lub $(k_n - M - 1)$ zawiera nieskończenie wiele dodatnich indeksów parzystych, nazwijmy je $(2m) \subset 2\mathbb{N}$. Stąd wynika, że $\mathcal{T}^{2m}(h)$ (lub $\mathcal{T}^{2m}(\mathcal{T}h)$, wtedy zamiast h bierzemy $\mathcal{T}h$) zbiega słabo do h_∞, $\mathcal{T}^{2m}h \rightharpoonup h_\infty$, co oznacza, że dla każdego $a \in L^2$ mamy $\langle \mathcal{T}^{2m}h, a\rangle \to \langle h_\infty, a\rangle$.

Lemat 5.1. *Jeżeli $\mathcal{T}$ jest operatorem samosprzężonym w L^2 i dla $h = \mathcal{T}^M h_0$ nieskończony ciąg parzystych iteracji $\mathcal{T}^{2m}(h)$ jest (słabo) zbieżny do h_∞, to granica ta ma normę $\|h_\infty\|^2 = V(h_0)$.*

Dowód. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i prawie wszystkich m mamy $\|\mathcal{T}^{2m}h\|^2 < V(h_0)+\varepsilon$. Powiększając M możemy przyjąć, że również $\|h\| \leqslant V(h_0) + \varepsilon$. Dla takich m mamy zatem: $V(h_0) \leqslant \|\mathcal{T}^m(h)\|^2 = \langle \mathcal{T}^m(h), \mathcal{T}^m h\rangle = \langle \mathcal{T}^{\dagger m}\mathcal{T}^m(h), h\rangle = \langle \mathcal{T}^{2m}h, h\rangle \to \langle h_\infty, h\rangle \leqslant \|h_\infty\| \cdot \|h\| \leqslant \|h_\infty\| \cdot \sqrt{V(h_0)+\varepsilon}$. Ponieważ h_∞ jest ustalone, a $\varepsilon > 0$ dowolne, to zachodzi nierówność $V(h_0) \leqslant \|h_\infty\|^2$.

Nierówność w drugą stronę nie zależy od samosprzężenia (ani specyfiki operatora): $\|h_\infty\|^2 = \langle h_\infty, h_\infty\rangle \leftarrow \langle \mathcal{T}^{2m}(h), h_\infty\rangle \leqslant \|\mathcal{T}^{2m}(h)\| \cdot \|h_\infty\| \leqslant \|h\| \cdot \|h_\infty\| \leqslant \sqrt{V(h_0)+\varepsilon} \cdot \|h_\infty\|$. Stąd $\|h_\infty\|^2 \leqslant V(h_0)$, co kończy dowód równości. □

Stwierdzenie 5.2. *Każdy słabo zbieżny podciąg iteracji $\mathcal{T}^n(h_0)$, przy czym $h_0 \in L^2$, ma granicę o tej samej normie $\sqrt{V(h_0)}$. W konsekwencji cały ciąg jest zbieżny, $\mathcal{T}^n(h_0) \rightharpoonup \alpha\mathfrak{f}$, przy czym $\alpha = \int_{\mathbb{Q}} h_0 \,/\, \int_{\mathbb{Q}} \mathfrak{f}$.*

Dowód. Każdy podciąg ciągu iteracji $\mathcal{T}^n(h_0)$ zawiera podciąg słabo zbieżny. Granica ta jest również granicą podciągu pewnych parzystych iteracji którejś iteracji $\mathcal{T}^M h_0$, zatem zgodnie z lematem 5.1 ma normę równą $\sqrt{V(h_0)}$.

Jeśli $\mathcal{T}^{m_n}h_0 \rightharpoonup h_\infty$, to dla dowolnego $a \in L^2$ mamy $\langle \mathcal{T}_n^m h_0, a\rangle \to \langle h_\infty, a\rangle$. Wtedy też $\mathcal{T}^{m_n+1}h_0 \rightharpoonup \mathcal{T}h_\infty$. Mamy bowiem $\langle \mathcal{T}^{m_n+1}h_0, a\rangle = \langle \mathcal{T}^{m_n}h_0, \mathcal{T}^\dagger a\rangle \to \langle h_\infty, \mathcal{T}^\dagger a\rangle = \langle \mathcal{T}h_\infty, a\rangle$. Oznacza to, że h_∞ i $\mathcal{T}h_\infty$ są (słabymi) granicami podciągów $\mathcal{T}^n h_0$, zatem mają te same normy. Lemat 3.1 orzeka, że z równości norm funkcji h_∞ i jej obrazu $\mathcal{T}h_\infty$ wynika, że mamy do czynienia z punktem stałym $h_\infty = \alpha\mathfrak{f} = \mathcal{T}h_\infty$ operatora $\mathcal{T}$. Stałą α otrzymujemy z niezmienniczości całki. Innymi słowy, $\alpha \int_{\mathbb{Q}} \mathfrak{f} = \int_{\mathbb{Q}} h_\infty = \langle h_\infty, \mathfrak{f}\rangle \leftarrow \langle \mathcal{T}^{m_n}h_0, \mathfrak{f}\rangle = \int_{\mathbb{Q}} h_0$. Wobec tego każdy podciąg $\mathcal{T}^{m_n}h_0$ zawiera pod-podciąg zbieżny do tej samej granicy $\alpha\mathfrak{f}$, a to oznacza, że wyjściowy ciąg $\mathcal{T}^n h_0$ jest zbieżny do tej samej granicy.

□

Wniosek 5.3. *Ciąg $\mathcal{T}^n(h_0)$ zbiega silnie do $\alpha\mathfrak{f}$, przy czym $\alpha = \int_{\mathbb{Q}} h_0 \,/\, \int_{\mathbb{Q}} \mathfrak{f}$.*

Dowód. To jest standardowe twierdzenie. Ze słabej zbieżności $\langle \mathcal{T}^n h_0, a\rangle \to \langle \alpha\mathfrak{f}, a\rangle$ i zbieżności norm (czyli $\|\mathcal{T}^n h_0\|^2 \to V(h_0)$) do normy granicy (czyli $\|\alpha\mathfrak{f}\|^2 = V(h_0)$) wynika silna zbieżność. Obliczmy to: $\|\mathcal{T}^n h_0 - \alpha\mathfrak{f}\|^2 = \langle \mathcal{T}^n h_0 - \alpha\mathfrak{f}, \mathcal{T}^n h_0 - \alpha\mathfrak{f}\rangle = \|\mathcal{T}^n h_0\|^2 - \langle \mathcal{T}^n h_0, \alpha\mathfrak{f}\rangle - \langle \alpha\mathfrak{f}, \mathcal{T}^n h_0\rangle + \|\alpha\mathfrak{f}\|^2 \to V(h_0) - 2\langle \alpha\mathfrak{f}, \alpha\mathfrak{f}\rangle + V(h_0) = 0$. □

Bibliografia

[1] S. Duane, A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, D. Roweth, *Hybrid Monte Carlo*, Phys. Lett. B. 195 (1987), nr 2, 216–222.
[2] S. Livingstone, M. Betancourt, S. Byrne, M. Girolami, *On the geometric ergodicity of Hamiltonian Monte Carlo*, Bernoulli 25 (2019), nr 4A, 3109–3138.
[3] S. Ghosh, Y. Lu, T. Nowicki, *HMC – an algorithms in data mining. The functional analysis approach*, w przygotowaniu.
[4] S. Ghosh, Y. Lu, T. Nowicki, *HMC – an algorithms in data mining. The probabilistic approach*, w przygotowaniu.
[5] S. Ghosh, Y. Lu, T. Nowicki, *HMC – an algorithms in data mining. The algorithmic approach*, w przygotowaniu.

Soumyadip Ghosh
ghoshs@us.ibm.com
Yingdong Lu
yingdong@us.ibm.com
Tomasz Nowicki
tnowicki@us.ibm.com
IBM Watson Research Center

Z seriali TV

Wydział Matematyki to najmniej zmysłowe miejsce na świecie.

wypowiedź jednej z postaci w serialu *Wzór*, odcinek 2

Zupełnie jak ci goście w Atenach, co nie mieli nic do roboty i wymyślili filozofię.

wypowiedź jednej z postaci w serialu *Ranczo*

Ojciec Mateusz (pokazuje nauczycielce kartkę zapisaną przez ucznia): Mogłaby mi pani powiedzieć, czego dotyczy to wyliczenie?

Nauczycielka: To jest obliczenie w rachunku prawdopodobieństwa z wykorzystaniem nierówności Czebyszewa. Ale to już naprawdę jest wyższa matematyka. (...) Rachunek prawdopodobieństwa w praktyce to są właśnie gry liczbowe i to jest prawdziwa matematyka, a nie jakieś tam rachunki akademickie.

Z serialu *Ojciec Mateusz*, odcinek 179

Robert (przedstawia sobie Krzysztofa i Lidię): Zdobywałem zasoby ludzkie. Trochę świeżej krwi. Lidia, nasza największa nadzieja. Pełnomocnik zarządu do zadań specjalnych. Lidio, to jest mózg RK Investments – Krzysztof Majewski.

Lidia: Banach.

Krzysztof: O, jak ten matematyk.

Lidia: Daleka rodzina.

Krzysztof: Musi pani świetnie liczyć.

Lidia: Pieniądze liczę nie najgorzej.

Z serialu *Leśniczówka*, odcinek 4

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 241–255
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Andrzej Dąbrowski (Wrocław)

Przypadek – wróg czy sojusznik?

Bóg nie gra w kości ze światem.
Albert Einstein

Einsteinie, nie mów Bogu, co ma robić.
Niels Bohr

...będziemy musieli przyzwyczaić się do myślenia o przypadku nie jako o irytującej przeszkodzie, nie jako o „nieistotnym dodatku do zjawisk" (jak jest w słowniku filozoficznym), ale jako o źródle nieograniczonych możliwości...
Leonard Andriejewicz Rastrigin

Wydawnictwo American Book Publisher opublikowało 15 listopada 2001 roku trzecie wydanie pewnej publikacji, o której autor posta zamieszczonego na stronie www.amazon.com napisał: „[k]siążka bardzo wciągająca, o znaczeniu historycznym, pełna niespodzianek aż do końca". Inna osoba stwierdziła: „[a]bsolutnie bajeczna!! Cudowna i zupełnie bezużyteczna". Książka, umieszczona przez New York Public Library w katalogu *Psychologia*, nosiła tytuł *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*. Wydana po raz pierwszy w 1955 roku, była uwieńczeniem wieloletnich wysiłków zmierzających do tego, by wyprodukować jak najwięcej cyfr losowych.

Generowanie cyfr losowych jest zbyt ważne, aby pozostawić je przypadkowi. Pierwsze tablice, zawierające ich pięć tysięcy, utworzył w 1920 roku angielski statystyk L. H. C. Tippett (1902–1985) (zob. [3, 19]). Powstały one przez losowe wyciąganie z woreczka kartek z cyframi. Kolejne tablice, zawierające już 41 600 cyfr, opublikował Tippett w wydawnictwie Cambridge University Press w 1927

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

roku pod tytułem *Random Sampling Numbers*, co wprowadziło sporo zamieszania terminologicznego. Cyfry w tablicach były drukowane w grupach po cztery dla przejrzystości i te grupy, nieszczęśliwie, Tippett nazwał liczbami. A przecież nikt nie nazwie numeru telefonicznego – liczbą. Tablice cyfr („liczb") losowych zawierają generowane różnymi metodami cyfry i kontrola jakości tablic polega na testowaniu jednorodności i niezależności cyfr i grup cyfr.

Niestety, powszechne jest nadużywanie terminu „liczby losowe". Nawet w renomowanym *A Dictionary of Statistics*, wydanym przez Oxford University Press, hasło dotyczące cyfr losowych brzmi *random digits – see pseudo-random numbers*. Pod hasłem *pseudo-random numbers* jest jednak poprawna definicja liczby losowej, a raczej – bardziej poprawnie – pseudo-losowej:

> **pseudo-random numbers.** Numbers, generated by a mathematical formula which has the property that the generated numbers appear to be independent observations from a uniform distribution.

I na tym polega różnica: tablice zawierają cyfry generowane losowo. Liczby losowe (pseudo-losowe) są to liczby generowane w ten sposób, aby „wyglądały" na realizację zmiennych losowych wybranych rozkładów. Tak naprawdę nikt już nie korzysta z tych tablic od lat, bo rosnące zapotrzebowanie na *liczby losowe* zaspokajają na bieżąco komputery.

Te pierwsze w historii tablice cyfr losowych utworzone zostały z wziętych losowo zapisów powierzchni parafii w spisie powszechnym. I tak budowane były kolejne, coraz większe tablice, utworzone ze środkowych liczb mantys z tablic logarytmicznych, położenia losowo zapalanej plamki światła na obracającym się dysku, czy utworzone z sum innych cyfr losowych, które – jak pokazali Horton i Smith (zob. [10]) – miały większą „losowość" niż oryginalne.

Rekordowy milion liczb wyprodukowała w 1955 roku RAND Corporation, która użyła impulsów światła o losowej częstotliwości rzucanych na koło elektronicznej ruletki podłączonej do komputera. Wyniki przed zamieszczeniem w tablicach były starannie filtrowane i testowane.

Historia dopisała zaskakującą puentę tego wydarzenia, opisaną 24 września 2020 roku w *The Wall Street Journal* (zob. [14]). Będący na kwarantannie z powodu Covid-19 i dysponujący wolnym czasem programista z RAND Corporation, Garry Briggs, zajął się sprawdzeniem, czy tablice z 1955 roku zawierają rzeczywiście cyfry losowe. Wykrył, że nie do końca, co zostało spowodowane przez przestawienie kart perforowanych, na których zapisano wyniki losowania z elektronicznej ruletki. Briggs przekazał hiobową wieść swojej firmie, która tak zachwalała swoje dzieło: „[t]a książka jest owocem pionierskich obliczeń RAND, a także świadectwem cierpliwości i wytrwałości badaczy we wczesnych

latach istnienia firmy". Rzecznikowi prasowemu pozostało zakomunikować, że błędy zostaną poprawione w kolejnym elektronicznym bezpłatnym wydaniu (w [20] jest adres do pobrania – jeszcze nie poprawionego dzieła – w formatach pdf lub plain TEX).

„Księga liczb losowych! Pozbawiony znaczenia przypadkowy zbiór liczb, ani fakt, ani fikcja. Do czegóż to potrzebne?" – pytał wybitny statystyk amerykański, pochodzący z Indii, C. Radhakrishna Rao (ur. 1920), zob. [16]. Na to pytanie postaram się odpowiedzieć w tym artykule.

1. Trochę historii

Przypadek to pseudonim Boga, który nie chce się pod czymś osobiście podpisać.
Anatol France

W różnych kulturach uważano, że przypadek był sygnałem pochodzącym od boga, a odczytanie tego sygnału odbywało się za pomocą wróżb. Nie przypadkiem angielskie słowo *divination* (wróżenie) jest blisko spokrewnione ze słowem *divine* (boski). Po polsku słowo „los" oznacza zarówno przeznaczenie, jak i przypadek (na przykład w zwrocie „ciągnąć losy").

Grecy słuchali rad Pytii, która odurzona oparami wydobywającymi się ze szczeliny w ziemi w Delfach wypowiadała przypadkowe słowa, tworzące przepowiednię. Zacytujmy fragment artykułu [2]:

> [W Rzymie] Haruspikowie sięgający do etruskich tradycji mantycznych wyciągali wnioski dotyczące powodzenia lub niepowodzenia przedsięwzięć państwowych na podstawie wyglądu wnętrzności zwierzęcych, serca, płuc, a nade wszystko wątroby, której czterdzieści różnych części odpowiadać miało czterdziestu sferom niebieskim. Augurowie wróżyli przede wszystkim z lotu ptaków, z ich głosów, także (tzw. *auspicia pullaria*) z zachowania się kur podczas jedzenia.

Decyzje, jakie zapadały w republice, wybór wszystkich urzędników, wszystko niemal wymagało przed wejściem w życie *inauguracji*, czyli potwierdzenia przez augurów.

Ciągnięcie losów było symbolem bezstronnego podejmowania decyzji. W czasie bitwy trojańskiej los rozstrzygnął, kto – Menelaos czy Parys – ma pierwszy użyć włóczni w pojedynku. Ziemię Obiecaną podzielono pomiędzy poszczególne plemiona poprzez rzucenie losów. Dziś rzut monetą rozstrzyga, kto rozpocznie mecz piłkarski. Eksperymenty rolnicze i medyczne za pomocą umiejętnie wprowadzonych elementów losowych (zob. paragraf 2) pozwalają wyeliminować wpływ nieistotnych czynników.

Przypadek jako element podejmowania decyzji odgrywa do dziś wielką rolę w polityce. Przez losowanie wybrano Samuela na pierwszego króla Izraela. Losowanie stało na straży równości praw politycznych (izonomia) w demokracji ateńskiej. Wbrew powszechnemu mniemaniu, Grecy uważali wybory za niedemokratyczne, gdyż kandydaci na członków administracji mogli być wybierani ze względu na przeszłe zasługi, popularność czy przy pomocy przekupstwa. Dlatego byli wybierani przez losowanie, podobnie jak członkowie ławy sądowej. Praktyka ta trwa do dziś w niektórych systemach sądowniczych, gdzie sędziów czy ławników wybiera się drogą losowania.

Los często też rozstrzygał o tym, kto został powołany do wojska, od starożytności, przez Polskę pod zaborami, po wojnę w Wietnamie. Żołnierze amerykańscy byli wybierani na tę wojnę według skomplikowanej procedury. Na 366 zwitkach papieru zapisano daty – miesiąc i dzień – nie wykluczając 29 lutego. Umieszczono je w nieprzezroczystych kapsułkach i wrzucono do przezroczystego pojemnika. W czasie publicznego pokazu powszechnie szanowane osoby, na przykład kongresmeni, losowały daty z pojemnika. Kolejność tak wybranych dat wyznaczała kolejność poboru do wojska. Najpierw byli powołani kandydaci urodzeni 14 września (pierwsza wylosowana data). Ostatni powołani byli kandydaci urodzeni 24 września. Co więcej, tego samego dnia wylosowano kolejność liter alfabetu – pierwsza była litera „J", druga „G" itd. Osoby urodzone tego samego dnia miały ustaloną kolejność według kodu, składającego się z pierwszych liter: nazwiska, imienia i drugiego imienia. Osoba o inicjałach JJJ była powołana jako pierwsza, JJG jako druga i tak dalej. Paradoksalnie, taki system nie zapewnił losowości wyboru. Do dziś studenci statystyki wykonują ćwiczenie polegające na pokazaniu, że taki wybór dat nie okazał się losowy.

Kolejny pobór, rok później, odbył się według bardzo precyzyjnej metody losowania. Po wstępnym, pracochłonnym przygotowaniu kapsuł wrzucono je do bębnów losujących, które obracały się przez 90 minut, zanim z jednego z nich wyciągnięto pierwszą datę urodzenia, a z drugiego numer kolejności poboru osób urodzonych tego dnia. Osiągnięcie prawdziwej losowości jest niezwykle trudne.

2. Eksperymenty

W starożytności i średniowieczu dominowały strategie poznawcze praktycznie oparte na rozważaniach teoretycznych. Wybitnym przykładem jest matematyka grecka z rozumowaniem dedukcyjnym, wywodzącym twierdzenia z zestawu aksjomatów odzwierciedlających wiedzę aprioryczną. Uniwersytety średniowieczne omawiały dzieła Platona i Arystotelesa, w których opis przyrody

oparty był na spekulacjach. Zapomniane dzieła starożytnych przechowały się w tłumaczeniach na arabski i dostały się do Europy dzięki ich tłumaczeniu na łacinę.

W dziełach uczonych arabskich, które czytali średniowieczni uczeni, zawarte były też opisy innego sposobu zdobywania wiedzy – metody eksperymentalnej. Roger Bacon (1214–1292), angielski franciszkanin zwany *Doctor Mirabilis*, opisał metodę opartą na powtarzającym się cyklu obserwacji, hipotez, eksperymentów i potrzebie niezależnej weryfikacji. Taki sposób postępowania nosi dziś nazwę *metody naukowej*. Bacon zapisał szczegółowo sposób, w jaki przeprowadzał eksperymenty optyczne, aby inni mogli odtworzyć i niezależnie przetestować jego wyniki. W dziele *Opus Majus* tłumaczył, że „[n]auka eksperymentalna jest niemal całkowicie nieznana w gronie osób studiujących, stąd nie można przekonać ich o jej użyteczności, a tymczasem jako jedyna może dokładnie zbadać i wyjaśnić, co dokonuje się siłami natury, co poprzez sztuki, czego można dokonać przy pomocy oszustwa, co wysławiają najrozmaitszego rodzaju pieśni, zaklęcia, inwokacje i ofiary błagalne, a co pozostaje, gdy usunie się z nich wszelki fałsz" (cytat za [6]).

Filozof angielski, również o nazwisku Bacon (Francis Bacon, 1561–1626), w opublikowanym w 1620 roku dziele *Novum Organum, sive indicia vera de Interpretatione Naturae* wręcz odrzucił metodologię Arystotelesa. Metodzie sylogizmu Bacon przeciwstawił indukcję – stopniowe uogólnianie wiedzy – zamiast natychmiastowego układania ogólnych twierdzeń na podstawie danych zmysłowych. Dlatego Bacon stwierdził, że umysłowi ludzkiemu nie trzeba skrzydeł, lecz ołowiu. Zdaniem Bacona trzeba operować doświadczeniem, a nie założeniami. Eksperyment wynagrodzi braki zmysłów, a indukcja – złudzenia rozumu. Eksperyment, będąc podstawą poznania, nie może obejść się bez indukcji, ponieważ wymaga uogólnienia. Praca naukowa powinna przypominać pracę pszczół – uczony ma zbierać i przetwarzać to, co zebrał. Właśnie indukcja ma spełnić zadanie przetwarzania danych.

Bacon zwrócił uwagę na niedoskonałość metody eksperymentalnej – brak precyzji pomiarów, która według niego wynikała z zamierzonej tendencyjności mierzącego. Uważał, że dane powinny być zebrane przez niewykształconych asystentów, bo nie są zainteresowani ich manipulowaniem.

Na problem braku precyzji pomiarów zwrócił również uwagę twórca eksperymentu naukowego Galileusz (1564–1642). Według niego to nie tendencyjność mierzącego była tego przyczyną, ale przypadek. W dziele *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (*Dialog o dwóch najważniejszych systemach świata*) z 1632 roku, Galileusz interesował się ustaleniem odległości od Ziemi do nowo odkrytej gwiazdy na podstawie 78 pomiarów. Stwierdził, że po to,

by ustalić prawdziwą (bezbłędną) wartość pomiaru, należy odpowiedzieć na pytanie, czym są błędy pomiarowe.

Oto, co zauważył Galileusz:

- błędy są przypadkowe,
- małe błędy są bardziej częste niż duże,
- błędy są symetryczne (tak samo często pomiar jest nieoszacowany, jak przeszacowany),
- prawdziwa wartość mierzonej cechy jest w pobliżu największej koncentracji pomiarów.

Angielski matematyk Thomas Simpson (1710–1761), posługując się krzywą błędów o kształcie trójkąta, udowodnił w pracy przedstawionej Royal Society w 1755 roku, że średnia arytmetyczna pomiarów jest najlepszym oszacowaniem prawdziwej wartości mierzonej wielkości. Wynik Simpsona można uogólnić – wystarczy założyć symetrię krzywej błędów. Dla asymetrycznej krzywej błędów są lepsze, różne od średniej, oszacowania prawdziwej wartości mierzonej wielkości. Na podstawie charakterystyki Galileusza zaczęto konstruować różne krzywe częstości występowania błędów, z których największą rolę odegrała słynna krzywa Gaussa.

Eliminacja błędów pomiarowych była świetnym rozwiązaniem dla eksperymentów laboratoryjnych, gdzie można było kontrolować wszystkie czynniki wpływające na badaną wielkość. Nie było to możliwe dla badań prowadzonych w terenie, na przykład w rolnictwie. Badania wpływu dawki nawozu na plon powinny uwzględniać rodzaj gleby, nawodnienie, warunki klimatyczne (temperatura, nasłonecznienie), nachylenie terenu, występowanie chorób roślin itd. Badacze przeprowadzali coraz bardziej skomplikowane i kosztowne eksperymenty, aby wyeliminować wpływ niekontrolowanych czynników.

Prawdziwa rewolucja dokonała się na farmie Rothamsted, zlokalizowanej na południu Anglii, gdzie mieści się jeden z najstarszych na świecie instytutów badawczych rolnictwa, założony w 1843 roku Rothamsted Research Institute. Tam prowadzony jest nieprzerwanie od 1856 roku do dziś eksperyment *Park Grass Experiment*. W 1919 roku został tam zatrudniony matematyk, statystyk i genetyk Ronald Aylmer Fisher (1890–1962).

Odpowiedź Fishera na wyścig zbrojeń w planowaniu doświadczeń była prosta i logiczna – skoro żaden sposób rozmieszczenia zabiegów agronomicznych na poletkach nie daje gwarancji wyeliminowania wszystkich niekontrolowanych czynników, zabiegi należy rozmieścić przypadkowo. Nie ma więc czynnika, który byłby skorelowany z wyborem poletka. Nawet gdyby się zdarzyło, że na wszystkich poletkach z danym zabiegiem został uzyskany wysoki plon, można oszacować prawdopodobieństwo, że taki wynik wystąpił przypadkowo.

Metoda Fishera, nazwana randomizacją, wprowadzała do doświadczeń, jak sam określił, „rygorystycznie zaplanowaną niepewność". Paradoksalnie, Fisher wprowadził porządek i kontrolę w badaniach naukowych poprzez dodanie do nich chaosu. Po raz pierwszy w historii Fisher przeprowadził eksperyment z użyciem randomizacji w Rothamsted w 1923 roku. Badał w nim wpływ nawożenia na plon różnych odmian ziemniaków. Wydana w 1935 roku książka *Design of experiments* stała się biblią eksperymentatorów nie tylko w rolnictwie.

Naturalnym polem zastosowań randomizacji jest medycyna – tutaj oddziaływanie czynników wpływających na stan pacjenta jest jeszcze bardziej różnorodne niż w rolnictwie. Zadziwiające jest, że stało się to dopiero w 1948 roku. Dokonał tego angielski epidemiolog i statystyk Austin Bradford Hill (1897–1991), który badał wpływ streptomycyny na wyleczenie gruźlicy. Tak późne przyjęcie metody randomizacji było prawdopodobnie efektem praktyki zwanej w angielskiej medycynie „spijaniem śmietanki", polegającej na przypisywaniu zdrowszym pacjentom eksperymentalnego leku oraz oporowi środowiska, które wzbraniało się podejmować ważne decyzje dotyczące zdrowia na podstawie losowania. Hillowi udało się wprowadzić randomizację, gdyż użył dwóch argumentów: o małej liczbie dawek streptomycyny i tego, że w istniejącej sytuacji byłoby nieetyczne w inny sposób wybrać pacjentów. Streptomycyna była nowo odkrytym antybiotykiem, produkowanym tylko w Stanach Zjednoczonych i podlegającym ograniczeniom eksportowym. Rządowi brytyjskiemu udało się kupić pięćdziesiąt kilogramów streptomycyny na potrzeby naukowe.

Randomizacja stosowana jest w wielu dziedzinach nauki (w tym chemii czy naukach społecznych), ale i w polityce społecznej. Na przykład w Kenii eksperyment randomizowany badał skuteczność różnych metod odrobaczania, w Indiach wpływ płci sołtysa na zarządzanie wioską. W Indonezji w ten sposób wykazano polepszenie ogólnej jakości dróg, jeśli stosuje się kontrolę po oddaniu drogi do użytku.

3. Wnioskowanie – indukcja

Wnioskowanie przez indukcję w naukach przyrodniczych ma szczególną cechę, która odróżnia ją od rozumowania dedukcyjnego w matematyce. Indukcja (przyrodnicza) opiera się na zgromadzonych obserwacjach lub wynikach przeprowadzonego eksperymentu. Problem polega na tym, że obserwacje zawierają błędy pomiarowe i nie dotyczą całej populacji. Eksperyment jest obarczony zarówno błędami pomiarowymi, jak i nieznajomością wszystkich czynników wpływających na jego wyniki. W dedukcji prawdziwość twierdzeń opiera się na prawdziwości założeń i poprawności rozumowania logicznego. W indukcji za-

łożenia są jedynie prawdopodobne lub obarczone są losowym błędem. Jak mają więc wyglądać odpowiedniki twierdzeń? Przecież nie mogą być bezwzględnie prawdziwe. Kartezjusz (1596–1650) powiada: „[j]est prawdą zupełnie pewną, że gdy nie jest w naszej mocy rozpoznać mniemania najprawdziwsze, winniśmy iść za najbardziej prawdopodobnymi" (przełożył T. Boy-Żeleński, cytat za [16]).

Taki sposób rozumowania przyjął Pierre Simon Laplace (1749–1827), który zastanawiał się nad możliwością tego, że komety nie są ciałami Układu Słonecznego, lecz intruzami spoza tego układu (zob. [12]). Rozumowanie Laplace'a było następujące: gdyby komety pochodziły spoza Układu Słonecznego, to kąty pomiędzy płaszczyznami orbitalnymi komet i płaszczyzną ekliptyki byłyby rozmieszczone losowo w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$. Laplace oszacował, że prawdopodobieństwo zgodności rozkładu kątów orbit komet z hipotezą losowości jest duże. Przyjął więc w dalszych rozważaniach hipotezę, że komety nie są regularnymi ciałami Układu Słonecznego. Takie rozumowanie nosi dziś nazwę testowania hipotez statystycznych. Według Jerzego Spławy-Neymana (1894–1981), jednego z twórców teorii testowania hipotez statystycznych (zob. [12]), była to pierwsza w historii próba testowania.

Bardzo upraszczając, testowanie hipotezy H_1, zwanej hipotezą alternatywną lub konkurencyjną, jest swego rodzaju analogiem dowodu nie wprost. Wzorcem danych, *statystyką testową*, jest pewna wybrana przez badacza funkcja, opisująca relację danych względem H_1. Testem dla hipotezy H_1 jest przynależność wzorca do pewnego zbioru, zwanego zbiorem krytycznym. Niech H_0 będzie negacją H_1 (precyzyjniej, dopełnieniem H_1 w zbiorze wszystkich rozważanych hipotez). Miarą zgodności danych z H_1 jest prawdopodobieństwo, że wartość statystyki testowej należy do zbioru krytycznego, gdyby H_0 była prawdziwa. Gdy to prawdopodobieństwo jest małe, to H_0 jest bardzo nieprawdopodobna – co jest odpowiednikiem sytuacji, w której w dowodzie nie wprost zaprzeczenie tezy prowadzi do zdania fałszywego. Wtedy też przyjmuje się, że są argumenty na prawdziwość H_1. Gdy to prawdopodobieństwo jest duże, to brak argumentów na odrzucenie H_0, a tym samym na prawdziwość H_1.

W rozumowaniu Laplace'a H_1 było stwierdzeniem „komety należą do Układu Słonecznego", a H_0 – „komety nie należą do Układu Słonecznego". Wzorcem danych użytym przez Laplace'a była średnia wartość zmierzonych kątów, a testem – przynależność tej średniej do zbioru bardzo prawdopodobnych wartości średnich, które mogą się pojawić przy założeniu H_1.

W roku 1946 trzydziestojednoletni aktuariusz R. D. Clarke, pracujący dla Prudential Assurance Company opublikował w *Journal of the Institute of Actuaries* jednostronicową pracę (zob. [5]) o nalotach pocisków rakietowych V1

na Londyn. Clark napisał: „[p]odczas ataku bomb latających na Londyn często twierdzono, że miejsca uderzenia bomb mają tendencję do grupowania się. W związku z tym postanowiono zastosować test statystyczny, aby sprawdzić, czy można znaleźć jakiekolwiek poparcie dla tego zarzutu. I dyskretnie podkreślił: „...niedawno wziąłem udział w tym śledztwie." Dokumenty wskazują, że w czasie wojny wykonywał on specjalne zadania dla Ministerstwa Produkcji Lotniczej.

Stwierdzenie, czy pociski V1 grupują się wokół jakiegoś celu, czy też rozrzucone są losowo na obszarze Londynu, przypomina pytanie Laplace'a o trajektorie lotu komet. Test statystyczny χ^2, którego użyto, aby sprawdzić tę hipotezę, został zaproponowany po raz pierwszy w 1900 roku przez Karla Pearsona (1857–1936) do odpowiedzi na pytanie, czy kulka ruletki losowo odwiedza przegródki koła w kasynie w Monte Carlo. Clarke podzielił obszar Londynu na 576 kwadratów o polu $1/4\,\mathrm{km}^2$ i testował za pomocą testu χ^2, czy 537 pocisków spadło na Londyn losowo. Clarke oszacował to prawdopodobieństwo na 0,88, a więc sugerował, że nie ma dowodu na nielosowe rozmieszczenie pocisków.

Test χ^2 mógł być zastosowany przy założeniu, że pociski spadały na różne obszary Londynu z tym samym prawdopodobieństwem. Współczesne badania (zob. [17]) pokazały, że pociski miały trzy centra koncentracji, a więc test był niepoprawnie zastosowany. Podobny problem występuje w wielu problemach wnioskowania statystycznego. Klasyczne testy zostały opracowane dla pewnej bardzo ograniczonej liczby modeli. Rzeczywistość przekracza wszelkie teoretyczne założenia. Czy w takim razie statystycy są bezradni? I tu podobnie, jak w eksperymentach rolniczych czy medycznych, z pomocą przyszedł przypadek.

Autor tego, jak określono, „najlepszego statystycznego leku przeciwbólowego, jaki kiedykolwiek wyprodukowano", profesor Uniwersytetu Stanforda Bradley Efron (ur. 1938), został uhonorowany w 2018 roku nagrodą International Prize in Statistics – jednym z dwóch najwyższych wyróżnień w statystyce – za opracowanie w roku 1977 metody *bootstrap*, ułatwiającej ocenę niepewności wyników naukowych, która miała niezwykły wpływ na wiele dziedzin nauki. Termin *bootstrap* został zapożyczony z powiedzenia *pull oneself up by one's own bootstraps* („wydobyć się o własnych siłach", dosłownie „za własne sznurowadła"). Nie wiem, dlaczego w monografii *An introduction to the bootstrap*, wydanej wraz z R. J. Tibshiranim w 1993 roku Efron tłumaczył, że termin zapożyczył z dziewiętnastowiecznej książki Rudolfa Raspego *Przygody barona Munchausena*, który miał się wyciągnąć z bagna za sznurówki. Problem polega na tym, że Munchausen wyciągnął się z bagna... ale ciągnąc się za własne włosy.

Metoda *bootstrap* używana jest w sytuacji, gdy nie można zastosować żadnego teoretycznego modelu do oceny estymacji wybranych parametrów dla danych. Pozostaje wtedy tylko zbiór danych, które są w naszej dyspozycji. *Bootstrap* pozwala się wydobyć o własnych siłach z tego kłopotu.

Metoda ta jest swoistym recyklingiem danych: produkuje się wiele ich kopii, za każdym razem przy użyciu losowania z próbki ze zwracaniem. Dla każdej z tych kopii stosuje się proste estymatory statystyczne parametrów. Mnogość wartości tych estymatorów, tyle ile jest kopii, przybliża ich rozkład prawdopodobieństwa. Poprawność otrzymanych wyników jest zagwarantowana przez twierdzenia graniczne rozkładu prawdopodobieństwa.

Bootstrap, pomimo swojej prostoty, jest metodą zaskakująco efektywną. Jest ona często znacznie bardziej niezawodna niż podejście parametryczne, gdy rozkład estymowanych parametrów nie jest znany, i prawie tak samo wiarygodna jak podejście parametryczne w sytuacjach, gdy rozkład ten jest znany.

4. Matematyka wspomagana przez przypadek

Losowość jest niedocenianym
narzędziem matematycznym.
Quanta Magazine

Użyteczność przypadku dla rozumowania matematycznego kojarzona jest przede wszystkim z metodą probabilistyczną Erdősa. Jest ona pewnym wariantem metody szufladkowej Dirichleta. Wykorzystuje dwa elementarne fakty z rachunku prawdopodobieństwa:

– jeśli $P(A) > 0$, to zdarzenie A jest niepuste,
– Jeśli $EX > 0$, to istnieje wartość zmiennej losowej X większa od 0.

Okazało się, że mistrzowskie wykorzystanie tych własności daje niezwykłe, nowe możliwości dowodzenia twierdzeń, głównie mających charakter egzystencjalny (wykorzystanie pierwszego faktu) lub nierówności (wykorzystanie drugiego faktu).

Naturalnym miejscem, gdzie przypadek stanowi istotne rozwiązanie, jest teoria gier. Niektóre gry dwuosobowe o sumie zerowej nie mają strategii optymalnej. Natomiast zawsze istnieje optymalna dla obu graczy strategia mieszana, to znaczy taka, że losuje się strategie czyste z określonym prawdopodobieństwem. Podobnie punkt równowagi Nasha zawsze istnieje w klasie strategii mieszanych. Te dwa fakty przywodzą na myśl starożytnych wodzów, którzy podejmowali swoją decyzję po wysłuchaniu rad augurów wyłonionych metodą losową.

Przypadek jest wielką pomocą w deterministycznych procedurach obliczeniowych. Jest zadziwiające, że „dosypanie" do nich losowości pozwala na uzyskanie wyniku w skomplikowanych przypadkach.

Obliczenia niektórych matematycznych wielkości mogą być bardzo trudne, na przykład oszacowanie objętości dowolnej d-wymiarowej figury wypukłej. Barany i Furedi w 1986 roku (zob. [9]) wykazali, że żaden algorytm nie może tego dokonać w czasie wielomianowym. Co więcej, nawet gdy figura jest wielościanem wypukłym opisanym poprzez listę ścian lub krawędzi, to oszacowanie objętości jest zagadnieniem #P-trudnym (zob. [7]). Tymczasem istnieje algorytm (zob. [8]), który z prawdopodobieństwem $3/4$ potrafi tego dokonać. Można to prawdopodobieństwo przybliżyć do jedynki dowolnie blisko, powtarzając tę procedurę skończoną liczbę razy i biorąc medianę uzyskanych oszacowań. Algorytm polega na skonstruowaniu dyskretnego, skończonego łańcucha Markowa, generującego spacer losowy po figurze wypukłej, wyznaczającego oszacowanie objętości figury.

A wszystko zaczęło się od wielce zaskakującego wyniku Buffona[1] z 1777 roku – prawdopodobieństwo, że losowo rzucona igła o długości l przetnie którąś ze szpar podłogi, pokrytej równoległymi deskami o szerokości $2l$ wynosi $\frac{1}{\pi}$. Dużo później uogólniono to na zadanie o rzucaniu prostowalnej krzywej płaskiej o długości l na podłogę z deskami o szerokości d (zob. rozdział 20 w książce [1]): oczekiwana liczba przecięć jest równa $\frac{2l}{\pi d}$, co daje bardzo praktyczny wynik.

Niech e_n będzie średnią arytmetyczną liczby przecięć prostowalnej krzywej o nieznanej długości z losowo n-krotnie nałożonej siatki równoległych linii prostych o znanym odstępie d. Wtedy $l_n = \frac{1}{2}\pi e_n d$ jest mocno zgodnym estymatorem długości krzywej l. Oznacza to ni mniej ni więcej, tylko obliczenie pewnej całki metodą losowania.

Laplace jako pierwszy zauważył, że można rzucać igłę o długosci $l < d$, aby uzyskać oszacowanie liczby π, wynoszące $\frac{2l}{de_n}$, przy czym e_n jest średnią arytmetyczną liczby przecięć igły ze szparami podłogi. Jednak zadowalającą dokładność można uzyskać poprzez rzucenie igłą bardzo wiele razy. Laplace, który rzucił igłę tysiąc razy, uzyskał oszacowanie π z dokładnością do jednego miejsca po przecinku (zob. [15]). Pesymizm pogłębia fakt, że każde tak uzyskane oszacowanie jest osiągnięte z prawdopodobieństwem mniejszym niż jeden. Na przykład prawdopodobieństwo uzyskania π z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku w 3400 rzutach jest mniejsze niż 0,015.

I pozostałoby to rozwiązanie miłą matematyczną perełką, gdyby nie problem, z jakim spotkał się w Los Alamos w 1946 roku zespół fizyków, badających

[1] George Louis Leclerc hrabia de Buffon (1707–1788).

dyfuzję neutronów w materiale rozszczepialnym. Pomimo posiadania większości niezbędnych danych, nie byli w stanie wykonać obliczeń z wykorzystaniem konwencjonalnych metod matematycznych.

Nieoczekiwane rozwiązanie problemu przyszło do głowy Stanisławowi Ulamowi (1909–1984), który przebywał w domu na rekonwalescencji i stawiał sobie często pasjans Canfield. Zniechęcony nieudanymi próbami obliczenia prawdopodobieństwa wygranej, zauważył, że jedynym sposobem jego obliczenia jest rozegranie dużej liczby gier i podanie częstości wygranej jako rozwiązania. Przedyskutował z Johnem von Neumannem (1903–1953) możliwość zastosowania takiego rozwiązania do problemu fizyków z Los Alamos. Widzący wielkie możliwości użycia metody Ulama również do innych zagadnień i mający dostęp do skonstruowanego w latach 1943–1945 komputera ENIAC, von Neumann zaprogramował go do szukania rozwiązań metodą losowania, wprowadzając przy okazji generowanie liczb pseudolosowych. Metoda opracowana przez Ulama i von Neumanna uzyskała nazwę Monte Carlo – zaproponował ją Nicholas Metropolis (1915–1999), o czym można przeczytać w książce [11]. Metoda ta, mimo ograniczonej mocy ówczesnych komputerów, stanowiła przełom w projekcie Manhattan. W 1950 roku w Los Alamos użyto jej we wczesnej fazie projektowania bomby wodorowej. Po wyjściu z cienia tajemnicy wojskowej metoda Monte Carlo stała się użytecznym narzędziem – nie tylko w fizyce i matematyce obliczeniowej.

W większości zastosowań metoda Monte Carlo (w skrócie MC) polega na obliczeniu całki lub sumy, którą można interpretować jako wartość oczekiwaną pewnej zmiennej losowej. Prosta metoda MC jest w istocie powtórzeniem postępowania przy obliczaniu wartości π za pomocą rzucania igłą. Cytując za świetnym skryptem Wojciecha Niemiro (zob. [13]):

> Należy wygenerować n zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ o rozkładzie π na przestrzeni X i za estymator całki $\theta = \int_X f(x)\pi(\mathrm{d}x)$ przyjąć średnią z próbki
>
> $$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(X_i\right).$$
>
> Mocne prawo wielkich liczb gwarantuje, że $\hat{\theta}_n \to \theta$ prawie na pewno.

Dalej Niemiro napisał:

> Na pierwszy rzut oka nie widać na czym polega problem! Sumowanie wykonuje każdy kalkulator, całki się sprawnie oblicza numerycznie. Ale nie zawsze. Metody MC przydają się w sytuacjach gdy spotyka się z następującymi trudnościami (lub przynajmniej którąś z nich).

- Przestrzeń X jest ogromna. To znaczy wymiar d jest bardzo duży lub skończona przestrzeń zawiera astronomicznie dużą liczbę punktów.
- Rozkład prawdopodobieństwa π jest „skupiony" w małej części ogromnej przestrzeni X.
- Nie ma podstaw do zakładania, że funkcja f jest w jakimkolwiek sensie „gładka" (co jest warunkiem stosowania standardowych numerycznych metod całkowania).

Metody Monte Carlo mają jedną wspólną cechę – ich wynik jest fałszywy z prawdopodobieństwem $p > 0$. Dla praktycznych zastosowań nie ma to tak bardzo istotnego znaczenia – szczególnie, gdy p jest małe. W matematyce taka sytuacja jest jednak niedopuszczalna. Okazuje się, że istnieje inna klasa metod, w których sojusznikiem jest przypadek, dająca wynik pewny. Taka klasa metod nosi nazwę Las Vegas (w skrócie LV). Ceną, jaką płaci się za wykorzystanie przypadku w algorytmach Las Vegas, jest losowy czas wykonywania procedury. Dobre algorytmy Monte Carlo charakteryzuje niskie prawdopodobieństwo błędu i kontrolowany czas obliczeń, algorytmy Las Vegas – niski oczekiwany czas wykonywania procedury i pewność wyniku.

Przykładem metody Las Vegas jest algorytm *QuickSort* sortowania skończonego ciągu liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$. W pierwszym kroku wybiera się losowo liczbę i ze zbioru $1, 2, \ldots, n$. Ciąg dzieli się na trzy podciągi: $\{x_j : x_j \leqslant x_i, j \neq i\}$, $\{x_i\}$, $\{x_j : x_j > x_i\}$ i do każdego z podciągów, o ile ma długość większą niż dwa, stosuje się rekurencyjnie powyższą procedurę. Kontynuuje się tę procedurę tak długo, aż pozostaną podciągi o długości jeden lub dwa. Ostateczny krok polega na uporządkowaniu podciągów o długości dwa, za każdym razem dokonuje się jednego porównania. Oczekiwany czas wykonania sortowania nie przekracza $2n \log n$ i jest istotnie szybszy niż inne, deterministyczne algorytmy sortowania.

Ciekawego porównania metod MC i LV dostarczają testy pierwszości, czyli algorytmy określające, czy dana n-cyfrowa liczba jest pierwsza (zob. [4]).

Jednym z najefektowniejszych jest test Rabina–Millera (zob. [18]). Jest to algorytm MC, z prawdopodobieństwem błędu 4^{-k} i czasem przeprowadzenia procedury rzędu $O(k \log^4 n)$. Parametr k wybierany jest przez użytkownika testu. Zmniejsza on prawdopodobieństwo błędu, ale wydłuża czas wykonywania.

Konkurencyjny algorytm ECPP (*elliptic curve primality proving*, zob. [21]), w ostatecznej formie podany przez Atkina i Moraina w 1993 roku, bazuje na teorii krzywych eliptycznych z mnożeniem zespolonym i teorii form modularnych, rozwiniętej przez Lenstrę w 1985 roku. Jest to algorytm typu LV (krzywa eliptyczna, od której startuje metoda, zadawana jest w sposób losowy). Oczekiwany czas trwania procedury jest ograniczony przez wyrażenie typu $O(\log^{5+\varepsilon} n)$. Najnowsze wersje algorytmu, będące udoskonaloną wersją wariantu Atkina–Moraina

(tzw. wariant Lenstry–Lenstry–Shallita), działają hipotetycznie jeszcze szybciej, nawet w czasie $O(\log^{4+\varepsilon} n)$.

Najwięcej czasu obliczeniowego tego algorytmu wymaga procedura generowania certyfikatu pierwszości. Największa dotąd liczba pierwsza zweryfikowana procedurą ECPP (w lutym 2020 roku) miała 40 000 cyfr. Generowanie certyfikatu trwało dwadzieścia jeden i pół miesiąca. W praktyce algorytm ECPP jest jedną z najszybszych metod testowania pierwszości dużych liczb o dowolnej postaci. Jest na tyle szybki, że umożliwia dowodzenie pierwszości liczb o kilku tysiącach cyfr na typowych komputerach biurowych w czasie rzędu godzin. Przyspieszenie czasu pracy algorytmu pierwszości uzyskuje się przez równoległe uruchomienie na różnych komputerach obu algorytmów, Rabina–Millera i ECPP, tak długo, aż któryś z nich osiągnie sukces.

Algorytmów Rabina–Millera i ECPP nie zdetronizował pierwszy deterministyczny, o wielomianowym czasie obliczeń, algorytm pierwszości AKS, odkryty przez Agrawala, Kayana i Saxenę w 2002 roku.

Czas obliczenia algorytmu AKS jest niezwykle długi. Przeprowadzono eksperyment (zob. [4]) polegający na sprawdzeniu na tym samym komputerze przy użyciu każdego z tych algorytmów, czy liczba $10^{100} + 267$ jest pierwsza. Pomyślny wynik otrzymano przy stukrotnym użyciu algorytmu Rabina–Millera w czasie 0,3 sekundy, przy użyciu algorytmu ECPP w czasie 2 sekund. Czas pracy algorytmu AKS wynosił 37 tygodni! Użycie algorytmu AKS jest utrudnione przez inny fakt. Mimo, że algorytm podaje bezbłędny wynik, to przy długim czasie obliczeń wzrasta prawdopodobieństwo awarii hardware'u – a to uniemożliwia otrzymanie wyniku.

Jak widać, nawet w najbardziej deterministycznych zagadnieniach teorii liczb przypadek jest nadzwyczajnym sojusznikiem.

Bibliografia

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Dowody z Księgi*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

[2] M. Bardel, Bestiarium Pliniusza, czyli o relacji ludzi i zwierząt w starożytnym Rzymie, http://www.miesiecznik.znak.com.pl/6372008michal-bardelbestiarium-pliniusza-czyli-o-relacji-ludzi-i-zwierzat-w-starozytnym-rzymie/ (dostęp: 2020-12-19).

[3] D. J. Bennett, *Randomness*, Harvard University Press, Cambridge 1998.

[4] R. P. Brent, *Primality Testing*, MSI & CECS, ANU 2010, dostępne pod adresem https://maths-people.anu.edu.au/~brent/pd/comp4600_primality.pdf (dostęp: 2020-12-19).

[5] R. D. Clarke, *An application of the Poisson distribution*, Journal of the Institute of Actuaries 72 (1946), nr 3, 481.
[6] K. Dołowy, *Wbrew bogom*, CeDeWu, Warszawa 2020.
[7] M. E. Dyer, A. M. Frieze, *On the complexity of computing the volume of a polyhedron*, SIAM Journal on Computing 17 (1988), nr 5, 967–975.
[8] M. E. Dyer, A. M. Frieze, R. Kannan, *A random polynomial-time algorithm for approximating the volume of convex bodies*, Journal of the ACM 38 (1991), nr 1, 1–17.
[9] Z. Füredi, I. Bárány, *Computing the volume is difficult*, [w:] *Proc. 18th ACM symposium on theory of computing*, Berkeley, ACM, New York 1986, 442–447.
[10] H. Horton, S. Burke, R. Tynes, *A direct method for producing random digits in any number system*, Ann. Math. Statist. 20 (1949), nr 1, 82–90.
[11] N. Metropolis, *The beginning of the Monte Carlo method*, t. 15, Los Alamos Science 1987.
[12] J. Neyman, *Narodziny statystyki matematycznej*, IM PAN, preprint nr 6, Warszawa 1978.
[13] W. Niemiro, Symulacje stochastyczne i metody Monte Carlo, http://mst.mimuw.edu.pl/wyklady/sst/wyklad.pdf (dostęp: 2020-12-19).
[14] M. M. Phillips, 'A Million Random Digits' Was a Number-Cruncher's Bible. Now One Has Exposed Flaws in the Disorder, https://www.wsj.com/articles/rand-million-random-digits-numbers-book-error-11600893049 (dostęp: 2020-12-19).
[15] M. Ragheb, *The Buffon's needle problem: first Monte Carlo simulation*, https://www.mragheb.com/NPRE%20498MC%20Monte%20Carlo%20Simulations%20in%20Engineering/The%20Buffon's%20Needle%20Problem.pdf (dostęp: 2020-12-19)
[16] C. R. Rao, *Statystyka i prawda*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.
[17] L. P. Shaw, L. F. Shaw, *The flying bomb and the actuary*, Significance 16 (2019), nr 5, 13–17.
[18] Test Millera–Rabina, https://pl.wikipedia.org/wiki/Test_Millera-Rabina (dostęp: 2020-12-19).
[19] R. Zieliński, *Wytwarzanie losowości*, Wiad. Mat. 29 (1992), 189–203.
[20] *A million random digits with 100,000 normal deviates*, RAND Corporation, Santa Monica, CA 2001, dostępne pod adresem https://www.rand.org/pubs/monograph_reports/MR1418.html (dostęp: 2020-12-19).
[21] Elliptic curve primality, https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_curve_primality (dostęp: 2020-12-19).

Andrzej Dąbrowski
Instytut Matematyki, Uniwersytet Wrocławski
Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu
aludwikdabr@gmail.com

Z telewizyjnych teleturniejów

Prowadzący: Czy funkcja tangens jest funkcją ciągłą?
Uczestnik teleturnieju: Tak.
Prowadzący: Nie. Jest funkcją nieokreśloną.

Prowadzący: Czy romb jest trapezoidem?
Uczestnik teleturnieju: Nie.
Prowadzący: Słusznie. Trapezoid jest to trapez o nierównoległych podstawach.

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 257–279
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krzysztof R. Apt (Amsterdam), Sunil Simon (Kanpur),
Dominik Wojtczak (Liverpool)

Gry z potencjałem

1. Wstęp

Matematyczna teoria gier, zapoczątkowana w latach czterdziestych ubiegłego wieku przez Johna von Neumanna i Oskara Morgensterna w ich słynnej książce [17] i ugruntowana przełomowymi pracami Johna Nasha [12,13] stała się w ekonomii standardowym narzędziem do badania i opisu różnych procesów gospodarczych. Od tego czasu rozwinęła się w ogromną interdyscyplinarną dziedzinę. *Handbook of Game Theory*, który składa się z czterech tomów opublikowanych w latach 1992–2014, zawiera łącznie osiemdziesiąt rozdziałów, m.in. dotyczących różnych zastosowań teorii gier w biologii, naukach politycznych, psychologii i socjologii. Wraz z pojawieniem się Internetu teoria gier stała się również istotna w informatyce.

Jednym z głównych działów teorii gier są *gry strategiczne*, w których z każdym graczem związana jest funkcja wypłaty. Uczestnicy dążą do zmaksymalizowania wartości tej funkcji, podczas gdy zależy ona od decyzji podejmowanych jednocześnie przez wszystkich graczy. Pomimo swojej prostoty gry strategiczne są zaskakująco przydatne w modelowaniu różnych form interakcji między graczami, którzy chcą maksymalizować zysk.

Dążąc do przewidzenia wyniku interakcji między graczami, wprowadzono różne pojęcia równowag. Najczęściej używaną jest *równowaga Nasha*, nieformalnie wybór strategii prowadzących do sytuacji, w której każdy gracz jest *a posteriori* zadowolony z swojego wyboru.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie samodzielnego wprowadzenia do pewnej klasy gier strategicznych, które mają *potencjał*. Te gry są istot-

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

ne, ponieważ istnienie potencjału implikuje istnienie równowagi Nasha w tak zwanych strategiach czystych (początkowych). Przedstawimy fundamentalną pracę Monderera i Shapleya z 1996 roku, omówimy klasę *gier słabo acyklicznych* wprowadzonych przez Younga w 1993 roku i Milchtaicha w 1996 roku, jak również wspomnimy o naszych ostatnich wynikach dotyczących naturalnych klas gier słabo acyklicznych.

2. Podstawowe pojęcia

Załóżmy, że jest n graczy, przy czym $n > 1$. Oznaczamy ich liczbami $1, \ldots, n$. *Gra strategiczna* (w skrócie po prostu *gra*) dla n graczy składa się z niepustego (być może nieskończonego) zbioru S_i *strategii* oraz funkcji *wypłaty* $p_i\colon S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ dla każdego gracza i.

Taką grę oznaczamy krotką $(n, S, \mathbf{p})$, przy czym $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ i $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$.

Rozpatrujemy gry strategiczne przy następujących założeniach. Po pierwsze, gracze wybierają swoje strategie *jednocześnie*, a następnie każdy z nich otrzymuje wypłatę ze stworzonej strategii wspólnej. Po drugie, każdy gracz jest *racjonalny*, co znaczy, że jego celem jest maksymalizacja swojej funkcji wypłaty.

Rozważmy grę strategiczną $(n, S, \mathbf{p})$. Każdy element $s \in S$ nazywamy *strategią wspólną*, i-ty element s oznaczamy przez s_i, a ciąg $(s_j)_{j \neq i}$ zapisujemy jako s_{-i}. Przez (s'_i, s_{-i}) oznaczamy strategię wspólną, w której s'_i jest strategią gracza i, natomiast s_j jest strategią każdego innego gracza j. Czasami piszemy (s_i, s_{-i}) zamiast s. Produkt kartezjański $\times_{j \neq i} S_j$ skracamy do S_{-i}.

Strategię s_i gracza i nazywamy *najlepszą odpowiedzią* na strategię wspólną s_{-i} jego przeciwników, jeśli

$$\forall s'_i \in S_i : p_i(s_i, s_{-i}) \geqslant p_i(s'_i, s_{-i}).$$

Strategię wspólną s nazywamy *równowagą Nasha*, jeżeli każde s_i jest najlepszą odpowiedzią na s_{-i}, to znaczy

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \forall s'_i \in S_i : p_i(s_i, s_{-i}) \geqslant p_i(s'_i, s_{-i}).$$

Oznacza to, że strategia wspólna jest równowagą Nasha, jeżeli żaden gracz nie może uzyskać wyższej wypłaty, jeśli tylko on zmieni swoją strategię. Intuicyjnie, równowaga Nasha jest sytuacją, w której *a posteriori* każdy gracz jest zadowolony ze swojego wyboru.

John Nash rozważał w swoich pracach równowagi w *strategiach mieszanych* w grach skończonych. Gra jest *skończona*, jeśli zbiór wszystkich strategii jest skończony. W takiej grze strategia mieszana dla danego gracza jest zdefiniowana

jako rozkład prawdopodobieństwa nad jego skończonym zbiorem strategii. By rozważać takie równowagi, trzeba wprowadzić kanoniczne rozszerzenie funkcji wypłat na zbiór krotek strategii mieszanych. Otrzymana w ten sposób gra jest nazywana *rozszerzeniem mieszanym* początkowej gry skończonej. Dla gry skończonej równowaga Nasha w strategiach mieszanych jest po prostu równowagą Nasha w jej rozszerzeniu mieszanym.

John Nash udowodnił w swoim klasycznym, jednostronicowym artykule [12], że każde rozszerzenie mieszane skończonej gry strategicznej ma (teraz tak nazywaną) równowagę Nasha. Dowód istnienia jest bezpośrednią konsekwencją wyniku topologicznego zwanego uogólnionym twierdzeniem o punkcie stałym Kakutaniego. Rok później Nash opublikował w pracy [13] alternatywny dowód, oparty na bardziej znanym twierdzeniu Brouwera o punkcie stałym, który jest tylko nieco dłuższy.

W wielu książkach na temat teorii gier pojęcie równowagi Nasha jest wprowadzane tylko w kontekście strategii mieszanych. W tej pracy nie będziemy jednak rozważać ani takich strategii, ani silniejszych pojęć równowagi. Zamiast tego skupimy się na naturalnej klasie gier, w których istnieją równowagi Nasha w strategiach początkowych, czasami zwanych *strategiami czystymi*.

Gry dla dwóch graczy są z reguły reprezentowane jako tak zwana *bimacierz*, przy czym zakłada się, że gracze wybierają rząd lub kolumnę. Każdy element macierzy reprezentuje zaistniałe wypłaty dla obydwu graczy.

Przykład 2.1. Klasycznym przykładem gry strategicznej dla dwóch graczy jest gra *dylemat więźnia*, w której każdy gracz ma dwie strategie, W (współpracuj) lub Z (zdradź).

	W	Z
W	$2, 2$	$0, 3$
Z	$3, 0$	$1, 1$

Gra *dylemat więźnia* ma dokładnie jedną równowagę Nasha, mianowicie (Z, Z). Jedną z osobliwości tej gry jest to, że w tej jedynej równowadze Nasha każdy gracz otrzymuje gorszą wypłatę niż we strategii wspólnej (W, W).

Tę grę można łatwo uogólnić na większą liczbę graczy.

Przykład 2.2. Załóżmy, że jest n graczy. Wygodnie jest założyć, że każdy gracz ma dwie strategie, 1, reprezentującą współpracę (wcześniej W), i 0, reprezentującą zdradę (wcześniej Z). Wówczas dla strategii wspólnej s_{-i} przeciwników gracza i suma $\sum_{j \neq i} s_j$ jest równa liczbie strategii 1 w s_{-i}. Oznaczmy przez $\mathbf{1}$ strategię wspólną, w której strategią każdego gracza jest 1, analogicznie wprowadzamy oznaczenie $\mathbf{0}$.

Zdefiniujmy

$$p_i(s) = \begin{cases} 2\sum_{j\neq i} s_j + 1, & \text{jeśli } s_i = 0 \\ 2\sum_{j\neq i} s_j, & \text{jeśli } s_i = 1. \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę, że dla $n = 2$ otrzymujemy początkową grę *dylematu więźnia*.

Łatwo sprawdzić, że strategia wspólna **0** jest jedyną równowagą Nasha w tej grze. Rzeczywiście, w każdej innej strategii wspólnej gracz, który wybrał 1 (współpracuj), otrzyma wyższą wypłatę, jeśli zmieni swoją strategię na 0 (zdradź).

Zauważmy, że wypłata dla każdego gracza w równowadze Nasha **0** wynosi 1, podczas, gdy we strategii wspólnej **1** wynosi ona $2(n-1)$.

Jako ostatni przykład rozważmy klasyczny sposób modelowania konkurencji ekonomicznej między producentami, zwanej *modelem Cournota* na cześć francuskiego ekonomisty Antoine'a Augustina Cournota, który wprowadził ten przykład (jako grę dla dwóch graczy) w pracy [5] z 1838 roku. Jest to standardowy przykład konkurencji w oligopolu, wzięty z podręczników dotyczących mikroekonomii.

Przykład 2.3 (model Cournota)**.** Rozważmy n firm, które niezależnie od siebie wybierają poziom produkcji danego produktu. Dla uproszczenia zakładamy, że poziom produkcji to dowolna nieujemna liczba rzeczywista i że cena produktu jest funkcją liniową, która jest malejącą funkcją całkowitej produkcji.

Ten scenariusz modelujemy za pomocą następującej gry strategicznej. Każdą firmę interpretujemy jako gracza i zakładamy, że dla każdego gracza i jego zbiór strategii to $\mathbb{R}_+$, natomiast jego funkcja wypłaty jest zdefiniowana jako

$$p_i(s) = s_i\Big(a - b\sum_{j=1}^{n} s_j\Big) - cs_i$$

dla pewnych a, b, c, przy czym $a > c$ i $b > 0$.

Wyjaśnijmy tę funkcję wypłaty. Cena produktu jest reprezentowana przez wyrażenie $a - b\sum_{j=1}^{n} s_j$, które, dzięki temu, że $b > 0$, rzeczywiście jest funkcją malejącą całkowitej produkcji, $\sum_{j=1}^{n} s_j$. Ponadto cs_i jest kosztem produkcji odpowiadającym poziomowi produkcji s_i. Innymi słowy, zakładamy dla uproszczenia, że funkcje kosztu produkcji są takie same dla wszystkich firm.

Następnie zauważmy, że gdyby zachodziła nierówność $a \leqslant c$, to wypłaty byłyby zawsze ujemne lub równe zero, ponieważ $p_i(s) = (a-c)s_i - bs_i\sum_{j=1}^{n} s_j$. To tłumaczy powód, dla którego zakładamy, że $a > c$. Dla uproszczenia nie wykluczamy, że cena produktu jest ujemna, ale można łatwo użyć zmodyfikowanej

funkcji wypłaty, dla której cena taka nie jest. Założenie $c > 0$ ma oczywiście sens, ale nie jest konieczne.

Aby znaleźć równowagę Nasha tej gry weźmy strategię wspólną s, ustalmy $i \in \{1, \ldots, n\}$ i oznaczmy $\sum_{j \neq i} s_j$ przez t. Wówczas

$$p_i(s_i, s_{-i}) = s_i(a - c - bt - bs_i).$$

Po przeprowadzeniu elementarnych rachunków wnioskujemy, że wypłata gracza i jest maksymalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$s_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{t}{2}.$$

To stwierdzenie jest równoważne równości

$$s_i = \frac{a-c}{b} - \sum_{j=1}^{n} s_j.$$

Ten układ n równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie, mianowicie

$$s_i = \frac{a-c}{(n+1)b},$$

dla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Jest to więc jedyna równowaga Nasha w tej grze.

Zauważmy, że dla tych wartości s_i cena produktu wynosi

$$a - b\sum_{j=1}^{n} s_j = a - b\frac{n(a-c)}{(n+1)b} = \frac{a+nc}{n+1} = \frac{a-c}{n+1} + c.$$

Oznacza to, że n, to znaczy liczba firm, zwiększa się, cena produktu w równowadze Nasha maleje. Jest to zgodne z intuicyjnym przekonaniem, że zwiększone współzawodnictwo jest korzystne dla klientów. W granicy cena w równowadze Nash dąży do kosztu produkcji c.

Czasami zamiast funkcji wypłaty p_i rozważa się *funkcje kosztów* c_i. Wówczas celem każdego gracza jest minimalizacja kosztów. Gdy używa się funkcji kosztów, strategia wspólna s jest równowagą Nasha, jeśli

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\ \forall s_i' \in S_i : c_i(s_i, s_{-i}) \leqslant c_i(s_i', s_{-i}).$$

Każdej grze, która używa funkcji kosztów, łatwo przypisać standardową grę strategiczną, używając $p_i(s) = -c_i(s)$, więc ich analizę można sprowadzić do gier oryginalnych.

Oczywiście nie wszystkie gry mają równowagę Nasha (pamiętajmy, że mówimy o równowagach w strategiach czystych). Najprostszym przykładem jest gra *orzeł czy reszka*.

	O	R
O	$+1, -1$	$-1, +1$
R	$-1, +1$	$+1, -1$

3. Gry potencjałowe

Jednym z najczęściej cytowanych artykułów z teorii gier z ostatnich 25 lat jest praca Monderera i Shapleya [11], w której wprowadzono pojęcie gier potencjałowych. Jej sukces można wytłumaczyć tym, że zaproponowano w niej bardzo naturalne kryterium istnienia równowag Nasha, które jest spełnione przez wiele dobrze znanych gier. Dzięki temu kryterium można również uzyskać dodatkowe informacje o wspomnianych grach, jako że dostarcza ono naturalny (choć z reguły kosztowny z punktu widzenia obliczeniowego) sposób znalezienia równowagi Nasha. Ten i następne dwa paragrafy są oparte na pracy [11].

Pomysł jest bardzo prosty. Ustalmy grę $G = (n, S, \mathbf{p})$. Funkcję $P\colon S \to \mathbb{R}$ nazywamy *potencjałem* dla G (Monderer i Shapley nazywali ją *potencjałem dokładnym*), jeśli

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \forall s_i', s_i \in S_i\ \forall s_{-i} \in S_{-i}:$$
$$p_i(s_i', s_{-i}) - p_i(s_i, s_{-i}) = P(s_i', s_{-i}) - P(s_i, s_{-i}).$$

Grę, która ma potencjał, nazywamy *grą potencjałową*.

Intuicyjnie, potencjał śledzi zmiany zachodzące w wypłacie, gdy któryś z graczy zmienia swoją strategię, bez brania pod uwagę, który to gracz.

Strategię wspólną s nazywamy *maksimum lokalnym* funkcji $P\colon S \to \mathbb{R}$, jeśli $P(s) \geqslant P(s')$ dla wszystkich strategii wspólnych s', które różnią się od s na co najwyżej jednej współrzędnej. Następujące spostrzeżenie wiąże potencjały z równowagami Nasha i wyjaśnia, dlaczego gry potencjałowe są interesującym obiektem badań.

Uwaga 3.1. Rozważmy grę G z potencjałem P. Równowagi Nasha G pokrywają się z maksimami lokalnymi P. W konsekwencji, wszystkie skończone gry potencjałowe mają równowagi Nasha.

Dowód. Następujące warunki są równoważne:

(a) s jest równowagą Nasha

(b) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \forall s_i' \in S_i : p_i(s_i, s_{-i}) \geqslant p_i(s_i', s_{-i})$,

(c) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \forall s_i' \in S_i : P(s_i, s_{-i}) \geqslant P(s_i', s_{-i})$,
(d) s jest maksimum lokalnym P. □

Powróćmy teraz do gier wprowadzonych w paragrafie 2. Zauważmy, że w grze *dylemat więźnia* dla n graczy z przykładu 2.2 zachodzi równość $p_i(0, s_{-i}) - p_i(1, s_{-i}) = 1$. Z tego wynika, że

$$P(s) = n - \sum_{j=1}^{n} s_j$$

jest potencjałem. Intuicyjnie, ten potencjał liczy graczy, którzy wybrali 0, to znaczy strategię „zdradź".

W przypadku gry odpowiadającej modelowi Cournota w pracy [11] Monderer i Shapley udowodnili poniżej podane twierdzenie.

Twierdzenie 3.1. *Gra z przykładu* 2.3*, odpowiadająca modelowi Cournota, jest grą potencjałową.*

Dowód. Z definicji $p_i(s) = s_i\left(a - b\sum_{j=1}^{n} s_j\right) - cs_i$, a więc

$$p_i(s_i', s_{-i}) = (a-c)s_i' - bs_i'^2 - bs_i' \sum_{j \neq i} s_j,$$

$$p_i(s_i, s_{-i}) = (a-c)s_i - bs_i^2 - bs_i \sum_{j \neq i} s_j,$$

czyli

$$p_i(s_i', s_{-i}) - p_i(s_i, s_{-i}) = (a-c)(s_i' - s_i) - b(s_i'^2 - s_i^2) - b(s_i' - s_i)\sum_{j \neq i} s_j.$$

Rozważmy teraz funkcję P daną wzorem

$$P(s) = (a-c)\sum_{i=1}^{n} s_i - b\sum_{i=1}^{n} s_i^2 - b\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} s_i s_j.$$

Wówczas

$$P(s_i', s_{-i}) = (a-c)s_i' + a\sum_{j \neq i} s_j - bs_i'^2 - b\sum_{j \neq i} s_j^2 - bs_i' \sum_{j \neq i} s_j - b\sum_{\substack{1 \leqslant j < k \leqslant n,\\ i \neq j, i \neq k}} s_j s_k,$$

$$P(s_i, s_{-i}) = (a-c)s_i + a\sum_{j \neq i} s_j - bs_i^2 - b\sum_{j \neq i} s_j^2 - bs_i \sum_{j \neq i} s_j - b\sum_{\substack{1 \leqslant j < k \leqslant, n\\ i \neq j, i \neq k}} s_j s_k,$$

a zatem

$$P(s_i', s_{-i}) - P(s_i, s_{-i}) = (a-c)(s_i' - s_i) - b(s_i'^2 - s_i^2) - b(s_i' - s_i)\sum_{j \neq i} s_j. \quad \square$$

Zauważmy, że z faktu, iż model Cournota jest grą potencjałową, nie wynika jeszcze, że ta gra ma równowagę Nasha. Rzeczywiście, łatwo znaleźć grę potencjałową, która jej nie ma. Z drugiej strony, można dalej stosować uwagę 3.1 po udowodnieniu, że pokazany potencjał ma maksimum lokalne. To z kolei można wykazać, używając standardowych technik rachunku różniczkowego.

4. Inne przykłady gier potencjałowych

Ważną klasą gier potencjałowych stanowią *gry zatorowe*, wprowadzone przez Rosenthala w pracy [14]. Są to gry z funkcjami kosztów.

Rozważmy n graczy i niepusty skończony zbiór *obiektów* E. Każda strategia danego gracza jest pewnym niepustym podzbiorem zbioru E. Innymi słowy, dla gracza i dany jest zbiór $S_i \subseteq \mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$, przy czym $\mathcal{P}(E)$ oznacza zbiór potęgowy zbioru E. Aby zdefiniować funkcje kosztów, najpierw wprowadzamy *funkcję opóźnienia* $d_e\colon \{1,\dots,n\} \to \mathbb{R}$ związaną z użyciem obiektu $e \in E$. Tutaj $d_e(k)$ oznacza *opóźnienie* związane z użyciem obiektu e, gdy jest k użytkowników e. Używamy również funkcji $u_e\colon S \to \{1,\dots,n\}$, zdefiniowanej wzorem:

$$u_e(s) = \big|\{r \in \{1,\dots,n\} : e \in s_r\}\big|.$$

Oznacza to, że $u_e(s)$ jest liczbą użytkowników obiektu e przy założeniu strategii wspólnej s.

Ponadto dla każdego i definiujemy funkcję kosztów c_i wzorem

$$c_i(s) = \sum_{e \in s_i} d_e\big(u_e(s)\big),$$

czyli $c_i(s)$ jest łącznym opóźnieniem poniesionym przez gracza i, gdy każdy gracz j wybrał zbiór obiektów s_j. Zauważmy, że nie narzuciliśmy żadnych warunków na funkcje opóźnień. Rzeczywiście, w zależności od klasy gier te funkcje mogą rosnąć lub maleć.

Przykład 4.1. Rozważmy graf skierowany (V, E, w) z dodatnimi wagami. Interpretujemy zbiór E jako zbiór dróg między miastami z V, a wagi jako czas podróży.

Wybierzmy pewne wierzchołki początkowe $a_1,\dots,a_n$ i wierzchołki docelowe $b_1,\dots,b_n$, przy czym każde b_i jest osiągalne z a_i. Zbiór strategii S_i dla gracza i definiujemy jako zbiór ścieżek skierowanych z a_i do b_i. Następnie definiujemy dla każdej krawędzi skierowanej e funkcję opóźnienia d_e poprzez $d_e(k) = kw_e$, przy czym w_e oznacza wagę krawędzi e. Zakładamy więc, że opóź-

nienie (czy też faktyczny czas podróży) dla danej krawędzi jest proporcjonalne do liczby graczy, którzy ją wybrali.

W ten sposób zdefiniowaliśmy konkretną grę zatorową. Każda strategia wspólna determinuje konkretne wartości funkcji kosztów, które są faktycznymi czasami podróży każdego gracza od jego wierzchołka początkowego do wierzchołka docelowego.

Następujący ważny wynik z pracy [14] uzasadnia nasze zainteresowanie grami zatorowymi. Zaprezentowany niżej dowód pochodzi z książki [16].

Twierdzenie 4.1. *Każda gra zatorowa jest grą potencjałową.*

Dowód. Rozszerzmy każdą funkcję d_j na zbiór $\{0,1,\ldots,n\}$ przyjmując $d_j(0) = 0$. Następnie definiujemy

$$P(s) = \sum_{j\in E}\big(d_j(0) + d_j(1) + \cdots + d_j(u_j(s))\big). \tag{1}$$

Intuicyjnie, $P(s)$ jest sumą „akumulowanych opóźnień" sumowanych po wszystkich obiektach. Dowodzimy, że P jest rzeczywiście potencjałem.

Poniżej χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A, to znaczy $\chi_A(j) = 1$, jeśli $j \in A$ i 0 w przeciwnym razie. Dla $i \in \{1,\ldots,n\}$ mamy wówczas

$$c_i(s) = \sum_{j\in E} d_i(u_j(s))\chi_{s_i}(j). \tag{2}$$

Ze wzorów (1) i (2) wynika, że dla $i \in \{1,\ldots,n\}$ zachodzi równość

$$P(s) - c_i(s) = \sum_{j\in E}\big(d_j(0) + d_j(1) + \cdots + d_j\big(u_j(s) - \chi_{s_i}(j)\big)\big) \tag{3}$$

oraz

$$P(s_i', s_{-i}) - c_i(s_i', s_{-i}) = \sum_{j\in E}\big(d_j(0) + d_j(1) + \cdots + d_j\big(u_j(s_i', s_{-i}) - \chi_{s_i'}(j)\big)\big). \tag{4}$$

Ale dla $j \in E$ mamy $u_j(s) - \chi_{s_i}(j) = u_j(s_i', s_{-i}) - \chi_{s_i'}(j)$, więc ze wzorów (3) i (4) wynika, że P jest potencjałem. □

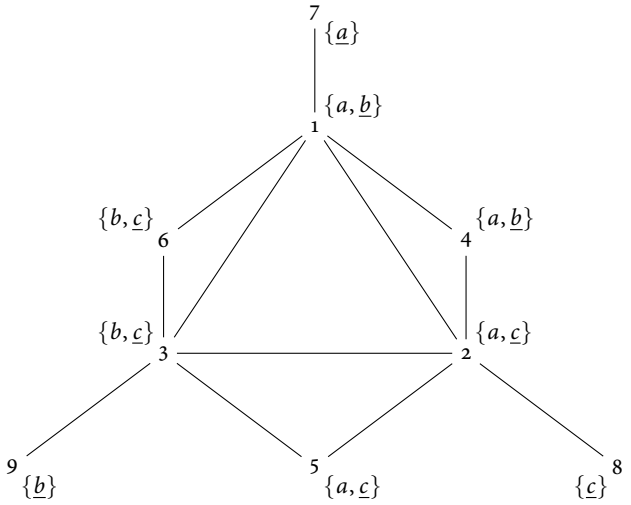
Kolejny przykład dotyczy klasy gier wprowadzonych i badanych w pracy [4]. Rozważmy skończony graf nieskierowany, w którym interpretujemy każdy wierzchołek jako gracza. Załóżmy, że każdy gracz ma skończony zbiór strategii, które nazywamy *kolorami*. Wypłata dla każdego gracza równa się liczbie jego sąsiadów, którzy wybrali ten sam kolor.

Dokładniej, rozważmy graf nieskierowany (V, E) i niech $N_i = \{j : \{i, j\} \in E\}$ oznacza zbiór wszystkich sąsiadów wierzchołka i. Wówczas każda funkcja wypłaty jest zdefiniowana wzorem

$$p_i(s) = \left|\{j \in N_i : s_i = s_j\}\right|.$$

Intuicyjnie, każdy gracz jest zainteresowany w skoordynowaniu swojej strategii ze swoimi sąsiadami. To tłumaczy, dlaczego te gry nazywają się *grami koordynacyjnymi na grafach*.

Przykład 4.2. Rozważmy graf i wybór kolorów przedstawiony na rysunku 1.



1. Graf z wyborem kolorów

Każdemu wierzchołkowi przypisaliśmy jego zbiór kolorów. Rozważmy strategię wspólną s, która składa się ze strategii podkreślonych, a więc

- wierzchołek 7 wybiera a,
- wierzchołki 1, 4 i 9 wybierają b,
- wierzchołki 2, 3, 5, 6 i 8 wybierają c.

Wówczas wypłaty wynoszą:

- 0 dla wierzchołków 7, 9,
- 1 dla wierzchołków 1, 4, 6, 8,
- 2 dla wierzchołka 5,
- 3 dla wierzchołków 2, 3.

Zwróćmy uwagę, że powyższa strategia wspólna jest równowagą Nasha.

Następujący rezultat jest konsekwencją wyników z artykułu [4].

Twierdzenie 4.2. *Każda gra koordynacyjna na grafie jest grą potencjałową.*

Dowód. Dla danej strategii wspólnej s niech $P(s)$ będzie liczbą krawędzi jednokolorowych, to znaczy krawędzi łączących wierzchołki, które wybrały ten sam kolor. Łatwo sprawdzić, że P jest potencjałem. □

5. Gry z własnością skończonego usprawniania

Wprowadzimy teraz klasę gier bogatszą niż klasa gier potencjałowych, dla których równowagi Nasha zawsze istnieją.

Ustalmy grę $G = (n, S, \mathbf{p})$. *Usprawnieniem* nazywamy taką parę (s, s') strategii wspólnych, zapisaną jako $s \to s'$, że $s'_{-i} = s_{-i}$ i $p_i(s') > p_i(s)$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ścieżkę usprawnień definiujemy jako ciąg strategii wspólnych, w którym każda kolejna para jest usprawnieniem i którego nie można przedłużyć w prawą stronę. *Ciąg usprawnień* to początkowy fragment ścieżki usprawnień.

Mówimy, że G ma *własność skończonego usprawniania* (w skrócie *WSU*), jeśli każda ścieżka usprawnień jest skończona. Oczywiście, jeśli ścieżka usprawnień jest skończona, to jej ostatni element jest równowagą Nasha. Jeśli więc G ma WSU, to ma równowagę Nasha.

Łatwo zauważyć, że każda skończona gra potencjałowa ma WSU. Rzeczywiście, wzdłuż każdej ścieżki usprawnień potencjał się zwiększa, więc każda ścieżka usprawnień jest z konieczności skończona. Implikacja w drugą stronę nie zachodzi.

Przykład 5.1. Rozważmy następującą grę.

	L	P
G	$1, 0$	$2, 0$
D	$2, 0$	$0, 1$

Ta gra ma WSU, ponieważ ścieżka usprawnień

$$(G, L) \to (D, L) \to (D, P) \to (G, P)$$

zawiera wszystkie możliwe usprawnienia.

Ta gra jednak nie ma potencjału. Rzeczywiście, dla każdego potencjału zachodzą nierówności

$$P(G, L) < P(D, L) < P(D, P) < P(G, P).$$

Ale $p_2(G, L) = p_2(G, P)$, więc $P(G, L) = P(G, P)$.

Jednakowoż można scharakteryzować skończone gry z WSU przy użyciu zmodyfikowanego pojęcia potencjału. Potencjał śledzi dokładne zmiany funkcji wypłaty. Możemy osłabić ten warunek i śledzić jedynie znak zmian funkcji wypłaty. To prowadzi do następującego pojęcia.

Dana jest gra $G = (n, S, \mathbf{p})$. Funkcję $P\colon S \to \mathbb{R}$ nazywamy *potencjałem porządkowym* dla G, jeśli

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \forall s_i', s_i \in S_i\ \forall s_{-i} \in S_{-i}:$$
$$p_i(s_i', s_{-i}) - p_i(s_i, s_{-i}) > 0 \ \Leftrightarrow\ P(s_i', s_{-i}) - P(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Uwaga 3.1 w oczywisty sposób zachodzi dla potencjałów porządkowych. Ponadto każdy potencjał jest potencjałem porządkowym, ale implikacja w drugą stronę nie zachodzi. Czasami potencjały porządkowe można znaleźć łatwiej. Na przykład, jak zauważyli Monderer i Shapley w artykule [11], elementarny dowód pokazuje, że

$$P(s) = s_1 s_2 \ldots s_n (a - b \sum_{j=1}^{n} s_j - c)$$

jest potencjałem porządkowym dla gry z przykładu 2.3 odpowiadającej modelowi Cournota.

Potencjały porządkowe wciąż nie wystarczają do scharakteryzowania skończonych gier z WSU. Rzeczywiście, łatwo zauważyć, że gra z WSU z przykładu 5.1 nie ma potencjału porządkowego, co dowodzimy tak samo, jak w przypadku potencjału.

Oto kolejne uogólnienie. Dla zadanej gry $G = (n, S, \mathbf{p})$ funkcję $P\colon S \to \mathbb{R}$ nazywamy *uogólnionym potencjałem porządkowym* dla G, jeśli

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \forall s_i', s_i \in S_i\ \forall s_{-i} \in S_{-i}:$$
$$p_i(s_i', s_{-i}) - p_i(s_i, s_{-i}) > 0 \ \Rightarrow\ P(s_i', s_{-i}) - P(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Rzecz jasna, każdy potencjał porządkowy jest uogólnionym potencjałem porządkowym, ale nie odwrotnie. Na przykład, niżej określona funkcja jest uogólnionym potencjałem porządkowym dla gry z przykładu 5.1.

	L	P
G	0	3
D	1	2

Zauważmy, że uwaga 3.1 nie zachodzi dla uogólnionych potencjałów porządkowych. Rzeczywiście, rozważmy grę z dwoma równowagami Nasha (podkreślonymi) i uogólniony potencjał porządkowy.

	L	P
G	$\underline{1,1}$	$\underline{2,1}$
D	$0,0$	$1,1$

	L	P
G	1	2
D	0	1

Wówczas (G, L) jest równowagą Nasha, ale nie jest maksimum lokalnym uogólnionego potencjału porządkowego. Dalej jednak wszystkie maksima lokalne uogólnionego potencjału porządkowego są równowagami Nasha.

Używając pojęcia uogólnionego potencjału porządkowego, możemy scharakteryzować skończone gry z WSU. Następujący rezultat udowodniono w pracy [11]. Poniższy dowód pochodzi z pracy [9].

Twierdzenie 5.1. *Skończona gra ma uogólniony potencjał porządkowy wtedy i tylko wtedy, gdy ma WSU.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech P będzie uogólnionym potencjałem porządkowym. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że istnieje nieskończona ścieżka usprawnień. Wówczas odpowiadające jej wartości P tworzą silnie rosnący ciąg nieskończony. Jest to sprzeczne z faktem, że istnieje tylko skończenie wiele strategii wspólnych.

($\Leftarrow$) Gra ma WSU, a więc każdy ciąg usprawnień jest skończonym ciągiem strategii wspólnych bez powtórzeń. Rzeczywiście, w innym przypadku można by skonstruować nieskończoną scieżkę usprawnień, powtarzając fragment zaczynający sie od powtórzonej strategii wspólnej i kończący się przed jej kolejnym wystąpieniem. Z drugiej strony, liczba strategii wspólnych jest z założenia skończona, a więc jest skończenie wiele skończonych ciągów strategii wspólnych bez powtórzeń. Liczba ciągów usprawnień jest więc skończona.

Dla strategii wspólnej s zdefiniujmy $P(s)$ jako liczbę ciągów usprawnień, które kończą się w s. Wówczas w rozważanej grze $(n, S, \mathbf{p})$ prawdziwa jest własność

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \forall s_{-i} \in S_{-i}\ \forall s_i, s_i' \in S_i :$$
$$p_i(s_i', s_{-i}) - p_i(s_i, s_{-i}) > 0 \ \Rightarrow\ P(s_i', s_{-i}) - P(s_i, s_{-i}) \geqslant 1.$$

Rzeczywiście, załóżmy, że $p_i(s_i', s_{-i}) - p_i(s_i, s_{-i}) > 0$. Wówczas każdemu ciągowi usprawnień, który kończy się w (s_i, s_{-i}) możemy przypisać jego przedłużenie o usprawnienie $(s_i, s_{-i}) \to (s_i', s_{-i})$, a więc ciąg usprawnień, który się kończy w (s_i', s_{-i}). Dodatkowo mamy ciąg usprawnień, który składa się tylko z (s_i', s_{-i}). W konsekwencji P jest uogólnionym potencjałem porządkowym. □

6. Gry słabo acykliczne

Gry z WSU są oczywiście interesujące, ponieważ każda z nich ma równowagę Nasha, do której można dotrzeć z każdej początkowej strategii wspólnej za pomocą dowolnej ścieżki usprawnień. WSU jest jednak bardzo silną własnością i wiele naturalnych gier z równowagą Nasha jej nie ma.

W artykułach [9,18] Young i Milchtaich niezależnie od siebie wprowadzili następującą naturalną klasę gier. Gra nazywa się *słabo acykliczną*, jeśli dla każdej strategii wspólnej istnieje skończona ścieżka usprawnień, która się w niej zaczyna. Każda słabo acykliczna gra ma więc równowagę Nasha.

Milchtaich wykazał w pracy [9], że gry zatorowe, w których strategie są jednoelementowymi zbiorami obiektów i w której gracze mają indywidualne funkcje opóźnień, nie muszą mieć WSU, ale są słabo acykliczne. Gry słabo acykliczne rozważano również w pracach [6–8].

W artykule [1] przedstawiliśmy klasyfikację gier słabo acyklicznych opartą na pojęciu *planisty*, który określa, na podstawie jakich informacji wybierana jest następna strategia wspólna ścieżki usprawnień. Ponadto udowodniliśmy, że gry, które można rozwiązać (to znaczy, w których można znaleźć równowagę Nasha) przez tak zwaną iteracyjną eliminację nigdy nie najlepszych strategii, są słabo acykliczne.

Analogicznie jak w przypadku gier z WSU możemy scharakteryzować skończone gry słabo acykliczne za pomocą odpowiednich potencjałów. Dla danej gry $G = (n, S, \mathbf{p})$ funkcję $P\colon S \to \mathbb{R}$ nazywamy *słabym potencjałem* dla G, jeśli dla każdego s, które nie jest równowagą Nasha, istnieje usprawnienie $s \to s'$, dla którego $P(s) < P(s')$.

Oczywiście każdy uogólniony potencjał porządkowy jest słabym potencjałem, ale nie odwrotnie, ponieważ istnieją gry słabo acykliczne, które nie mają WSU. Ponadto, jak w przypadku uogólnionego potencjału porządkowego, wszystkie maksima lokalne słabego potencjału są równowagami Nasha, ale nie odwrotnie.

Następujący naturalny odpowiednik twierdzenia 5.1 został udowodniony w artykule [10].

Twierdzenie 6.1. *Gra skończona ma słaby potencjał wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabo acykliczna.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech P będzie słabym potencjałem. Weźmy strategię wspólną s i przypuśćmy, że s nie jest równowagą Nasha. Dla pewnego usprawnienia $s \to s'$ zachodzi zatem nierówność $P(s) < P(s')$. Niech s, s' będzie prefiksem ścieżki usprawnień, która zaczyna się w s. Iterując ten proces konstruujemy ścieżkę

usprawnień. Ta ścieżka nie może być nieskończona, ponieważ odpowiadające jej wartości P tworzą ciąg silnie rosnący, tymczasem strategii wspólnych jest skończenie wiele.

($\Leftarrow$) Niech dla strategii wspólnej s wartość $P(s)$ będzie liczbą przeciwną do długości najkrótszej ścieżki usprawnień, która zaczyna się w s. Aby udowodnić, że P jest słabym potencjałem, rozważmy strategię wspólną, która nie jest równowagą Nasha.

Niech $s, s^1, s^2, \ldots, s^k$ będzie najkrótszą skończoną ścieżką usprawnień, która zaczyna się w s. Wówczas $P(s) = -(k+1)$, $s \to s^1$ jest usprawnieniem i $P(s^1) = -k$, co oznacza, że P jest rzeczywiście słabym potencjałem. □

7. Gry koordynacyjne na grafach skierowanych

Bogaty zbiór przykładów gier słabo acyklicznych tworzą gry koordynacyjne na grafach skierowanych. Te gry analizowaliśmy w pracach [2,15] i bardziej szczegółowo w pracy [3], na podstawie której został napisany ten paragraf. Dany jest graf skierowany (V, E). Niech $N_i = \{j : j \to i \in E\}$. Wówczas każda funkcja wypłaty jest zdefiniowana tak, jak w przypadku gier koordynacyjnych na grafach nieskierowanych, to znaczy wzorem

$$p_i(s) = \left|\{j \in N_i : s_i = s_j\}\right|.$$

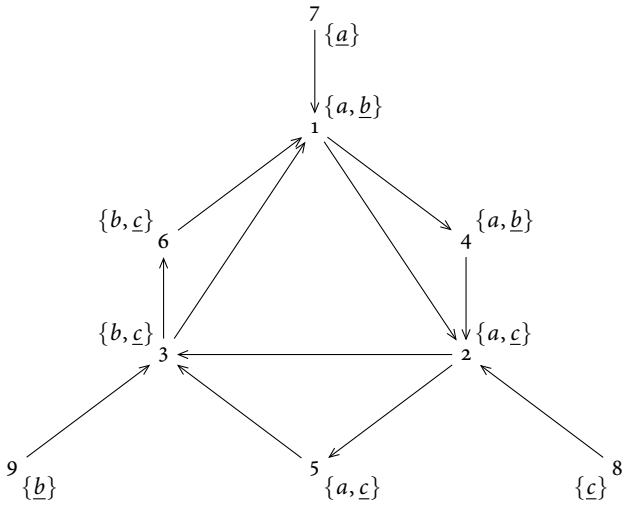
Przykład 7.1. Rozważmy graf skierowany i wybór kolorów przedstawiony na rysunku 2 (zauważmy podobieństwo z rysunkiem 1). Weźmy strategię wspólną s z przykładu 4.2. Wówczas wypłaty są następujące:

- 0 dla wierzchołków 1, 7, 8, 9,
- 1 dla wierzchołków 2, 4, 5, 6,
- 2 dla wierzchołka 3.

Zauważmy, że powyższa strategia wspólna nie jest równowagą Nasha. Na przykład, wierzchołek 1 może zwiekszyć swoją wypłatę, jeśli zmieni kolor b na a. Ponadto, łatwo sprawdzić, że ta gra nie ma równowagi Nasha. Tak więc gry koordynacyjne na grafach skierowanych zasadniczo różnią się od gier na grafach nieskierowanych.

Rozpatrzmy teraz inny przykład.

Przykład 7.2. Rozważmy grę koordynacyjną na skierowanym cyklu prostym $1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1$, przy czym $n \geqslant 3$ i załóżmy, że wierzchołki mają wspólne przynajmniej dwa kolory, powiedzmy a i b. Weźmy początkową



2. Graf skierowany z wyborem kolorów

strategię wspólną $(a, b, \ldots, b)$. Wówczas $(a, \underline{b}, b, \ldots, b) \to (a, a, b, \ldots, b)$ i $(\underline{a}, a, b, \ldots, b) \to (b, a, b, \ldots, b)$ są usprawnieniami (aby zwiększyć czytelność, podkreśliliśmy strategie, które zostały zmodyfikowane). Po tych dwóch krokach uzyskujemy strategię wspólną, która jest permutacją cykliczną początkowej. Po iteracjach otrzymujemy nieskończoną ścieżkę usprawnień. Dlatego ta gra nie ma WSU.

Niemniej jednak, prawdziwa jest inna własność.

Twierdzenie 7.1. *Każda gra koordynacyjna na skierowanym cyklu prostym jest słabo acykliczna.*

Dowód. Niech $G = (n, S, \mathbf{p})$ będzie grą koordynacyjną na skierowanym cyklu prostym. Skonstruujemy słaby potencjał dla G. Wynik jest wówczas konsekwencją twierdzenia 6.1.

Ponownie, jak w powyższym przykładzie, oznaczmy rozważany cykl przez $1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1$, przy czym $n \geqslant 2$. Dla danego wierzchołka i oznaczmy jego poprzednik i następnik w cyklu przez, odpowiednio, $i \ominus 1$ oraz $i \oplus 1$. Wówczas $i \ominus 1 = i - 1$ dla $i \neq 1$, $1 \ominus 1 = n$, $i \oplus 1 = i + 1$ dla $i \neq n$, oraz $n \oplus 1 = 1$.

Dla strategii wspólnej s w G definiujemy $\mathrm{status}_i(s)$ wzorem:

$$\mathrm{status}_i(s) = \begin{cases} + & \text{jeżeli } s_i \text{ jest najlepszą odpowiedzią na } s_{-i} \\ - & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

i $\lambda(s)$ wzorem:

$$\lambda(s) = \begin{cases} n+1 & \text{jeżeli } s \text{ jest równowagą Nasha} \\ i & \text{w przeciwnym przypadku, przy czym } i \text{ jest} \\ & \text{najmniejszym } i \in \{1,\dots,n\} \text{ ze status}_i(s) = -. \end{cases}$$

Na koniec, niech $U = \{0,1\} \times \{1,\dots,n+1\}$ i niech $\prec_L$ będzie porządkiem leksykograficznym na parach z U.

Zdefiniujmy teraz funkcję $P\colon S \to U$. Dla strategii wspólnej s niech $P(s) = (x, \lambda(s))$, przy czym

- $x = 1$, jeżeli zachodzi jeden z następujących warunków: s jest równowagą Nasha bądź istnieje $i \neq n$, dla którego $s_{i\ominus 1} = s_n$ i i jest jedynym graczem ze $\text{status}_i(s) = -$,
- $x = 0$ w przeciwnym przypadku.

Rozważmy strategię wspólną s, która nie jest równowagą Nasha. Oznaczmy $\lambda(s)$ przez i. Niech $s \to s'$ będzie usprawnieniem powstałym dzięki zmianie strategii gracza i na najlepszą odpowiedź na s_{-i}. Niech $P(s) = (x, \lambda(s))$ i $P(s') = (x', \lambda(s'))$. Twierdzimy, że $P(s) \prec_L P(s')$.

Załóżmy, że $x = 1$. Wówczas $i \neq n$, $s_{i\ominus 1} = s_n$, a i jest jedynym graczem, dla którego $\text{status}_i(s) = -$. Wobec tego $s'_i = s_{i\ominus 1} = s_n = s'_n$.

Dodatkowo, albo s' jest równowagą Nasha, albo $i \oplus 1$ jest jedynym graczem j z $\text{status}_j(s') = -$. W tym drugim przypadku $i \oplus 1 \neq n$, ponieważ jeśli $i = n-1$, to $s'_{n-1} = s'_n$, a więc $\text{status}_n(s') = +$. Stąd wynika, że $x' = 1$. Ponadto $\lambda(s) = i < i+1 \leqslant \lambda(s')$, zatem $P(s) \prec_L P(s')$.

Załóżmy teraz, że $x = 0$. Jeśli $i \neq n$, to $\lambda(s) = i < i+1 \leqslant \lambda(s')$, a więc $P(s) \prec_L P(s')$. Jeśli $i = n$, to z definicji $\lambda(s)$ dla wszystkich $k \in \{1,\dots,n-1\}$ mamy $\text{status}_k(s) = +$. Dlatego albo s' jest równowagą Nasha, albo 1 jest jedynym graczem j z $\text{status}_j(s') = -$. W obu przypadkach $x' = 1$, a więc $P(s) \prec_L P(s')$.

Przekształcając w standardowy sposób porządek leksykograficzny na $\{0,1\} \times \{1,\dots,n+1\}$ na silny liniowy porządek na liczbach rzeczywistych, wnioskujemy, że gra G ma słaby potencjał. □

Kolejne pojęcie wprowadzamy, aby obliczyć liczbę usprawnień potrzebnych do osiągnięcia równowagi Nasha. Mówimy, że gra *zapewnia ścieżki usprawnień długości nie większej niż x*, jeśli dla każdej strategii wspólnej istnieje ścieżka usprawnień, która zaczyna się od niej i ma długość co najwyżej x. Z powyższego dowodu wynika, że każda gra koordynacyjna na skierowanym cyklu prostym zapewnia ścieżki usprawnień o długości nie większej niż $2n-1$.

Gry koordynacyjne można w naturalny sposób rozszerzyć, rozważając grafy ważone z dodatnimi wagami i wprowadzając pojęcie *premii*, zdefinio-

wanej jako funkcja β, która każdemu wierzchołkowi i i kolorowi c przypisuje nieujemną liczbę całkowitą $\beta(i, c)$.

Wówczas dla danego ważonego grafu skierowanego (V, E, w), z dodatnimi wagami i premii β, funkcja wypłaty dla gracza i dana jest wzorem:

$$p_i(s) = \sum_{\substack{j \in N_i \\ s_i = s_j}} w_{j \to i} + \beta(i, s_i).$$

Rozważmy grę koordynacyjną z premiami na ważonym grafie skierowanym. Mówimy, że waga jest *istotna*, jeśli różni się od 1, i że wierzchołek *ma premie*, jeśli któryś z jego kolorów ma premię różną od 0.

Twierdzenie 7.1 można rozszerzyć do przypadku ważonych skierowanych cykli prostych i premii, ale nie całkowicie. Następujące twierdzenie podsumowuje nasze wyniki.

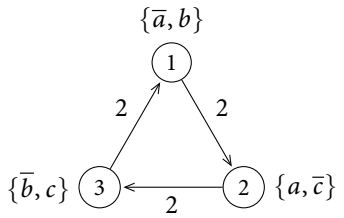
Twierdzenie 7.2. *Rozważmy ważony skierowany cykl prosty C z n wierzchołkami.*

1. *Każda gra koordynacyjna z premiami na C, w której najwyżej jeden wierzchołek ma premie, zapewnia ścieżki usprawnień długości nie większej niż $2n - 1$.*
2. *Każda gra koordynacyjna z premiami na C, w której najwyżej jedna krawędź ma istotną wagę, zapewnia ścieżki usprawnień długości nie większej niż $3n - 1$.*
3. *Każda gra koordynacyjna z premiami na C, w której dokładnie dwa wierzchołki mają premie, zapewnia ścieżki usprawnień długości nie większej niż $3n$.*
4. *Każda gra koordynacyjna z premiami na C, w której dokładnie dwie krawędzie mają istotne wagi, zapewnia ścieżki usprawnień długości nie większej niż $4n - 1$.*

Te wyniki w pełni charakteryzują kombinacje wag i premii, dla których istnienie równowag Nasha jest zagwarantowane. Mianowicie, jeśli dopuścimy w skierowanym cyklu prostym istotne wagi na trzech krawędziach i trzy wierzchołki z premiami, to powstała gra koordynacyjna może nie mieć równowag Nasha.

Przykład 7.3. Rozważmy ważony skierowany cykl prosty i wybór kolorów przedstawiony na rysunku 3, przy czym kolory opatrzone kreską mają premię 1.

Odpowiadająca gra koordynacyjna nie ma równowagi Nasha. Lista strategii wspólnych, każda z podkreśloną strategią, która nie jest najlepszą odpowiedzią na strategię wspólną pozostałych graczy, jest taka sama jak dla wierzchołków 1, 2 i 3 w przykładzie 7.1: $(\underline{a}, a, b)$, $(a, a, \underline{c})$, $(a, c, \underline{b})$, $(a, \underline{c}, c)$, $(b, \underline{a}, b)$,



3. Gra koordynacyjna bez równowagi Nasha

$(\underline{b}, a, c)$, $(b, c, \underline{b})$ and $(\underline{b}, c, c)$. Rzeczywiście, gra rozważana w tamtym przykładzie symuluje powyższą grę.

Dodatkowo, przykład 7.3 jest minimalny w następującym sensie. Użyliśmy w nim trzech kolorów. Jeżeli użyjemy tylko dwóch kolorów, to gra koordynacyjna będzie słabo acykliczna.

Twierdzenie 7.3. *Każda gra koordynacyjna z premiami dla n graczy na ważonym grafie skierowanym, w której użyte są tylko dwa kolory, zapewnia ścieżki usprawnień długości nie większej niż* $2n$.

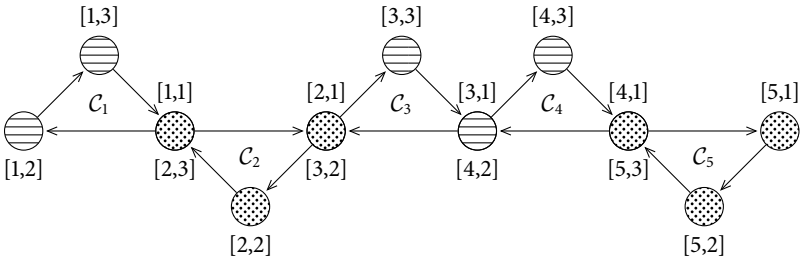
Szkic dowodu. Przyjmijmy, że użyte kolory to czerwony i niebieski. Niech s będzie początkową strategią wspólną. Rozważmy dwie fazy. Na początku pierwszej bierzemy maksymalny ciąg usprawnień zaczynający się w s, w którym każdy wierzchołek może zmienić kolor wyłącznie na niebieski. Niech s' będzie ostatnią strategią wspólną. W drugiej fazie bierzemy zaczynający się w s' maksymalny ciąg usprawnień, w którym każdy wierzchołek może zmienić kolor wyłącznie na czerwony. Każda faza składa się z najwyżej n usprawnień i można udowodnić, że końcowa strategia wspólna jest równowagą Nasha. □

8. Otwarte łańcuchy cykli prostych

W pracy [3] studiowaliśmy również inne klasy grafów skierowanych, dla których gry koordynacyjne są słabo acykliczne. Jedną z nich są *łańcuchy otwarte cykli prostych* zdefiniowane jak następuje. Dla uproszczenia zakładamy, że wszystkie cykle mają tę samą liczbę v wierzchołków, przy czym $v \geqslant 3$.

Formalnie, dla $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, przy czym $m \geqslant 2$, niech $\mathcal{C}_j$ będzie cyklem $[j,1] \to [j,2] \to \cdots \to [j,v] \to [j,1]$. Przez *łańcuch otwarty* $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ rozumiemy graf skierowany, w którym dla każdego $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ mamy $[j,1] = [j+1,k]$ dla pewnego $k \in \{2, \ldots, v\}$. Innymi słowy, składa się on z ciągu takich m cykli, że każde dwa kolejne cykle mają dokładnie jeden wspólny wierzchołek.

Wierzchołek, który łączy cykl $\mathcal{C}_j$ z $\mathcal{C}_{j+1}$, czyli wierzchołek $[j,1]$, który jest również wierzchołkiem $[j+1,k]$, nazywamy *wierzchołkiem łączącym*. Rysunek 4 ilustruje przykład łańcucha otwartego cykli prostych.



4. Łańcuch otwarty składający się z pięciu cykli. Cztery wierzchołki mają podwójną nazwę, jako że są wierzchołkami łączącymi. Każdy wierzchołek może wybrać jeden z dwóch kolorów, przedstawiony deseniem z kropkami lub z kreskami. Wybrane pokolorowanie wierzchołków jest przykładem strategii wspólnej

Przedstawione niżej twierdzenie udowodniliśmy w pracy [3].

Twierdzenie 8.1. *Każda gra koordynacyjna na łańcuchu otwartym m cykli, każdy z v wierzchołkami, zapewnia ścieżki usprawnień długości nie większej niż* $3vm^3$.

Szkic dowodu. Dowód zajmuje około dziesięciu stron, więc przedstawimy tylko niektóre jego idee. Pożądana ścieżka usprawnień jest zbudowana za pomocą naturalnego algorytmu, który w odpowiedni sposób skleja ścieżki usprawnień cykli prostych tworzących rozważany łańcuch otwarty.

Taka konstrukcja ścieżki usprawnień kawałek po kawałku jest możliwa, ponieważ dla danej strategii wspólnej każdy cykl w łańcuchu otwartym może być postrzegany jako pojedynczy cykl, w którym maksymalnie dwa wierzchołki mają premie, dla którego istnieje ścieżka usprawnień długości co najwyżej $3v$, co wynika z twierdzenia 7.2 (i) lub (iii). Własność ta zachodzi dzięki temu, że wyłącznie wierzchołki łączące mają dwoje dzieci (wierzchołek s' jest dzieckiem wierzchołka s, jeśli $s \to s'$) i dla danej strategii wspólnej krawędź do wierzchołka łączącego u z wierzchołka z innego cyklu może być interpretowana jako premia w wysokości 1 za kolor poprzednika u w tym innym cyklu.

Bardziej formalnie, dla danej strategii wspólnej s i cyklu $\mathcal{C}_j$ definiujemy funkcję premii $\beta_j^s(u,c)$ jak następuje:

$$\beta_j^s(u,c) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } u \text{ jest wierzchołkiem łączącym i } c = s(v), \text{ przy czym} \\ & \text{wierzchołek } v \text{ należy do } \mathcal{C}_{j-1} \text{ lub do } \mathcal{C}_{j+1} \\ & \text{i } v \to u \text{ jest krawędzią,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Każdej ścieżce usprawnień χ w grze koordynacyjnej na $\mathcal{C}_j$ z funkcją premii β_j^s odpowiada dokładnie jeden początkowy ciąg $\bar{\chi}$ usprawnień w grze koordynacyjnej na łańcuchu otwartym $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$. Dla strategii wspólnej s, która nie jest równowagą Nasha w tej grze, oznaczamy przez $NBR(s)$ najmniejsze i, dla którego jakiś wierzchołek w cyklu $\mathcal{C}_i$ nie jest najlepszą odpowiedzią. Ponadto dla skończonego ciągu usprawnień ρ oznaczamy przez $\mathrm{last}(\rho)$ jego ostatnią strategię, a złożenie dwóch skończonych ciągów usprawnień ρ i χ oznaczamy przez $\rho\chi$.

Poniżej przedstawiony jest odpowiedni algorytm.

Wejście: Gra koordynacyjna na łańcuchu otwartym cykli $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ i początkowa strategia wspólna s_0.

Wyjście: Skończona ścieżka usprawnień zaczynająca się w s_0.

$\rho := s_0$
$s := \mathrm{last}(\rho)$
dopóki s nie jest równowagą Nasha *wykonuj*
    $j := NBR(s)$
    $\hat{s}$:= ograniczenie s do wierzchołków $\mathcal{C}_j$
    χ := ścieżka usprawnień skonstruowana w dowodzie twierdzenia 7.2 (i) lub (iii) dla gry koordynacyjnej na $\mathcal{C}_j$ z funkcją premii β_j^s, zaczynająca się w $\hat{s}$
    $\rho := \rho\bar{\chi}$
    $s := \mathrm{last}(\rho)$
zwróć ρ

Dowód, że ten algorytm się zatrzymuje, wymaga skomplikowanego słabego potencjału. Składa się on z czterech elementów, które biorą pod uwagę takie informacje, jak położenie pierwszego wierzchołka łączącego, który nie gra najlepszej odpowiedzi (jeśli taki istnieje), wartość $NBR(s)$, i dla których cykli $\mathcal{C}_j$ z $j < NBR(s)$ zachodzi równość $s([j,v]) = s([j,1])$. Pozostałe szczegóły można znaleźć w pracy [3]. □

Podziękowania. Dziękujemy Tadeuszowi Radzikowi za przydatny komentarz dotyczący początkowej wersji tego artykułu, a anonimowemu recenzentowi za szereg szczegółowych i pożytecznych uwag.

Bibliografia

[1] K. R. Apt, S. Simon, *A classification of weakly acyclic games*, Theor. Decis. 4 (2015), nr 78, 501–524.

[2] K. R. Apt, S. Simon, D. Wojtczak, *Coordination games on directed graphs*, Proceedings Fifteenth Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge, Electron. Proc. Theor. Comput. Sci., t. 215, EPTCS, 2016, 67–80.

[3] K. R. Apt, S. Simon, D. Wojtczak, *Coordination games on weighted directed graphs*, Math. Oper. Res. (2021), w druku.

[4] K. R. Apt, B. de Keijzer, M. Rahn, G. Schäfer, S. Simon, *Coordination games on graphs*, Int. J. Game Theory 46 (2017), nr 3, 851–877.

[5] A. Cournot, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Hachette 1838.

[6] R. Engelberg, M. Schapira, *Weakly-acyclic* (*internet*) *routing games*, [w:] *Algorithmic game theory*, Lecture Notes in Comput. Sci., t. 6982, Springer, Heidelberg 2011, 290–301.

[7] A. Fabrikant, A. D. Jaggard, M. Schapira, *On the structure of weakly acyclic games*, Algorithmic game theory, Lecture Notes in Comput. Sci., t. 6386, Springer, Berlin 2010, 126–137.

[8] J. R. Marden, G. Arslan, J. S. Shamma, *Regret based dynamics: convergence in weakly acyclic games*, [w:] *Proceedings of the 2007 International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, IFAAMAS 2007, 194–201.

[9] I. Milchtaich, *Congestion games with player-specific payoff functions*, Games Econ. Behav. 13 (1996), 111–124.

[10] I. Milchtaich, *Schedulers, potentials and weak potentials in weakly acyclic games*, Working Paper, No. 2013-03, Bar-Ilan University, Department of Economics, Ramat Gan 2013.

[11] D. Monderer, L. S. Shapley, *Potential games*, Games Econ. Behav. 14 (1996), 124–143.

[12] J. F. Nash, *Equilibrium points in n-person games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 36 (1950), 48–49.

[13] J. F. Nash, *Non-cooperative games*, Ann. Math. 54 (1951), 286–295.

[14] R. W. Rosenthal, *A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria*, Int. J. Game Theory 2 (1973), nr 1, 65–67.

[15] S. Simon, D. Wojtczak, *Efficient local search in coordination games on graphs*, [w:] *Proceedings of the twenty-fifth international joint conference on artificial intelligence*, IJCAI/AAAI Press 2016, 482–488.

[16] S. Tijs, *Introduction to game theory*, Hindustan Book Agency, Gurgaon 2003.

[17] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton 1944.

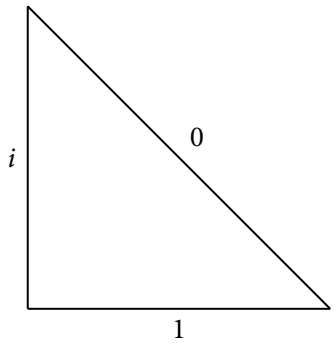
[18] H. P. Young, *The evolution of conventions*, Econometrica 61 (1993), nr 1, 57–84.

Krzysztof R. Apt
Centrum Wiskunde & Informatica
Amsterdam

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
k.r.apt@cwi.nl

Sunil Simon
IIT Kanpur
simon@cse.iitk.ac.in

Dominik Wojtczak
University of Liverpool
d.wojtczak@liverpool.ac.uk


0
i
1

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 281–286
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Jarosław Górnicki (Rzeszów)

Perełka: $e^{i\pi} + 1 = 0$

Leonhard Euler pierwszy systematycznie badał funkcje zmiennej zespolonej (zob. [2]). Użył szeregów nieskończonych do określenia funkcji wykładniczej i wykazał jej związek z podstawowymi funkcjami trygonometrycznymi. Kluczowe było odkrycie[1] wzoru

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \qquad \text{dla } y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(zob. [1, str. 92–96; 7]). Inną definicję funkcji wykładniczej znajdziemy w [3, Rozdział IX, X], a geometryczne uzasadnienie wzoru (1) w [5, str. 54–55].

Wzór (1) możemy również uzyskać na drodze elementarnych rozważań, bez odwoływania się do szeregów nieskończonych, zadając najbardziej naturalne warunki, jakie powinna spełniać funkcja $y \mapsto e^{iy}$ dla $y \in \mathbb{R}$ (zob. [6]).

Definicja. Niech $y \mapsto e^{iy}$, przy czym $y \in \mathbb{R}$, będzie funkcją spełniającą warunki:

1° e^{iy} jest liczbą zespoloną, tj. $e^{iy} = f(y) + ig(y)$, przy czym f, g są funkcjami rzeczywistymi,

2° funkcja $y \mapsto e^{iy}$ dla $y \in \mathbb{R}$ realizuje standardowe własności funkcji wykładniczej ($e^0 = 1$ oraz $e^{iy}e^{iu} = e^{iy+iu}$ dla $y, u \in \mathbb{R}$),

3° liczby zespolone e^{iy} oraz e^{-iy} są sprzężone, tj. $e^{-iy} = f(y) - ig(y)$,

4° funkcja $y \mapsto e^{iy}$ dla $y \in \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} e^{iy} = ie^{iy}$.

[1] Roger Cotes w 1714 roku w pracy *Logometria* opublikowanej w *Philosophical Transactions* podał wzór $\ln(\cos y + i \sin y) = iy$, ale został on zapomniany (zob. [4]).

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Pozostaje odkryć, jakim wzorem jest zadana funkcja spełniająca powyższe warunki. Nie jest to trudne. Własność 2° zapewnia, że dla $y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$e^{iy}e^{-iy} = e^0 = 1.$$

Po połączeniu warunków 1° oraz 3° otrzymujemy

$$f^2(y) + g^2(y) = 1 \quad \text{dla } y \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

a w konsekwencji $e^{-iy} = \frac{1}{f(y)+ig(y)}$. Z własności $e^{iy}e^{iu} = e^{i(y+u)}$ dla $y, u \in \mathbb{R}$ mamy

$$[f(y) + ig(y)][f(u) + ig(u)] = f(y+u) + ig(y+u),$$
$$[f(y)f(u) - g(y)g(u)] + i[f(y)g(u) + f(u)g(y)] = f(y+u) + ig(y+u),$$

skąd

$$\begin{cases} f(y)f(u) - g(y)g(u) = f(y+u), \\ f(y)g(u) + f(u)g(y) = g(y+u), \end{cases} \tag{3}$$

bo dwie liczby zespolone są równe, gdy mają równe części, odpowiednio, rzeczywiste i urojone.

Z elementarnej trygonometrii wynika, że warunki (2) i (3) są spełnione przez funkcje f, g dane wzorami $f(y) = \cos ky$ i $g(y) = \sin ky$ dla $k, y \in \mathbb{R}$. Warunek 4° zapewnia, że $k = 1$. Różniczkowalność gwarantuje ciągłość funkcji $\mathbb{R} \ni y \mapsto e^{iy}$ w zerze, tj. $\lim_{y\to 0} e^{iy} = e^0 = 1$. Z połączenia tych warunków wynika, że funkcje określone wzorami

$$f(y) = \cos y \quad \text{i} \quad g(y) = \sin y \quad \text{dla } y \in \mathbb{R}$$

są rozwiązaniami spełniającymi warunki (2) i (3). Wykażemy, że nie ma innych takich funkcji.

Istotnie, ustalmy $y \in \mathbb{R}$ i przyjmijmy, że warunki (2) i (3) spełniają funkcje $f = a$ i $g = b$. Wówczas, jeśli $t \to y$, to $(t - y) \to 0$, więc

$$e^{i(t-y)} = e^{it}e^{-iy} = \frac{a(t) + ib(t)}{\cos y + i \sin y} \to 1.$$

Jest to równoważne temu, że $a(t) \to \cos y$ i $b(t) \to \sin y$, gdy $t \to y$, a z faktu, że ma to miejsce dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ wynika, że $a(t) = \cos t$ i $b(t) = \sin t$. Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie[2].

Twierdzenie (Euler, 1748)**.** *Dla $y \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.*

[2] Euler znał ten rezultat co najmniej dziesięć lat przed ukazaniem się pracy [2], co wynika z jego korespondencji z Christianem Goldbachem i Johannem Bernoullim (zob. [4]).

Geometrycznie oznacza to, że funkcja $y \mapsto e^{iy}$ dla $y \in \mathbb{R}$ nawija oś urojoną OY na okrąg jednostkowy $x^2 + y^2 = 1$. Dla $y = \pi$ otrzymujemy tożsamość $e^{i\pi} = -1$ podaną przez Eulera[3].

W tytułowej postaci

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

wzór Eulera wiąże ze sobą pięć najważniejszych stałych matematycznych oraz trzy najważniejsze operacje matematyczne – dodawanie, mnożenie i potęgowanie.

Wzory Eulera nie tylko są ciekawostką, lecz także mają istotne konsekwencje. Można je wykorzystać w badaniu przestępności liczb[4]. Oto kilka konsekwencji wzorów Eulera.

Wzór de Moivre'a[5]. Dla dowolnej liczby $\phi \in \mathbb{R}$ i dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = (e^{i\phi})^n = e^{in\phi} = \cos n\phi + i\sin n\phi.$$

Rozwiązanie VII problemu Hilberta. W 1934 roku Aleksander Gelfond i Theodor Schneider niezależnie wykazali następujące twierdzenie (które jest rozwiązaniem VII problemu Hilberta – zob. [8]).

Twierdzenie. *Jeżeli a, b są zespolonymi liczbami algebraicznymi, $a \neq 0$, $a \neq 1$ i b nie jest liczbą wymierną, to liczba a^b jest przestępna.*

Z tego twierdzenia wprost wynika, że liczby $2^{\sqrt{2}}$ oraz $3^{\sqrt{3}}$ są przestępne.

Podobnie $\log_2 3$ jest liczbą przestępną. Istotnie, liczba $\log_2 3$ jest niewymierna. Gdyby liczba $\log_2 3$ była algebraiczna, to $2^{\log_2 3} = 3$ byłaby liczbą przestępną, a nie jest.

Liczby $\pm i\sqrt{163}$ są algebraiczne (jako pierwiastki równania $x^2 + 163 = 0$), więc z twierdzenia Gelfonda–Schneidera wynika, że tzw. *liczba Hermite'a–Ramanujana* (odkryta niezależnie przez Charlesa Hermite'a w 1859 roku oraz

[3] Euler obliczył przybliżoną wartość $e \approx 2{,}71828182845904523536028$, a przybliżoną wartość π znał z dokładnością do 127 cyfr dziesiętnych.

[4] W 1844 roku Joseph Liouville podał pierwszy przykład liczby przestępnej ($\sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!}$), a w latach 1873–1874 Georg Cantor wykazał, że zbiór liczb przestępnych jest nieprzeliczalny.

[5] Abraham de Moivre podał wzór zwany jego imieniem w pracy o rozwiązywaniu równań algebraicznych *Aequationum quarundam...*, ogłoszonej w *Philosophical Transactions* w 1707 roku, a w znanej nam dzisiaj postaci w 1722 roku (zob.[4]).

Srinivasę Ramanujana w 1914 roku), bardzo bliska wartości całkowitej,

$$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 262537412640768743{,}99999999999925007$$

jest liczbą przestępną, bo $(-1)^{-i\sqrt{163}} = \left(e^{i\pi}\right)^{-i\sqrt{163}} = e^{\pi\sqrt{163}}$.

Tożsamość Eulera implikuje, że $(-1)^{-i} = \left(e^{i\pi}\right)^{-i} = e^{\pi}$, więc e^{π} jest liczbą przestępną.

Podejrzewa się, że liczby $\pi + e$, πe, π^e, e^e, π^π są przestępne (nie wiemy nawet, czy są one niewymierne), ale udowodnienie przestępności pojedynczych liczb bywa trudne.

W tej tematyce wiele pytań jest bez odpowiedzi. Na przykład, czy stała $\gamma \approx 0{,}577218$, która pojawia się w pracy Eulera z 1781 roku we wzorze $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln(n+1) + \gamma$ jest liczbą przestępną? Nie wiemy nawet, czy stała γ jest liczbą niewymierną.

Wartości i^i. Przedstawienie liczby

$$i = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right),$$

przy czym $k \in \mathbb{Z}$, zapewnia, że wszystkie elementy zbioru i^i (potęga zespolona jest funkcją wielowartościową) są liczbami rzeczywistymi, gdyż $i^i = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$. To samo dotyczy zbiorów 1^i oraz $(-1)^i$.

Twierdzenie Lindemanna. W 1882 roku Ferdinand Lindemann wykazał twierdzenie, które podamy w ogólniejszym sformułowaniu Karla Weierstrassa z 1885 roku.

Twierdzenie. *Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ są różnymi liczbami algebraicznymi, natomiast $c_1, c_2, \ldots, c_n$ są liczbami algebraicznymi i nie wszystkie są równe zero, to $c_1 e^{\alpha_1} + c_2 e^{\alpha_2} + \cdots + c_n e^{\alpha_n} \neq 0$.*

Ma ono rozliczne konsekwencje.

1. *Liczba e jest przestępna*[6]. Gdyby e była liczbą algebraiczną, to e byłaby pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach wymiernych, więc

$$c_m e^m + c_{m-1} e^{m-1} + \cdots + c_1 e + c_0 e^0 = 0, \quad \text{przy czym } c_m \neq 0$$

a to jest sprzeczne z twierdzeniem Lindemanna.

2. *Liczba π jest przestępna.* Gdyby π była liczbą algebraiczną, to $i\pi$ też byłaby liczbą algebraiczną (jako iloczyn liczb algebraicznych). Wtedy $e^{i\pi} + e^0 = 0$, a to jest sprzeczne z twierdzeniem Lindemanna. Stąd wynika, że π nie jest

[6] Przestępność liczby e wykazał Hermite w 1873 roku.

liczbą konstruowalną (twierdzenie Wantzela[7]) i w konsekwencji nie istnieje ani konstrukcja platońska kwadratu o polu danego koła, ani konstrukcja platońska rektyfikacji (wyprostowania) okręgu.

3. *Wykres funkcji $x \mapsto e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$ nie zawiera punktów o obu współrzędnych algebraicznych poza punktem* $(0,1)$.

Analogiczna sytuacja dotyczy wykresu funkcji $x \mapsto \ln x$ dla $x > 0$ poza punktem $(1,0)$.

Załóżmy, że punkt $(a,b) \neq (0,1)$ ma obie współrzędne algebraiczne i $b = e^a$. Wtedy $e^a - be^0 = 0$ i mamy sprzeczność z twierdzeniem Lindemanna.

W szczególności liczba e^2 jest przestępna.

4. *Wykres funkcji $x \mapsto \sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$ nie zawiera punktów o obu współrzędnych algebraicznych poza punktem* $(0,0)$.

Z twierdzenia Eulera mamy

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \text{oraz} \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y,$$

skąd po odjęciu stronami

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Załóżmy, że liczby a i b, z których przynajmniej jedna jest różna od 0, są algebraiczne i $b = \sin a$. Wtedy $2i \sin a = e^{ia} - e^{-ia}$, więc $e^{ia} - e^{-ia} - 2ibe^0 = 0$, co jest sprzeczne z twierdzeniem Lindemanna.

W szczególności liczba $\sin 1$ jest przestępna.

Analogicznie można wykazać, że wykres funkcji cos nie zawiera punktów o obu współrzędnych algebraicznych poza punktem $(0,1)$.

5. *Wykres funkcji $x \mapsto \operatorname{tg} x$ dla $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ nie zawiera punktów o obu współrzędnych algebraicznych poza punktem* $(0,0)$.

Wykorzystamy prostą obserwację, że suma i różnica liczb algebraicznych jest liczbą algebraiczną. Ze wzorów Eulera wynika równość $\operatorname{tg} y = \frac{1}{i}\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{e^{iy}+e^{-iy}}$. Załóżmy, że $(a,b) \neq (0,0)$ ma obie współrzędne algebraiczne i $b = \operatorname{tg} a$. Wtedy $(1-ib)e^{ia} - (1+ib)e^{-ia} = 0$, co jest sprzeczne z twierdzeniem Lindemanna.

Na przykład liczba $\operatorname{tg} 13$ jest przestępna.

Analogicznie można wykazać, że żaden punkt wykresu funkcji ctg dla $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi, \pi + k\pi)$ nie ma obu współrzędnych algebraicznych.

Podane wyżej klasyczne twierdzenia i ich konsekwencje powinny być elementem kultury matematycznej – ale czy są...?

[7] Pierre Laurent Wantzel w 1837 roku udowodnił, że każda konstruowalna liczba zespolona jest algebraiczna nad ciałem $\mathbb{Q}$ i jej stopień nad $\mathbb{Q}$ jest potęgą liczby dwa.

Bibliografia

[1] W. Dunham, *Euler: the master of us all*, Dolciani Mathematical Expositions, t. 22, Mathematical Association of America, Washington DC 1999.
[2] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Marcum-Michaelem Bousquet & socios, Lausanne 1748.
[3] G. H. Hardy, *Kurs analizy. Rachunek różniczkowy i całkowy*, wyd. II, Wyd. „Mathesis Polskiej", Warszawa 1930.
[4] A. P. Juszkiewicz (red.), *Historia matematyki*, t. 3, Matematyka XVIII stulecia, PWN, Warszawa 1977.
[5] M. E. Kuczma, *O szeregach liczbowych*, WSiP, Warszawa 1987.
[6] G. B. Price, *On the definition of* $e^{i\theta}$, Amer. Math. Monthly 43 (1936), 632–633.
[7] D. J. Struik (red.), *A source book in mathematics, 1200–1800*, Harvard University Press, Cambridge, MA 1969.
[8] W. Więsław, *VII problem Hilberta*, [w:] *Problemy Hilberta w pięćdziesięciolecie śmierci ich twórcy* (W. Więsław, red.), Instytut Historii Nauki PAN, Warszawa 1997, 71–84.

Jarosław Górnicki
Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej
Politechnika Rzeszowska
gornicki@prz.edu.pl

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 287–299
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Tadeusz Nadzieja (Opole)

Pół wieku seminarium profesora Andrzeja Krzywickiego – kilka osobistych wspomnień

W Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego działa nieprzerwanie od prawie pięćdziesięciu lat seminarium z równań różniczkowych. Jestem jednym z tych, którzy byli przy jego narodzinach, i byłem przez wiele lat jego aktywnym uczestnikiem. Postanowiłem podzielić się moimi wspomnieniami. Zapewne w tekście pominąłem kilka istotnych faktów z historii seminarium i być może nie wymieniłem też nazwisk kilku aktywnych jego uczestników. Usprawiedliwia mnie nieco zawodność ludzkiej pamięci oraz ograniczona objętość artykułu. Postanowiłem maksymalnie ograniczyć liczbę pozycji bibliografii. Cytowałem zazwyczaj tylko jeden z pierwszych artykułów autorstwa uczestników seminarium – ten, który zapoczątkował badania danej tematyki. Czytelnicy *Wiadomości Matematycznych* mogą dotrzeć do interesujących ich prac za pomocą baz danych. W trakcie pisania artykułu nie mogłem się zdecydować, czy używać nazwisk, czy też imion matematyków, o których piszę. Na seminarium zwracali się do siebie zazwyczaj po imieniu i ta forma bardziej pasowałoby do stylu, w jakim napisałem moje wspomnienia, ale – aby uniknąć niejednoznaczności i biorąc pod uwagę wygodę czytelników – zazwyczaj używam nazwisk.

W początkach lat siedemdziesiątych zaczynałem pisać pracę magisterską pod opieką Andrzeja Krzywickiego. Jej przedmiotem była analiza nieliniowego zagadnienia brzegowego drugiego rzędu. Moja praca była częścią dużego projektu – teraz powiedziałoby się „grantu" – który był finansowany przez Poltegor. Nie wszystkim zapewne ta nazwa coś mówi. Poltegor (akronim nazwy Polska Technika Górnicza) to przedsiębiorstwo powstałe w latach pięćdziesiątych i świadczące usługi projektowe dla kopalń. W swoim czasie było właścicielem najwyższego budynku we Wrocławiu. Nieruchomość wraz z otaczającą działką

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

kupił Leszek Czarnecki, budynek zburzono i na jego miejscu stoi teraz Sky Tower. Przedsiębiorstwo zostało podzielone i sprywatyzowane. W czasach swojej świetności Poltegor nawiązał współpracę z Romanem Zuberem, pracownikiem Instytutu Matematycznego UWr, i w 1971 roku zlecił mu zorganizowanie zespołu matematyków, którego celem byłoby opracowanie modelu zachowania się tzw. leja depresji. Z grubsza rzecz ujmując, chodziło o to, że kopalnie odkrywkowe bardzo zmieniały poziom wód gruntowych w swoim sąsiedztwie i zleceniodawcom zależało na dokładnym oszacowaniu tych zmian. W tle były procesy sądowe z rolnikami mieszkającymi kilkadziesiąt kilometrów od Bełchatowa i domagającymi się rekompensat za utratę zbiorów z powodu braku wody, który – według nich – był spowodowany działalnością kopalni.

W pracę zespołu zaangażowanych było wielu matematyków, nawet takich, którzy na co dzień byli raczej dalecy od równań różniczkowych i metod numerycznych. Jedną z tego przyczyn były pieniądze. Płacono nieźle. Za swoją pracę magisterską, a udowodniłem w niej istnienie i jednoznaczność rozwiązania dosyć nietypowego zagadnienia brzegowego oraz podałem jego oszacowania, otrzymałem dwie pensje asystenckie. Pieniądze dla matematyków płynęły również z innego źródła. Było nim istniejące do dzisiaj Centrum Badawczo-Rozwojowe Cuprum, pracujące dla przemysłu miedziowego. Finansowało ono badania nieco innych, choć z matematycznego punktu widzenia podobnych, zagadnień. Chodziło głównie o rozchodzenie się zanieczyszczeń wokół zbiorników poflotacyjnych.

W bardzo dużym uproszczeniu można powiedzieć, że różnica między zagadnieniami postawionymi przez Poltegor i Cuprum była taka: zleceniodawców z Poltegoru interesowało, jak zachowa się poziom wód gruntowych, gdy wywiercimy studnię i będziemy pompować z niej wodę, natomiast tych z Cuprum – jak będą rozchodzić się zanieczyszczenia w glebie, gdy będziemy je wlewać do dołu wykopanego w ziemi.

Zespoły matematyków zaangażowanych w zlecenia Cuprum i Poltegoru były liczne. Główne role odgrywali w nich Andrzej Krzywicki, Hanna Marcinkowska, Adam Rybarski, Czesław Ryll-Nardzewski i Roman Zuber. Krzywicki i Rybarski mieli niezwykłą intuicję oraz wiedzę z hydromechaniki i głównie na nich spoczywała odpowiedzialność za konstrukcję odpowiednich modeli matematycznych opisujących procesy hydrologiczne zachodzące w glebie. Marcinkowska i Ryll-Nardzewski czuwali nad matematyczną stroną problemu, a Zuber był odpowiedzialny za część numeryczną zagadnień. Każdy z nich zgromadził wokół siebie młodych pracowników, czasami jeszcze studentów. Problemy matematyczne, które powstały przy okazji zleconych badań, przyczyniły się do rozwoju naukowego paru roczników absolwentów matematyki we Wrocławiu.

Corocznie przedstawiano sprawozdania z osiągniętych wyników. Mam przed sobą sprawozdanie dla Poltegoru. To ryza pożółkłego, rozpadającego się już, jednostronnie zapisanego papieru, podzielona na kilka części. Drukarek ani żadnego edytora tekstu nie było, wszystko pisano na maszynie, a wzory matematyczne wpisywano ręcznie. Większość tekstu dotyczy stosowanych metod numerycznych. Do obliczeń używano maszyny ODRA 1204 o pamięci operacyjnej 64 kilosłów. Stała ona w budynku obecnego Instytutu Matematycznego UWr, zajmowała jedną trzecią piętra i wymagała specjalnej klimatyzacji.

Sprawozdania były analizowane przez ekspertów Poltegoru. Okazało się, że równania różniczkowe zaproponowane przez matematyków dobrze opisywały zachowanie się leja depresji i obliczenia numeryczne ich rozwiązań zostały potwierdzone przez badania terenowe. Współpraca z Poltegorem i Cuprum zakończyła się w 1978 roku.

W czasie trwania projektów z inicjatywy Rylla-Nardzewskiego powołano seminarium, na którym na bieżąco omawiano problemy i postępy prac. W latach 1973–1974 stopniowo wyodrębniło się z niego środowiskowe seminarium z równań różniczkowych, którego prowadzącymi byli Krzywicki i Marcinkowska. Uczestnikami byli pracownicy Uniwersytetu Wrocławskiego, Politechniki Wrocławskiej oraz Akademii Rolniczej. Przeważali matematycy, choć była też grupa inżynierów zainteresowanych hydromechaniką i teorią spalania oraz chemików, specjalistów z teorii kinetyki chemicznej. Na początku trzon stałych uczestników seminarium tworzyli Jan Goncerzewicz, Aleksander Janicki, Wojciech Okrasiński, Krzysztof Tabisz, Jan Śliwa i Adam Szustalewicz. Siebie nie wymieniłem, bo wtedy tylko bywałem na seminarium i dopiero później uczęszczałem na nie regularnie.

Główną tematyką odczytów były wówczas równania filtracji, czyli różne wersje równania Boussinesqa[1] $h_t = \Delta h^2$. Opisuje ono poziom $h(x, y, t)$ wód gruntowych w punkcie (x, y) i w chwili t. Zazwyczaj rozpatrywano je w obszarze radialnie symetrycznym. W pracy [9] wprowadzono równanie całkowe typu Volterry. Rozwiązanie tego równania dobrze przybliżało rozwiązanie zagadnienia Boussinesqa, a ono samo oraz jego uogólnienia były przez wiele lat obszarem badawczym Okrasińskiego oraz Wojciecha Mydlarczyka, który dołączył do seminarium nieco później.

Badania równań filtracji były z dużymi sukcesami kontynuowane przez wiele lat przez grupę matematyków z Akademii Rolniczej i dotyczyły głównie metod numerycznych ich rozwiązywania.

[1] Joseph Valentin Boussinesq (1842–1926) – francuski matematyk i fizyk, wniósł istotny wkład w rozwój hydrodynamiki oraz teorii drgań, światła i ciepła.



Rok 2004. Grono uczestników seminarium wraz z sympatykami. Od lewej Grzegorz Karch, Ewa Obłąk, Andrzej Krzywicki, Krzysztof Stempak, Michał Olech, Dorota Biler, Andrzejek Biler, Andrzej Raczyński, Piotr Biler, Mariusz Kieca, Tadeusz Nadzieja

Z wymienionych wyżej uczestników seminarium tylko Goncerzewicz pozostał wierny problemom matematycznym zapoczątkowanym w projekcie Cuprum. Interesował się głównie zdegenerowanymi równaniami parabolicznymi typu

$$u_t = (\varphi(u))_{xx} + f(x)\psi(u)_x. \tag{1}$$

Funkcje f, φ i ψ są zadane, przy czym pochodna φ' jest nieujemna i zeruje się w pewnym punkcie – tam pojawia się zdegenerowanie dyfuzji. Jego konsekwencją jest brak klasycznych rozwiązań oraz istnienie brzegu swobodnego, będącego granicą obszaru dodatniości rozwiązań. Goncerzewicz badał równanie (1) uzupełnione warunkiem brzegowym i początkowym. Zajmował się problemem istnienia i jednoznaczności oraz własnościami uogólnionych (słabych) rozwiązań w przypadku funkcji nieregularnych – brzegowych i początkowych. W późniejszym okresie zainteresował się równaniem ośrodków porowatych $u_t = \Delta(u^m)$ z $m > 1$. W owym czasie nie wiedzieliśmy, że niemal równocześnie zagadnienia związane z modelowaniem rozprzestrzeniania się zanieczyszczeń

w wodach gruntowych badano w Delft i Leiden. Goncerzewicz nawiązał kontakt z Brianem Gildingiem, wybitnym wychowankiem holenderskiej szkoły nieliniowych równań różniczkowych, zaangażowanym w te badania. Rezultatem ich wieloletniej współpracy jest kilka prac, w których badali rozwiązania równań filtracji wybuchające w skończonym czasie oraz – gdy są globalne – ich asymptotykę (zob. [8]).

Na początku lat osiemdziesiątych dołączył do uczestników seminarium Piotr Biler, a w latach dziewięćdziesiątych – Andrzej Raczyński, Janusz Mierczyński, Henryk Kudela, Wojciech Mydlarczyk, Grzegorz Karch, Izabella Łaba oraz Robert Stańczy. Czasami na posiedzeniach bywało ponad dwadzieścia osób. Grono uczestników zmieniało się, ktoś wyemigrował, zmienił zainteresowania, przybywali też nowi zainteresowani tematyką seminarium – czasami tylko na parę posiedzeń, ale zdarzało się, że dzięki ich wiedzy powstawały wspólne prace.

Jak na każdym seminarium, referowano własne wyniki oraz prace innych autorów. Zaczęto nawiązywać kontakty międzynarodowe, coraz częściej pojawiali się goście z innych ośrodków. Rezultaty badań przekładały się na doktoraty i habilitacje. Mniej uwagi zaczęto zwracać na aspekt aplikacyjny, zagadnienia zaczynały żyć swoim życiem matematycznym. To, że badania nie stoczyły się w przepaść uogólnień bez motywacji fizycznych, jest zasługą Krzywickiego, który mocno hamował takie zapędy. Swoją rolę odgrywali też inżynierowie, którzy czasami rzucali cierpkie uwagi na temat interpretacji przedstawianych przez referenta zagadnień.

Seminarium w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych odgrywało bardzo dużą rolę w środowisku matematyków wrocławskich. Każdy, kto miał jakiś problem lub wynik z równań różniczkowych, prędzej czy później się na seminarium pojawiał. Atmosfera była zawsze życzliwa dla prelegentów, ale też stres przed referatem dotykał każdego. Czasami kilka uwag prowadzących seminarium lub któregoś z uczestników „kładło na łopatki" prelegenta, ale nigdy nie pozostawiano go z problemami. Zawsze pojawiały się propozycje zmian, ulepszeń i w rezultacie nikt po referacie nie czuł się źle i każdy wracał do swojej pracy bogatszy o nową wiedzę, choć bywało, że uboższy o jedną publikację.

W końcu lat osiemdziesiątych pojawiły się tzw. problemy węzłowe, taka chyba nazwa wtedy funkcjonowała. Był to rodzaj grantów finansowanych przez Ministerstwo. Pamiętam spotkanie na uniwersytecie, na którym byli obecni geolodzy, biolodzy, może ktoś z geografów, w każdym razie pracownicy naukowi odczuwający potrzebę współpracy z matematykami. Referowali oni swoje problemy i oczekiwali, że matematycy pomogą im je rozwiązać. Zainteresowało mnie zagadnienie przedstawione przez młodego biochemika, które dotyczyło dosyć szczególnego zagadnienia z teorii elektrolitów. Niewiele trzeba było, aby

przekonać Krzywickiego, by przyjrzeć się bliżej problemowi. Szczęśliwym zbiegiem okoliczności w księgarni rosyjskiej w Rynku pojawiły się dzieła zebrane Petera Debye'a[2]. Dodam dla młodszych czytelników, że księgarnia rosyjska była podstawowym źródłem zaopatrzenia w literaturę matematyczną. Rosjanie sami świetnie pisali, nie przejmowali się też prawami autorskimi i tłumaczyli co cenniejsze pozycje światowej literatury matematycznej. Poza tym wydane przez nich książki były dostępne na każdą kieszeń. Nabyłem ładnie wydaną kolekcję prac Debye'a i starałem się coś z nich zrozumieć. Bardzo opornie mi to szło. Z pomocą pospieszył Krzywicki. Parę jego trafnych uwag i spostrzeżeń rozjaśniło mi mocno teorię elektrolitów. W szczególności uświadomił mi, że u podstaw teorii elektrolitów leży mechanika Arystotelesa, a nie Newtona. Nie przyspieszenie jest proporcjonalne do siły, ale prędkość! Ta niby drobna uwaga spowodowała, że zrozumiałem wiele z tajemniczych do tej pory dla mnie zagadnień.

Ogólnie rzecz ujmując, w teorii elektrolitów opisuje się ewolucję gęstości chmury jonów poruszających się pod wpływem wzajemnego oddziaływania coulombowskiego. Wpływ elektrolitu na poruszający się jon można rozłożyć na trzy części: pierwszą, związaną z fluktuacjami cieplnymi, drugą – z tarciem proporcjonalnym do prędkości cząstki i trzecią – z gradientem elektrycznego pola sił wytworzonego przez chmurę jonów. Paraboliczno-eliptyczny układ równań opisujący ewolucję gęstości jonów i potencjału wytworzonego przez nie został wyprowadzony przez Walthera Nernsta[3] i Maxa Plancka w latach osiemdziesiątych XIX wieku, a następnie intensywnie badany przez Debye'a i Ericha Hückela[4] w latach dwudziestych XX wieku.

Pod koniec lat osiemdziesiątych Krzywicki zaproponował, aby rozważać ewolucję chmury cząstek, oddziaływania między którymi nie są typu coulombowskiego, a na przykład typu grawitacyjnego. Na początku wydawało się, że problem ma charakter czysto matematycznej zabawki, bez szans na sensowną interpretację fizyczną. Okazało się, że jest inaczej i zagadnienia tego typu od wielu lat były przedmiotem zainteresowania astronomów.

---

[2] Peter Debye (1884–1966) – holenderski chemik, laureat nagrody Nobla z chemii w 1936 roku.

[3] Walther Nernst (1864–1941) – fizyk i chemik niemiecki, laureat nagrody Nobla z chemii w 1920 roku, sformułował trzecią zasadę termodynamiki.

[4] Erich Hückel (1896–1980) – niemiecki fizyk i chemik. Pochodził ze znanej rodziny uczonych. Jego dziadek i pradziadek byli znanymi botanikami, a brat Walter, fizyk, profesor uniwersytetu we Wrocławiu, w lutym 1940 roku wystosował list do Ministerstwa Nauki, Wychowania i Oświaty III Rzeszy, w którym wstawił się za profesorami UJ aresztowanymi w ramach akcji Sonderaktion Krakau.

Opis ewolucji gęstości u chmury cząstek poruszających się po wpływem wzajemnego oddziaływania oraz podlegających tarciu i fluktuacji cieplnej można opisać równaniem typu Fokkera–Plancka

$$u_t = \nabla \cdot \big(\nabla u + X(u)u\big), \quad u\colon \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Część transportowa jest zadana polem wektorowym $X(u)$ zależnym od u w nielokalny sposób, na przykład poprzez równanie różniczkowe $\pm\Delta\varphi = u$, $X(u) = \nabla u$ lub ogólniej operatorem całkowym $\varphi(x,t) = \int_\Omega K(x,y)u(y,t)\,\mathrm{d}y$, $X(u) = \nabla\varphi$. Jądro K zależy od typu oddziaływań między cząsteczkami. Równanie (2) uzupełniamy warunkiem brzegowym gwarantującym zachowanie masy całkowitej cząstek

$$\big(\nabla u + uX(u)\big) \cdot \nu = 0 \tag{3}$$

oraz początkowym

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{4}$$

W równości (3) ν jest wektorem jednostkowym prostopadłym do brzegu, a u_0 we wzorze (4) – zadaną funkcją.

Jeśli $X(u) = \nabla \int_\Omega K(x,y)u(y,t)\,\mathrm{d}y$, to stacjonarna gęstość U ma postać boltzmannowską $U = C\exp(-\Phi)$, a stacjonarny potencjał Φ spełnia równanie funkcyjno-całkowe Lane'a–Emdena[5]

$$\Phi(x) = M\left(\int_\Omega \exp(-\Phi(y)\,\mathrm{d}y)\right)^{-1} \int_\Omega K(x,y)\exp(-\Phi(y))\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

Parametr M można interpretować jako masę całkowitą chmury cząstek.

Równanie (5) w przypadku oddziaływań coulombowskich sprowadza się do zagadnienia brzegowego dla równania Poissona–Boltzmanna

$$\Delta\Phi = -M\frac{\exp(-\Phi)}{\int_\Omega \exp(-\Phi)}, \quad \Phi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

Wspólnie z Krzywickim pracowałem nad problemem (6). Wykazaliśmy, że ma on jedyne rozwiązanie (zob. [10]). Pamiętam, że na początku badania szły dosyć opornie. Zauważmy, że zagadnienie (6) jest nielokalne, bowiem po prawej jego stronie występuje całka z funkcji niewiadomej. Fakt ten rodzi problemy, które nie występują w zagadnieniach lokalnych, tzn. takich, w których po prawej stronie występuje wartość funkcji niewiadomej w danym punkcie.

[5] Jonathan Homer Lane (1819–1880) – amerykański astrofizyk, wyznaczył teoretycznie związki między temperaturą, ciśnieniem i gęstością we wnętrzu Słońca. Jacob Robert Emden (1862–1940) – szwajcarski astrofizyk, opracował model zachowania się kul gazowych pod wpływem własnej grawitacji.

Pamiętam, że przez wiele dni nie mogliśmy „dobrać się" do zagadnienia, wszystkie pomysły i metody zawodziły, nierówności zachodziły w odwrotną stronę, założenia znanych nam twierdzeń nie były w interesującym przypadku spełnione, jednym słowem – katastrofa. Był lipiec, postanowiłem na parę dni pojechać na wieś i oderwać się od problemu. Poinformowałem o tym Krzywickiego. Byłem już w pociągu i do odjazdu brakowało kilku minut, gdy zauważyłem idącego peronem Krzywickiego, prowadzącego swój bardzo charakterystyczny rower. Piszę o tym, bowiem najpierw rzucił mi się w oczy właśnie rower, a później prowadząca go osoba. Okazało się, że Krzywicki poszukiwał mnie w pociągu, aby przekazać mi swoje ostatnie przemyślenia spisane na kartkach. Wziąłem kartki, pociąg ruszył, a ja zacząłem je studiować. W efekcie ich lektury już w okolicach Brzegu miałem zamiar wysiąść z pociągu i wrócić do Wrocławia, aby kontynuować nasze badania. Dojechałem jednak do celu, ale po trzech dniach byłem z powrotem we Wrocławiu.

Problem niestacjonarny w przypadku oddziaływań coulombowskich został rozwiązany w pracy [2]. Wykazano w niej, że w przypadku dwuwymiarowym rozwiązania istnieją, są jednoznaczne i dążą do rozwiązania stacjonarnego. Podobny rezultat otrzymano w trójwymiarowym przypadku, przy założeniu, że warunki początkowe są dostatecznie blisko rozwiązań stacjonarnych. Jednym ze współautorów pracy jest Waldemar Hebisch, który nie był uczestnikiem seminarium, ale zainteresowało go zagadnienie, nad którym pracowaliśmy z Bilerem i dał się wciągnąć do współpracy. On też jest autorem kluczowego oszacowania potrzebnego do dowodu zasadniczego twierdzenia.

Po uporaniu się z głównymi problemami zagadnienia opisującego oddziaływania coulombowskie zaczęliśmy badać przypadek oddziaływań grawitacyjnych. Jest on o wiele bardziej złożony i ciekawszy z matematycznego punktu widzenia. Okazało się, że istnienie rozwiązania stacjonarnego zależy od geometrii obszaru i parametru M, zazwyczaj nie ma też jednoznaczności rozwiązań (zob. [11]).

Brak rozwiązań stacjonarnych przeważnie prowadzi do istnienia rozwiązań wybuchających zagadnienia niestacjonarnego. Można było się spodziewać, że takie zjawisko ma też miejsce w przypadku równań opisujących ewolucję układów z oddziaływaniami newtonowskimi między cząsteczkami.

Mocno zaangażowaliśmy się z Bilerem w wykazanie istnienia rozwiązań wybuchających. Wiedzieliśmy, że jakaś norma rozwiązania powinna w skończonym czasie dążyć do nieskończoności. Pracowaliśmy nad zagadnieniem radialnie symetrycznym w kuli jednostkowej, które sprowadzało się w przypadku n-wymiarowym do jednego równania z odpowiednio zadanymi warunkiem

brzegowym i początkowym

$$Q_t = n^2 y^{2-\frac{2}{n}} Q_{yy} + n\sigma_n^{-1} Q Q_y, \tag{7}$$

$$Q(0,t) = 0, \quad Q(1,t) = M, \quad Q(y,0) = Q_0(y) \geqslant 0, \tag{8}$$

przy czym Q_0 jest zadaną funkcją, a σ_n polem sfery jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Funkcja Q ma interpretację fizyczną – jest to masa cząstek w kuli o promieniu y. Równanie (7) jest nieliniowe, ale nie w tym problem – główny kłopot to zerujący się współczynnik przy drugiej pochodnej, przez co równanie nie jest jednostajnie paraboliczne. W badania nad naszym zagadnieniem zaangażowała się Danielle Hilhorst z Paris Orsay, częsty gość we Wrocławiu. Problem istnienia rozwiązań stacjonarnych, globalnych i wybuchających zagadnienia (7–8) został prawie zadowalająco rozwiązany w pracy [3]. Później wspólnie z Bilerem napisaliśmy jeszcze kilka artykułów na jego temat.

Początki naszego zainteresowania istnieniem rozwiązań wybuchających w przypadku nieradialnie symetrycznym były trudne, problem nie poddawał się żadnym znanym nam metodom.

Był upalny czerwiec, początek lat dziewięćdziesiątych, zlecono mi prowadzenie kursów dla maturzystów. Zajęcia odbywały się w budynku gmachu głównego uniwersytetu, zaplanowano je nawet w święto Bożego Ciała. Wychodzę po lekcjach przed budynek i widzę, że obok pomnika szermierza stoi Piotr i czeka na mnie z jakimiś „oszacowankami", zawsze używał takiego zdrobnienia. Siedzieliśmy na ławce przed gmachem głównym uniwersytetu i usiłowaliśmy jakoś wykorzystać nową wiedzę, w tle słychać było śpiewy uczestników procesji. O ile pamiętam, żadnych sukcesów w ten świąteczny dzień nie osiągnęliśmy.

Po pewnym czasie Biler wykorzystał swoje doświadczenie w badaniu równania Schrödingera i zaproponował użycie tzw. metody momentów, a dokładniej chodziło o ewolucję drugiego momentu gęstości. Pomysł zdał egzamin i udało się wykazać, że w przypadku dwuwymiarowym, jeśli rozpatrujemy problem w obszarze gwiaździstym, na przykład w dysku, to dla mas większych od 4π istnieją rozwiązania wybuchające, tzn. takie, które są określone tylko na skończonym odcinku czasu $[0, T)$ i pewne normy rozwiązania dążą do nieskończoności, gdy czas dąży do T – można rzec, że mamy do czynienia z pewnego rodzaju kolapsem grawitacyjnym. W pracy [1] pojawiły się po raz pierwszy normy Morreya[6], w języku których sformułowano warunki na istnienie wybuchów i jednoznaczność rozwiązań.

[6] Charles Bradfield Morrey Jr. (1907–1984) – amerykański matematyk, autor znaczących rezultatów w zakresie równań różniczkowych cząstkowych i rachunku wariacyjnego.

Chyba w połowie lub końcu lat dziewięćdziesiątych Biler natknął się na pracę angielskiego fizyka Raymounda Streatera[7], który wyprowadził równanie opisujące nie tylko ewolucję gęstości chmury cząstek, lecz również jej temperatury. W naszych modelach temperatura była ustalonym parametrem. Dosyć szybko nawiązaliśmy z nim kontakt. Bywał na seminarium we Wrocławiu, uczestnicy seminarium jeździli do Londynu. Mieszkałem u niego w domu przez tydzień, a później on gościł u mnie w Zielonej Górze. Mieliśmy dużo czasu na dyskusje, ale przyznam, że trudno było znaleźć wspólny punkt widzenia. Ray patrzył na nasze zagadnienia z punktu widzenia fizyki i cały czas twierdził, że żadnych wybuchów rozwiązań nie ma, bowiem trzeba, przy dużej gęstości materii, uwzględnić efekty kwantowe. I tutaj nasze drogi się rozchodziły. Pamiętam jego opinię na temat równania Naviera–Stokesa. Twierdził, że kłopoty z nim związane biorą się z faktu, że problem jest źle postawiony. Wprowadzał modyfikacje do tego równania, ale nie bardzo zrozumiałem, w jaki sposób mogłyby one uprościć matematykom zagadnienie.

Równania wyprowadzone przez Streatera mają wyjątkowo skomplikowaną postać i nie wiem, czy ktoś do tej pory wykazał istnienie ich rozwiązań. My zajęliśmy się rozwiązaniami stacjonarnymi, które spełniały badane przez nas wcześniej równania. Postawiliśmy sobie jednak ambitniejsze zadanie – zbadać rozwiązania stacjonarne przy zadanej energii całkowitej, tj. sumy energii potencjalnej i cieplnej. Problem okazał się ciekawy i udało się zaangażować w jego badanie paru świetnych matematyków. Rezultatem jest praca [5].

Współpraca z grupą astronomów z Tuluzy zaowocowała badaniem ewolucji chmury cząstek poruszających się pod wpływem wzajemnego oddziaływania grawitacyjnego, przy czym zamiast liniowego związku między ciśnieniem i gęstością rozpatrujemy innego rodzaju relacje, na przykład Fermiego–Diraca. Prowadzi to do dosyć skomplikowanych problemów, część z nich została rozwiązanych w pracy [6, str. 61–78].

Równania ewolucji gęstości chmur wzajemnie oddziałujących cząstek są bardzo podobne do równań chemotaksji. Przypomnijmy, że opisują one gęstość kolonii bakterii oraz substancji wytwarzanej przez nie, tzw. chemoatraktanta. Bakterie poruszają się w kierunku jego maksymalnego stężenia. Różne modele opisujące zjawisko chemotaksji są przedmiotem zainteresowania w wielu czołowych ośrodkach matematycznych. We Wrocławiu bardzo zaangażował się w tę tematykę Biler. Dosyć szybko dołączył do niego Karch oraz jego doktoranci. Stworzyli bardzo silny zespół, a do współpracy udało im się namówić

[7] Raymound Streater (ur. 1936) – angielski fizyk, obecnie emerytowany profesor matematyki stosowanej w King's College London. Znany głównie jako współautor z A. S. Wightmanem monografii na temat kwantowej teorii pola.

paru matematyków zagranicznych i polskich, nawet dosyć dalekich od równań różniczkowych, ale dysponujących wiedzą z analizy harmonicznej i tzw. siłą dowodową, bardzo przydatną w badaniu wyjątkowo złożonych zagadnień. Metody badawcze zahaczały o teorię przestrzeni Morreya, analizę funkcjonalną i harmoniczną. Ja już nie brałem w tych badaniach aktywnego udziału, a wyniki nie jest łatwo opisać bez odwoływania się do skomplikowanych pojęć, które nie są powszechnie znane. Świetnym źródłem informacji o zagadnieniach chemotaksji jest monografia [7] oraz obszerna literatura w niej zawarta.

W latach dziewięćdziesiątych Biler i Karch wielokrotnie przebywali na Case Western University w Cleveland, gdzie współpracowali z Wojborem Woyczyńskim, byłym pracownikiem Instytutu Matematycznego UWr i wychowankiem Kazimierza Urbanika. Przywieźli stamtąd nową tematykę badań. W rozważanych do tej pory zagadnieniach na wrocławskim seminarium operator Laplace'a zastąpili laplasjanem fraktalnym Δ^s. Jest to operator nielokalny działający na funkcjach pewnej klasy i zdefiniowany za pomocą transformaty Fouriera

$$\mathcal{F}(\Delta^s u)(x) = |x|^s \mathcal{F}u(x)$$

lub przez całkę singularną

$$(-\Delta)^s u(x) = C\, P.V. \int_{\mathbf{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}}\, \mathrm{d}y,$$

przy czym C jest pewną stałą, a $P.V.$ oznacza, że chodzi o wartość całki w sensie wartości głównej.

Formalna definicja ułamkowego laplasjanu nie wyjaśnia, dlaczego we wspomnianych wcześniej równaniach zastąpiono laplasjan jego wersją ułamkową. Jeśli opisujemy ewolucję gęstości chmury cząstek poruszających się ruchem Browna, to ewolucja gęstości tych cząstek opisana jest klasycznym równaniem ciepła. Natomiast jeśli dopuścimy możliwość dużych skoków tych cząstek, to w równaniu ciepła laplasjan zastępujemy laplasjanem ułamkowym.

Okazuje się, że wiele procesów w przyrodzie wymaga w ich modelowaniu użycia właśnie laplasjanu ułamkowego, co prowadzi do nowej klasy zagadnień matematycznych. Pojawiły się one na przykład w pracy [4] i stały się przedmiotem badań Bilera, Karcha i skupionej wokół nich grupy młodych matematyków. Przyznam, że długo nie mogłem przekonać się do nowego obszaru badań, choć przez wiele godzin dyskutowałem z ich inicjatorami na temat użyteczności nowego aparatu matematycznego. Być może mój sceptycyzm jest związany z nikłą znajomością procesów stochastycznych, a właśnie procesy Levy'ego prowadzą do ułamkowych laplasjanów. Grupa uznająca celowość badań za-

gadnień z nowego typu nielokalnymi laplasjanami tworzy teraz większość na seminarium, a jej dorobek jest znaczny.

Wspomniałem o mojej nikłej znajomości procesów stochastycznych. Okazało się, że w rezultacie tej niewiedzy powstała elementarna praca zawierająca wynik, który mógłby się znaleźć w każdym podręczniku z równań cząstkowych.

W jednej z naszych wspólnych prac Biler użył argumentu pochodzącego z teorii procesów stochastycznych (tzw. test Fellera). Artykuł się ukazał, ale byłem zdania, że powinniśmy poszukać dowodu opartego tylko na argumentach analitycznych. Po kilkunastu miesiącach wykazaliśmy metodami elementarnymi, że równanie ciepła na dysku dwuwymiarowym bez środka z warunkami brzegowymi (1 na brzegu koła i 0 w środku) nie ma rozwiązań, nawet lokalnych w czasie. Później uogólniliśmy ten rezultat na liniowe równania paraboliczne.

Wydaje mi się, że wymieniłem podstawowe zagadnienia będące przedmiotem zainteresowań uczestników seminarium. Powstawały również prace poza głównym nurtem badań, na przykład z teorii termistorów, równania Boltzmanna i Naviera–Stokesa. Ostatnimi laty Karch nawiązał współpracę z grupą matematyków zajmującą się modelowaniem zjawisk biologicznych. Zaowocowało to powstaniem kilku prac i otworzyło nowe obszary badawcze.

Na koniec parę zdań o zwyczajach panujących na seminarium. Prelekcje były dwugodzinne, tzn. dwa razy po 45 minut z przerwą piętnastominutową. Po wykładzie wszyscy spotykali się w jednym pokoju. Czasami tłok był wielki, na szczęście były to właściwie dwa pokoje obok siebie ze wspólnymi drzwiami. W jednym, gdzie przebywała większość, zazwyczaj była butelka niezłego wina i mnóstwo pączków, które kupował Krzywicki w cukierni „Pod trumienką". W rzeczywistości na jej szyldzie widniał napis „Cukiernia", ale sąsiadowała z zakładem pogrzebowym i taka jej nazwa przyjęła się powszechnie we Wrocławiu. Dyskutowano o różnych sprawach, komentowano bieżące wydarzenia, koncerty, książki, dzielono się nową wiedzą nabytą od ostatniego posiedzenia. Jeśli ktoś chciał podyskutować o szczegółach referatu, miał do dyspozycji drugi pokój, w którym nie było tłoku. Tak było w XX wieku. Później uczestnicy seminarium zaczęli nabywać samochody, więc o lampce wina musieli zapomnieć; niektórzy musieli zacząć dbać o zdrowie, więc coraz trudniej było też skonsumować wszystkie pączki. Rodzinne i służbowe obowiązki sprawiły, że spotkania były krótsze niż wcześniej. Na seminarium coraz częściej goszczą zagraniczni stażyści i większość odczytów jest w języku angielskim. Spotkania po seminarium przybrały też, ze względu na ich obecność, nieco inny charakter.

Obecnie prowadzącymi seminarium są Andrzej Krzywicki, Piotr Biler, Grzegorz Karch i Miłosz Krupski – Mistrz (tak nazywamy profesora Krzywickiego), jego uczeń, wnuk i prawnuk naukowy.

Podziękowanie. Dziękuję P. Bilerowi, J. Goncerzewiczowi oraz G. Karchowi za uwagi, które uwzględniłem w ostatecznej wersji artykułu.

Bibliografia

[1] P. Biler, T. Nadzieja, *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction od particles*, Colloq. Math. 66 (1994), 319–334.
[2] P. Biler, W. Hebisch, T. Nadzieja, *The Debye system: existence and large time behavior of solutions*, Nonlinear Anal. 23 (1994), 1189–1209.
[3] P. Biler, D. Hilhorst, T. Nadzieja, *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, II*, Coll. Math. 67 (1994), 297–308.
[4] P. Biler, G. Karch, W. Woyczynski, *Multifractal and Lévy conservation laws*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330 (2000), 343–348.
[5] P. Biler, J. Dolbeault, M. J. Esteban, P. A. Markowich, T. Nadzieja, *Steady states for Streater's energy-transport models of self-gravitating particles*, IMA Vol. Math. Appl., t. 135, Springer, New York 2004, 37–56.
[6] P. Biler, T. Nadzieja, R. Stańczy, *Nonisothermal systems of self-attracting Fermi–-Dirac particles*, [w:] *Nonlocal elliptic and parabolic problems* (P. Biler, G. Karch, T. Nadzieja, red.), t. 66, Banach Center Publ. 2004, 61–78.
[7] P. Biler, *Singularities of solutions to chemotaxis systems*, De Gruyter, Berlin 2020.
[8] B. H. Gilding, J. Goncerzewicz, *Localization of solutions of exterior domain problems for the porous media equation with radial symmetry*, SIAM J. Math. Anal. 31 (2000), 862–893.
[9] J. Goncerzewicz, H. Marcinkowska, W. Okrasiński, K. Tabisz, *On the percolation of water from a cylinder reservoir into the surrounding soil*, Zastosow. Mat. 16 (1978), 249–261.
[10] A. Krzywicki, T. Nadzieja, *Poisson–Boltzmann equation in* $\mathbb{R}^3$, Ann. Polon. Math. 54 (1991), 265–272.
[11] A. Krzywicki, T. Nadzieja, *A note on the Poisson–Boltzmann equation*, Zastosow. Mat. 21 (1993), 591–595.

Tadeusz Nadzieja
Katedra Matematyki
Uniwersytet Opolski
tnadzieja@uni.opole.pl

Pewien matematyk zwrócił innemu matematykowi uwagę na to, że w jego fundamentalnej pracy jest pięć błędów.

W odpowiedzi usłyszał:

– Ale tylko trzy kładące pracę!

autentyczne

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 301–309
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Lech Maligranda (Luleå, Poznań)

Setna rocznica doktoratu Stefana Banacha

1. Wstęp

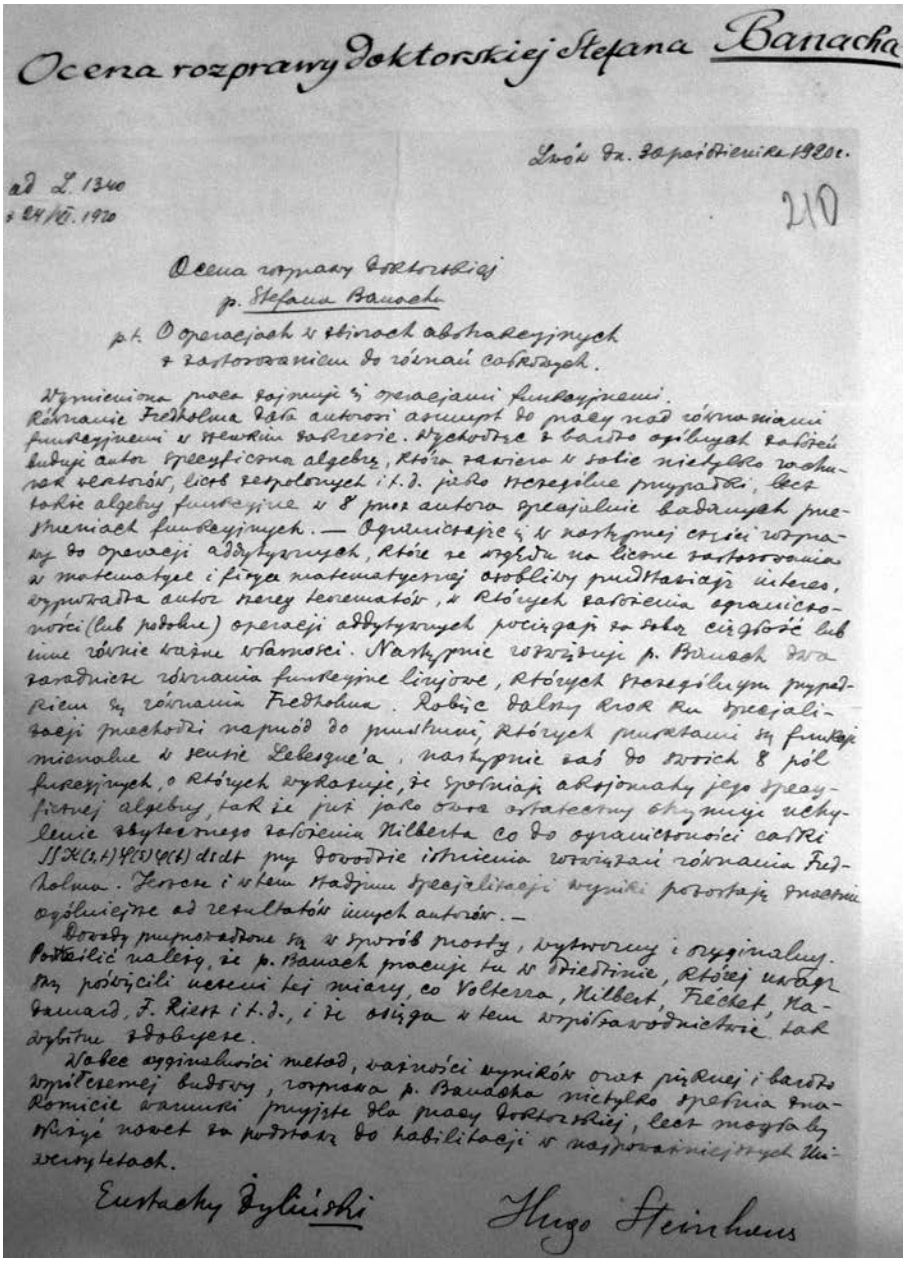
Postać Stefana Banacha (1892–1945) została dokładnie opisana w książkach Kałuży [12] oraz Jakimowicz i Miranowicza [10], ale sprawa jego doktoratu jest mniej udokumentowana. Spróbuję tę lukę uzupełnić, a związane jest to ze stuleciem jego pracy doktorskiej, przyjętej do oceny w czerwcu 1920 roku na Uniwersytecie Jana Kazimierza (UJK) we Lwowie. W pracy [18] Prytuła opisał – na podstawie przejrzanych dokumentów dwunastu matematyków, którzy uzyskali w latach 1920–1939 doktorat na UJK – tryb doktoryzowania się. Są tam także informacje dotyczące doktoratu Banacha, z których skorzystaliśmy w niniejszym tekście.

Banach po złożeniu rozprawy doktorskiej w czerwcu 1920 roku oraz zdaniu egzaminów doktorskich w listopadzie i grudniu uzyskał promocję w styczniu 1921 roku. Promotorem formalnym (na dyplomie) był Kazimierz Twardowski. Poniżej opisana zostanie procedura związana z doktoratem Banacha. Opis ten obala wiele mitów z nią związanych.

2. Doktorat Stefana Banacha

Stefan Banach złożył 24 czerwca 1920 roku pracę doktorską *O operacjach na zbiorach abstrakcyjnych i ich zastosowaniach do równań całkowych* na Wydziale Filozoficznym UJK we Lwowie. Została ona przyjęta do dalszej procedury. Zdjęcie Stefana Banacha z tego okresu, pochodzące z okładki książki [10], zostało opublikowane w artykule [14].

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne



Ocena rozprawy doktorskiej Stefana Banacha

Lwów dn. 30 października 1920.

ad L. 1340
z 24/X. 1920

210

Ocena rozprawy doktorskiej
p. Stefana Banacha
p.t. O operacjach w zbiorach abstrakcyjnych
i zastosowaniu do równań całkowych.

Użyta praca porusza się w operacjami funkcyjnemi.
Równanie Fredholma dało autorowi asumpt do pracy nad równaniami funkcyjnemi w pewnem zakresie. Wychodząc z bardzo ogólnych założeń buduje autor specyficzną algebrę, która zawiera w sobie nietylko wachlarz skalarów, liczb zespolonych i t.d. jako szczególne przypadki, lecz takie algebry funkcyjne w 8 prac autora specjalnie badanych przemianach funkcyjnych. — Ograniczenie się w następnej części rozprawy do operacji addytywnych, które ze względu na liczne zastosowania w matematyce i fizyce matematycznej stanowią przedmiot interesu, wprowadza autor nowy teoremat, z którego założenia ograniczoności (lub podobne) operacji addytywnych pociągają za sobą ciągłość lub inne równie ważne własności. Następnie rozwiązuje p. Banach dwa zasadnicze równania funkcyjne liniowe, których szczególnym przypadkiem są równania Fredholma. Robiąc dalszy krok na specjalizacji przechodzi napierw do przestrzeni, których punktami są funkcje mierzalne w sensie Lebesgue'a, następnie zaś do innych 8 pól funkcyjnych, o których wykazuje, że spełniają aksjomaty jego spacyfikowej algebry, tak że już jako dwa ostateczny otrzymuje uchylenie słynnego założenia Hilberta co do ograniczoności całki $\int\int K(x,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt$ przy dowodzie istnienia rozwiązań równania Fredholma. Jeszcze i w tem kierunku specjalizacji wyniki potrafią znacznie ogólniejsze od rezultatów innych autorów. —

Dowody przeprowadzone są w sposób prosty, wytworny i oryginalny. Podkreślić należy, że p. Banach pracuje tu w dziedzinie, której nasze pokolenie uczeni tej miary, co Volterra, Hilbert, Frechet, Hadamard, F. Riesz i t.d., i że odnosi w tem współzawodnictwie tak dobitne zwycięstwo.

Wobec oryginalności metod, ważności wyników oraz pięknej i bardzo współczesnej budowy, rozprawa p. Banacha nietylko spełnia znamienicie warunki przyjęte dla pracy doktorskiej, lecz mogłaby służyć nawet za podstawę do habilitacji w najpoważniejszych Uniwersytetach.

Eustachy Żyliński Hugo Steinhaus

1. Faksymile recenzji doktoratu Banacha z 1920 roku

Ocena rozprawy doktorskiej Stefana Banacha, datowana na 30 października 1920 roku została napisana odręcznie przez Eustachego Żylińskiego i podpisana przez Hugona Steinhausa.

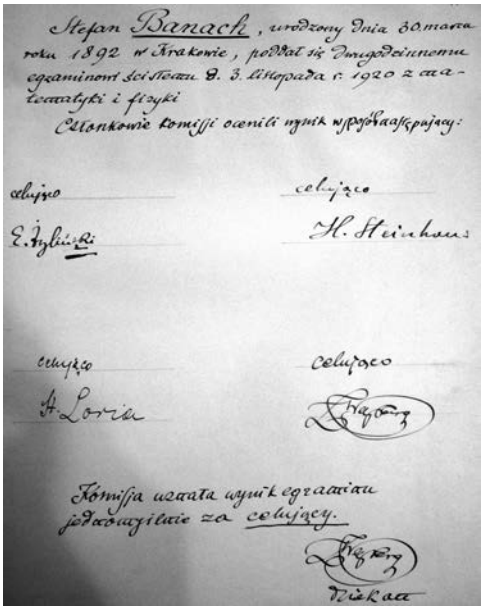
W ocenie rozprawy doktorskiej Stefana Banacha czytamy:

> Wymieniona praca zajmuje się operacjami funkcyjnemi. Równanie Fredholma dało autorowi asumpt do pracy nad równaniami funkcyjnemi w szerokim zakresie. Wychodząc z bardzo ogólnych założeń buduje autor specyficzną algebrę, która zawiera w sobie nietylko rachunek wektorów, liczb zespolonych it.d. jako szczególne przypadki, lecz także algebry funkcyjne w 8 przez autora specjalnie badanych przestrzeniach funkcyjnych. – Ograniczając się w następnej części rozprawy do operacji addytywnych, które ze względu na liczne zastosowania w matematyce i fizyce matematycznej osobliwy przedstawiają interes, wyprowadza autor szereg teorematów, w których założenia ograniczoności (lub podobne) operacji addytywnych pociągają za sobą ciągłość lub inne równie ważne własności. Następnie rozwiązuje p. Banach dwa zasadnicze równania funkcyjne linjowe, których szczególnym przypadkiem są równania Fredholma. Robiąc dalszy krok ku specjalizacji przechodzi naprzód do przestrzeni, których punktami są funkcje mierzalne w sensie Lebesgue'a, następnie zaś do swoich 8 pól funkcyjnych, o których wykazuje, że spełniają aksjomaty jego specyficznej algebry, tak że już jako owoc ostateczny otrzymuje uchylenie zbytecznego założenia Hilberta co do ograniczoności całki $\iint K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ przy dowodzie istnienia rozwiązań równania Fredholma. Jeszcze i w tem stadjum specjalizacji wyniki pozostają znacznie ogólniejsze od rezultatów innych autorów.
>
> Dowody przeprowadzone są w sposób prosty, wytworny i oryginalny. Podkreślić należy, że p. Banach pracuje tu w dziedzinie, której uwagę swą poświęcili uczeni tej miary, co Volterra, Hilbert, Fréchet, Hadamard, F. Riesz it.d., i że osiąga w tem współzawodnictwie tak wybitne zdobycze.
>
> Wobec oryginalności metod, ważności wyników oraz pięknej i bardzo współczesnej budowy, rozprawa p. Banacha nietylko spełnia znakomicie warunki przyjęte dla pracy doktorskiej, lecz mogłaby służyć nawet za podstawę do habilitacji w najpoważniejszych Uniwersytetach.

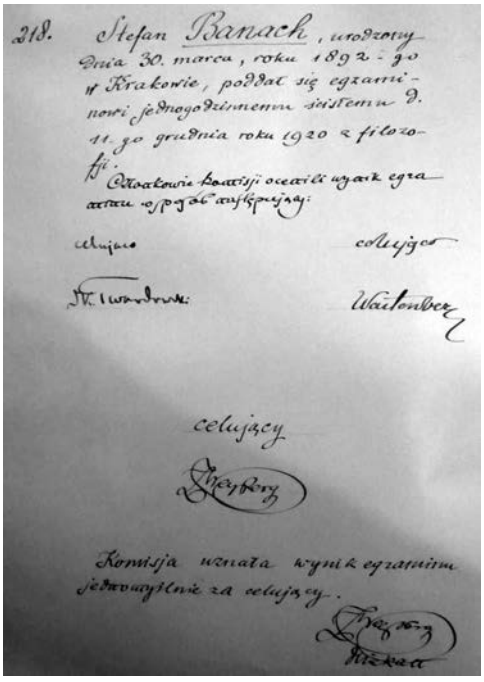
Egzamin doktorski z matematyki i fizyki zdał Banach celująco 3 listopada 1920 roku przed komisją, którą stanowili: Eustachy Żyliński i Hugo Steinhaus (matematycy), Stanisław Loria (fizyk) oraz dziekan Zygmunt Weyberg (mineralog i krystalograf). Egzamin z filozofii zdał także celująco 11 grudnia 1920 roku, a komisję stanowili: Kazimierz Twardowski, Mścisław Wartenberg i Weyberg.

Promocja doktorska Banacha miała miejsce 22 stycznia 1921 roku. Skan aktu promocyjnego Banacha można zobaczyć na zdjęciu 4.

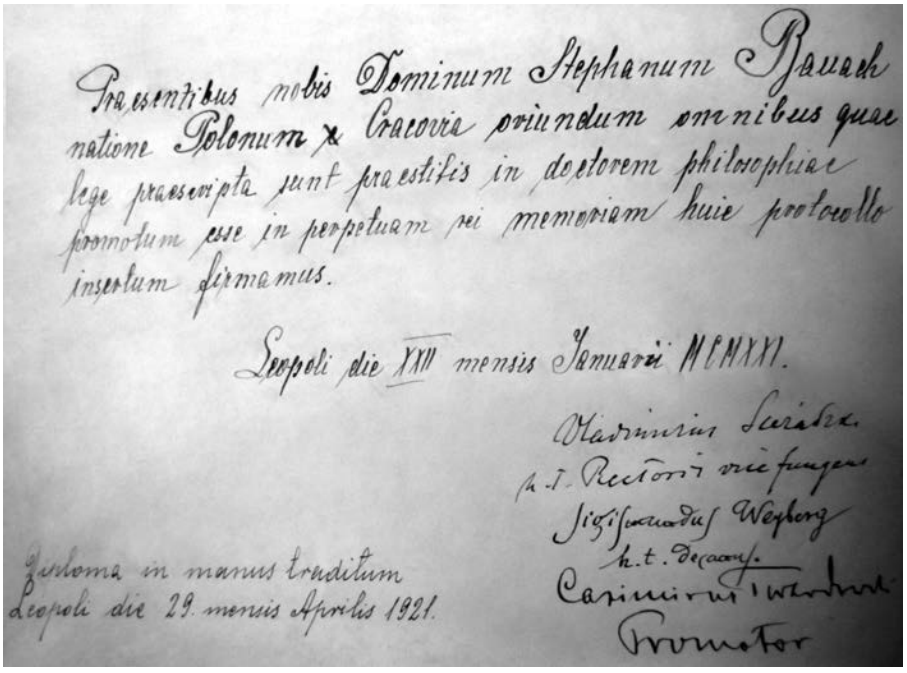
Promotorem (formalnym) na dyplomie był filozof i logik Kazimierz Twardowski, gdyż był profesorem zwyczajnym. Wówczas nie było promotorstwa innego niż oficjalne podczas uroczystej promocji. Niektórzy piszą niesłusznie, że promotorem był Antoni Łomnicki (zob. [12, str. 52; 19, str. 91]). Banach był uczniem Steinhausa, ale nie wiadomo, jaki był (i czy w ogóle był, oprócz recenzji)


Stefan Banach, urodzony dnia 30 marca roku 1892 w Krakowie, poddał się drugodziennemu egzaminowi ścisłemu d. 3. listopada r. 1920 z matematyki i fizyki
Członkowie komisji ocenili wynik wyżej wyrażony:
celująco
E. Żyliński
celująco
H. Steinhaus
celująco
H. Lowzia
celująco
Komisja uznała wynik egzaminu jednogłośnie za celujący.
Wiekar

2. Faksymile protokołu egzaminu doktorskiego Banacha z 1920 roku


218. Stefan Banach, urodzony dnia 30. marca, roku 1892-go w Krakowie, poddał się egzaminowi jednogodzinnemu ścisłemu d. 11. go grudnia roku 1920 z filozofii.
Członkowie komisji ocenili wynik egzaminu wyżej wyrażony:
celująco
W. Iwanowski
celująco
Wartenberg
celujący
Komisja uznała wynik egzaminu jednogłośnie za celujący.
Wiekar

3. Faksymile protokołu egzaminu Banacha z filozofii


Praesentibus nobis Dominum Stephanum Banach
natione Polonum Cracovia oriundum omnibus quae
lege praescripta sunt praestitis in doctorem philosophiae
promotum esse in perpetuam rei memoriam huic protocollo
insertum firmamus.

Leopoli die XXII mensis Januarii MCMXXI.

Włodzimierz Sieradzki
p.t. Rector vicefungens
Zygismundus Weyberg
h.t. Decanus
Casimirus Twardowski
Promotor

Lectoma in manus traditum
Leopoli die 29. mensis Aprilis 1921.

4. Faksymile aktu promocyjnego Banacha w albumie doktorów UJK z 1921 roku, podpisanego przez prorektora UJK Włodzimierza Sieradzkiego, dziekana Wydziału Filozoficznego UJK Zygmunta Weyberga i promotora Kazimierza Twardowskiego

udział Steinhausa w powstaniu pracy doktorskiej Banacha. Informacje oraz uzasadnienie dotyczące obu promotorów znajdujemy w poniższych wyjaśnieniach. W artykule [15, str. 60], w przypisie 10, napisano:

> (...) formalnie na dyplomie doktorskim wpisany jest Kazimierz Twardowski (1866–1938), gdyż był on profesorem zwyczajnym od 1898 roku. W statucie Uniwersytetu do 1929 roku było zapisane, by Wydział wyznaczał promotora z grona swoich profesorów zwyczajnych według kolejności albo z uwzględnieniem życzenia kandydata. Od 7 września 1929 roku tej reguły już nie było. Banach złożył pracę doktorską 24 czerwca 1920 roku, a wtedy H. Steinhaus, E. Żyliński i St. Ruziewicz nie byli jeszcze profesorami zwyczajnymi i nie mogli być promotorami Banacha. Recenzentami byli jednak H. Steinhaus i E. Żyliński (zob. [18, str. 138])].

Po pierwsze, Twardowski zanotował w Dzienniku (zob. [20, cz. I, str. 196]): „22 stycznia 1921. Promowałem w południe Stefana Banacha na doktora filozofii".

Po drugie, Ludwik Sternbach w liście do Zygmunta Birnbauma z 26 maja 1938 roku pisał (zob. [16, str. 34]):

> Udaję się do Kawiarni Szkockiej, gdzie ma być Lebesgue. Miał wczoraj wykład „O konstrukcjach lineałem", a pojutrze promocję honorową. Promotorem jest Steinhaus. Pierwszym jego doktorem był Banach, a Lebesgue – być może ostatnim, jak to z pewną realistyczną melancholią niedawno stwierdził.

Po trzecie, Marek Kac napisał (zob. [11, str. 575; 16, str. 34, przypis 3]):

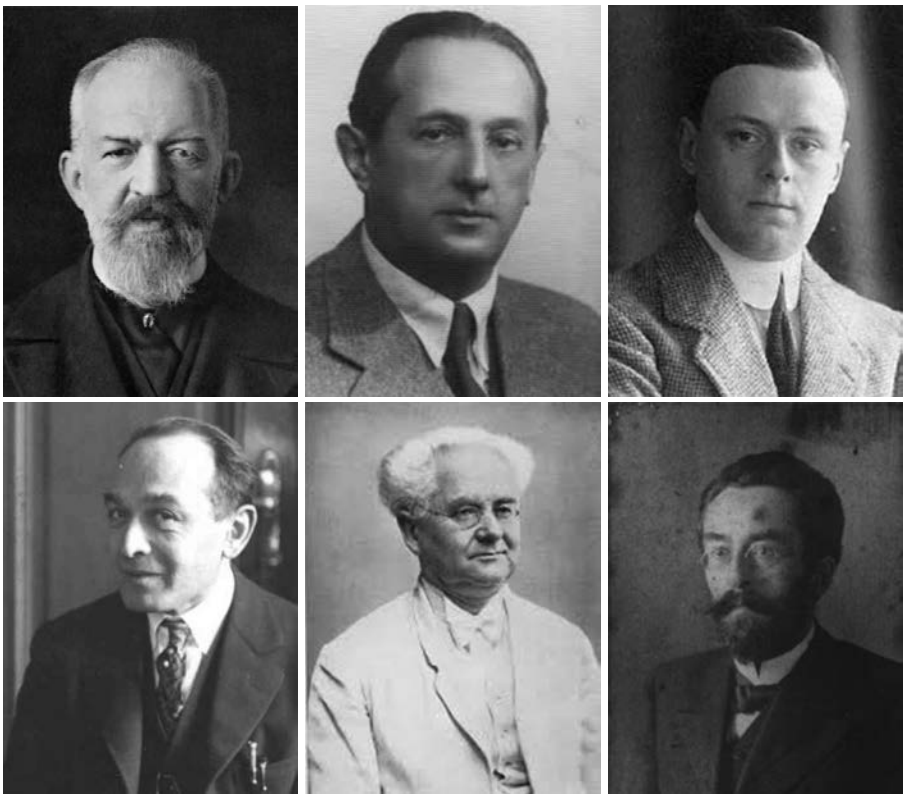
> W 1938 roku, kiedy zagrożenie wojną wisiało już nad Polską i Steinhaus przewodniczył przyznaniu tytułu doktora honoris causa dla Henri Lebesgue'a, powiedział do mnie po ceremonii: „To nie będzie zły wynik pozostawiając za sobą Banacha jako pierwszego i Lebesgue'a jako ostatniego doktoranta".

Już w pracy [13, str. 200] pisałem, że „promotor przed wojną oznaczał biurokratyczną formalność i niewiele miał wspólnego z rzeczywistymi związkami naukowymi". Potwierdzeniem tej opinii jest sprawa promotorstwa doktoratu Banacha oraz doktoratów na przykład Juliusza Schaudera, Władysława Orlicza i Józefa Pepisa (zob. [18]).

Dyplom doktorski Banacha został wydany 29 marca 1921 roku. Widać zatem, że Banach uzyskał doktorat w wyjątkowym trybie. Zdjęcia sześciu osób związanych z doktoratem Banacha znajdują się dalej.

Nic mi nie wiadomo o tym, by zachował się oryginał pracy doktorskiej Banacha, pisany z pewnością w języku polskim. Jej tłumaczenie na język francuski opublikowano dopiero w 1922 roku jako artykuł [1] *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* w trzecim numerze czasopisma *Fundamenta Mathematicae* (strony 133–181). Przedrukowano je również w książce [4] z 1979 roku (na stronach 305–348), gdyż była jego kluczową publikacją. Praca wyszła dwa lata później, gdyż druk wtedy trwał dłużej, a także dlatego, że w 1920 roku trwała wojna polsko-bolszewicka i Lwów był na linii frontu.

Banach w pracy doktorskiej, oprócz podania definicji zupełnej przestrzeni unormowanej, udowodnił również ważne twierdzenia o operatorach liniowych, w tym twierdzenia, że granica punktowo zbieżnego ciągu operatorów liniowych ciągłych jest operatorem liniowym ciągłym oraz twierdzenie o punkcie stałym dla przekształceń zwężających (kontrakcji). Udowodnił ponadto, że przestrzeń unormowana jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg absolutnie zbieżny jest zbieżny. Zawartość pracy doktorskiej Banacha została dokładnie opisana w pracach [5, str. 73–78; 9; 14] oraz w książkach [7, str. 102–105; 8, str. 273–275]. Historię nazw *B-przestrzeń* i *przestrzeń Banacha* na przestrzeń liniową, unormowaną i zupełną szczegółowo omówiono w pracy [14].



5. W kolejności od lewej do prawej: w górnym rzędzie – Kazimierz Twardowski, Hugo Steinhaus, Eustachy Żyliński, poniżej: Stanisław Loria, Zygmunt Weyberg, Mścisław Wartenberg

O znaczeniu pracy doktorskiej Banacha tak pisał Stanisław Mazur (zob. [17, str. 249]):

> Powstanie analizy funkcjonalnej, tak jak powstanie każdej nowej dyscypliny naukowej, było końcowym etapem długiego historycznego procesu. Obszerna jest lista matematyków, których badania przyczyniły się do powstania analizy funkcjonalnej; obejmuje takie sławne nazwiska, jak Vito Volterra, Dawid Hilbert, Jaques Hadamard, Maurice Fréchet i Fryderyk Riesz. Ale rok 1922, w którym Stefan Banach w polskim czasopiśmie *Fundamenta Mathematicae* ogłosił swą rozprawę doktorską (...), jest datą przełomową w historii matematyki XX wieku.

Praca doktorska Banacha była prapoczątkiem analizy funkcjonalnej, natomiast książka Banacha *Théorie des opérations linéaires* [2] z 1932 roku z trzema fundamentalnymi twierdzeniami była początkiem liniowej analizy funkcjonalnej. Dzieło Banacha spopularyzowało osiągnięcia lwowskiej szkoły matema-

tycznej, w tym też osiągnięcia Banacha, któremu został powierzony odczyt plenarny na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Oslo w 1936 roku (zob. [3] oraz [6]). Monografia Banacha stała się szybko podstawowym dziełem w analizie funkcjonalnej.

Warto odnotować na koniec, że Banach był promotorem siedmiu doktorantów, z których trzech ukończyło doktorat na UJK we Lwowie. Byli to: Stanisław Mazur w 1932 roku, Józef Schreier w 1934 roku i Meier Eidelheit w 1938 roku. Kolejnych czterech rozpoczęło w lutym 1941 roku na Lwowskim Państwowym Uniwersytecie im. Iwana Franki studia doktoranckie (aspiranturę), które miały trwać trzy lata. Byli to: Andrzej Alexiewicz, Moisaj Gertwagen, Michał Skalski i Zygmunt Zahorski. Jednak 22 czerwca 1941 roku Niemcy napadły na ZSRR, więc w lipcu 1941 roku szkoły wyższe zostały zamknięte i był to koniec studiów doktoranckich. Jest to temat na inny artykuł, w którym opisani zostaną doktoranci Banacha.

Podziękowania. Dziękuję Jarosławowi Prytule z Uniwersytetu Państwowego im. Iwana Franki we Lwowie za przesłanie skanów zdjęć 1, 2 i 4. Zdjęcia były też załączone w jego pracy [18] na stronach 144 i 145. Ponadto dziękuję Redakcji *Wiadomości Matematycznych* za cenne uwagi językowe oraz merytoryczne.

Bibliografia

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans ensembles abstraites et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. 3 (1922), 133–181.
[2] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne, t. I, Warszawa 1932.
[3] S. Banach, *Die Theorie der Operationen und ihre Bedeutung für die Analysis*, C. R. Congr. Int. Math. 1 (1937), 261–268.
[4] *Stefan Banach, Oeuvres Vol. II*, PWN, Warszawa 1979.
[5] M. Bernkopf, *The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory*, Arch. History Exact Sci. 3 (1966), 1–96.
[6] R. Duda, *Matematycy XIX i XX wieku związani z Polską*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2012.
[7] R. Duda, *Lwowska Szkoła Matematyczna*, wyd. 2, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2014.
[8] R. Duda, *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów nauki i kultury*, Instytut Historii Nauki im. L. i A. Birkenmajerów PAN, Warszawa 2019.
[9] F. Jaëck, *Generality and structures in functional analysis: the influence of Stefan Banach*, [w:] *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, Oxford University Press, Oxford 2016, 223–254.

[10] E. Jakimowicz, A. Miranowicz (red.), *Stefan Banach. Niezwykłe życie i genialna matematyka, Wyd. III*, Oficyna Wydawnicza „Impuls", Kraków 2010.
[11] M. Kac, *Hugo Steinhaus – a reminiscence and a tribute*, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 572–581.
[12] M. Kałuża, *Stefan Banach*, Wydawnictwo GZ, Warszawa 1992.
[13] L. Maligranda, *Eustachy Żyliński (1889–1954)*, Antiq. Math. 3 (2009), 171–211.
[14] L. Maligranda, *„B" jak przestrzeń Banacha*, Wiad. Mat. 56 (2020), nr 1, 15–27.
[15] L. Maligranda, J. G. Prytuła, *Przesłuchania Stefana Banacha z 1944 roku*, Wiad. Mat. 48 (2012), nr 1, 51–72.
[16] L. Maligranda, J. G. Prytuła, *Lwowscy uczeni wymienieni w przesłuchaniach Banacha z 1944 roku*, Wiad. Mat. 49 (2013), nr 1, 29–66.
[17] S. Mazur, *Przemówienie wygłoszone na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha*, Wiad. Mat. 4 (1961), 249–250.
[18] J. Prytuła, *Doktoraty z matematyki i logiki na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie w latach 1920–1938*, [w:] *Dzieje Matematyki Polskiej* (W. Więsław, red.), Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2012, 137–161.
[19] M. Przeniosło, *Matematycy polscy w dwudziestoleciu międzywojennym. Studium historyczne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego Jana Kochanowskiego, Kielce 2011.
[20] K. Twardowski, *Dzienniki, Część I 1915-1927 i Część II 1928-1936*, Warszawa–Toruń 1997.

Lech Maligranda
Department of Engineering Sciences and Mathematics
Luleå University of Technology
Instytut Matematyki
Politechnika Poznańska
lech.maligranda@ltu.se,lech.maligranda@put.poznan.pl

Jeśli podzielimy rozwinięcie dziesiętne liczby π na bloki składające się z dziesięciu cyfr, to prawdopodobieństwo, że wszystkie cyfry w danym bloku będą różne, wynosi $\frac{10!}{10^{10}} \approx \frac{1}{2755} \approx 0,0036$. Tymczasem układ taki pojawia się już w siódmej dziesiątce rozwinięcia:

$$
\begin{array}{r}
3,141592653 \\
5897932384 \\
6264338327 \\
9502884197 \\
1693993751 \\
0582097494 \\
4592307816
\end{array}
$$

Co ciekawe, jeśli będziemy rozważać „dziesiątki po przecinku", to odpowiedni układ pojawi się również w siódmej dziesiątce, gdyż zarówno siódma, jak i ósma dziesiątka rozwinięcia π zaczyna się od cyfry 4:

$$
\begin{array}{r}
3,1415926535 \\
8979323846 \\
2643383279 \\
5028841971 \\
6939937510 \\
5820974944 \\
5923078164
\end{array}
$$

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 311–317
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Michał Kokowski (Kraków, Warszawa)

Czy odkryto grób Mikołaja Kopernika?*

1. Wprowadzenie

Wbrew pozorom odpowiedź na tytułowe, prosto brzmiące pytanie nie jest wcale jednoznaczna.

Gdy poszukujemy na nie odpowiedzi w prasie popularnej (i to jeszcze pobieżnie przeglądanej), sprawa jest jasna jak Słońce – oczywiście, że odkryto grób Kopernika, bo przecież wszyscy o tym wiedzą.

Gdy jednak poszukujemy odpowiedzi na to samo pytanie w specjalistycznej prasie naukowej i uważnie studiujemy nieliczne szczegółowe krytyczne opracowania tego tematu z zakresu metodologii, historii, antropologii oraz genetyki molekularnej (analiz DNA i związanych z nimi kwestii matematycznych), sprawa wygląda zgoła inaczej – to jedynie „fakt medialny", a nie naukowy, gdyż nie przedstawiono dotąd wiarygodnych dowodów naukowych odkrycia grobu Kopernika. Poważne zastrzeżenia i wątpliwości dotyczą bowiem nie tylko tzw. kontekstu odkrycia (czyli okoliczności odkrycia), ale i tzw. kontekstu uzasadnienia tego odkrycia (czyli sposobu argumentowania przemawiającego za tym odkryciem).

* Niniejszy artykuł omawia kwestie szczegółowo wyjaśnione w moich wcześniejszych publikacjach wymienionych w bibliografii – zainteresowanych odsyłam do uważnej lektury tych prac, jak również prac innych autorów mających istotny wkład w omawianą problematykę. Informacje o licznych z tych publikacji oraz same publikacje są dostępne pod adresem http://www.cyfronet.krakow.pl/~n1kokows .

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

2. Kontekst odkrycia

Przed podjęciem badań archeologicznych w katedrze fromborskiej, kościele katolickim zlokalizowanym w diecezji warmińskiej, utytułowany archeolog, będący kierownikiem tych badań, korzystał z pomocy… medium psychometrycznego i zarazem eksperta psychometrii archeologicznej, który utwierdził kierownika badań w przekonaniu, że można znaleźć w katedrze grób Kopernika, za co wspomniany specjalista otrzymał Medal Mikołaja Kopernika[1] (podobnie jak wielu innych bardziej utytułowanych hagiografów rzekomego odkrycia). Niezorientowanym w temacie wyjaśniam, że korzystanie z radiestezji, retrognicji i jasnowidztwa (czego szczególnym przypadkiem jest wspomniana psychometria archeologiczna) jest wątpliwe z perpektywy religii katolickiej i sprzeczne z metodologią nauk empirycznych, która zalicza te dyscypliny do pseudonauk – zob. książki [14, str. 155–158] oraz [3].

Członkowie wąskiego zespołu poszukującego grobu Kopernika, w skład którego wchodzili archeolog (kierownik całego zespołu), antropolog (ekspert rekonstrukcji przyżyciowej), biologowie (eksperci analiz DNA), nie korzystali w trakcie interpretowania wyników swoich badań z pomocy historyków – znawców życia Kopernika (na przykład jego biografii i portretów), choć tacy historycy należeli do szerszego zespołu współpracowników. Było to poważnym błędem metodologicznym, co wyjaśniam w dalszej części artykułu.

3. Kontekt uzasadnienia

Zespół badaczy poszukujących grobu Kopernika, z wyjątkiem współpracujących z nimi historyków (autora teorii dotyczącej lokalizacji grobu, trojga historyków badających genealogię rodziny Kopernika oraz historyka sztuki), nie poddawał dostatecznej krytyce naukowej prowadzonych badań. Wyniki te przedstawiano na konferencjach prasowych lub konferencjach naukowych, podczas których nie mogli prezentować swoich zastrzeżeń krytycy tego rzekomego odkrycia. Ponadto członkowie zespołu (z wyjątkiem historyków i krakowskiego zespołu biologów, ekspertów analiz DNA) nie przyjęli propozycji wystąpienia na specjalistycznej konferencji poświęconej krytycznej ocenie rezultatów badań poszukiwania grobu Kopernika, która odbyła się w 2010 roku w Krakowie. Przede wszystkim zaś nigdy nie odpowiedzieli w rzeczowy sposób na krytykę swoich badań. Poniżej podaję wybrane wątki tej krytyki.

[1] O szczegółach można przeczytać w artykule [10, str. 574–579].

Wedle ustaleń antropologa, członka tej grupy, charakterystyczne antropologiczne cechy zachowanego szkieletu (płeć męska, wiek siedemdziesiąt lat), w tym czaszki z „grobu Kopernika" (ogólny kształt czaszki, w tym jej specyficzna asymetria, zachowany na czaszce ślad po ranie ciętej nad lewym oczodołem – albo też prawym, wedle kierownika badań – zachowany na czaszce ślad po złamanym nosie) znane są z portretów Kopernika przedstawiających go w wieku 30–40 lat.

Z powyższymi ustaleniami związane są następujące problemy.

Po pierwsze, jak dotąd na gruncie badań antropologicznych, genetycznych, fizycznych etc. nie ma możliwości precyzyjnego określenia wieku zachowanych szczątków kostnych z dokładnością roku (w tym przypadku miało to być dokładnie siedemdziesiąt lat, zob. [11, str. 55–56]). Z badań starcia zębów, nieuwzględnionych przez antropologa zespołu, wynika, że w chwili śmierci osoba ta liczyła sobie 20–40 lat (raczej w dolnej niż górnej części, zob. artykuł [12, str. 33, 36–37]). Jeśli pominie się czaszkę i rozważy się inne elementy szkieletu, osoba ta miała więcej niż 50 lat (zob. [11, str. 56]).

Po drugie, antropolog zespołu nie wskazał żadnych kryteriów diagnostycznych i sposobów oceny zmian patologicznych cechujących rzekomą czaszkę Kopernika oraz nie przedstawił odpowiedniej dokumentacji rzekomych jego szczątków. Przedstawione ustalenia dotyczące tych szczątków pozostają w sferze spekulacji (zob. [11, str. 60–63]).

Po trzecie, wbrew tezom antropologa zespołu, kości nosowe na fotografii nie wskazują śladów złamania. Nad prawym oczodołem rzekomej czaszki Kopernika znajduje się nie ślad po ostrym narzędziu, lecz rowek tętniczy (zob. [12, str. 32, 37]).

Po czwarte, przed antropologiem zespołu nikt nie zauważył wymienionych powyżej charakterystycznych cech rzekomej czaszki Kopernika na obrazach przedstawiających Kopernika, choć obrazy te były wcześniej uważnie analizowane, a część portretów Kopernika, na których widnieje zakrzywiony nos, nie jest wiarygodna (tzw. portret gołuchowski Kopernika i portret przedstawiany jako portret Kopernika, choć faktycznie jest portretem Johannesa Stöfflera / Ioannesa Stoflerusa).

Wedle ustaleń wspomnianego eksperta rekonstrukcji przyżyciowej, porównanie rekonstrukcji przyżyciowej czaszki z tzw. grobu Kopernika z portretami udowodniło, że odkryto szczątki Kopernika.

Powyższe wnioskowanie ma pewne słabości.

Po pierwsze, do rekonstrukcji przyżyciowej czaszki wykorzystano przestarzałą i błędną metodę typologii antropologicznej opartej na sfalsyfikowanej empirycznie i teoretycznie typologicznej koncepcji rasy (zob. [1; 11, str. 59–50; 12, str. 37]).

Po drugie, rekonstrukcje przyżyciowe ze względu na swą arbitralność nie mogą być uznane za wiarygodną metodę identyfikacyjną (zob. [5, str. 1–7; 6, str. 131–137; 12, str. 37]).

Ponadto we wnioskowaniu tym posłużono się innymi wadliwymi przesłankami.

Po pierwsze, twierdzono jakoby Kopernik był malarzem i twórcą obrazu toruńskiego przedstawiającego jego portret (miało to potwierdzać wierzytelność portretowanego oblicza).

Po drugie, uznano, że tzw. portet gołuchowski Kopernika (przedstawiający męską postać z zakrzywionym nosem) był portretem Kopernika powstałym za jego życia.

Po trzecie, przyjęto, że portret Johannesa Stöfflera / Ioannesa Stoflerusa (z zakrzywionym nosem) był portretem Kopernika.

Przed podjęciem badań genetycznych członkowie zespołu twierdzili, że grób Mikołaja Kopernika odkryto z prawdopodobieństwem 97% albo „z dużym prawdopodobieństwem". Nie podali jednak uzasadnienia tej precyzyjnej tezy.

Po przeprowadzeniu badań genetycznych szczątków z rzekomego grobu Kopernika przez trzy zespoły badawcze (Kraków, Warszawa, Uppsala) i włosów z księgozbioru Kopernika przez jeden zespół (Uppsala) eksperci analiz DNA twierdzili, że uzyskali pewność, że odkryto ten grób, co obwieszczono w artykule [2] opublikowanym w *PNAS* w 2009 roku.

Ponownie, ustalenie to budzi poważne wątpliwości.

Po pierwsze, złamano podstawowy wymóg niezależności prac trzech zespołów (wbrew przyjętym regułom zespoły wymieniały się informacjami przed zakończeniem badań, co wiadomo z innych publikacji prasowych tych autorów).

Po drugie, przyjęto nieprawdziwą przesłankę, jakoby do księgozbioru Kopernika (w tym *Calendarium Romanum Magnum* Johannesa Stoefflera), który jako łup wojenny z czasów wojen szwedzkich przechowywany jest w Bibliotece Uniwersytetu w Uppsali, nikt nie zaglądał po jego śmierci (robili to jednak na przykład historycy nauki; przesłanka była konieczna do tego, aby móc powiązać z osobą Kopernika znalezione włosy w tym księgozbiorze).

Po trzecie, sformułowano (w kilku wcześniejszych publikacjach) kilka różnych niedających się z sobą pogodzić odpowiedzi na pytanie, jaki jest haptlotyp[2] Kopernika.

Po czwarte, ignorowano kwestię, że prawdopodobieństwo przypadkowej zgodności badanych haplotypów było różne od zera i bynajmniej wcale nie

[2] *Haplotyp* jest to grupa genów odziedziczona po którymś z rodziców.

tak małe, jak to przedstawiano (a w konsekwencji nie było wcale pewności, że zgodność haplotypu włosów i kości nie była jednak czystym przypadkiem). Posłużono się przy tym źle dobranym modelem matematycznym przypadkowej zgodności, który oparty był na wykorzystaniu przybliżenia rozkładu dwumianowego rozkładem normalnym (nie wolno było go jednak stosować w analizowanym przypadku z uwagi na małą wartość prawdopodobieństwa)[3].

Co za tym idzie, argumentacja historyczno-antropologiczno-genetyczna przemawiająca za odkryciem grobu Kopernika ma zbyt wiele luk, aby można było określać ją na gruncie naukowym mianem wiarygodnej. Odsyłam do uważnej lektury tekstów zamieszczonych w bibliografii, gdzie czytelnik znajdzie szczegółowe informacje na ten temat.

4. Kto może być „sędzią" w sprawie grobu Kopernika?

Jak wiadomo naukoznawcom, nauka nie jest demokratyczna – zdanie opinii nawet całej armii niespecjalistów nie ma znaczenia wobec opinii nielicznych specjalistów. Dlatego werdykt szerokiej opinii społecznej i mediów, iż odkryto grób Kopernika, nie ma mocy wiążącej.

Pozostaje problem, skąd laik ma wiedzieć, kto jest specjalistą w danej tematyce. Gwarancją dla niego może być dotychczasowy dorobek naukowy (z tego zakresu) danego autora, rzetelny styl argumentacji oraz w pewnym stopniu siła formułowanych przez niego argumentów (choć tę w pełni mogą rozpoznać tylko specjaliści).

Etos pracownika naukowego nakazuje mu poszukiwanie prawdy naukowej, a nie taniej czy intratnej sensacji. By być w zgodzie z tym imperatywem, uczeni powinni uczciwie informować o wszelkich wątpliwościach i zastrzeżeniach dotyczących badań naukowych w publikacjach przeznacznych dla specjalistów i w publikacjach popularnonaukowych, kierowanych do szerszej publiczności.

5. Zamiast zakończenia

Korzystając z zaproszenia Redakcji do opublikowania tekstu na temat krytyki rzekomego odkrycia grobu Kopernika, kieruję następującą prośbę do środowiska matematyków, a szczególnie specjalistów z zakresu statystyki matematycznej. Interesuje mnie opinia Państwa środowiska na temat przedstawionej

[3] Ostatni aspekt ma związek z własnościami rozkładów dwumianowego, normalnego, Poissona oraz prostą metodą asymptotyczną albo metodą Walda – zob. szczegółową analizę tego zagadnienia w artykule [8, str. 238–246].

krytyki rzekomego odkrycia grobu Kopernika, a szczególnie rozważań matematycznych związanych z analizami DNA (szczegółowo wyjaśnionych w artykule [8, str. 238–246]).

Bibliografia

[1] J. Bednarek, *Typologia antropologiczna a domniemana czaszka Mikołaja Kopernika*, 45–51.
[2] W. Bogdanowicz, M. Allen, W. Branicki, M. Lembring, M. Gajewska, T. Kupiec, *Genetic identification of putative remains of the famous astronomer Nicolaus Copernicus*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 106 (2009), 12279–12282.
[3] P. Kiszkowski, *Co warto wiedzieć o radiestezji?*, Wydawnictwo Stella Maris, Gdańsk 1997.
[4] M. Kokowski, *Poszukiwania grobu Kopernika – refleksje advocati diaboli Cz. I. Rozważania w kontekście aktualnych poszukiwań archeologicznych* (*według stanu poszukiwań na dzień 15.09.2005, relacjonowanych w prasie i publikacjach internetowych*) 2005, dostępne pod adresem http://www.cyfronet.krakow.pl/~n1kokows/kokowski_grob_kopernika_1.pdf (dostęp: 2020-10-28).
[5] M. Kokowski, *Poszukiwania grobu Kopernika. Refleksje advocati diaboli. Cz. II. Rozważania w kontekście aktualnych badań* (*według stanu poszukiwań na luty 2006*) 2006, dostępne pod adresem http://www.cyfronet.krakow.pl/~n1kokows/kokowski_grob_kopernika_2.pdf (dostęp: 2020-10-28).
[6] M. Kokowski, *Poszukiwania grobu Kopernika: Refleksje advocati diaboli*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 52 (2007), nr 1, 121–151.
[7] M. Kokowski (red.), *Tajemnica grobu Mikołaja Kopernika. Dialog ekspertów*, Polska Akademia Umiejętności, Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, Kraków 2012.
[8] M. Kokowski, *O wadliwości argumentacji za ostatecznym odkryciem szczątków Mikołaja Kopernika. Cz. I. Wyniki i interpretacja badań historycznych, archeologicznych, antropologicznych oraz antroposkopijnych*, 177–215.
[9] M. Kokowski, *O wadliwości argumentacji za ostatecznym odkryciem szczątków Mikołaja Kopernika. Cz. II*, 217–314.
[10] M. Kokowski, *Odkrycie grobu Mikołaja Kopernika: fakt medialny czy naukowy?*, Komunikaty Mazursko-Warmińskie 286 (2014), nr 4, 567–600.
[11] T. Kozłowski, *Refleksje antropologa i indentyfikacja szczątków kostnych znalezionych w katedrze we Fromborku jako należących do Mikołaja Kopernika. Próba krytycznej oceny*, 53–71.
[12] A. Sołtysiak, *Wskaźnik interpretacyjny w archeologii na przykładzie* cranium *13/05 z Fromborka*, 31–44.
[13] A. Walanus, M. Kokowski, *Możliwość wykorzystania radiowęglowej metody datowania w badaniach grobu Mikołaja Kopernika*, 157–166.
[14] A. K. Wróblewski, *Prawda i mity w fizyce*, Iskry, Warszawa 1989.

Michał Kokowski
Instytut Historii Nauki PAN im. Ludwika i Aleksandra Birkenmajerów
michal.kokowski@gmail.com

Od redakcji. Autor jest fizykiem, historykiem i filozofem nauk ścisłych, naukoznawcą oraz redaktorem naczelnym czasopisma *Studia Historiae Scientiarum* (https://ojs.ejournals.eu/SHS/). Uzyskał stopnie doktora i doktora habilitowanego oraz tytuł profesora za interdyscyplinarne badania genezy, treści i recepcji myśli Kopernika oraz jego biografii. Jest laureatem Nagrody Naukowej im. Mikołaja Kopernika Fundacji Miasta Krakowa w 2010 roku za rozprawę *Różne oblicza Mikołaja Kopernika. Spotkania z historią interpretacji*. Redakcja *Wiadomości Matematycznych* poprosiła Autora o napisanie tego artykułu, uznając potrzebę rzetelnego poinformowania środowiska matematycznego o sprawie grobu Kopernika.

Po kilku minutach kapitan Zenon Górski ze swym przyjacielem Andrzejem Wirskim zeszli do jadalni pensjonatu. Obaj przybyli tu przed kilkoma dniami na wypoczynek, uciekając przed gwarem i ludźmi. Wybrali celowo Wirciny, małą, cichą osadę w pobliżu Międzyzdrojów.

Przyjaźń, jaką zawarli jeszcze na uczelni – obaj studiowali matematykę – utrzymywała się ciągle, mimo że ich drogi życiowe całkowicie się rozeszły, i to niespodziewanie. Zenon Górski, który należał do najlepszych studentów roku, osiągał zawsze dobre wyniki i zdaniem wykładowców miał wszelkie zadatki na dobrego matematyka. Wywołał więc niemałe zdziwienie, kiedy odrzucił propozycję objęcia asystentury po ukończeniu studiów. Tego jeszcze w historii wydziału nie było, aby student rezygnował z takiej szansy, jaką daje możliwość pracy naukowej.

– A co ty chcesz robić? – zapytał zdziwiony profesor, który kierował jego pracą magisterską i wysoko oceniał zdolności Zenka.

– Pójdę pracować do milicji – odparł Górski.

Ta prosta odpowiedź zaskoczyła wprost starego profesora.

– Ty do milicji? Po co więc studiowałeś matematykę – oszalałeś?

– Wcale nie – odparł spokojnie Górski. – Wykształcenie matematyczne rozwija inteligencję i przydaje się w każdym zawodzie. Tyle razy słyszałem to podczas studiów...

– Masz rację – profesor szybko skapitulował, kiedy usłyszał swój własny, często wypowiadany pogląd. – Idź więc do tej swojej milicji, tylko oszczędzaj roztargnionych matematyków, gdy przez pomyłkę kogoś zamordują – zażartował.

– To jest dla mnie jasne tak samo jak dwa razy dwa – odparł z udaną powagą Górski i w ten sposób rozstał się z uczelnią.

[...]

Odmowa przyjęcia asystentury przez Górskiego stworzyła z kolei perspektywę tej pracy Wirskiemu, bo do niego właśnie wystąpiono z taką propozycją. Został więc na uczelni, w ciągu kilku lat zrobił doktorat i obecnie był na półmetku swojej pracy habilitacyjnej.

Fragment kryminału Jana Koprowskiego *Maskotka*, ISKRY 1978

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 319–335
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Danuta Ciesielska (Warszawa), Lech Maligranda (Luleå, Poznań)

Informacje o studiach Mariana Rejewskiego w Getyndze w świetle archiwaliów*

1. Wprowadzenie

W latach 1885–1933 na Uniwersytecie Georga-Augusta w Getyndze matematykę studiowało ponad dziewięćdziesięcioro Polek i Polaków, a w interesującym nas czasie, na przełomie lat dwudziestych i trzydziestych XX wieku czterech Polaków i jedna Polka. Dla wielu polskich studentów getyńskie studia stały się początkiem światowej kariery, ukształtowały ich warsztat badawczy. Wśród nich aż pięciu uzyskało w Getyndze doktorat z matematyki. Byli to, w kolejności chronologicznej uzyskania stopnia, Władysław Bortkiewicz u Wilhelma Lexisa, Michał Feldblum i Hugo Steinhaus u Davida Hilberta, Jan Kroo[1] u Woldemara Voigta oraz Arnold Walfisz u Edmunda Landaua. Szczegółowe informacje, w tym recenzje rozpraw, pytania egzaminacyjne i kopie dyplomów znajdziemy w pracy [4]. Tymczasem krótki epizod studiów w „mekce matematyków" dla Mariana Rejewskiego nie był tak ważny jak dla nich. Dlaczego tak się stało? Odnalezione przez nas archiwalia pozwalają przyjrzeć się temu zagadnieniu bliżej.

* Artykuł powstał w ramach projektu badawczego *Studia i badania naukowe polskich matematyków, fizyków i astronomów na Uniwersytecie w Getyndze* (*1895–1933*), finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki w ramach programu OPUS 13 (nr umowy: UMO-2017/25/B/HS3/02420).

[1] Doktorat Jana Kroo *Zur statistischen Elektronentheorie der Dielektrizität und des Magnetismus* (*O statystycznej teorii elektronów dielektryków oraz magnetyzmu*) był rozprawą z zakresu fizyki matematycznej – tematyka ta jest obecnie zawarta w dziale 78 MSC 2010 i odpowiada ona optyce oraz elektromagnetyzmowi.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

2. Przybycie Rejewskiego do Getyngi i matematycy na Uniwersytecie Georga-Augusta w 1930 roku

O swym pobycie w Getyndze Rejewski nie wspomina ani w maszynopisie [23] *Wspomnienia z mej pracy w Biurze Szyfrów Oddziału II Sztabu Głównego w latach 1930–1945*, ani w artykule [24] z 1980 roku. To nie dziwi, bo głównym tematem obu tekstów są jego późniejsze losy, na które pobyt i studia w Getyndze nie miały znaczącego wpływu. Niestety, w ten sposób nie mamy dostępu do sprawozdania z pierwszej ręki.

Pozostało nam studiowanie archiwaliów w Getyndze. Wśród nich ważne są księgi immatrykulacyjne [21, 22], w których znajdują się osobiste wpisy studentów. Duże znaczenie miały również drukowane spisy osobowe pracowników oraz spisy wykładów odbywających się na uniwersytecie [1]. Najważniejsze zaś były osobiste dokumenty Mariana Rejewskiego [28] przechowywane w dziale świadectw.

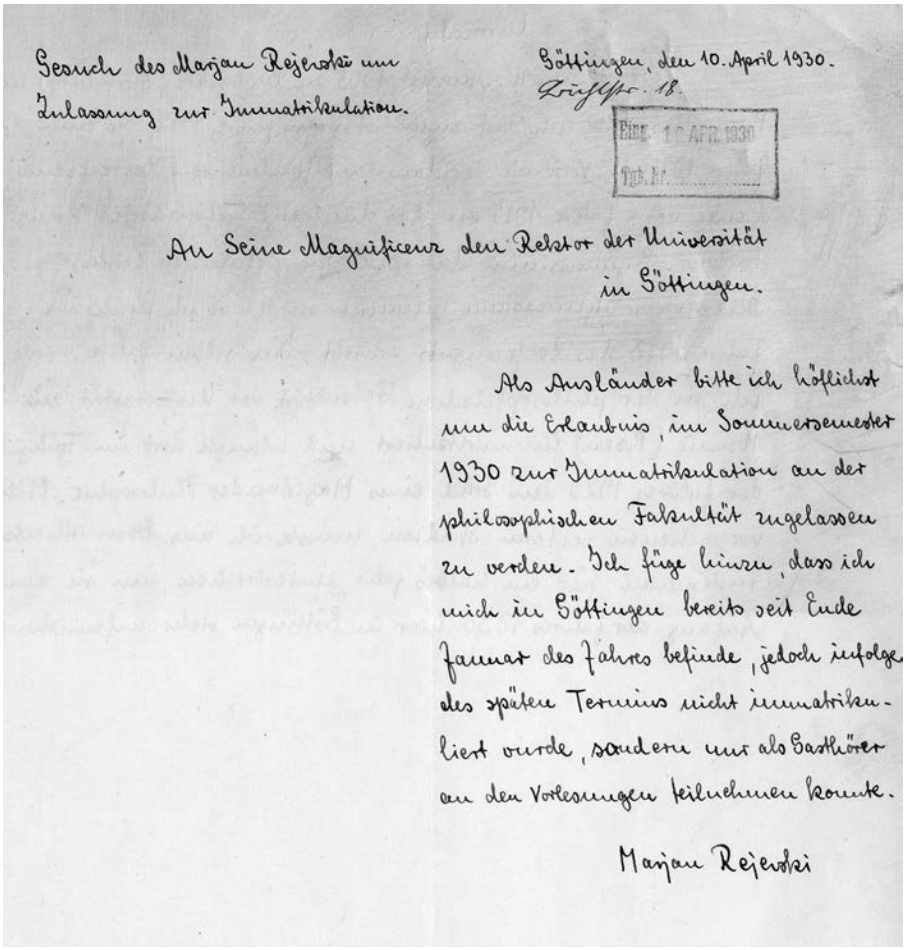
Zapisaną w archiwaliach historię pobytu Mariana Rejewskiego rozpocznijmy od jego wpisu, chociaż – jak się okaże w dalszej części artykułu – ta historia rozpoczęła się wcześniej. W księdze immatrykulacyjnej [22] z semestru letniego 1930 roku znajduje się wpis Rejewskiego. Zapisał się on na studia matematyczne na Uniwersytecie Georga-Augusta na początku semestru letniego, dokładnie zaś 16 kwietnia 1930 roku. Numer albumu, który mu przypadł, to 37. W kolejnych rubrykach księgi immatrykulacyjnej wpisał, tak jak pozostali studenci, dane: ojciec to zmarły kupiec, matka mieszka w Bydgoszczy przy ul. Zduny 6a, urodził się 16 VIII 1905 w Bydgoszczy[2], jest Polakiem i zamierza studiować matematykę. Powinien podać informację o odbytych wcześniej studiach, ale tego nie zrobił. W kolejnych rubrykach urzędnicy wpisali informacje: o opłacie – 25,50 marek niemieckich[3], skreśleniu Rejewskiego z listy studentów oraz o wydaniu świadectwa odejścia ze studiów – o tym wspomnimy później.

Jak długo Rejewski przebywał w Getyndze? Kozaczuk w książce *W kręgu Enigmy* napisał (zob. [12, str. 44]):

> Latem 1930 roku Rejewski zakończył swój roczny pobyt w Getyndze. Odjeżdżając mógł stwierdzić, że częste w tym czasie przesilenia i kryzysy polityczne w Niemczech nie zmieniły utrzymującego się wrogiego stosunku do Polski. Mógł

[2] Nazwę miasta, dwukrotnie, podał w wersji polskiej – Bydgoszcz, nie jako niemiecki Bromberg.

[3] W tym czasie pensja profesora niemieckiej uczelni wynosiła 475 marek, a średnia pensja robotnika była niższa niż 125 marek.



Gesuch des Marjan Rejewski um Zulassung zur Immatrikulation.

Göttingen, den 10. April 1930.
Prüfstr. 18.

EING. 10 APR. 1930
Tgb. Nr.

An Seine Magnificenz den Rektor der Universität in Göttingen.

Als Ausländer bitte ich höflichst um die Erlaubnis, im Sommersemester 1930 zur Immatrikulation an der philosophischen Fakultät zugelassen zu werden. Ich füge hinzu, dass ich mich in Göttingen bereits seit Ende Januar des Jahres befinde, jedoch infolge des späten Termins nicht immatrikuliert wurde, sondern nur als Gasthörer an den Vorlesungen teilnehmen konnte.

Marjan Rejewski

1. Podanie M. Rejewskiego do rektora Uniwersytetu w Getyndze.
Universitätsarchiv Göttingen, Marjan Rejewski – Abgangs-Zeugnis, k. 5

> też sobie, bez popadania w megalomanię, powiedzieć, że renomowana niemiecka szkoła matematyczna należy już chyba do przeszłości. Niewiele było wśród poznanych w Getyndze profesorów indywidualności tej miary, co polscy uczeni Stefan Banach czy Wacław Sierpiński, których prace torowały drogę matematyce XX wieku.

Ten niewielki akapit wymaga kilku sprostowań. Kwestie polityczne nie stanowią tematu naszych badań i nie będziemy ich analizować. Rozpocznijmy od kwestii długości pobytu Rejewskiego w Getyndze. Tu dużą pomoc przyniosły nam materiały [28] zgromadzone w dziale świadectw, a szczególnie życiorys Rejewskiego złożony wraz z podaniem o zgodę na wpisanie się na studia. Zacytujmy

oba dokumenty. Do rektora Uniwersytetu Georga-Augusta Rejewski napisał (zob. [28], ryc. 1):

> Getynga, 10 kwietnia 1930.
>
> Podanie Marjana Rejewskiego o zgodę na immatrykulację.
>
> Jego Magnificencja Rektor Uniwersytetu w Getyndze.
>
> Jako obcokrajowiec, zwracam się z uprzejmą prośbą o zezwolenie na dopuszczenie do zapisania się na Wydział Filozoficzny na semestr letni 1930 r. Dodam, że jestem w Getyndze od końca stycznia tego roku, ale nie zostałem immatrykulowany z powodu późnego terminu [przybycia], w wykładach mogłem uczestniczyć tylko jako wolny słuchacz.
>
> Marjan Rejewski

Podanie potwierdza datę wpisu na studia w kwietniu 1930 roku, ale to życiorys przynosi ciekawą informację (zob. [28], ryc. 2):

> Curriculum Vitae
>
> Urodziłem się 16 sierpnia 1905 w Bydgoszczy (Bromberg) w Polsce, uczęszczałem tam początkowo, od 1912 do 1915, do szkoły przygotowawczej[4] ówczesnej Wyższej Szkoły Realnej im. Hindenburga[5], następnie od 1915 roku do ówczesnego reformowanego Gimnazjum im. Fryderyka Wilhelma, które w czasach polskich stało się gimnazjum klasycznym, gdzie również otrzymałem świadectwo dojrzałości w 1923 roku. W tym samym roku zapisałem się na Wydział Filozoficzny Uniwersytetu Poznańskiego, a wiosną 1929 roku uzyskałem stopień niższy[6] magistra filozofii. Moje wcześniejsze studia, ze względów zdrowotnych, musiałem przerwać na pół roku, aby ponownie pojawić się w Getyndze na początku 1930 roku.
>
> Marjan Rejewski

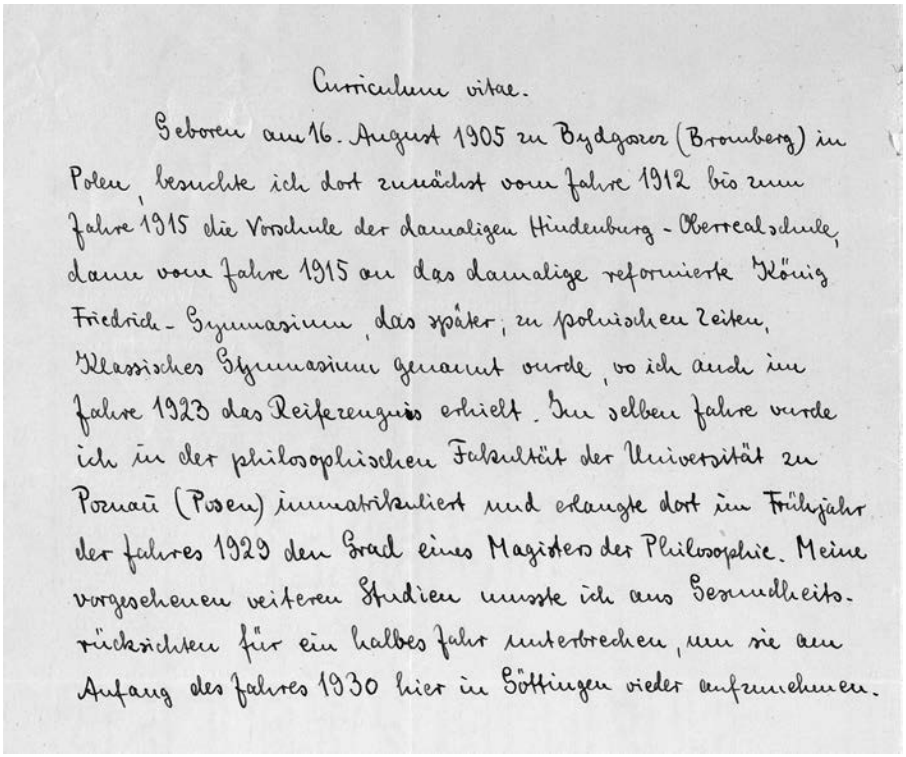
Ostatnie zdanie wyraźnie potwierdza, że Rejewski znalazł się w Getyndze na początku roku akademickiego 1929/1930. Wiadomość o chorobie Rejewskiego, która spowodowała przerwanie studiów, jest nowa, nikt wcześniej nie wspominał o takich kłopotach. W księgach immatrykulacyjnych z semestru zimowego 1929/1930 nie ma wpisu Rejewskiego i dlatego sądzimy, że choroba była na tyle wczesna i poważna, że uniemożliwiła mu planowe rozpoczęcie studiów.

---

[4] Trzyletnia niemiecka szkoła najniższego stopnia umożliwiająca wstęp do szkoły stopnia średniego kończącej się maturą. Cechą charakterystyczną szkoły, do której uczęszczał Rejewski, było jej formalne przypisanie do Wyższej Szkoły Realnej.

[5] Rodzaj niemieckiej szkoły średniej kończącej się maturą umożliwiającą studia. Szkoły tego typu Lietzmann nazywa „matematyczno-naukowymi" (zob. [15, str. 149]).

[6] Zgodnie z art. 95 Ustawy z dnia 13 lipca 1920 roku o szkołach akademickich stopnie naukowe były dwa: niższy i wyższy. Stopniem wyższym był stopień doktora, a niższym, na uniwersytetach, stopień magistra. Studenci matematyki, tak jak wszyscy studenci wydziałów filozoficznych, otrzymywali stopień magistra filozofii, nie zaś konkretnej dyscypliny naukowej.



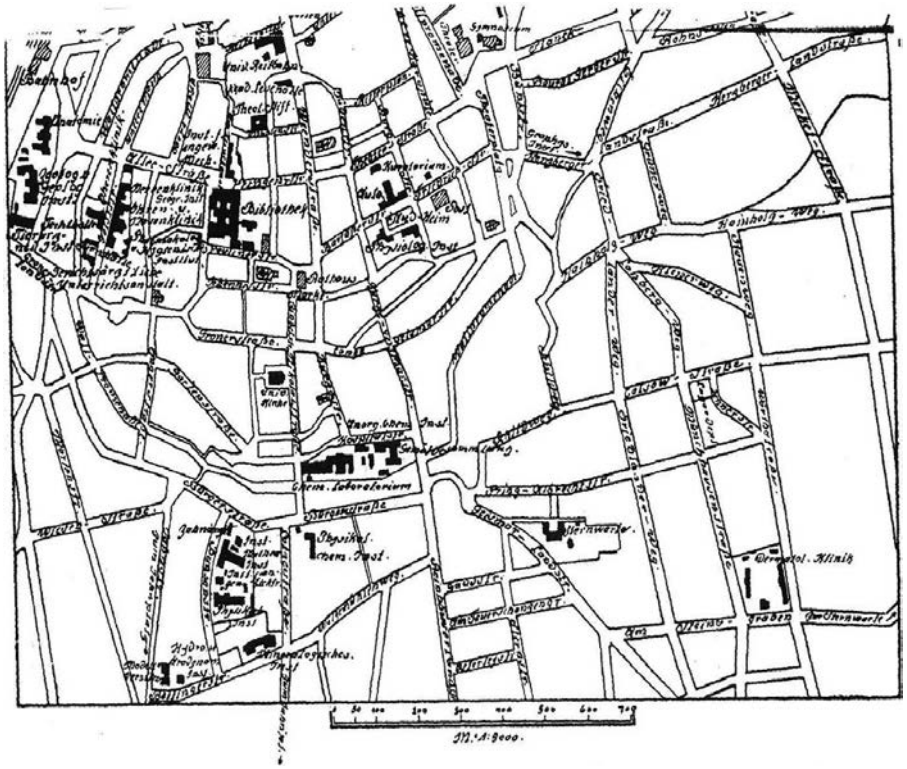
Curriculum vitae.

Geboren am 16. August 1905 zu Bydgoszcz (Bromberg) in Polen, besuchte ich dort zunächst vom Jahre 1912 bis zum Jahre 1915 die Vorschule der damaligen Hindenburg-Oberrealschule, dann vom Jahre 1915 an das damalige reformierte König Friedrich-Gymnasium, das später, zu polnischen Zeiten, Klassisches Gymnasium genannt wurde, wo ich auch im Jahre 1923 das Reifezeugnis erhielt. Im selben Jahre wurde ich in der philosophischen Fakultät der Universität zu Poznań (Posen) immatrikuliert und erlangte dort im Frühjahr des Jahres 1929 den Grad eines Magisters der Philosophie. Meine vorgesehenen weiteren Studien musste ich aus Gesundheitsrücksichten für ein halbes Jahr unterbrechen, um sie am Anfang des Jahres 1930 hier in Göttingen wieder aufzunehmen.

2. Życiorys M. Rejewskiego.
Universitätsarchiv Göttingen, Marjan Rejewski – Abgangs-Zeugnis, k. 4

Może ten opóźniony start przyniósł Rejewskiemu kłopoty i ostatecznie decyzję o opuszczeniu Getyngi bez ukończenia kursu matematyki ubezpieczeniowej. Trudno bowiem było nadążyć za kolegami i koleżankami, którzy już od pół roku poznawali tajniki matematycznych aspektów ubezpieczeń.

Kolejną kwestią, którą koniecznie trzeba zestawić z archiwaliami, jest nieprzychylna opinia Kozaczuka o getyńskich profesorach. Na podstawie spisu osobowego i spisów [1, 2] obejmujących letni semestr 1930 roku możemy podać pełną listę profesorów, docentów i asystentów, z którymi mógł się zetknąć Rejewski oraz pełną listę wykładów, ćwiczeń i seminariów, w których mógł uczestniczyć. Na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Georga-Augusta działało seminarium matematyczno-przyrodnicze skupiające matematyków i fizyków. Seminarium miało siedzibę przy Bunsenstraße 3–5 (ryc. 3). Funkcję głównego dyrektora tego seminarium pełnił wtedy Gustav Herglotz, poza nim dyrektorami byli – w kolejności podanej w [1] – David Hilbert, Ludwig Prandtl, Edmund Landau, Richard Courant, Robert Pohl, Max Reich, Max Born, James Franck i Gustav Angenheister, a funkcje ich asystentów pełnili



3. Plan Getyngi z zaznaczonymi budynkami uniwersyteckimi, część południowa, 1930 rok (zob. [2, str. 49])

Paul Bernays, Paul Hertz, Wilhelm Cauer, Moritz Werner Fenchel oraz Arnold Schmidt.

Na wydziale działały trzy instytuty matematyczne. Dyrektorem zarządzającym Instytutem Matematycznym był Courant, a funkcje dyrektorów pełnili także: Hilbert, Landau i Herglotz. Poza nimi w tym instytucie prywatnymi docentami byli Otto E. Neugebauer, Hans Lewy i Stefan Cohn-Vossen, asystentami zaś Franz Rellich i Werner Weber. Instytutem Matematyki Stosowanej (przy Am Leinekanal 3, ryc. 3) kierował Prandtl z pomocą prywatnego docenta Willy'ego Pragera, Instytutem Statystyki Matematycznej (przy Kurze Geismarstraße 40, ryc. 3) zaś Felix Bernstein. Ponadto na wydziale działał Instytut Fizyki Teoretycznej kierowany przez Borna.

Jak przedstawiała się oferta wykładów? Zaiste imponująco. Landau wykładał podstawy matematyki, rachunek różniczkowy i całkowy. Hilbert zaś matematyczne metody współczesnej fizyki, a poza tym wraz z Bornem prowadził seminarium poświęcone strukturze materii w Instytucie Fizyki Teoretycznej (przy

Bunsenstraße 9, ryc. 3). Geometrię analityczną oraz teorię funkcji analitycznych wykładał Courant, teorię liczb – Lewy, rachunek prawdopodobieństwa – Bernays, geometrię różniczkową – Cohn-Vossen, ogólną teorię ideałów – Emmy Noether, algebrę – Udo Wegner, teorię potencjału i teorię szeregów w fizyce – Cauer, teorię odwzorowań stycznościowych – Herglotz. Główne seminarium matematyczne prowadzili wspólnie Courant i Herglotz, a w letnim semestrze roku akademickiego 1929/1930 tematem przewodnim były wybrane zagadnienia analizy matematycznej. Poza wykładami ściśle matematycznymi odbywały się także wykłady i kolokwia z historii matematyki, które prowadził Neugebauer. Filozofię matematyki wykładał następca Husserla na katerze filozofii Moritz Geiger. W planie znalazło się kilka wykładów, jak również ćwiczenia i kursy dla początkujących (Herglotz, Courant) oraz dla przyszłych nauczycieli wykłady z matematyki szkolnej z wyższego stanowiska, które prowadził matematyki i dydaktyk matematyki Walther Lietzmann. Bernstein wykładał matematykę ubezpieczeniową wraz z ćwiczeniami pisemnymi. Tu warto dodać, że w semestrze zimowym, tym, który z powodu choroby Rejewski opuścił, oferta wykładów z matematyki ubezpieczeniowej była znacznie bogatsza. W Getyndze w czasie studiów Rejewskiego nadal pracowali uczeni światowej rangi, a badania, które prowadzili, były szeroko znane, dyskutowane i cytowane. W 1930 roku nadal wykładał i prowadził w Getyndze badania Hilbert. Tu, w latach dwudziestych i trzydziestych, na podstawie spisanych wykładów Hilberta, Courant przygotował do druku słynną dwutomową monografię *Methoden der mathematischen Physik* [5, 6]. Kierunek badaniom matematycznym prowadzonym w XX wieku nadali nie Banach i Sierpiński, ale – w powszechnej opinii matematyków – zrobił to Hilbert w wykładzie na kongresie w Paryżu w 1900 roku.

Rzetelną opinię o getyńskich matematykach przedstawili inni autorzy książek o polskich łamaczach szyfrów. Autor „biblii" o *Enigmie* David Kahn [10] napisał na str. 57:

> Odszedł [z kursu dekryptażu] też Marian Rejewski – jeden z trójki, który rozwiązał podwójne podstawienie – ale odszedł nie z powodu braku zainteresowania czy zdolności. Otrzymał w tym czasie dyplom matematyka i chciał kontynuować studia w dziedzinie matematyki ubezpieczeniowej w jednym ze światowych ośrodków matematycznych, na Uniwersytecie w Getyndze.

Podobnie jak Kahn kwestię znaczenia matematyków z Getyngi przedstawia Dermot Turing. Pisze on (zob. [27, str. 74]):

> Planował [Rejewski] rozpocząć pracę na wydziale profesora Krygowskiego – co istotnie wróżyło karierę szpiega. Przede wszystkim jednak przyszły matematyk musiał wyjechać na dwuletnie studia pomagisterskie do Getyngi. Getynga by-

> ła mekką dwudziestowiecznych matematyków i fizyków. Przebywali tam tacy mistrzowie, jak Hilbert, Born, Courant, Heisenberg, Wigner, von Neumann i inni.

Chociaż opinia Turinga o getyńskich matematykach jest bardzo przychylna, to i w tym tekście znalazły się informacje wymagające sprostowania. Istotnie Hilbert, Born i Courant byli wtedy w Getyndze, ale w spisach osobowych uniwersytetu za lata 1929–1930 [21, 22] nie ma nazwisk Wernera Heisenberga, Eugene'a Wignera ani Johna von Neumanna. Nie zostali wymienieni, bo żaden z nich wtedy już nie przebywał w Getyndze. Wigner został asystentem Hilberta w 1927 roku, ale już w roku kolejnym przeniósł się do Berlina i tam do 1930 roku pozostał (zob. [7]). Możliwe, że Turing (lub autorzy prac, z których Turing korzystał) pomylili Wignera z Wegnerem, bowiem ten drugi istotnie w roku akademickim 1929/1930 (i później) wykładał w Getyndze. Von Neumann, który w roku akademickim 1926/1927 przybył do Getyngi dzięki stypendium Fundacji Rockefellera, w 1928 roku był już prywatnym docentem w Berlinie, a w 1929/1930 w Hamburgu (zob. [9, 16]). Heisenberg był w Getyndze w latach 1924–1925 jako asystent Borna, ale już od jesieni 1925 roku przeniósł się do Kopenhagi, by w 1927 roku objąć katedrę w Lipsku i tam pozostać na dłużej (zob. [8]).

3. Polscy studenci matematyki w Getyndze

W książce Kahna znajduje się ciekawa informacja o wzajemnych stosunkach między polskimi studentami matematyki w Getyndze. Kahn napisał (zob. [11, str. 53]):

> Rejewski, niski, niepozorny dwudziestotrzylatek, nie wywarł szczególnego wrażenia na pozostałych polskich matematykach w Getyndze ani cechami swego umysłu, ani zachowaniem, czy też wyglądem, albo osobowością. Na uniwersytecie nie miał bliskich przyjaciół, ale przyłączał się do długich spacerów, jakie jeden z polskich matematyków, Henry Schaerf, lubił robić. Poglądy polityczne Rejewskiego, w szczególności zaś jego opinia, że Żydów należy wypędzić z Polski, zdawały się być rezultatem [lektury] prasowych artykułów na temat programu *National Democratic Party*[7]. Ale nie był tak zatwardziały, aby nie słuchać innych poglądów. Schaerf uważał go za stosunkowo niedojrzałego do pracy matema-

[7] Zapewne chodzi o działający w Polsce, kierowany przez Romana Dmowskiego, prawicowy ruch polityczny nazywany Narodową Demokracją, a potocznie endecją. Ruch ten w latach dwudziestych XX wieku stworzył Stronnictwo Narodowe, partię, w programie której było podjęcie akcji skierowanej przeciw żydowskiej mniejszości w Polsce. Z endecją związane były gazety w wielu miastach, na przykład wielkopolski *Kurier Poznański*. Antyżydowskie poglądy wygłaszane przez Rejewskiego mogły być rezultatem lektury tego dziennika.

tyka i nie dostrzegał w nim nadzwyczajnych zdolności, żadnych przebłysków geniuszu[8].

Nadszedł zatem czas, aby przedstawić kolegów – i koleżankę – Rejewskiego z jego getyńskich studiów. W księgach immatrykulacyjnych [21, 22] odnaleźliśmy informację, że na matematykę na Uniwersytecie Georga-Augusta w roku akademickim 1929/1930 byli zapisani polscy studenci: Helena Kohn z Warszawy oraz Zygmunt Wilhelm Birnbaum, Władysław Orlicz i Henryk Schaerf ze Lwowa. Przedstawmy ich krótko. Birnabaum wcześniej studiował na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie, tam też w 1929 roku uzyskał doktorat. Dzień po promocji doktorskiej wyjechał do Getyngi, gdzie za zaoszczędzone pieniądze kontynuował studia matematyczne. Immatrykulacji[9] na Uniwersytecie w Getyndze dokonał 31 października 1929 roku; studia kontynuował do końca zimowego semestru roku akademickiego 1930/1931 roku (szczegóły w pracach [30, 31]). Birnbaum odebrał świadectwo odejścia z getyńskiej uczelni, uzyskał tam dyplom aktuariusza, który wyznaczył jego przyszłą karierę zawodową. Władysław Orlicz uzyskał doktorat w 1928 roku na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie. W tym samym roku otrzymał od Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego stypendium na studia z mechaniki teoretycznej w kwocie 8000 złotych oraz prawo do bezpłatnego paszportu na wyjazd. Orlicz wpisał się na studia 12 grudnia 1928 roku[10] i – z przerwami na krótkie wizyty we Lwowie – pozostał tam do 15 sierpnia 1930 roku (szczegóły jego pobytu w Getyndze opisane zostały w artykule [18]). Henryk Schaerf[11], student Uniwersytetu Jana Kazimierza, dzięki rodzinnym funduszom w 1927 roku wyjechał do Getyngi i zapisał się na studia matematyczne (zob. [20]). Po rocznym pobycie wrócił do Polski, gdzie uzyskał stopień magistra na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie[12]. W 1930 roku Schaerf ponownie znalazł się w Getyndze – wtedy poświęcił się studiom z matematyki aktuarialnej i w 1931 roku uzyskał dyplom ukończenia kursu u Bernsteina. Schaerf i Rejewski z pewnością się znali i musieli się często spotykać – wspomina o tym Kahn. Rejewski powinien znać również Birnbauma, czego nie znajdujemy u Kahna. Turing pisze o trzech Polakach, którzy studiowali w Getyndze, nie przywołuje jednak żadnego nazwiska (zob. [27, str. 77]):

[8] W polskim wydaniu książki Kahna ([10], str. 57) w tym akapicie nie ma fragmentu: „Poglądy polityczne [...] innych poglądów".

[9] W księdze wpisał się jako Dr Wilhelm Birnbaum.

[10] Wpisał się jako Ladislaus Orlicz, a informację o tym, że jest już doktorem, podał wraz z liczbą semestrów wysłuchanych we Lwowie, nie przy nazwisku, tak jak to robili inni.

[11] Schaerf wpisywał się dwukrotnie – 17 października 1927 roku oraz 6 stycznia 1930 roku – za każdym razem wpisał się jako Heinrich Schärf.

[12] Wówczas (zob. przypis 6) „magister" był stopniem.

> Studiowało tam trzech innych Polaków, z którymi Rejewski nawiązał znajomość, jednakże z żadnym z nich szczególnie się nie zbliżył. [...] Jeśli chodzi o matematykę, to żaden z polskich studentów nie cenił zbytnio Mariana Rejewskiego. Jego odczucia były podobne, toteż wolał spędzić wakacje 1930 roku poza Getyngą.

Obszerniej o kolegach Rejewskiego informuje Kozaczuk (zob. [12, str. 43–44]):

> W kosmopolitycznej wieży Babel asystent Uniwersytetu Poznańskiego mógł się wkrótce przekonać, że to pewne siebie i na pozór beztroskie środowisko nurtują przeciwieństwa i konflikty. Propaganda hitlerowców z jej rasistowskimi hasłami nie rzucała się jeszcze w oczy, ale docierała również i tutaj. Doświadczyli na sobie jej skutków dwaj przybyli z Polski stażyści, Zygmunt Birnbaum i N. Szerf, którzy uskarżali się na bojkotowanie ich przez studentów Niemców.

Wymieniony tu Szerf to Schaerf, ale Orlicz nadal nie został wymieniony. Co interesujące, Orlicz pisał z Getyngi, do swej żony we Lwowie, obszerne listy, ale nie wspominał w nich o bojkotowaniu polskich studentów żydowskiego pochodzenia przez niemieckich kolegów. Orlicz w swych listach wspominał o innych kłopotach. Martwił się on, że jego niemiecki nie jest wystarczająco dobry, wspominał o badaniach, które prowadził wspólnie z Birnbaumem (szczegóły – zob. [18]), ale stosunki polityczne w Niemczech go nie zajmowały. W drugim wydaniu książki *W kręgu Enigmy* pojawiły się już nazwiska wszystkich trzech mężczyzn studiujących wraz z Rejewskim w Getyndze. Kozaczuk (zob. [13, str. 42]) napisał:

> Temat ten przewijał się często w rozmowach Rejewskiego z innymi przebywającymi w tym czasie w Getyndze stażystami z Polski, Z. Birnbaumem, H. Schaerfem i W. Orliczem, jednym z późniejszych kierowników poznańskiego Instytutu Matematyki.

We fragmencie tym ponowie pojawiła się informacja o częstych rozmowach między polskimi matematykami na temat rasistowskich poglądów propagowanych wtedy w Niemczech przez NSDAP, co – przypomnijmy – nie miało odbicia w licznych listach Orlicza do żony. O warszawiance Helenie Kohn nadal brak informacji. Zapisała się ona na matematykę 7 maja 1929 roku i pozostała w Getyndze zapewne do końca roku akademickiego 1929/1930 roku, bo ze studiów została wykreślona dopiero w styczniu 1931 roku (nie w 1930 roku). Wiemy, że Kohn nie studiowała na Uniwersytecie Warszawskim ani na Wolnej Wszechnicy Polskiej. Była kobietą niezależną finansowo, w książce adresowej Warszawy znajduje się informacja, że mieszkała (samodzielnie) przy ul. Żelaznej 48 (zob. [14, str. 197]). Naszym zdaniem bardzo prawdopodobne jest, że ta ponad trzydziestoletnia kobieta przez pewien czas studiowała matematykę aktuarialną

u Bernsteina. Czy poznała w Getyndze Rejewskiego, pozostałych Polaków? Nie wiemy. Odnotujmy, że od 8 czerwca do początku lipca 1930 roku przebywał w Getyndze Antoni Łomnicki, profesor zwyczajny Politechniki Lwowskiej, który dzięki zasiłkowi z Funduszu Kultury Narodowej spędził osiem miesięcy we włoskich, niemieckich i francuskich ośrodkach naukowych (zob. [17]). Łomnicki w obszernym sprawozdaniu z tej podróży wspominał, że uczestniczył wtedy w wykładzie z matematyki ubezpieczeniowej (zob. [3]), jednak jego nazwisko nie pojawia się w żadnym opracowaniu na temat Rejewskiego.

Do pełni obrazu przywołajmy wspomnienia Schaerfa [25] na temat wzajemnych relacji między lwowskimi i getyńskimi matematykami:

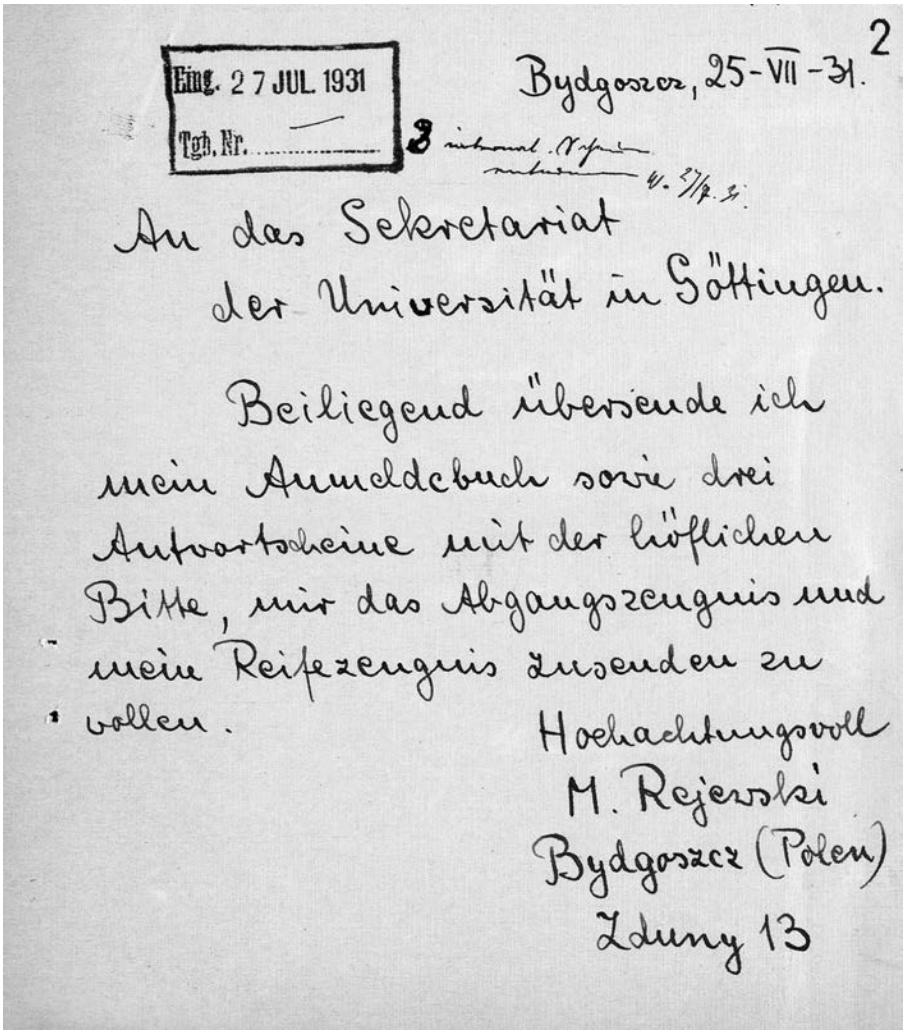
> Przypominam sobie, jak pewnego razu matematyczny patriotyzm Julka [Schaudera] został urażony i być może nadał kierunek jego badaniom. Było to w roku 1928. Właśnie powróciłem do kraju po rocznym pobycie na Uniwersytecie w Getyndze. Julek spytał mnie, co tamtejsi matematycy myślą o badaniach prowadzonych we Lwowie. Odpowiedziałem, że – niestety – przeważnie moi rozmówcy nic o nich nie wiedzieli. Jedynie kilku protekcjonalnie zapytywało do czego są one przydatne, gdy przyczynki są potrzebne do ważnych działów matematyki, takich jak np. równania różniczkowe cząstkowe.

Czy to oznacza, że w 1928 roku Polska była nadal krajem dopiero aspirującym do światowej czołówki? Dlaczego matematycy w Getyndze odnosili się protekcjonalnie do osiągnięć polskich matematyków, nazywali je „przyczynkarskimi"? Podobną opinię o polskiej szkole analizy funkcjonalnej ze Lwowa wyraził wiele lat później Reinhard Siegmund-Schultze (zob. [26]), wskazując dopiero połowę lat trzydziestych jako czas osiągnięcia przez nich międzynarodowej rozpoznawalności. To zagadnienie wymaga szerszego opracowania.

4. Opuszczenie Getyngi przez Rejewskiego

Ostatnim tematem, którym się zajmiemy, są kwestie czasu i powodów opuszczenia przez Rejewskiego getyńskiej uczelni. Kahn przedstawił sprawę następująco (zob. [10, str. 57]):

> Przez rok Rejewski studiował matematykę stosowaną, specjalizując się w zagadnieniach ubezpieczeniowych. Planował, że będzie pracować w firmie ubezpieczeniowej razem ze swym krewnym. Ale po przyjeździe do domu na wakacje letnie w 1930 roku zastał list z propozycją objęcia asystentury w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Poznańskiego. Zgodził się, a wobec szybkiego kurczenia się możliwości zatrudnienia w okresie kryzysu gospodarczego, pozostał na uniwersytecie w Poznaniu, zamiast powrócić do Getyngi.


Eing. 27 JUL. 1931
Tgb. Nr. ...

Bydgoszcz, 25-VII-31. 2

An das Sekretariat
der Universität in Göttingen.

Beiliegend übersende ich mein Anmeldebuch sowie drei Antwortscheine mit der höflichen Bitte, mir das Abgangszeugnis und mein Reifezeugnis zusenden zu wollen.

Hochachtungsvoll
M. Rejewski
Bydgoszcz (Polen)
Zduny 13

4. Podanie M. Rejewskiego do sekretariatu Uniwersytetu w Getyndze, Universitätsarchiv Göttingen, Marjan Rejewski – Abgangs-Zeugnis, k. 2

Informacje podane w tym akapicie ponownie wymagają korekty. Archiwalia z Poznania nie potwierdzają informacji o objęciu przez Rejewskiego asystentury w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Poznańskiego w 1930 roku, jest tam zaś informacja, że asystenturę w Katedrze Fizyki Teoretycznej Rejewski objął 23 grudnia 1931 roku. Od jesieni 1930 roku Rejewski pracował w poznańskiej filii Biura Szyfrów, pozostawał tam do września 1931 roku, gdy filia została rozwiązana (szczegóły w książce [19]). Turing zaś napisał (zob. [27, str. 76–77]):

> Wróciwszy do Bydgoszczy [latem 1930 roku], Rejewski zastał list z Poznania, od swego uniwersyteckiego mistrza Zdzisława Krygowskiego. Profesor proponował mu stanowisko na uczelni, Rejewski musiałby jednak zrezygnować ze ukończenia studiów w Getyndze. Decyzja nie była trudna, [...].

A jak to wygląda w dokumentach z Getyngi? Latem 1930 roku Rejewski opuścił studia bez przekazania władzom getyńskiej uczelni informacji o tym. Dopiero latem kolejnego roku pisał do Getyngi z prośbą o wydanie mu świadectwa odejścia ze studiów (*Merkblatt über den Abgang*). Taki rodzaj zaświadczenia nie jest świadectwem ukończenia studiów – przeciwnie, wskazuje na to, że zainteresowany opuścił studia bez wypełnienia stosownych obowiązków. Dokument ten nie był zaświadczeniem o odbytych kursach, zapewne właśnie to jest powodem braku na nim informacji o tym, w jakich kursach Rejewski uczestniczył.

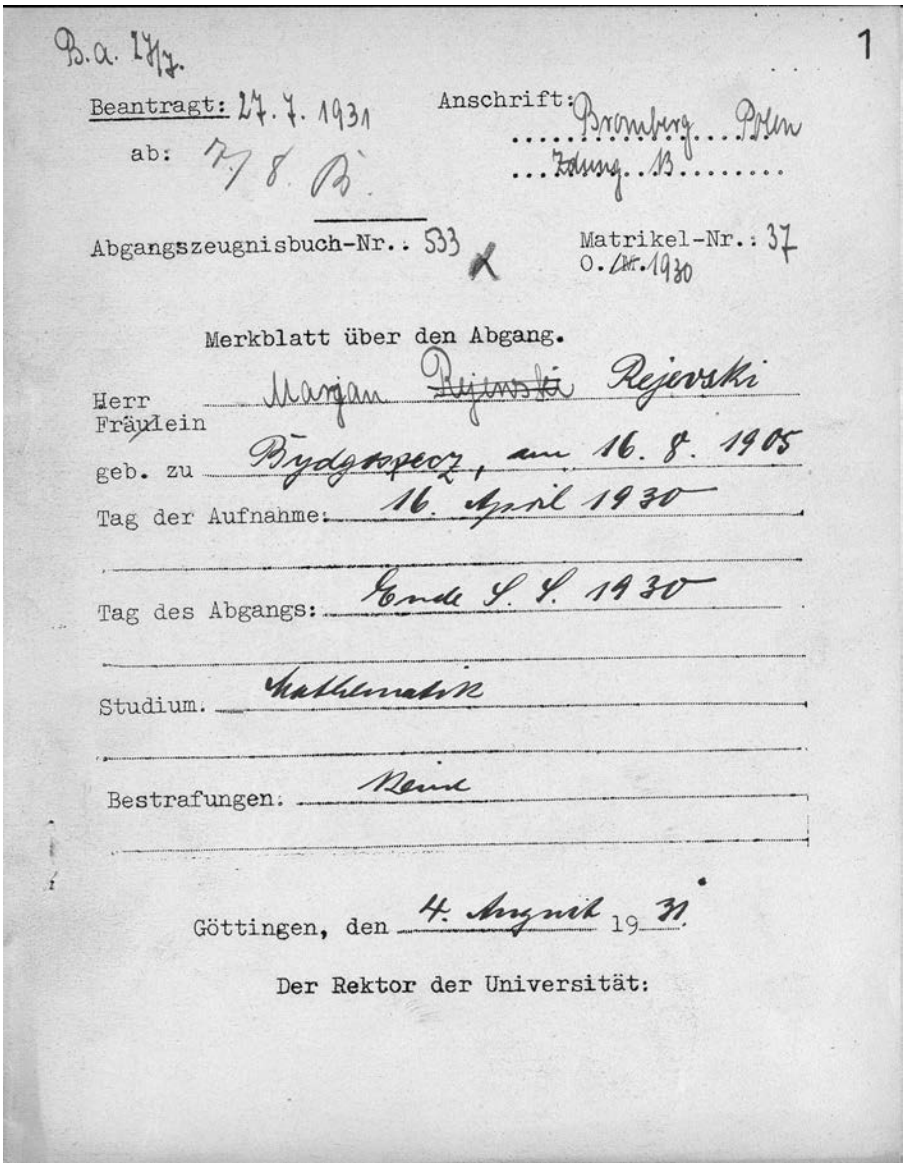
Przywołajmy treść podania o wydanie świadectwa, a następnie samego świadectwa odejścia. Rejewski napisał do sekretariatu uczelni (zob. [28], podanie o wydanie świadectwa odejścia, ryc. 4):

> Bydgoszcz, 25-VII-31
> Do sekretariatu Uniwersytetu w Getyndze.
>
> W załączeniu przesyłam mój indeks tak jak i trzy [międzynarodowe] kupony na odpowiedź z uprzejmą prośbą o przesłanie mi świadectwa odejścia oraz świadectwa dojrzałości.
>
> Z wyrazami szacunku,
> M. Rejewski,
> Bydgoszcz (Polska) Zduny 13

Z tego listu można wnioskować, że powodem, dla którego Rejewski zwrócił się do sekretariatu, była konieczność odzyskania świadectwa maturalnego, a nie chęć zdobycia bezużytecznego świadectwa odejścia[13].

Wróćmy do głównego tematu. Był środek lata, ale sekretariat Uniwersytetu w Getyndze działał normalnie. Świadectwo odejścia Rejewskiego zostało wystawione 7 sierpnia 1931 roku. Jego treść jest bardzo krótka, to zaledwie kilka słów wpisanych w gotowym formularzu (zob. [28], świadectwo odejścia, ryc. 5):

[13] Warto tu wyjaśnić, czym były, a właściwie nadal są, międzynarodowe kupony na odpowiedź. Jest to kupon w kształcie znaczka, który podlega wymianie na zwykły znaczek na międzynarodową przesyłkę listową we wszystkich krajach należących do Powszechnego Związku Pocztowego. Kupony zostały wprowadzone w 1906 roku. Poczta Polska świadczy taką usługę do dziś, a teraz opłata za kupon jest równa opłacie za przesyłkę listową nierejestrowaną priorytetową wysyłaną za granicę o masie do 50 g.



B.a. 14/7. 1

Beantragt: 27. 7. 1931 Anschrift: Bromberg Posen
ab: 7/8. Zduny 13

Abgangszeugnisbuch-Nr.: 533 Matrikel-Nr.: 37
O. Ost. 1930

Merkblatt über den Abgang.

Herr Marjan ~~Rejewski~~ Rejewski
Fräulein
geb. zu Bydgoszcz, am 16. 8. 1905
Tag der Aufnahme: 16. April 1930
Tag des Abgangs: Ende S. S. 1930
Studium. Mathematik
Bestrafungen: Keine

Göttingen, den 4. August 19 31

Der Rektor der Universität:

5. Świadectwo odejścia M. Rejewskiego z Uniwersytetu w Getyndze, Universitätsarchiv Göttingen, Marjan Rejewski – Abgangs-Zeugnis, k. 1

Podanie: 27 VII 1931
od: 7 VIII 31
Księga świadectw numer 533

Adres: Bydgoszcz, Polska
Zduny 1
nr albumu 37
O./M.[14] 1930

[14] Zastosowane skróty: „O." – *Ostern*, „M." – *Michaelis*. Przypadający na 29 września *Micha-*

Świadectwo odejścia
Pan Marjan [Marian] Rejevski [Rejewski]
Ur[rodzony] w Bydgoszczy 16 VIII 1905
Dzień przyjęcia [na studia]: 16 IV 1930
Dzień opuszczenia [studiów]: koniec sem[estru] let[niego] 1930
Studium/Kierunek studiów. Matematyka
Kary. nie/żadne
Getynga, 4 sierpnia 1931
Rektor Uniwersytetu

Wydanie świadectwa odejścia poprzedziło inne wydarzenie. W księdze immatrykulacyjnej [22] przy nazwisku Rejewskiego w rubryce uwag wpisano, że już 18 stycznia 1931 roku został on wykreślony z listy studentów[15]. Tak zakończyła się krótka, bo zalewie kilkumiesięczna przygoda Rejewskiego z Uniwersytetem w Getyndze. Dalsza historia Mariana Rejewskiego to historia złamania szyfru niemieckiej maszyny *Enigma*, ale to wykracza poza temat naszego artykułu.

5. Podziękowanie

Dziękujemy Barbarze Pałce i Włodzimierzowi Zwonkowi z Krakowa, Iwonie Dadej z Berlina oraz Renate Tobies z Jeny za pomoc i cenne wskazówki oraz dyrekcji Archiwum Uniwersytetu w Getyndze za zgodę na publikację materiałów archiwalnych.

Bibliografia

[1] *Amtliches Namenverzeichnis. Winterhalbjahr 1929/30. Verzeichnis der Vorlesungen Sommerhalbjahr 1930*, Verlag Dieter. Universitäts-Buchdruckerei, Göttingen 1929.
[2] *Amtliches Namenverzeichnis. Sommerhalbjahr 1930. Verzeichnis der Vorlesungen Winterhalbjahr 1930/31*, Verlag Dieter. Universitäts-Buchdruckerei, Göttingen 1930.
[3] Archiwum Akt Nowych, MWRiOP, sygn. 4082, Łomnicki Antoni, Sprawozdanie z podróży naukowej, Lwów, 31 października 1930, k. 156–157.
[4] D. Ciesielska, L. Maligranda, J. Zwierzyńska, *Doktoraty Polaków w Getyndze. Matematyka*, Analecta 28 (2019), nr 2, 73–116.
[5] R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. 1, Springer, Berlin 1924.

elis, czyli dzień świętego Michała Archanioła, wyznacza początek semestru zimowego, *Ostern,* czyli Wielkanoc, początek semestru letniego.

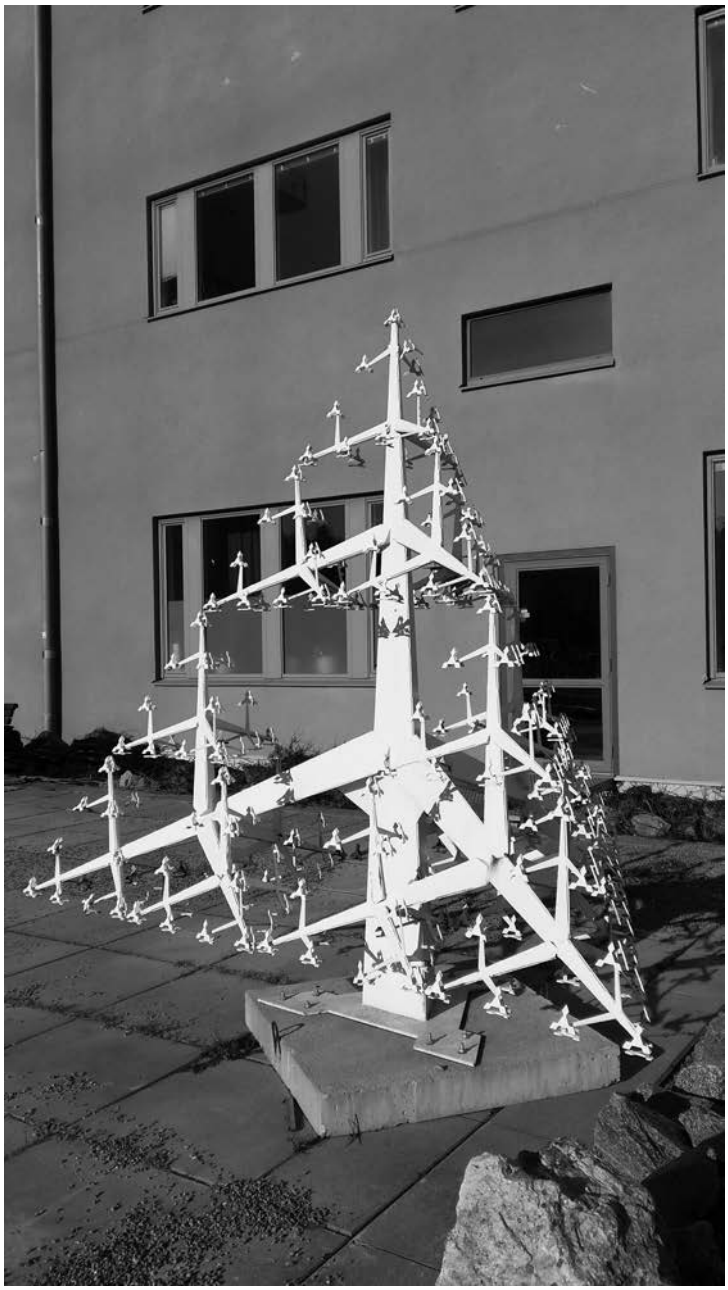
[15] Tego samego dnia z listy studentów została wykreślona Helena Kohn.

[6] R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. 2, Springer, Berlin 1937.
[7] M. G. Doncel, L. Michel, J. Six, *Interview with Eugene P. Wigner on his scientific activity*, Arch. Internat. Hist. Sci. 34 (1984), nr 112, 177–217.
[8] A. Hermann, *Werner Heisenberg 1901–1976*, Inter Nationes, Bonn 1976.
[9] K. Jacobs, *Neumann, John von*, [w:] *Neue Deutsche Biographie*, t. 19 1999.
[10] D. Kahn, *Enigma. Złamanie kodu U-Bootów. 1939–1943*, Wydawnictwo Magnum, Warszawa 2005.
[11] D. Kahn, *Seizing the Enigma. The race to break the German U-Boots codes. 1939–1943*, Arrow Book Ltd., London 1996.
[12] W. Kozaczuk, *W kręgu Enigmy*, Książka i Wiedza, Warszawa 1979.
[13] W. Kozaczuk, *W kręgu Enigmy, wyd. 2, poszerzone*, Książka i Wiedza, Warszawa 1986.
[14] *Księga informacyjno-adresowa „Cała Warszawa" 1930*, Polskie Informacyjne Książki Adresowe, Toruń 1930.
[15] W. Lietzmann, *New types of schools in Germany and their curricula in mathematics*, The Mathematics Teachers 17 (1924), nr 4, 148–153.
[16] N. Macrae, *John von Neumann: the scientific genius who pioneered the modern computer, game theory, nuclear deterrence, and much more*, AMS, Providence 1999.
[17] L. Maligranda, *Antoni Łomnicki (1881–1941)*, Wiad. Mat. 44 (2008), 61–112.
[18] L. Maligranda, *Władysław Orlicz w Getyndze*, Wiad. Mat. 54 (2018), nr 2, 191–219.
[19] L. Maligranda, W. Wnuk, *100 lat matematyki na Uniwersytecie w Poznaniu 1919–2019*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań (w druku).
[20] *Matricula in studiosorum Academia Georgicae Augusta, Michaelis 1927 W.S.*, Göttingen 1927.
[21] *Matricula in studiosorum Academia Georgicae Augusta, Ostern 1930 W.S.*, Göttingen 1929.
[22] *Matricula in studiosorum Academia Georgicae Augusta, Ostern 1930 S.S.*, Göttingen 1930.
[23] M. Rejewski, *Wspomnienia z mej pracy w Biurze Szyfrów Oddziału II Sztabu Głównego w latach 1930–1945*, Bydgoszcz 1967 (maszynopis).
[24] M. Rejewski, *Jak matematycy polscy rozszyfrowali Enigmę*, Wiad. Mat. 23 (1980), nr 1, 1–28.
[25] H. M. Schaerf, *Wspomnienia o Juliuszu P. Schauderze*, Wiad. Mat. 24 (1982), nr 1, 91–94.
[26] R. Siegmund-Schultze, *The origins of functional analysis*, [w:] *A history of analysis* (H. N. Jahnke, red.), AMS, Providence 2003.
[27] D. Turing, *X, Y, Z. Prawdziwa historia złamania szyfru Enigmy*, Rebis, Poznań 2019.
[28] Universitätsarchiv Göttingen, Marjan Rejewski – Abgangs-Zeugnis von den. 4 August 1931, nr 533.
[29] Dziennik Ustaw, *Ustawa z dnia 13 lipca 1920 r. o szkołach akademickich*, t. 72, poz. 494, Sejm, Warszawa 1920.

[30] W. A. Woyczyński, *Szukając Birnbauma*, Wiad. Mat. 33 (1997), 137–154.
[31] W. A. Woyczyński, *Seeking Birnbaum, or nine lives of a mathematician*, The Mathematical Intelligencer 23 (2001), nr 2, 36–40.

Danuta Ciesielska
Instytut Historii Nauki PAN
im. Ludwika i Aleksandra Birkenmajerów
smciesie@cyfronet.krakow.pl, dciesielska@ihnpan.pl

Lech Maligranda
Department of Engineering Sciences and Mathematics
Luleå University of Technology
Instytut Matematyki
Politechnika Poznańska
lech.maligranda@ltu.se, lech.maligranda@put.poznan.pl



„Choinka Sierpińskiego”
przed budynkiem Instytutu Matematyki na Uniwersytecie w Uppsali
(fot. Leokadia Białas-Cież)

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 337–348
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Rozmowa z Kazimierzem Gębą

Joanna Janczewska*: Proszę opowiedzieć nam o początkach swoich zainteresowań matematyką.*

Kazimierz Gęba: Po wojnie, w 1945 roku, chodziłem do gimnazjum w Lublinie. Gimnazjum było takie, jak przed wojną, tzn. dyrektor, ksiądz prefekt i przedwojenni nauczyciele. Ja z matematyki byłem słaby. W pierwszej klasie na pierwszy okres miałem coś pomiędzy dwójką a trójką. Nie rozumiałem matematyki. Pamiętam, że w drugiej klasie przez kilka dni nie byłem w szkole. Kolega pokazywał mi wykresy funkcji, a ja pytałem, co to jest i po co? Pamiętam też, że uczęszczałem dwa razy do pierwszej klasy. Nie dlatego, że powtarzałem klasę, ale w wyniku reformy. Natomiast po drugiej klasie trafiłem od razu do dziewiątej. W dziesiątej klasie zrozumiałem, co to jest miejsce geometryczne punktu. Gdy byłem w jedenastej klasie, przeprowadziliśmy się z rodzicami do Gorzowa Wielkopolskiego. Było to częściowo związane z kłopotami mojego ojca.

Ojciec był w Armii Krajowej. Po wojnie niewygodnie było się do tego przyznawać, więc mówił, że był w Batalionach Chłopskich. Prawda jednak wyszła na jaw. Żeby uniknąć kłopotów, przenieśliśmy się na Ziemie Zachodnie. Gdybyśmy zrobili to w 1947 lub 1948 roku, byłoby dobrze. Ale przenieśliśmy się za późno, dopiero w 1950 roku i wywołało to dalsze kłopoty. Znowu zaczęli go maglować.

Wracam jednak do pytania. W jedenastej klasie ja już co nieco rozumiałem. Rozwiązywałem wszystkie zadania ze stereometrii. Nie miałem kłopotów z nie-

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

równościami. Pomagałem innym. Bez problemów zdałem maturę i myślałem o tym, żeby iść na wydział elektryczny.

JJ: *Na jaką uczelnię?*

Chciałem studiować na Wyższej Szkole Inżynierskiej. Jednak jeden działacz ze Związku Młodzieży Polskiej powiedział mi, że na WSI się nie dostanę. Był rok 1951 i wojna w Korei. Jeśli nie szło się na studia, to do wojska. Raz przyjechał do naszej szkoły student z Poznania i namawiał na kierunki nauczycielskie. Wypełniłem kwestionariusz i zaznaczyłem: matematyka lub fizyka. Ponieważ mieli więcej kandydatów na fizykę, mnie wpisali na matematykę.

JJ: *Czy był egzamin wstępny?*

Tak. Egzamin przypominał maturę. Nie miałem z nim kłopotu. Trzeba też było napisać, dlaczego wybrało się ten kierunek. Nie za bardzo jednak pamiętam, co odpowiedziałem. W każdym bądź razie zacząłem studiować i główne postacie wtedy w Poznaniu to byli Alexiewicz i Orlicz. Alexiewicz wykładał geometrię analityczną. Mówił przepiękną polszczyzną z lekkim lwowskim akcentem. Orlicz miał z nami analizę matematyczną. Wałkował zbieżności ciągów i szeregów. Późno przeszedł do pochodnych. Ja wtedy nie za bardzo rozumiałem potrzebę dowodów. Wiedziałem jednak, że na egzamin do Orlicza trzeba się dobrze przygotować. Przerobiłem wtedy dokładnie pierwszy tom Fichtenholza w języku rosyjskim i zdałem egzamin w pierwszym terminie. Na studiach nie miałem kłopotów z egzaminami. Zdawałem je lepiej lub gorzej, ale zdawałem. Potem mieliśmy kółko samokształceniowe. Uczestniczyli w nim Zbigniew Semadeni, którego Państwo znacie, Zbigniew Pawlaczyk, który potem był w Szczecinie (niestety szybko umarł), oraz Przemysław Zbijewski, który był najlepszy (laureat olimpiady matematycznej, wszechstronnie uzdolniony, niestety po kilku latach zginął w Tatrach). Natomiast motorem tych naszych spotkań był Semadeni, który wszystko organizował. Prowadził też zeszyt, w którym wszystko notował. Na tych spotkaniach byłem specjalistą od topologii ogólnej, do której miałem naturalne inklinacje. Na przykład szybko wiedziałem, co to jest przestrzeń bizwarta. Do dyspozycji mieliśmy książki tylko w języku rosyjskim. Ciekawostką jest, że w Gorzowie bez problemów kupiłem podręcznik Aleksandrowa.

JJ: *A ta grupa czterech osób, to była tylko w okresie studiów?*

Tak. Głównie drugi i trzeci rok.

Marek Izydorek*: Jak to się potoczyło, że studia doktoranckie robił Pan Profesor w Toruniu pod opieką Andrzeja Granasa?*

Wtedy nie było studiów doktoranckich i obowiązywały nakazy pracy. Po studiach w 1955 roku dostałem nakaz pracy w Szczecinie w Wyższej Szkole Inżynierskiej. Po dwóch latach przyjechał do Szczecina Jeśmanowicz i zaproponował mi asystenturę w Toruniu. Podejrzewam, że stał za tym Semadeni. W Toruniu najważniejszym człowiekiem był Łoś, człowiek niezwykle utalentowany. No i spotkałem w Toruniu Granasa. To był bardzo ważny moment mojego matematycznego życia. Granas był świeżo po aspiranturze w Moskwie, gdzie poznał Lusternika. Wcześniej w Warszawie chodził na wykłady Borsuka.

Zaproponował mi, żebym zajął się topologią algebraiczną, bo topologia ogólna stała się *passé*. Kupił w Warszawie dziesięć egzemplarzy rosyjskiego wydania książki Eilenberga–Steenroda, przywiózł do Torunia i kazał czytać.

W Toruniu poznałem też Andrzeja Jankowskiego, który w tamtym czasie był jeszcze studentem. Pamiętam, jak po wakacjach na spotkaniu katedry, na które przyszedł też Jankowski, Królówna wykazała zdziwienie, mówiąc: „Andrzejku, aleś tyś urósł". Jankowski urósł bowiem piętnaście centymetrów. Był bardzo wysoki. Ktoś narysował obrazek, na którym wspólnie z Andrzejem niesiemy kajak i ten kajak był pod takim dużym kątem (*śmiech*).

JJ*: Jak już o rysunkach mowa. Wcześniej wspomniał Pan Jeśmanowicza. Pamiętam Pana karykaturę jego autorstwa. W jakich okolicznościach ją narysował?*

W 1957 roku w grudniu była konferencja z analizy funkcjonalnej w Zakopanem. Jeździliśmy na nartach.

MI*: Jaka wtedy była atmosfera w Toruniu?*

Bardzo dobra. Kontakty z Jeśmanowiczem były głównie brydżowe. Myśmy chodzili do Jeśmanowicza grać w brydża. Miał dużą willę. Dwa pokoje przeznaczył na bibliotekę. Oprócz książek matematycznych posiadał na przykład dzieła Dantego po polsku, włosku i rosyjsku. O matematyce z Jeśmanowiczem rozmawialiśmy głównie w instytucie. Natomiast z Granasem również w takiej knajpie, która nazywała się „Pod Gołąbkiem". Coś pośredniego między kawiarnią a knajpą. Można było zjeść klopsiki, bigos. Wypić kawę albo setkę wódki. Jak kto woli.



Od lewej: Marek Izydorek, Kazimierz Gęba, Joanna Janczewska
(fot. Marcin Hoppe)

MI*: Z Pańskiej genealogii naukowej w* MathSciNet *wiem, że miał Pan dwóch promotorów. Jak to z nimi było?*

Jak już mówiłem, Granas kazał nam czytać Eilenberga–Steenroda. Mówił też o pomysłach Lusternika dotyczących stopnia Leraya–Schaudera. Jednak Granas wyjechał do Stanów.

Sytuacja moja była nieprzyjemna. Nie miałem mieszkania. Mieszkałem w pokoju nad piekarnią na Przedmieściu Lubickim. Najgorzej wspominam karaluchy. Musiałem szybko napisać doktorat. Nie chcę się przechwalać, ale przygotowałem go sam, wykorzystując tylko sugestie Granasa sprzed jego wyjazdu. Jak Granas wrócił, chciałem się bronić, ale wtedy okazało się, że on nie może być promotorem. Nie miał habilitacji. Wtedy przejąłem inicjatywę i prze-

konałem Jeśmanowicza, żeby został moim promotorem. Granas w międzyczasie zrobił habilitację i powołano go na recenzenta.

MI: *A czy Jeśmanowicz miał habilitację?*

Tego nie wiem. Miał jednak uprawnienia, by być promotorem.

JJ: *W którym roku obronił Pan doktorat?*

W 1962 roku.

JJ: *Interesuje mnie, jaka była wtedy atmosfera naukowa na uczelni, stosunek do tej pracy i filozofia życia.*

Atmosfera była dobra. Wszyscy byliśmy biedni. Prawie wszyscy jednakowo biedni. Matematyka była dla nas odskocznią od tej szarej rzeczywistości, odskocznią od codziennego życia. Po 1956 roku ludzie zaczęli wyjeżdżać za granicę. Pamiętam, jak przyszedł Łoś i powiedział, że musi wyjechać do Stanów. Twierdził, że warszawiacy myślą, że nic nie jest wart, bo nie był jeszcze w Ameryce. I wyjechał.

MI: *Do kiedy był Pan w Toruniu?*

W 1962 roku przeniosłem się do Gdańska. Dubikajtis pracował na Wyższej Szkole Pedagogicznej w Gdańsku na drugim etacie i to za jego pośrednictwem negocjowałem warunki. W Toruniu obiecano mi mieszkanie, ale sprawa się przeciągała. W Gdańsku od razu zapewniono mi mieszkanie.

JJ: *Poza Dubikajtisem kto z matematyków pracował w tamtym czasie w Gdańsku?*

Na WSP był już Bittner, a na Politechnice Pawelski.

MI: *Gdzie w tym czasie pracował Granas?*

Granas przez pewien czas był w Warszawie, a w 1964 roku też przyjechał do Gdańska.

MI: *Gdzie matematycy z WSP mieli swoją siedzibę?*

Przy ulicy Sobieskiego. Granas założył zakład czy katedrę topologii i zażądał kilku pokoi. Naprzeciwko nas byli marksiści. Granas ściągnął też z Warszawy do Trójmiasta Jankowskiego, ale on pracował w Instytucie Matematycznym PAN, który dostał willę w Sopocie przy ulicy Abrahama.

MI*: Kto był wtedy we władzach WSP?*

Chemicy – Gotfryd Kupryszewski i Janusz Sokołowski. Zresztą gdyby nie oni, w szczególności Sokołowski, to nic by nie wyszło. Granas mógł chcieć wielu rzeczy, ale ktoś musiał to pchnąć.

Sokołowski był wtedy dobrze postrzegany. Należał do PZPR. Z nominacji ministerialnej organizował Uniwersytet Gdański i w lipcu 1970 roku został jego pierwszym rektorem. Natomiast Kupryszewski został dziekanem Wydziału Matematyczno-Fizyczno-Chemicznego na UG.

MI*: Pamięta Pan okres, gdy powstawał nowy budynek dla matematyki i fizyki na ulicy Wita Stwosza.*

Tak. Niejaki Woliński z fizyki i ja zostaliśmy równolegle seniorami tej budowy. Fizycy strasznie się rozpychali. Chcieli, żeby laboratoria fizyczne umieścić w piwnicach, które miały należeć do matematyków. Pamiętam, jak po jednej z awantur w gabinecie Kupryszewskiego wróciłem do domu i żeby się odprężyć, ku zadowoleniu żony umyłem podłogę w kuchni. Ale moje wzburzenie się opłaciło. Na drugi dzień zadzwonił Kupryszewski i powiedział, że wszystko da się załatwić i warsztaty będą gdzie indziej. W końcu tych warsztatów w ogóle nie było. Inżynier budowy stwierdził, że konstrukcja nie nadaje się do umieszczenia maszyn. Maszyn też nie było (*uśmiech*).

MI*: Opowie nam Pan teraz o swojej habilitacji? Czy wtedy do jej zrobienia musiał istnieć sprzyjający układ gwiazd? Czy trzeba było mieć kogoś w rodzaju promotora?*

Pamiętam, że mój dyplom w Instytucie Matematycznym PAN miał numer jeden. Moi starsi koledzy robili awans po staremu. Nie pamiętam, czy nazywali się doktorami nauk jak w Rosji czy docentami habilitowanymi. Granas po powrocie z Kanady chciał, żebym mój prawie skończony doktorat podzielił na dwie części i z pierwszej zrobił rozprawę doktorską, a z drugiej habilitacyjną. Sąsiada uważał, że należy to rozważyć. Był jednak problem. W tamtych czasach pisało się na maszynie. Wzory pomagała wpisywać mi małżonka. Potrzeba było iluś takich samych egzemplarzy. Kilka już miałem i chcąc podzielić materiał na dwie niezależne części, musiałbym zaczynać pisać od nowa. Rozmawiałem też o tym pomyśle z Borsukiem i on uznał, żeby lepiej zostawić jak jest. Miałem wtedy inne pomysły i powiedziałem Granasowi, że habilitację napiszę na inny temat. Potem okazało się, że te moje pomysły nie były aż tak dobre i habilitacja była taka sobie. Trzeba było coś napisać.

MI*: Jak rozumiem, to Pana prywatna opinia?*

Tak. Ale to się potwierdziło, bo ona nie była cytowana.

MI*: A kiedy Pan rozmawiał z Borsukiem?*

Pojechałem na seminarium do Borsuka razem z Sąsiadą, żeby zreferować moje wyniki przed obroną rozprawy doktorskiej – Borsuk był recenzentem mojego doktoratu.

MI*: Kto ze znanych matematyków uczestniczył w tym seminarium?*

Kuratowski, Sikorski, Sieklucki, Patkowska, Moszyńska, Jaworowski. Ten ostatni był też recenzentem mojej rozprawy.

MI*: Kim dla Pana Profesora był Andrzej Granas?*

Niedawno zadzwonili do mnie z Gdańskiego Towarzystwa Naukowego z prośbą, żebym napisał tekst do książeczki, którą chcą wydać na temat laureatów nagrody im. Heweliusza. Pisząc ten tekst, wspomniałem, że wiele zawdzięczam Borsukowi i jego teorii kohomotopii. O Granasie napisałem – mentor, starszy kolega, przyjaciel. Był trzema jednocześnie. Zaczęło się wtedy w Toruniu od książki Eilenberga–Steenroda i przetrwało. Nie chcę być nieskromny, ale poza mną w Toruniu tę książkę rozumiał jeszcze tylko Jankowski i Balcerzyk.

Wraz z przyjazdem Granasa do Gdańska zaczęły regularnie odbywać się szkoły letnie. Na jednej z nich wykładał René Thom. Na inną zaproszenie przyjął Peter Hilton. Dodatkowo Granas zapoczątkował w Sopocie seminarium analizy nieliniowej i topologii, które było w pewnym sensie kontynuacją seminarium Borsuka. Państwo też w swoim czasie na to seminarium dołączyliście, a teraz sami prowadzicie je dalej na Politechnice Gdańskiej.

MI*: Kto* (*fizycznie*) *organizował wspomniane szkoły letnie?*

Zygfryd Kucharski.

JJ*: Jak wspomina Pan okres, kiedy był Pan dziekanem?*

Na tym stanowisku czułem się prawdę mówiąc trochę nie na miejscu. Osiągnąłem szczyt swojej niekompetencji (*śmiech*).



Kazimierz Gęba (fot. Marcin Hoppe)

JJ: *Widziałam, jak w gabinecie na PG własnymi narzędziami wierci Pan otwory w ścianie, wkręca gwoździe itp. W domu też wszystkie sprawy remontowe ogarniał Pan sam?*

W dużym stopniu. Na przykład w naszym starym mieszkaniu na Nowych Ogrodach tynkowałem ściany i wykafelkowałem kawałek kuchni. Syn Jurek wspomina to tak: „Tata bierze kafelek, mierzy, przykłada, potem parzy kawę, pije itd.". Strasznie długo to trwało. Bardzo lubiłem takie robótki. Natomiast wyniki... Najlepiej ilustruje to pojawienie się w naszym rodzinnym slangu terminu „styl łubianowy" (mieliśmy domek na Kaszubach w Łubianie). Określenie to miało wyraźny wydźwięk pobłażliwie pejoratywny.

W naszym letnim domku nad jeziorem jeszcze dwa lata temu w przybudówce położyłem nowy dach. Ciesielski[1], który ma domek obok, przychodził i prosił, żebym tego nie robił, bo od samego patrzenia kręci mu się w głowie (*śmiech*). Teraz mnie też kręci się w głowie i to bez wchodzenia na dach.

[1] Mowa o niedawno zmarłym Zbigniewie Ciesielskim z IM PAN – przyp. red.

MI*: Bardzo mnie interesuje okres spędzony przez Pana w Princeton.*

Bolesne sprawy. Odpowiedź jest taka: to było za dobre miejsce dla mnie. Na usprawiedliwienie powiem, że nie byłem przygotowany na ten wyjazd. Za mało umiałem. My tu byliśmy jakieś dziesięć lat do tyłu.

MI*: Kto z wielkich poza Morse'em tam wtedy pracował?*

Borel, Weil, Montgomery, Whitney w Instytucie, a Steenrod i Milnor byli na Uniwersytecie. Na Uniwersytecie był też bardzo dobry grecki matematyk Christos Papakyriakopoulos, który interesował się rozmaitościami trójwymiarowymi i próbował udowodnić hipotezę Poincarégo. Poznałem też Jamesa Eellsa z Cornell University, który przyjeżdżał do Princeton odwiedzać ojca. Na zaproszenie Eellsa byłem dwa razy w Cornell. Steenrod wyglądał jak profesor w amerykańskim filmie.

Montgomery powiedział mi kiedyś, że on jest w dużej mierze matematykiem polskim. Na początku kariery trafił w charakterze wykładowcy do najlepszej w Stanach uczelni dla dziewcząt. Miał dużo czasu i zaprenumerował *Fundamenta Mathematicae*, które czytał od deski do deski.

MI*: A rozmawiał Pan z Morse'em?*

Tak. Morse miał w zwyczaju zapraszać wszystkich wizytujących gości na rozmowę. Gdy na tej rozmowie dowiedział się, że jestem Polakiem, zaczął opowiadać, że jest członkiem zagranicznym PAN i zna Kuratowskiego. Wyczuwało się tam szacunek do polskiej matematyki. Młodzi amerykańscy matematycy wypytywali mnie o Borsuka. Nie mogli uwierzyć, że Borsuk, który ma tak wiele znakomitych wyników, ma zaledwie sześćdziesiąt kilka lat.

MI*: Dlaczego po wojnie nie mieliśmy już w Polsce matematyków klasy Borsuka?*

Matematyka po wojnie weszła w Polsce w okres schyłkowy i tak już zostało.

JJ*: Czy Pana małżonka zgadzała się bez problemów na te Pana wyjazdy najpierw do Stanów, a potem do Kanady do Granasa?*

Tak. Żona miała zawsze duży szacunek do mojej pracy. Gdy wyjeżdżałem, wszystkie obowiązki brała na siebie. Wynagrodzeniem moich nieobecności były zarobione tam pieniądze, na przykład po pierwszym wyjeździe do USA mogliśmy kupić volkswagena combi – wtedy to był luksus. Jak była uroczystość z okazji mojego osiemdziesięciolecia, podziękowałem jej za „absolutyzm oświecony", który ustanowiła w naszym małżeństwie.

JJ: *Gdyby teraz decydował Pan o wyborze drogi życiowej, to też wybrałby Pan Profesor matematykę?*

Oczywiście. To znakomita robota, pod dachem, godziny nienormowane, mnóstwo urlopu – to jest odpowiedź w stylu, które słyszałem w reportażu z Urzędu Zatrudnienia. W październiku trochę popracujemy i w listopadzie już mamy wolne. Ludziom to się w głowie nie mieści.

Z płacami jest trochę gorzej... A poważnie: dużą zaletą było poznanie wielu naprawdę ciekawych ludzi.

MI: *Czy Pan wierzył, że w Gdańsku można zbudować ośrodek matematyczny konkurujący z warszawskim czy krakowskim?*

Niestety, nie. Granas wierzył i chciał tu stworzyć taki silny ośrodek, ale czas pokazał, że to się nie udało. Nie mogło się udać. Nie da się budować bez solidnych podwalin. Mówimy oczywiście o szkole matematycznej, a nie o infrastrukturze.

MI: *Dlaczego nie zatrzymano Pana na UG?*

Gdy przeszedłem na emeryturę, spytałem, czy mógłbym jeszcze pracować. Ku mojemu zaskoczeniu nie wykazano entuzjazmu do tego pomysłu. Po dwóch dniach okazało się, że mogę zostać jeszcze na rok. Dla mnie była to informacja, że w zasadzie już mnie nie chcą. Dlatego zacząłem rozmowy z Panem o moim przyjściu na PG. Otrzymałem lepszą ofertę, więc się zdecydowałem na zmianę. Na UG od dłuższego czasu i tak nie miałem z kim rozmawiać o matematyce. Tadek Spanily odszedł do Hestii, Krawcewicz wyjechał do Stanów, Marzantowicz wybrał Poznań, Kucharski już wcześniej odszedł na PG. Pan zawsze pracował na PG i wtedy była możliwość, żeby wszystkich wokół naszego seminarium zebrać tu w jednej katedrze. Krótko po mnie przeniósł się przecież Zdzisław Dzedzej, a potem pani Janczewska.

MI: *Wracając do seminarium, co zdecydowało, że przenieśliśmy się z Sopotu do Gdańska?*

Na początku, gdy Granas był w Gdańsku, i jemu, i Ciesielskiemu zależało na tym, żeby w Instytucie coś się działo. Wszelka aktywność naukowa była mile widziana. Jednak z biegiem czasu zauważyłem, że wraz ze zmianami w Instytucie nie jesteśmy tu już tak mile widziani. Był taki krótki moment, że w latach dziewięćdziesiątych przychodził do nas Ciesielski. Obaj myśleliśmy, że może uda się coś wspólnie zrobić w temacie równań stochastycznych. Muszę jednak

przyznać, że nie potrafiłem z nim nawiązać kontaktu roboczego. Tak czasami się zdarza.

MI*: Mam jedno drażliwe pytanie. Może Pan Profesor nie odpowiadać, jeśli nie chce. Dlaczego nie został Pan członkiem korespondentem PAN?*

Nie wiem – najprostsza odpowiedź – bo mnie nie wybrali. Komitet Matematyczny PAN podejmował w tej kwestii decyzję. Może warto dodać, że Komitet, w skład którego wchodzili matematycy będący członkami PAN oraz matematycy spoza PAN (mniej więcej w takiej samej liczbie), tylko rekomendował kandydatów, a właściwy wybór był na poziomie Akademii. Za pierwszym razem, gdy zgodziłem się kandydować, przegrałem z Białynickim. Potem dotarło do mnie, że wielu moich kolegów miało mi za złe, że w ogóle kandydowałem. Za drugim razem zadzwonił do mnie Łojasiewicz i zapytał, czy zgodzę się kandydować jeszcze raz. Odmówiłem, nie ze skromności, ale już wtedy zorientowałem się, że nie mam szans, co kończyło dyskusję.

MI*: Nieoficjalnie w środowisku krążyła informacja, że nie uzyskał Pan poparcia, bo podkreślano, że nie jest Pan autorem żadnej monografii.*

Nie sądzę, żeby to był główny powód. Nie o wszystkich członkach KM miałem równie dobre zdanie, ale w sumie gremium to było rozsądne. Reprezentowało znacznie wyższy poziom niż niektóre Rady Wydziału, których działalność miałem okazję poznać.

JJ*: Porozmawiajmy jeszcze o wpływach. Czy Pan Profesor w okresie KBN należał do osób, które decydowały o tym, kto dostanie grant?*

W pierwszej chwili chciałem odpowiedzieć – nie. Nie byłem nigdy członkiem KBN. Zawsze dostawałem granty, ale nie miałem bezpośrednio wpływu na decyzje. Jednak wielokrotnie na zlecenie KBN recenzowałem projekty innych matematyków, a to nie przysporzyło mi przyjaciół. Wydaje mi się jednak, że za czasów KBN przynajmniej w matematyce to ludzie z tzw. pierwszej półki rozdawali te pieniądze. Pamiętam, że jak był pierwszy konkurs, nie przygotowałem wniosku. Łoś, jak mnie spotkał, okazał swoje niezadowolenie i kazał składać wniosek po terminie z wyjaśnieniem dla urzędników, dlaczego się spóźniliśmy (*śmiech*). Często wyjeżdżałem do Kanady na zaproszenie Granasa i to mnie zdeprawowało, bo tam rzeczywiście były duże nakłady na naukę i przyzwoite płace. Szczególnie, gdy przywoziło się te pieniądze do Polski.

JJ: *Czy śledzi Pan Profesor zmiany w szkolnictwie wyższym? Mam na myśli również najnowszą ustawę Konstytucja dla Nauki.*

Zaraz po wojnie była w Polsce silna grupa kilku osób, które były w stanie ocenić nas merytorycznie. Obecnie na uczelniach pracuje bardzo dużo ludzi. Wszyscy chcą awansować. Urzędnicy wymyślają coraz to inne formy oceny. Pamiętam, jak w latach dziewięćdziesiątych byłem członkiem Centralnej Komisji ds. Stopni i Tytułów. Już wtedy na każdym spotkaniu była presja rozpatrzenia jak największej ilości wniosków, bo przecież ludzie czekają na awanse. Czasami w ciągu dwóch dni musieliśmy rozstrzygnąć trzydzieści wniosków profesorskich. Był moment, że o pozytywnej decyzji decydowało tylko kryterium posiadania co najmniej dwóch wypromowanych doktorów.

Zresztą wtedy byłem zdania, że należy odejść od habilitacji i przejść na system amerykański. Przez „system amerykański" rozumiałem przede wszystkim przeniesienie pewnych uprawnień na poziom uniwersytetu – na pierwszym miejscu byłoby pozwolenie uniwersytetom (na początek tym lepszym) na decydowanie o mianowaniu i zatrudnieniu profesorów. Działalność Granasa udowodniła, ile dobrego mogą przynieść inicjatywy lokalne. Nie mówię, że habilitacja jest zła. Jednak teraz już nawet nikt nie sprawdza tego, co kiedyś było przy niej bardzo ważne, czy kandydat potrafi wykładać.

Uważam też, że wszystkie ilościowe kryteria oceny są bez sensu – ich stosowanie w dłuższej perspektywie przynosi szkody.

Opowiem Państwu taką historię. Odwiedziłem kiedyś polski, średniej klasy, uniwersytet... Idę ze znajomym korytarzem, a ten z dumą prowadzi mnie do tablicy ogłoszeń i pokazuje ranking, z którego wynika, że najlepsze środowisko matematyczne jest właśnie na tym uniwersytecie, na drugim miejscu jest Instytut Matematyczny PAN, a na trzecim matematycy z UW. Zapytał mnie, co o tym sądzę, a ja odpowiedziałem mu, że oczywiste jest dla mnie iż zasada, według której ten ranking został zrobiony jest do d... (*śmiech*). Teraz coraz częściej pojawiają się testy, które zamiast oceniać testowanych wystawiają ocenę testującym.

MI, JJ: *Dziękujemy za rozmowę.*

Rozmowę przeprowadzili Marek Izydorek i Joanna Janczewska (Gdańsk)
k.geba@upcpoczta.pl
marek.izydorek@pg.edu.pl
joanna.janczewska@pg.edu.pl

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 349–367
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krzysztof M. Pawałowski (Poznań)

Moje refleksje o uczeniu topologii

Od kilkudziesięciu lat przed rozpoczęciem wykładów z topologii zawsze zastanawiałem się, jaki materiał wybrać do omówienia, szczególnie wtedy, gdy dla studentów na mojej *Alma Mater* obowiązkowy kontakt z topologią ograniczał się do jednego kursu. Zawsze powracało pytanie, jaki obraz tego nowoczesnego działu matematyki przekazać studentom, którzy za chwilę opuszczą mury uczelni. Obowiązujące programy nie dawały dużej swobody w wyborze materiału. Na to nakładały się ograniczenia wynikające z powszechnego przekonania mojego środowiska matematycznego, że najpierw należy zapoznać studentów z detalami topologii ogólnej potrzebnymi w analizie matematycznej, a ewentualnie później otworzyć im oczy na te zagadnienia, które od lat należą do głównego nurtu badań w topologii.

Wykładowcy wplatają czasami jakieś elementy geometryczne w teoriomnogościowy kurs topologii ogólnej. W moim przekonaniu należy postępować odwrotnie – ucząc topologii, od samego początku, pojęcia i argumenty topologii ogólnej należy wprowadzać tylko w takim zakresie, w jakim są one niezbędne przy omawianiu centralnych zagadnień topologii. Ten zabieg jest szczególnie ważny, gdy pierwszy kurs z topologii okaże się ostatnim.

Czy ucząc topologii, od samego początku można mówić o jej zaawansowanych zagadnieniach? Jak wybrać materiał na wykłady, by nie ugrzęznąć w teoriomnogościowych, mniej istotnych rozważaniach pozbawionych geometrycznych intuicji? W licznych książkach znajdziemy różne sugestie doboru materiału, lecz wspólną cechą wielu nowych podręczników dotyczących topologii jest skupienie uwagi na jej geometrycznych aspektach i wzbogacenie materiału o metody, które dostarcza algebra i analiza. Robert Messer i Philip

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Straffin, autorzy podręcznika [10] o bardzo wymownym tytule *Topology NOW!*, na okładce zamieścili informację, że ich książka uwidacznia studentowi ekscytujące, geometryczne idee topologii zgodnie z zasadą, że należy to „zrobić teraz, a nie odkładać na później". Autorzy zaproponowali na pierwszy kurs z topologii materiał, który od początku pozwala studentom odczuć siłę argumentów algebraicznych w rozwiązywaniu problemów geometrycznych.

W niniejszym artykule zdecydowałem się zwrócić uwagę czytelnika na tematykę, która stwarza duże możliwości wyboru materiału do omówienia na każdym etapie edukacji. Studenci rozpoczynający naukę topologii mogą dowiedzieć się o wiązkach wektorowych i polach wektorowych na rozmaitościach – i na tym zakończyć swoją przygodę z topologią. Natomiast zainteresowani dalszym kształceniem mogą usłyszeć o kohomologiach i klasach charakterystycznych, a potem o wiązkach włóknistych i rozwłóknieniach. Tym, którzy nadal czują niedosyt topologii, na kolejnym kursie można zaproponować nawiasy Whiteheada, kwadraty Steenroda i operacje Adamsa w K-teorii topologicznej, by umożliwić zrozumienie dowodu twierdzenia 2–4–8 (omówionego dalej).

Można oczywiście zaplanować inny tok nauki topologii, podzielony na jakieś etapy z coraz bardziej zaawansowanym materiałem. Bez względu na dokonany wybór, ważne jest, aby studenci już w trakcie obowiązkowych kursów dowiadywali się o centralnych obiektach topologii, jakimi są rozmaitości. Z pewnością tej wiedzy nie zdobędą, gdy ich edukacja ograniczy się do topologii ogólnej. Ktoś może spytać, czy absolwent matematyki powinien coś wiedzieć na temat rozmaitości. Odpowiem wówczas pytaniem, czy absolwent geografii powinien coś wiedzieć o takich pasmach górskich na Ziemi, jak Alpy i Himalaje.

1. Euler, Gauss, Riemann, Listing, Poincaré

Za wczesną zapowiedź wyników związanych z klasyfikacją obiektów topologicznych można uznać twierdzenie Teajteta[1] o istnieniu dokładnie pięciu brył platońskich. Dowód twierdzenia Teajteta, oparty na opisie wielkości kątów pomiędzy przylegającymi do siebie bokami w wieloboku foremnym, został umieszczony w *Elementach* Euklidesa. Wspomina o tym matematyk i historyk matematyki Georg Johnston Allman (1824–1904) w książce [3, str. 206]. W twierdzeniu Teajteta trudno od razu dostrzec współczesną topologię, lecz jej związek z bryłami platońskimi stanie się widoczny, gdy przeniesiemy się do XVIII wieku, w którym żył Euler.

[1] Teajtet (417–369 p.n.e.), starożytny matematyk grecki, pojawia się jako bohater w jednym z kilkudziesięciu dialogów, których autorem jest Platon (427–347 p.n.e.).

Leonhard Euler (1707–1783) uważany jest za prekursora topologii. Wśród licznych jego odkryć jest (uznany za pierwszy wynik z topologii) wzór

$$V - E + F = 2,$$

który wiąże liczby V, E i F (odpowiednio) wierzchołków, krawędzi i ścian w wielościanie wypukłym. Wzór Eulera pozwala na udowodnienie twierdzenia Teajteta bez odwoływania się do wielkości jakichkolwiek kątów. Wypukłość wielościanu wcale nie jest istotna, lecz kluczową rolę odgrywa fakt, że jego powierzchnia jest homeomorficzna ze sferą dwuwymiarową. Stąd już tylko jeden krok do uogólnienia wzoru Eulera do wzoru na charakterystykę Eulera powierzchni i wkroczenie w świat współczesnej topologii.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) dokonał wielu znaczących okryć w matematyce, fizyce i astronomii. Jego „twierdzenie wyborne" (łac. *Theorema Egregium*) zmieniło sposób patrzenia na geometrię i przyczyniło się do powstania współczesnej geometrii różniczkowej. Twierdzenie to gwarantuje, że krzywizna powierzchni jest niezmiennikiem odwzorowań izometrycznych.

Bernhard Riemann (1826–1866) wywarł duży wpływ na rozwój matematyki, między innymi swoimi pracami z teorii liczb i teorii funkcji analitycznych, a także koncepcją rozmaitości n-wymiarowej, uogólniającą (pochodzące od Gaussa) pojęcie powierzchni. W 1854 roku na swoim wykładzie habilitacyjnym Riemann powiedział, że „Mannigfaltigkeit ist eine n-fach ausgedehnte Größe" – rozmaitość jest wielkością o n stopniach swobody. Dziś rozmaitości Riemanna (rozmaitości z metryką riemannowską) odgrywają fundamentalną rolę w matematyce.

Johann Benedict Listing (1808–1882) był autorem pomysłu, by rodzący się w XIX wieku nowy dział matematyki nazwać „topologią" (grec. *tópos* – miejsce, *lógos* – nauka). Listing, w książce *Vorstudien zur Topologie* z 1848 roku (zob. [9]), zawarł główne wyniki ówczesnej topologii. Wówczas jednak nie były jeszcze znane takie pojęcia, jak grupa podstawowa czy liczby Bettiego, które stanowią istotną część informacji o grupach homologii. Pojęcia te wprowadził Poincaré i wskazał na znaczenie homotopijnego sposobu podejścia do problemów topologicznych i użyteczność stosowanych metod algebraicznych.

Jules Henri Poincaré (1854–1912) to wyjątkowa postać. Ten matematyk, fizyk, astronom, inżynier i filozof wywarł ogromny wpływ na kierunki badań podejmowanych w różnych obszarach nauki. Szczególną rolę Poincaré odegrał w wyodrębnieniu topologii jako osobnego działu matematyki. Do tego przyczynił się jego przełomowy artykuł *Analysis situs* opublikowany w 1895 roku i dopisane w ślad za nim pięć dodatków z lat 1899–1904 (zob. [11]). W pracach Poincarégo w usystematyzowany sposób zostały opisane podstawy topologii –

właśnie wtedy zaczęła ona być uważana za osobny dział matematyki. Od czasów Poincarégo rozmaitości, wprowadzone do matematyki przez Riemanna, zaczęły odgrywać coraz większą rolę i wkrótce zajęły w niej centralne miejsce.

2. Pola wektorowe

Rozmaitość, o której zawsze należy opowiedzieć studentom, to sfera

$$S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = 1\right\}$$

określona przez iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Każde dwa odwzorowania

$$f, g\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1},$$

dla których $\langle f(x), g(x)\rangle = 0$, $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ dla każdego $x \in S^n$, prowadzą do homotopii

$$h_t\colon S^n \to S^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$h_t(x) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|} \tag{$*$}$$

o początku f i końcu g, bo $\|(1-t)f(x) + tg(x)\|$ nigdy nie jest zerem.

Na mocy definicji *przestrzeń styczna* do sfery S^n w punkcie $x \in S^n$ to zbiór $T_x(S^n) = \{(x, v) : v \in \mathbb{R}^{n+1}, \langle x, v\rangle = 0\}$ razem ze strukturą rzeczywistej przestrzeni wektorowej, przy odpowiednich działaniach określonych wzorami

$$(x, v) + (x, w) = (x, v + w) \quad \text{oraz} \quad t(x, v) = (x, tv)$$

dla dowolnych $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ oraz $t \in \mathbb{R}$. Natomiast suma

$$T(S^n) = \bigcup_{x \in S^n} T_x(S^n) \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$$

z topologią podprzestrzeni nosi nazwę *wiązki stycznej* do S^n. Dokładniej mówiąc, wiązka styczna do sfery S^n składa się z rzutowania

$$p\colon T(S^n) \to S^n, \quad p(x, v) = x,$$

przestrzeni całkowitej $T(S^n)$ na *przestrzeń bazową* S^n, z *włókna* $\mathbb{R}^n$ i *grupy strukturalnej* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, które związane są ze sobą w następujący sposób. Przestrzeń bazową S^n można pokryć zbiorami otwartymi U_i ($i \in \mathcal{I}$), dla których istnieją homeomorfizmy

$$h_i\colon U_i \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U_i) = \bigcup_{x \in U_i} T_x(S^n)$$

odwzorowujące w sposób liniowy przestrzeń wektorową $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ na przestrzeń styczną $T_x(S^n)$ dla każdego $x \in U_i$, przy czym złożenie

$$h_j^{-1} \circ h_i \colon (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

jest postaci $h_j^{-1}\big(h_i(x,v)\big) = (x, g_{ij}(x)v^{\mathrm{t}})$ dla pewnego odwzorowania

$$g_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),$$

oraz $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ jest grupą macierzy nieosobliwych stopnia n o współczynnikach rzeczywistych, a $g_{ij}(x)v^{\mathrm{t}}$ oznacza iloczyn macierzy $g_{ij}(x)$ i macierzy v^{t} o jednej kolumnie złożonej ze współrzędnych wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

Przez *pole wektorowe* na S^n rozumie się takie odwzorowanie $v \colon S^n \to T(S^n)$, że dla każdego $x \in S^n$ wartość $v(x)$ należy do przestrzeni stycznej $T_x(M)$. Równoważnie mówiąc, pole wektorowe na S^n to takie odwzorowanie $v \colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, że dla każdego $x \in S^n$ wektory x oraz $v(x)$ są prostopadłe do siebie w przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$, tj. $\langle x, v(x)\rangle = 0$.

Kolejna rozmaitość, która nie powinna umknąć naszej uwadze, to rzeczywista przestrzeń rzutowa P^n otrzymana ze sfery S^n przez utożsamienie każdego punktu $x \in S^n$ z jego punktem antypodycznym $-x$. Podobne utożsamienia $(x,v) \sim (-x,-v)$ dla $(x,v) \in T_x(S^n)$ prowadzą do przestrzeni stycznej $T_{[x]}(P^n)$ do rozmaitości P^n w punkcie $[x] = \{x,-x\}$, a także do wiązki stycznej

$$T(P^n) = \bigcup_{[x] \in P^n} T_{[x]}(P^n),$$

która – podobnie jak wiązka styczna $T(S^n)$ – ma rzutowanie

$$q \colon T(P^n) \to P^n, \quad q([x,v]) = [x],$$

przestrzeni całkowitej $T(P^n)$ na przestrzeń bazową P^n, ma włókno $\mathbb{R}^n$ i grupę strukturalną $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, które są ze sobą odpowiednio związane.

Podobnie jak w przypadku sfery S^n, przez *pole wektorowe* na P^n rozumie się takie odwzorowanie $v \colon P^n \to T(P^n)$, że dla każego $[x] \in P^n$ wartość $v([x])$ należy do przestrzeni stycznej $T_{[x]}(P^n)$.

Ogólnie mówiąc, *pole wektorowe* na dowolnej rozmaitości gładkiej M to *cięcie* wiązki stycznej $T(M)$, tj. takie odwzorowanie $v \colon M \to T(M)$, że jego złożenie z rzutowaniem wiązki $T(M) \to M$ jest odwzorowaniem $\mathrm{id} \colon M \to M$, co oznacza, że $v(x) \in T_x(M)$ dla każdego $x \in M$.

Twierdzenie Poincarégo–Hopfa o indeksach pola wektorowego na zwartej rozmaitości gładkiej M (bez brzegu) orzeka, że

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{ind}_{x_i}(v).$$

Równość ta wyraża własność globalną, jaką jest charakterystyka Eulera $\chi(M)$, przez własności lokalne, którymi są indeksy $\mathrm{ind}_{x_i}(v)$ pola wektorowego v o miejscach zerowych $x_1, \dots x_k$, tj. takich $x_i \in M$, że $v(x_i) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Jeśli pole wektorowe $v\colon M \to T(M)$ nie ma zer, to $\chi(M) = 0$. W szczególności, na sferze S^{2n} nie istnieje pole wektorowe bez zer[2], bo jej charakterystyka Eulera $\chi(S^{2n}) = 2$.

Wykażemy teraz, że sfera S^{2n} nie ma struktury grupy topologicznej[3]. Przypuśćmy, że S^{2n} jest grupą topologiczną przy działaniu grupowym „$\cdot$”. Wybierzmy $g \in S^{2n}$ tak blisko elementu neutralnego $e \in S^{2n}$, by

$$g \cdot x \neq -x \quad \text{oraz} \quad g \cdot x \neq x$$

dla każdego $x \in S^{2n}$, co jest możliwe dzięki jednostajnej ciągłości mnożenia „$\cdot$” w grupie S^{2n}. Wówczas odwzorowanie $v\colon S^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ określone wzorem

$$v(x) = g \cdot x - \langle x, g \cdot x \rangle x, \quad x \in S^{2n},$$

jest polem wektorowym bez zer, co przeczy konkluzji o braku takich pól.

Brak pól wektorowych bez zer na sferze S^{2n} można też wykazać w oparciu o twierdzenie Hopfa, które stwierdza, że dla każdej sfery S^m dwa odwzorowania $f, g\colon S^m \to S^m$ są homotopijne (co zapisujemy jako $f \simeq g$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\deg(f) = \deg(g)$, tj. stopnie odwzorowań f i g są takie same.

Przypuśćmy, że $v\colon S^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ jest polem wektorowym bez zer. Wówczas można rozważyć unormowane pole wektorowe $v/\|v\|\colon S^{2n} \to S^{2n}$, które jest homotopijne z odwzorowaniem $\mathrm{id}^{2n}\colon S^{2n} \to S^{2n}$. Widać to przy podstawieniach $f = v$ i $g = \mathrm{id}^{2n}$ we wzorze na homotopię $(*)$ na początku tego paragrafu. Natomiast podstawienia $f = v$ i $g = -\mathrm{id}^{2n}$ wykazują, że $v/\|v\|$ jest homotopijne z odwzorowaniem $-\mathrm{id}^{2n}\colon S^{2n} \to S^{2n}$. Wobec tego $\mathrm{id}^{2n} \simeq -\mathrm{id}^{2n}$, co prowadzi do sprzeczności, bo na mocy twierdzenia Hopfa,

$$1 = \deg(\mathrm{id}^{2n}) = \deg(-\mathrm{id}^{2n}) = (-1)^{2n+1} = -1.$$

Niech M będzie n-wymiarową rozmaitością gładką. Pola wektorowe

$$v_1, \dots, v_k\colon M \to T(M), \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

[2] Dla sfery S^2 ten fakt wyraża się powiedzeniem, że włosów rosnących na sferze nie można uczesać bez pozostawienia rozwichrzonych miejsc. To dobry moment, by uczulić czytelnika, że wszystkie rozważane w artykule odwzorowania są ciągłe i dlatego nie dodajemy słowa *ciągłe* w sposób wyraźny przy każdej okazji.

[3] Jak zobaczymy później, spośród sfer jedynie S^0, S^1, S^3 są grupami topologicznymi (z działaniami mnożenia liczb rzeczywistych, liczb zespolonych i kwaternionów).

uważa się za *liniowo niezależne*, jeśli dla każdego $x \in M$ wektory

$$v_1(x), \ldots, v_k(x)$$

są liniowo niezależne w przestrzeni stycznej $T_x(M)$. Dla $n \geqslant 1$ maksymalna liczba liniowo niezależnych pól wektorowych na S^n jest równa n wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1, 3$ lub 7. Teza ta (o dowodzie wymagającym zaawansowanych technik) pojawia się w twierdzeniu 2–4–8. Studenci powinni bez angażowania skomplikowanych metod dowodowych odpowiedzieć na pytanie, czy zawsze dla $n \geqslant 1$ maksymalna liczba liniowo niezależnych pól wektorowych na sferze S^n jest taka sama, jak na przestrzeni P^n.

Z pewnością warto tu wspomnieć o liczbie Radona–Hurwitza wyrażającej maksymalną liczbę liniowo niezależnych pól wektorowych na sferze S^n. Nie tak łatwo jednak (na początkowym kursie z topologii) przekazać studentom materiał potrzebny do omówienia tej liczby.

Powiemy, że n-wymiarowa rozmaitość gładka M jest *paralelizowalna*, jeżeli wiązka styczna $T(M)$ do M jest wiązką produktową $M \times \mathbb{R}^n$ nad M, tj. istnieje homeomorfizm

$$h\colon M \times \mathbb{R}^n \to T(M),$$

który dla każdego $x \in M$ w sposób liniowy odwzorowuje przestrzeń wektorową $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ na przestrzeń styczną $T_x(M)$ w punkcie x. Taki homeomorfizm h pozwala określić n liniowo niezależnych pól wektorowych

$$v_1, \ldots v_n\colon M \to T(M)$$

$$v_i(x) = h(x, e_i), \quad i = 1, \ldots n,$$

przy czym wektory $e_1, \ldots, e_n$ stanowią bazę w $\mathbb{R}^n$. Na odwrót, liniowo niezależne pola wektorowe $v_1, \ldots v_n\colon M \to T(M)$ pozwalają określić h wzorem

$$h(x, y) = y_1 v_1(x) + \cdots + y_n v_n(x)$$

dla $x \in M$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Rozmaitość M jest więc paralelizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje n liniowo niezależnych pól wektorowych na rozmaitości M. Z tego powodu, spośród sfer S^n dla $n \geqslant 1$, jedynie S^1, S^3, S^7 są paralelizowalne (sfera S^0 jest paralizowalna z oczywistego powodu).

Jak widać, na rozmaitości paralelizowalnej M istnieją pola wektorowe bez zer, a to (na mocy twierdzenia Poincarégo–Hopfa) oznacza, że $\chi(M) = 0$. Tutaj można jeszcze dodać twierdzenie Hopfa orzekające, że dla zwartej n-wymiarowej rozmaitości orientowalnej M dwa odwzorowania

$$f, g\colon M \to S^n$$

są homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy $\deg(f) = \deg(g)$. Teraz dociekliwi studenci mogą zastanowić się, czy prawdą jest, że zwarta rozmaitość gładka M ma pole wektorowe bez zer wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(M) = 0$. W tym momencie nie sposób pominąć faktu, że $\chi(M) = 0$ dla każdej zwartej nieparzystowymiarowej rozmaitości M bez brzegu.

Niezwykle ważną klasę rozmaitości stanowią grupy Liego, tj. grupy G, które jednocześnie są rozmaitościami gładkimi, przy czym odwzorowania

$$GxG \ni (x, y) \mapsto xy \in G \quad \text{oraz} \quad G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$$

są gładkie. Jak łatwo wykazać, każda grupa Liego G jest rozmaitością paralelizowalną, a stąd posiada pole wektorowe bez zer. Wobec tego $\chi(G) = 0$.

3. Rozwłóknienia Hopfa

Heinz Hopf (1894–1971) rok akademicki 1927/1928 spędził w USA, pracując na Princeton University. To wówczas dokonał w topologii przełomowego odkrycia, które do dziś ma znaczące konsekwencje. Wbrew panującemu przypuszczeniu, że grupy homotopii $\pi_k(S^n)$ są jednoelementowe dla $k > n$, Hopf wykazał, że $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Każdemu odwzorowaniu $f\colon S^3 \to S^2$ Hopf przypisał liczbę naturalną (zwaną dziś *niezmiennikiem Hopfa*) i określił odwzorowanie o niezmienniku Hopfa 1, zadając jego wartość w punkcie $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in S^3$ wzorem

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \big(2(x_1y_2 + x_2y_1), 2(-x_1x_2 + y_1y_2), x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\big).$$

Przy użyciu liczb zespolonych $z_1 = x_1 + iy_1$ oraz $z_2 = x_2 + iy_2$ wzór ten przybiera postać $f(z_1, z_2) = \big(-2iz_1z_2, |z_1|^2 - |z_2|^2\big)$, przy czym

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

oraz $S^2 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1\}$. Po utożsamieniu sfery S^2 z jednopunktowym uzwarceniem płaszczyzny $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wzór Hopfa ma postać

$$f(z_1, z_2) = z_1z_2^{-1}$$

dla $z_2 \neq 0$, natomiast $f(z_1, 0) = \infty$. Jak wykazał Hopf, odwzorowanie

$$f\colon S^3 \to S^2$$

nie jest homotopijne z odwzorowaniem stałym. Co więcej, jego klasa homotopii $[f]$ jest generatorem grupy homotopii $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ (zob. [4]).

Polsko-amerykański matematyk Samuel Eilenberg (1913–1998) odniósł się do wyniku Hopfa podczas wykładu im. Wacława Sierpińskiego na Uniwersytecie

Warszawskim w 1991 roku. Eilenberg podkreślił niezwykłą wagę tego odkrycia dla dalszych losów topologii[4].

Opiszemy teraz jeden ze sposobów potwierdzenia wyniku Hopfa. Rozważmy okrąg S^1 jako grupę takich liczb zespolonych $z \in \mathbb{C}$, że $|z| = 1$. Zespoloną przestrzeń rzutową $\mathbb{C}P^2$ zdefiniujmy jako przestrzeń orbit S^3/S^1 działania okręgu S^1 na S^3 danego wzorem $z \cdot (z_1, z_2) = (zz_1, zz_2)$ dla $z \in S^1$. Inaczej ujmując, $\mathbb{C}P^2$ powstaje ze sfery S^2 przez doklejenie dysku D^4 za pomocą odwzorowania Hopfa $f\colon S^3 \to S^2$, co zapisujemy

$$\mathbb{C}P^2 = S^2 \cup_f D^4.$$

W języku CW-kompleksów można powiedzieć, że $\mathbb{C}P^2$ jest CW-kompleksem, który powstał z punktu x_0 (tj. komórki zerowymiarowej) przez doklejenie dysku D^2 (tj. komórki dwuwymiarowej) za pomocą odwzorowania stałego z okręgu S^1 w punkt x_0, co daje $S^2 = \mathbb{C}P^1$, a następnie doklejenie dysku D^4 (tj. komórki czterowymiarowej) za pomocą odwzorowania Hopfa $f\colon S^3 \to S^2$. Ze struktury CW-kompleksu $X = \mathbb{C}P^2$ wynikają izomorfizmy grup homologii:

$$H_0(X) \cong H_2(X) \cong H_4(X) \cong \mathbb{Z}$$

oraz równość $H_i(X) = 0$ dla pozostałych liczb $i \geqslant 0$. To pozwala stwierdzić, że dla dowolnego odwzorowania $\varphi\colon X \to X$ liczba Lefschetza

$$L(\varphi) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \operatorname{trace}\bigl(\varphi_*\colon H_i(X;\mathbb{Q}) \to H_i(X;\mathbb{Q})\bigr)$$

jest różna od zera. Wobec tego, na mocy twierdzenia Lefschetza, istnieje punkt stały odwzorowania φ. Podobna konkluzja zachodzi, gdy X jest CW-kompleksem zwartym o typie homotopii $\mathbb{C}P^2$ (co zapisujemy jako $X \simeq \mathbb{C}P^2$).

Przypuśćmy, że $\pi_3(S^2) = 0$. Wtedy każde odwzorowanie $S^3 \to S^2$, w tym odwzorowanie Hopfa f, jest homotopijne z odwzorowaniem stałym $g\colon S^3 \to S^2$. Rozważmy bukiet $X = S^2 \vee S^4$ sfer S^2 oraz S^4. Wówczas

$$\mathbb{C}P^2 = S^2 \cup_f D^4 \simeq S^2 \cup_g D^4 = S^2 \vee S^4 = X.$$

Rzutując jedną ze sfer z bukietu w jego punkt bazowy, a na drugiej zamieniając ze sobą punkty antypodyczne, określamy odwzorowanie $\varphi\colon X \to X$ bez punktów stałych, co przeczy konkluzji otrzymanej z twierdzenia Lefschetza.

Odwzorowanie Hopfa określa się też w dwóch innych przypadkach – ze sfery S^7 na S^4 oraz ze sfery S^{15} na S^8. Korzystając z mnożenia w algebrach

[4] Napisał o tym Stefan Jackowski w artykule *Samuel Eilenberg – wielki matematyk z Warszawy* (zob. [7, str. 30]).

liczb zespolonych $\mathbb{C}$, kwaternionów $\mathbb{H}$ i oktaw $\mathbb{O}$, można podać wygodny opis wszystkich trzech odwzorowań Hopfa

$$f_{\mathbb{C}}\colon S^3 \to S^2, \quad f_{\mathbb{H}}\colon S^7 \to S^4, \quad f_{\mathbb{O}}\colon S^{15} \to S^8.$$

W tym celu rozważa się złącze $S^n * S^n$ dwóch kopii S^n, które można utożsamić ze sferą S^{2n+1}. Wówczas

$$S^n * S^n = S^{2n+1} = \left(D^{n+1} \times S^n\right) \cup \left(S^n \times D^{n+1}\right)$$

oraz $\left(D^{n+1} \times S^n\right) \cap \left(S^n \times D^{n+1}\right) = S^n \times S^n$. Ogólnie, złącze $X * Y$ dwóch przestrzeni X oraz Y można określić jako sumę

$$X * Y = \Big(C(X) \times Y\Big) \cup \Big(X \times C(Y)\Big)$$

wzdłuż $X \times Y$, przy czym $C(X)$ i $C(Y)$ oznaczają – odpowiednio – stożki nad X i Y. Suma ta jest homeomorficzna z przestrzenią ilorazową

$$\Big(X \times Y \times [0,1]\Big)/(x, y, 0) \sim (x, y', 0),\ (x, y, 1) \sim (x', y, 1).$$

Zawieszenie $S(X)$ przestrzeni X definiujemy jako przestrzeń ilorazową

$$S(X) = \Big(X \times [0,1]\Big)/(x, 0) \sim (x', 0),\ (x, 1) \sim (x', 1).$$

Jak łatwo wykazać, $S(S^n) \cong S^{n+1}$. Określmy teraz odwzorowanie

$$f_{\mathbb{A}}\colon S^{2n+1} = S^n * S^n \to S\big(S^n\big) = S^{n+1}$$

$$f_{\mathbb{A}}\big([x, y, t]\big) = [x \cdot y, t], \quad x, y \in S^n,\ t \in [0,1],$$

dla $n = 1, 3, 7$, przy czym „$\cdot$” jest mnożeniem w algebrze $\mathbb{A} = \mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ lub $\mathbb{O}$. Dla $n = 1$ dostajemy wcześniej określone odwzorowanie Hopfa $f\colon S^3 \to S^2$.

Koncepcja *rozwłóknienia*, tj. odwzorowania o własności podnoszenia homotopii, jest jedną z głównych idei topologii XX wieku. Ciąg dokładny

$$\cdots \to \pi_{k+1}(B) \to \pi_k(F) \to \pi_k(E) \to \pi_k(B) \to \pi_{k-1}(F) \to \cdots$$

rozwłóknienia $E \to B$ o włóknie F często umożliwia obliczenie grup homotopii jednej z trzech przestrzeni E, B, F przy znajomości grup homotopii pozostałych dwóch. Rozwłóknienia stanowią naturalne uogólnienie wiązek włóknistych, których szczególnie ważnym przypadkiem są wiązki wektorowe.

Włókno F rozwłóknienia $p\colon E \to B$ nad przestrzenią spójną B określone jest jako przeciwobraz $p^{-1}(\{b\})$ wybranego punktu $b \in B$. Spójność przestrzeni B pozwala wykazać, że F określone jest z dokładnością do typu homotopii.

W wiązce włóknistej E nad przestrzenią spójną B włókno F określone jest z dokładnością do homeomorfizmu. Jest tak, bo struktura wiązki włókni-

stej, poza rzutowaniem $p\colon E \to B$ przestrzeni E na przestrzeń B, uwzględnia homeomorfizmy włókniste $h_i\colon U_i \times F \to p^{-1}(U_i)$ określone dla zbiorów otwartych U_i pokrywających przestrzeń B, a także grupę strukturalną G działającą na włóknie F w sposób tranzytywny[5]. Zakłada się przy tym, że złożenie

$$h_j^{-1} \circ h_i\colon (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F$$

jest postaci $h_j^{-1}\big(h_i(x, y)\big) = (x, g_{ij}(x) \cdot y)$ dla pewnego odwzorowania

$$g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G,$$

przy czym $g_{ij}(x) \cdot y$ oznacza wynik działania elementu $g_{ij}(x)$ na punkcie $y \in F$.

Ważną klasę wiązek włóknistych stanowią wiązki wektorowe. Dla $n \geqslant 0$ definiujemy *n-wymiarową wiązkę wektorową* jako wiązkę włóknistą o włóknie $\mathbb{R}^n$ i grupie strukturalnej $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ działającą na włóknie za pomocą iloczynu Av^{t} macierzy $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ i macierzy v^{t} o jednej kolumnie złożonej ze współrzędnych wektora $v \in \mathbb{R}^n$. Równie ważnym przypadkiem wiązki włóknistej jest *G-wiązka główna*, której definicję uzyskujemy przyjmując, że $F = G$, a działaniem grupy strukturalnej na włóknie jest działanie grupowe w G.

Dla każdego $n = 1, 3, 7$ odwzorowanie Hopfa $S^{2n+1} \to S^{n+1}$ jest rozwłóknieniem o włóknie S^n, co zapisujemy jako $S^n \to S^{2n+1} \to S^{n+1}$. Rozwłóknienie Hopfa $S^1 \to S^3 \to S^2$ pozwala (przy użyciu jego ciągu dokładnego) wykazać, że $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3)$ dla $k \geqslant 3$, a więc

$$\pi_3(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z},$$

co (w inny niż poprzednio sposób) potwierdza przełomowe odkrycie Hopfa. Natomiast rozwłóknienia $S^3 \to S^7 \to S^4$ i $S^8 \to S^{15} \to S^8$ dają:

$$\pi_k(S^4) \cong \pi_k(S^7) \oplus \pi_{k-1}(S^3) \quad \text{i} \quad \pi_k(S^8) \cong \pi_k(S^{15}) \oplus \pi_{k-1}(S^7),$$

a w szczególości $\pi_5(S^4) \cong \pi_4(S^3)$ i $\pi_9(S^8) \cong \pi_8(S^7)$. Natychmiast powstaje pytanie, czy $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}$ dla każdego $n \geqslant 2$, lecz temat ten nie będzie już kontynuowany w tym artykule.

4. Twierdzenie 2–4–8

Adolf Hurwitz (1859–1919), student Kleina, Kroneckera i Weierstrassa, zajmował się teorią funkcji modularnych, algebrą oraz algebraiczną teorią liczb. W 1898 roku Hurwitz rozstrzygnął problem istnienia rozwiązania *równania*

[5] Grupa strukturalna G jest jakąkolwiek grupą topologiczną.

kwadratów w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, tj. istnienia form dwuliniowych

$$z_1 = z_1(x, y), \ldots, z_n = z_n(x, y)$$

zmiennych $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ o współrzędnych $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, spełniających następujące równanie:

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = z_1^2 + \cdots + z_n^2.$$

Za pomocą rachunku macierzowego Hurwitz udowodnił, że takie formy istnieją tylko dla $n = 1, 2, 4$, lub 8 i dlatego oprócz $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^8$ nie ma innych algebr rzeczywistych o skończonym wymiarze i bez dzielników zera (zob. [6]).

W każdym z tych czterech przypadków $\mathbb{R}^n$ jest algebrą rzeczywistą, w której struktura multiplikatywna określona jest przez mnożenie „$\cdot$" (odpowiednio) liczb rzeczywistych, liczb zespolonych, kwaternionów lub oktaw. Algebra $\mathbb{R}^n$ nie ma dzielników zera i jest unormowana, tj. istnieje taka norma $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, że $\|x \cdot y\| = \|x\|\|y\|$ dla $x, y \in \mathbb{R}^n$, przy czym norma ta wyznaczona jest przez iloczyn skalarny: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Nie jest łatwo od razu dostrzec związek pomiędzy istnieniem rozwiązań równania kwadratów w $\mathbb{R}^n$ a istnieniem (powiedzmy) struktury H-przestrzeni na S^{n-1}. Przestrzeń X uważana jest za *H-przestrzeń*[6], jeśli istnieje odwzorowanie $\mu\colon X \times X \to X$, a także punkt $e \in X$, o tej własności, że odwzorowania $X \to X$ określone wzorami

$$x \mapsto \mu(x, e) \quad \text{oraz} \quad x \mapsto \mu(e, x)$$

są homotopijne (za pomocą homotopii zachowującej punkt e) z odwzorowaniem $\mathrm{id}\colon X \to X$. Mówimy wówczas, że μ jest *mnożeniem homotopijnym* w X, a punkt e jest jego *elementem neutralnym*.

Mnożenie $G \times G \ni (x, y) \mapsto xy \in G$ w grupie topologicznej G jest mnożeniem homotopijnym. Wymagane odwzorowanie $\mu\colon G \times G \to G$ określone jest wzorem $\mu(x, y) = xy$ dla $x, y \in G$, a punkt e jest elementem neutralnym grupy G.

Sfery S^0, S^1 i S^3 są więc H-przestrzeniami, bo z działaniami mnożenia liczb rzeczywistych, liczb zespolonych i kwaternionów są grupami topologicznymi. Podobnie sfera S^7 jest H-przestrzenią (dzięki mnożeniu oktaw), lecz nie ma ani struktury grupy Liego, ani nawet grupy topologicznej (zob. [8]).

Bogatą ofertę tematów do wyboru na kurs topologii dają tezy (1a)–(5b), które podane są w twierdzeniu 2–4–8. Jeśli $n = 1$, to daną tezę łatwo jest sprawdzić lub należy ją pominąć z powodu braku jej sensu. Zakładamy więc, że $n \geqslant 2$.

[6] W nazwie H-przestrzeni użyta jest litera H, by podkreślić istotną rolę, jaką odegrał Hopf w badaniach nad tymi przestrzeniami.

Twierdzenie 2–4–8. Przy założeniu, że $n \geqslant 2$, każda z tez (1a)–(5b) poniżej jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2, 4$ lub 8.

(1a) Istnieje rozwiązanie równania kwadratów w $\mathbb{R}^n$.
(1b) $\mathbb{R}^n$ jest algebrą rzeczywistą unormowaną.
(1c) $\mathbb{R}^n$ jest algebrą rzeczywistą bez dzielników zera.
(2a) S^{n-1} ma $n-1$ liniowo niezależnych pól wektorowych.
(2b) S^{n-1} jest rozmaitością paralelizowalną.
(2c) S^{n-1} jest H-przestrzenią, tj. istnieje mnożenie homotopijne w S^{n-1}.
(3a) Istnieje odwzorowanie nieparzyste $S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$.
(3b) Istnieje odwzorowanie $S^{2n-1} \to S^n$ o niezmienniku Hopfa 1.
(3c) Istnieje odwzorowanie $S^{n-1} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ o współczynniku skręcenia 1.
(4a) Istnieje n-wymiarowa wiązka wektorowa nad S^n, której n-ta klasa Stiefela–Whitneya nie jest zerem w grupie kohomologii $H^n(S^n; \mathbb{F}_2)$.
(4b) Istnieje wiązka włóknista nad S^n, której przestrzeń całkowita oraz włókno są sferami S^{n+k} oraz S^k dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 1$.
(5a) Nawias Whiteheada $[\cdot,\cdot]\colon \pi_{n-1}(S^{n-1}) \times \pi_{n-1}(S^{n-1}) \to \pi_{2n-3}(S^{n-1})$ dla $a = [\mathrm{id}] \in \pi_{n-1}(S^{n-1})$ ma wartość $[a, a] = 0$ w grupie $\pi_{2n-3}(S^{n-1})$.
(5b) Kwadrat Steenroda $\mathrm{Sq}^n\colon H^k(X; \mathbb{F}_2) \to H^{n+k}(X; \mathbb{F}_2)$ jest homomorfizmem niezerowym, gdy $X = S^k \cup_\alpha D^{n+k}$, $\alpha\colon S^{n+k-1} \to S^k$, $k \geqslant 1$.

Prawdziwość każdej tezy dla $n = 2, 4$ lub 8 , w taki czy inny sposób, może być potwierdzona rozwłóknieniem Hopfa $S^{2n-1} \to S^n$, które ma niezmiennik Hopfa 1. Jeśli natomiast $n \neq 2, 4, 8$, to wykazanie fałszywości danej tezy można sprowadzić do udowodnienia, że nie istnieje odwzorowanie $S^{2n-1} \to S^n$ o niezmienniku Hopfa 1. Tak właśnie zrobił Frank Adams (1930–1989) w 1960 roku, wykazując przy tym równoważność tez (1c), (2b), (2c), (3b), (5a), (5b). W dowodach użył ciągów spektralnych i operacji kohomologicznych drugiego rzędu określonych na pierścieniach kohomologii (zob. [1]).

Tą tematyką zajął się także Michael F. Atiyah (1929–2019). Adams i Atiyah w 1966 roku wspólnie wykazali fałszywość tezy (3b) dla $n \neq 2, 4, 8$, podając przy tym (znacznie krótszy od poprzedniego) dowód, w którym zastosowali operacje kohomologiczne pierwszego rzędu w K-teorii topologicznej, nazywane obecnie *operacjami Adamsa* (zob. [2]). Operacje te pozwoliły im z prawdziwości tezy (3b) wyciągnąć wniosek, że $n = 2^k$ dla pewnej liczby $k \geqslant 1$, przy czym

$$3^{n/2} = 2^{n/2} l + 1$$

dla pewnej liczby $l \geqslant 1$. Teraz, przy użyciu argumentów arytmetycznych, łatwo już wykazać, że $n = 2, 4$ lub 8.

Argumenty Adamsa i Atiyaha są zbyt trudne, by można je przedstawić na początkowym kursie topologii. Łatwiej jest wprowadzić pierścienie kohomologii i przytoczyć argumenty Hopfa (zob. [5]), które wykazują, że $n = 2^k$ dla pewnego $k \geqslant 1$, o ile tylko zachodzi teza (3a), tj. istnieje *odwzorowanie nieparzyste*

$$\mu\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1},$$

czyli spełniające warunek $\mu(-x, y) = \mu(x, -y) = -\mu(x, y)$ dla $x, y \in S^{n-1}$. Uzyskane z μ za pomocą wzoru $\nu([x], [y]) = \mu(x, y)$ odwzorowanie $\nu\colon P^{n-1} \times P^{n-1} \to P^{n-1}$ indukuje homomorfizm pierścieni kohomologii o współczynnikach w ciele dwuelementowym $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$:

$$\nu^*\colon H^*(P^{n-1}; \mathbb{F}_2) \to H^*(P^{n-1} \times P^{n-1}; \mathbb{F}_2).$$

Hopf udowodnił, że istnieją takie elementy $a, b \in H^*(P^{n-1} \times P^{n-1}; \mathbb{F}_2)$ oraz $c \in H^*(P^{n-1}; \mathbb{F}_2)$, że $a^n = b^n = 0$ oraz $c^n = 0$, a także $\nu^*(c) = a + b$.

W pierścieniu $H^*(P^{n-1} \times P^{n-1}; \mathbb{F}_2)$ zachodzą zatem równości:

$$0 = \nu^*(c^n) = (a + b)^n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a^i b^{n-i},$$

co pozwala wykazać, że $n = 2^k$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 1$, bo

$$H^*(P^{n-1} \times P^{n-1}; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[a, b]/(a^n = b^n = 0).$$

Argumenty Hopfa stanowią dobrą okazję, by uświadomić studentom, że przy dowodzie jakiegoś faktu czasami warto rozważyć obiekt bardziej złożony. W przeciwieństwie do $H^*(P^{n-1}; \mathbb{F}_2)$, pierścień $H^*(S^{n-1}; \mathbb{F}_2)$ ma zbyt prostą strukturę, by argumenty Hopfa były skuteczne.

Na wykładach z topologii bez trudu można opowiedzieć studentom, jak udowodnić implikacje (1a) $\Rightarrow$ (1b) $\Rightarrow$ (1c). Wykazanie, że (1c) $\Rightarrow$ (2a) też nie wymaga wysiłku, bo jeśli dane jest mnożenie „$\cdot$” bez dzielników zera w algebrze $\mathbb{R}^n$, to po wybraniu bazy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ w $\mathbb{R}^n$, w której e_1 jest jedynką algebry, można określić pola wektorowe $v_i\colon S^{n-1} \to T(S^{n-1})$ dla $i = 2, \ldots, n$ wzorem

$$v_i(x) = x \cdot e_i - \langle x, x \cdot e_i \rangle x$$

dla $x \in S^{n-1}$. Jak łatwo sprawdzić, pola te są liniowo niezależne.

Równie łatwo dowodzi się, że (1c) $\Rightarrow$ (3a), bo mnożenie „$\cdot$” bez dzielników zera w algebrze $\mathbb{R}^n$ pozwala na określenie odwzorowania nieparzystego

$$\mu\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}, \quad \mu(x, y) = \frac{x \cdot y}{\|x \cdot y\|}.$$

Odwzorowanie μ jest poprawnie określone, bo zawsze $x, y \neq 0$, a stąd $x \cdot y \neq 0$, o czym świadczy brak dzielników zera.

Implikacja (2a) $\Rightarrow$ (2b) była już omawiana w paragrafie poświęconym polom wektorowym. Zajmiemy się teraz implikacją (2b) $\Rightarrow$ (2c). Załóżmy, że S^{n-1} jest paralelizowalna, tj. istnieje homeomorfizm $h\colon S^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}\to T(S^{n-1})$, który w sposób liniowy odwzorowuje $\{x\}\times\mathbb{R}^{n-1}$ na $T_x(S^{n-1})$ dla każdego $x\in S^{n-1}$. Półprosta wychodząca z wektora $0\in\mathbb{R}^n$ i przechodząca przez dowolny wektor $(x,v)\in T_x(S^{n-1})$ przecina S^{n-1} w jednym punkcie, powiedzmy $p(x,v)$. Tak otrzymuje się odwzorowanie

$$p\colon T(S^{n-1})=\bigcup_{x\in S^{n-1}} T_x(S^{n-1})\to S^{n-1},\quad (x,v)\mapsto p(x,v),$$

rzutujące przestrzeń całkowitą $T(S^{n-1})$ na przestrzeń bazową S^{n-1}. Złożenie $p\circ h\colon S^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}\to S^{n-1}$ można rozszerzyć do odwzorowania

$$\mu\colon S^{n-1}\times(\mathbb{R}^{n-1}\cup\{\infty\})=S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1},$$

które (jak się okazuje) jest mnożeniem homotopijnym z elementem neutralnym $e=(1,0,\dots,0)\in S^{n-1}$. Wobec tego S^{n-1} jest H-przestrzenią.

Powiemy teraz o niezmienniku Hopfa odwzorowania $f\colon S^{2n-1}\to S^n$. Przy omawianiu rozwłóknienia Hopfa $f\colon S^3\to S^2$ wspomnieliśmy, że przestrzeń $S^2\cup_f D^4$ jest homeomorficzna z przestrzenią rzutową $\mathbb{C}P^2$. Dla dowolnego odwzorowania $f\colon S^{2n-1}\to S^n$ rozważmy przestrzeń

$$X=S^n\cup_f D^{2n},$$

otrzymaną ze sfery S^n przez doklejenie dysku D^{2n} za pomocą f, a następnie w pierścieniu kohomologii $H^*(X)$ wybierzmy dwa generatory

$$a\in H^n(X)\cong\mathbb{Z}\quad\text{oraz}\quad b\in H^{2n}(X)\cong\mathbb{Z}.$$

Generator b można wybrać w sposób kanoniczny, zależny od f. Wówczas, bez względu na wybór generatora a, istnieje tylko jedna taka liczba całkowita $k\geqslant 1$, że $a^2=kb$. Liczba ta nazywa się *niezmiennikiem Hopfa* odwzorowania f.

Przypomnijmy o utożsamieniach $S^{n-1}*S^{n-1}=S^{2n-1}$ oraz $S(S^{n-1})=S^n$, tj. o homeomorfizmach pomiędzy złączem $S^{n-1}*S^{n-1}$ i sferą S^{2n-1}, a także zawieszeniem $S(S^{n-1})$ i sferą S^n. Dzięki nim każde $\mu\colon S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1}$ określa odwzorowanie

$$f_\mu\colon S^{2n-1}=S^{n-1}*S^{n-1}\to S(S^{n-1})=S^n$$

wzorem $f_\mu([x,y,t])=[\mu(x,y),t]$ dla $x,y\in S^{n-1}$ oraz $t\in[0,1]$.

Każde z trzech rozwłóknień Hopfa

$$f_{\mathbb{C}}\colon S^3\to S^2,\quad f_{\mathbb{H}}\colon S^7\to S^4,\quad f_{\mathbb{O}}\colon S^{15}\to S^8$$

jest uzyskane jako odwzorowanie f_μ przy mnożeniu μ – odpowiednio – w zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$, kwaternionów $\mathbb{H}$ lub oktaw $\mathbb{O}$. To pozwala wykazać, że każde z rozwłóknień Hopfa jest odwzorowaniem o niezmienniku Hopfa 1.

Ogólniej mówiąc: dowolne mnożenie homotopijne

$$\mu\colon S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1},$$

którego istnienie zapewnia teza (2c), pozwala (przy użyciu pierścieni kohomologii) udowodnić, że odwzorowanie $f_\mu\colon S^{2n-1}\to S^n$ ma niezmiennik Hopfa 1, co oznacza, że (2c) $\Rightarrow$ (3b).

W tezie (3c) pojawia się *współczynnik skręcenia* $\gamma(f)$ określony dla dowolnego odwzorowania $f\colon S^{n-1}\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Współczynnik ten mierzy skręcenie pewnej wiązki wektorowej nad S^n wyznaczonej przez f. Wiązkę tę opiszemy za chwilę, najpierw jednak podamy definicję liczby $\gamma(f)$.

Dla każdego punktu $x\in S^{n-1}$ rozważa się iloczyn $f(x)b^{\mathrm{t}}$ macierzy $f(x)\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ i macierzy b^{t} o jednej kolumnie złożonej ze współrzędnych wybranego punktu $b\in S^{n-1}$. Bez względu na wybór punktu b stopień odwzorowania

$$f_b\colon S^{n-1}\to S^{n-1},\quad f_b(x)=\frac{f(x)b^{\mathrm{t}}}{\|f(x)b^{\mathrm{t}}\|},$$

zawsze ma wartość parzystą albo nieparzystą. W zależności od tego, na mocy definicji, *współczynnik skręcenia* $\gamma(f)$ ma wartość 0 albo 1.

Wykażemy, że (2a) $\Rightarrow$ (3c). Rozważmy $n-1$ liniowo niezależnych pól wektorowych $v_2,\dots,v_n\colon S^{n-1}\to\mathbb{R}^n$ i dla każdego $x\in S^{n-1}$ załóżmy, że $f(x)$ jest macierzą o n kolumnach $x^{\mathrm{t}}, v_2(x)^{\mathrm{t}},\dots,v_n(x)^{\mathrm{t}}$. To określa odwzorowanie

$$f\colon S^{n-1}\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}).$$

Jak widać, $f(x)e^{\mathrm{t}}=x$ dla $e=(1,0,\dots,0)$, a zatem

$$f_e(x)=\frac{f(x)e^{\mathrm{t}}}{\|f(x)e^{\mathrm{t}}\|}=\frac{x}{\|x\|}=x.$$

Wobec tego $\gamma(f)=\deg(f_e)=1$. Wykazaliśmy więc, że (2a) $\Rightarrow$ (3c).

Na początku nauki topologii nie jest tak łatwo udowodnić, że jeśli $\gamma(f)=1$, to $n=2$, 4 lub 8. Można za to łatwo wykazać, że dla tych trzech wartości n istnieje odwzorowanie

$$f\colon S^{n-1}\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

o współczynniku skręcenia $\gamma(f)=1$. Dla wykazania tego faktu, załóżmy, że zgodnie z tezą (1c) istnieje mnożenie „$\cdot$” w $\mathbb{R}^n$, przy którym algebra $\mathbb{R}^n$ nie ma dzielników zera (co – jak wiemy – ma miejsce, gdy $n=2$, 4 lub 8). Określmy

teraz odwzorowanie f w ten sposób, że dla $x \in S^{n-1}$ macierz $f(x) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ dla każdego $y \in \mathbb{R}^n$ spełnia równanie

$$f(x)y^{\mathrm{t}} = x \cdot y.$$

Wobec tego $\gamma(f) = \deg(f_e) = 1$, przy czym e jest elementem neutralnym mnożenia „$\cdot$" w $\mathbb{R}^n$. To kończy dowód faktu, że (1c) $\Rightarrow$ (3c).

Omówimy teraz pomysł na wykazanie implikacji (3c) $\Rightarrow$ (4a). Najpierw za pomocą odwzorowania $f\colon S^{n-1} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ o współczynniku skręcenia $\gamma(f) = 1$ skleja się ze sobą dwie kopie produktu $D^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\{a\} \times D^n \times \mathbb{R}^n \quad \text{oraz} \quad \{b\} \times D^n \times \mathbb{R}^n$$

przy $a \neq b$, po utożsamieniu (a, x, y) oraz $(b, x, f(x)y^{\mathrm{t}})$ dla $x \in S^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}^n$. W ten sposób określa się wiązkę wektorową E_f nad S^n, po czym wykorzystuje się równość $\gamma(f) = 1$ i wykazuje się, że n-ta klasa Stiefela–Whitneya $w_n(E_f)$ nie jest zerem w grupie kohomologii $H^n(S^n; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$.

Teza (4b) dotyczy wiązek włóknistych nad S^n o przestrzeni całkowitej S^{n+k} i włóknie S^k dla $n \geqslant 2$ oraz $k \geqslant 1$. Dla $n = 2, 4, 8$ oraz $k = 1, 3, 7$ takie wiązki istnieją – ich rzutowania

$$S^3 \to S^2, \quad S^7 \to S^4, \quad S^{15} \to S^8$$

to znane nam rozwłóknienia Hopfa. Dowód, że poza wskazanymi wymiarami nie ma takich wiązek włóknistych, wymaga dużego wysiłku.

Nawiasy Whiteheada i kwadraty Steenroda pomijamy w naszej dyskusji, by nie przytłaczać dużą ilością nowego materiału. Z tego też powodu nie omawiamy wszystkich implikacji pomiędzy tezami (1a)–(5b).

Od stopnia zaawansowania kursu zależy, które z tez (1a)–(5b) uda się uwzględnić na wykładach z topologii. Niektóre można omówić nawet na samym początku, a o innych warto tylko wspomnieć, by poinformować o zaskakujących związkach pomiędzy odległymi (na pierwszy rzut oka) zagadnieniami.

5. Z perspektywy pięćdziesięciu lat

Z topologią zetknąłem się po raz pierwszy około pięćdziesięciu lat temu, gdy jako student sekcji teoretycznej w Instytucie Matematyki UAM uczęszczałem na wykłady z topologii ogólnej. Po tych wykładach nie przypuszczałem, że topologia będzie moją wybranką na całe życie. Tego wyboru dokonałem trzy lata później, gdy Wojciech Pulikowski (po ukończeniu studiów doktoranckich w IM PAN w Warszawie) zaczął uczyć matematyki w Poznaniu. Omawiane tematy z topologii algebraicznej, geometrycznej czy różniczkowej pokazywały,

jak atrakcyjne i ważne w matematyce są rozmaitości. To one spowodowały, że moje zainteresowania matematyczne skupiły się na topologii.

W 1983 roku uczestniczyłem w kongresie ICM Warszawa 1982, który był opóźniony z powodu wprowadzenia 13 grudnia 1981 roku stanu wojennego w Polsce. Podczas tego kongresu William Thurston (1946–2012) otrzymał medal Fieldsa (przyznany rok wcześniej) za wyniki dotyczące geometryzacji rozmaitości trójwymiarowych. Już wówczas mówiono, że potwierdzenie prawdziwości hipotezy geometryzacyjnej Thurstona doprowadzi do udowodnienia hipotezy Poincarégo postawionej w 1904 roku. Hipoteza ta przewidywała, że wśród spójnych trójwymiarowych rozmaitości zamkniętych (tj. zwartych i bez brzegu) tylko sfera S^3 jest jednospójna (tj. ma jednoelementową grupę podstawową).

Hipoteza Poincarégo po prawie stu latach doczekała się rozwiązania. Najpierw jednak pojawiło się jej uogólnienie (obejmujące każdy wymiar $n \geqslant 3$) o następującej treści: wśród n-wymiarowych rozmaitości zamkniętych każda rozmaitość o typie homotopii sfery S^n jest z nią homeomorficzna.

Dowody hipotezy Poincarégo zaowocowały przyznaniem aż trzech medali Fieldsa. Ich laureatami (w odstępach dwudziestoletnich) zostali Stephen Smale (ICM Moskwa 1966, $n \geqslant 5$), Michael Freedman (ICM Berkeley 1986, $n = 4$) i Grigorij Perelman (ICM Madryt 2006, $n = 3$). Perelman nie przyjął jednak medalu Fieldsa[7] i nie przyjął również nagrody Instytutu Matematycznego Claya za udowodnienie hipotezy Poincarégo[8].

Od czasów Gaussa, Riemanna i Poincarégo rozmaitości przykuwały dużą uwagę matematyków, rodziły ważne problemy badawcze i stopniowo stawały się głównym przedmiotem badań w takich działach matematyki, jak na przykład geometria różniczkowa i algebraiczna, topologia różniczkowa i geometryczna czy analiza globalna i zespolona. Z czasem rozmaitości stały się wszechobecne nie tylko w matematyce, lecz również w wielu działach fizyki teoretycznej czy też – ogólniej ujmując – w naukach ścisłych i przyrodniczych.

Z perspektywy minionych pięćdziesięciu lat, spędzonych wśród rozmaitości, jestem przekonany, że ucząc topologii, od samego początku powinno się uwzględniać tematy dotyczące tych geometrycznych obiektów.

[7] W latach 2002–2003 Perelman przedstawił dowód hipotezy Thurstona o istnieniu dokładnie ośmiu struktur geometrycznych na rozmaitościach trójwymiarowych. To pozwoliło Perelmanowi na potwierdzenie hipotezy Poincarégo w wymiarze trzy.

[8] Hipoteza Poincarégo to jak dotąd jedyny rozwiązany problem z listy siedmiu problemów milenijnych, ogłoszonej przez Instytut Matematyczny Claya 24 maja 2000 roku.

Bibliografia

[1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. 72 (1960), 20–104.
[2] J. F. Adams, M. F. Atiyah, *K-theory and the Hopf invariant*, Quart. J. Math. Oxford Ser. 17 (1966), 31–38.
[3] G. J. Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Hodges, Figgis & Company, Dublin 1886.
[4] H. Hopf, *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension*, Fund. Math. 25 (1935), 427–440.
[5] H. Hopf, *Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra*, Comment. Math. Helv. 13 (1940/1941), 219–239.
[6] A. Hurwitz, *Über die Komposition der Quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*, Math. Verke 2 (1898), 309–316.
[7] S. Jackowski, *Samuel Eilenberg – wielki matematyk z Warszawy*, Wiad. Mat. 50 (2014), nr 1, 21–43.
[8] Z. Jian, X. Senlin, *S^7 without any construction of Lie group*, International Centre for Theoretical Physics, Trieste 1988, preprint ICTP Trieste, dostępne pod adresem http://hdl.handle.net/10068/317642 (dostęp: 2020-11-18).
[9] J. B. Listing, *Vorstudien zur Topologie: abgedruckt aus den Göttinger Studien*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1848.
[10] R. Messer, P. Straffin, *Topology NOW!*, AMS/MAA Textbook, t. 42, American Mathematical Society, Providence, RI 2018.
[11] H. Poincaré, *Papers on Topology. Analysis situs and its five supplements*, tłum. H. J. Stillwell, History of Mathematics, t. 37, American Mathematical Society, London Mathematical Society, Providence, RI 2010.

Krzysztof M. Pawałowski
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
kpa@amu.edu.pl



Ilustracja ośmiu modelowych geometrii, o których mowa w hipotezie Thurstona, wykazanej przez Perelmana. Modele pokazywane były na specjalnej matematycznej wystawie w Lizbonie, obecnie można je obejrzeć w Instytucie Matematyki na Uniwersytecie w Lizbonie

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 369–375
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krzysztof Ciesielski (Kraków)

O regule de l'Hospitala z dydaktycznego punktu widzenia

Celem poniższego tekstu jest zwrócenie uwagi na pewien pojawiający się tu i ówdzie zapis oraz apel o jego zaniechanie. Przy okazji dzielę się też paroma innymi refleksjami dydaktycznymi.

Wyobraźmy sobie, że na pisemnym sprawdzianie z analizy matematycznej zostało postawione studentom zadanie polegające na wykazaniu, że równanie $\cos x = 5x^3$ ma rozwiązanie. Załóżmy, że jeden ze studentów zredagował odpowiedź w sposób następujący: „D" (i na tym zakończył). Myślę, że nikt z czytelników tego tekstu nie uznałby zadania za rozwiązane.

Tymczasem, korzystając z reguły de l'Hospitala, studenci (czy nawet uczniowie, bo niektórzy stykają się z tym twierdzeniem już w szkole), nieraz zaznaczają jej użycie w następujący sposób:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \cdots$$

lub

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \cdots$$

Nie słyszałem o żadnym – oprócz Polski – kraju, w którym podobna notacja byłaby używana. Uważam taki zapis za niewłaściwy i błędny merytorycznie. Przyczyn widzę kilka – wszystkie uznaję za ważne.

1. Powyżej przedstawiony zapis można zrozumieć w ten sposób, że równość zachodzi *zawsze*. Tymczasem reguła de l'Hospitala ma postać implikacji (podaję jeden ze znanych wariantów).

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Twierdzenie. *Jeżeli*

1° $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *są różniczkowalne w przedziale* (a,b),
2° $\lim_{x\to b^-} f(x) = 0$ *oraz* $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$,
3° $g'(x) \neq 0$ *dla* $x \in (a,b)$,
4° $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *istnieje i wynosi* C,
to $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = C$.

Tezą twierdzenia nie jest, że obie te granice jednocześnie istnieją lub obie jednocześnie nie istnieją. Z założeń nie wynika, że obie te granice są zawsze równe. Treścią twierdzenia jest, że *jeżeli* spełnione są odpowiednie założenia i granica ilorazu pochodnych istnieje, *to* granica badanego ilorazu też istnieje i jest równa granicy ilorazu pochodnych.

Dla lepszej ilustracji omawianego zjawiska rozważmy przykład:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x},$$

po zróżniczkowaniu licznika i mianownika otrzymamy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1}.$$

Druga granica nie istnieje, a co z pierwszą?

2. Jeśli stosujemy jakiś skrót, to powinien on być naturalny i zrozumiały. Zapis „H" sugerować może różne rzeczy, ale na pewno nie regułę de l'Hospitala. Nasuwa się przyjęte w Polsce oznaczenie miejsca, w którym znajduje się hydrant. A może chodzi o symbol wodoru? Ewentualnie można rozważać znak na samochodzie z węgierską rejestracją. Wchodziłby też w grę zapis nutowy „si" albo zaznaczenie stopnia twardości ołówka. Na polu nauk ścisłych moglibyśmy myśleć o natężeniu pola magnetycznego. Skojarzeń z tą literą jest naprawdę wiele i w żadnym z nich nie chodzi o Guillaume'a François Antoine'a de l'Hospitala. Gdybyśmy zresztą nawet brali pod uwagę nazwiska matematyków, to też pojawiają się tu dwie istotne wady. Po pierwsze, nieeleganckie jest używanie tylko pierwszej litery nazwiska w sytuacji wykorzystania jakiegoś twierdzenia – czy ktoś używa wyłącznie litery „P", gdy korzysta z twierdzenia Pitagorasa, litery „E" przy wykorzystaniu wzoru Eulera albo jedynie litery „J", gdy stosuje twierdzenie Jordana? Po drugie, nazwisko de l'Hospitala (czy de l'Hôpitala, de L'Hôpitala, jak też się pisze) nie zaczyna się od litery „H". Są za to inni nader słynni matematycy „na literę H", z których nazwiskami związane są słynne pojęcia czy twierdzenia (od razu przychodzi na myśl David Hilbert) – jednak jakoś nie skracamy zapisu do jednej litery. Podkreślam – chodzi mi o użycie litery (paru liter) z nazwiska na oznaczenie skorzystania z twierdzenia, a nie o obiekt matematyczny, w którym

do słowa dołączona jest odpowiednią literą na cześć wybitnego matematyka, jak H-przestrzeń (por. artykuł [4]) czy „B-space". Zresztą ten drugi termin, zaproponowany oficjalnie jakieś dziewięćdziesiąt lat temu (zob. artykuł [2]), nie przyjął się i na całym świecie mówi się i pisze o przestrzeniach Banacha.

3. Jeśli korzystamy z jakiegoś twierdzenia, to trzeba sprawdzić jego założenia (lub choćby zaznaczyć, że są spełnione) – w tym przypadku nie jest to problem banalny... Wśród założeń, które muszą być spełnione, by można było korzystać z reguły de l'Hospitala, jest (w przypadku symbolu nieoznaczonego typu $[\frac{0}{0}]$) założenie o niezerowaniu się mianownika w odpowiednim zbiorze. Nie zawsze jest to oczywiste – czasem wymaga nawet dokładniejszej analizy.

4. Powołanie się na wykorzystywany rezultat nie powinno być kwitowane użyciem jednej litery. Gdy korzysta się z faktu banalnego, można wzmiankę o tym pominąć. Przy tej metodzie wyznaczania granicy korzysta się jednak z zaawansowanego twierdzenia. Myślę, ze niejeden matematyk miałby kłopoty, gdyby się go poprosiło o udowodnienie reguły de l'Hospitala na poczekaniu i bez wykorzystania literatury. Gdy student napisze „D" jako uzasadnienie istnienia rozwiązania równania $\cos x = 5x^3$, odpowiedź nie zostanie uznana – a w tym przypadku odpowiedź jest konsekwencją łatwej do wykazania własności Darboux dla funkcji ciągłych jednej zmiennej rzeczywistej. Dowód reguły de l'Hospitala jest znacznie trudniejszy.

Analogia jest dodatkowo o tyle trafna, że twierdzenie o własności Darboux dla funkcji ciągłych wykazał Bernard Bolzano (zob. artykuł [5]), a regułę de l'Hospitala – Johann Bernoulli (historia ta jest omówiona w pracy [3]).

Warto też dodać, że nigdy się nie zetknąłem z tym, by przy obliczaniu granic ciągów przy wykorzystaniu twierdzenia Stolza ktoś zapisywał to następująco:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n}{n} \overset{\text{S}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}-5^n}{(n+1)-n} = \cdots$$

choć twierdzenie Stolza[1] można traktować jak dyskretny analogon reguły de l'Hospitala (która jednak czasami, na przykład w zbiorze zadań [1], nazywana jest – jak najbardziej słusznie – regułą Bernoulliego–de l'Hospitala). Zresztą w ogóle, oprócz omawianego tu przypadku litery „H", nie spotkałem się z używaniem jednoliterowego skrótu przy uzasadnieniu równości, nierówności czy przejścia w matematycznym rozumowaniu.

[1] Twierdzenie Stolza nazywane jest też twierdzeniem Stolza–Cesáro. Otto Stolz i Ernesto Cesáro udowodnili je niezależnie od siebie, przy czym Stolz wcześniej – w 1885 roku, a Cesáro w 1888 roku.

Obliczanie granic przy wykorzystaniu reguły de l'Hospitala można redagować w sposób pokazany na poniższym przykładzie.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \cdots$$

Obliczam pomocniczo granicę

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = -1 \cdot 0 = 0$$

i na mocy reguły de l'Hospitala

$$\cdots = 0$$

Można darować sobie pisemny komentarz „Obliczam pomocniczo granicę", a po prostu obliczyć tę granicę „na boku".

Można też w miejscu, w którym chcemy z reguły de l'Hospitala skorzystać, czyli po zapisaniu „$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} =$", postąpić tak, jak często robi się przy całkowaniu przez części – narysować wężykiem pionową pofałdowaną linię, dokonać za nią odpowiedniego obliczenia granicy pomocniczej z zaznaczeniem, z czego korzystamy, narysować drugą linię wężykiem i powrócić do zasadniczego zadania.

Co robić w przypadku rachunków na tablicy, na przykład na zajęciach na uczelni? Po prostu w pewnym momencie przerwać liczenie, w innym miejscu tablicy przeprowadzić obliczenia dotyczące granicy ilorazu pochodnych i po otrzymaniu wyniku powrócić do liczenia granicy wyjściowej. Można też stosować zapis „z wężykami".

Natomiast „automatyczne" wypisywanie równości z literą „H" nie powinno być stosowane. Nie można pominąć porządnego powołania się słowami na regułę noszącą imię francuskiego markiza, choć naprawdę wymyślił ją ktoś inny.

Skoro mowa o regule de l'Hospitala i sprawdzianach, pozwolę sobie jeszcze na parę dygresji dydaktycznych.

Po pierwsze, uważam, że należy bardzo stanowczo uświadamiać studentom, że przy korzystaniu z reguły de l'Hospitala powinni być maksymalnie ostrożni. Wielu studentów, gdy dostanie to „narzędzie" do ręki, z entuzjazmem stosuje je niemal wszędzie – czego absolutnie nie należy robić. I nie chodzi tylko o to, żeby z rozpędu nie liczyć tą metodą granicy w przypadku symbolu oznaczonego, ani o to, że jeśli coś można obliczyć bardzo elementarnie, to nie powinno się sięgać do bardzo zaawansowanych narzędzi (tak, jak nie wbijamy

gwoździ do ściany za pomocą automatów laserowych, a chorego na lekki katar nie wysyłamy do szpitala[2]). Przy nieuważnym stosowaniu reguły de l'Hospitala można zetknąć się z rozmaitymi pułapkami. O granicy $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ była już mowa. Powyżej, przy obliczaniu granicy $\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}$, wykorzystany był fakt, że $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. Do jego wykazania aż się prosi o wykorzystanie reguły de l'Hospitala, ale zanim to zrobimy, należy się zastanowić, skąd wiemy, ile wynosi pochodna funkcji sinus w zerze? Gdy ja uczęszczałem do liceum, tę pochodną wyliczało się właśnie z wykorzystaniem faktu, że $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. Mój ulubiony przykład to $\lim_{x\to2}\frac{\ln(2-x)}{\ln(x-2)}$. Aż się prosi o zróżniczkowanie – szybko otrzymamy wynik 1, a nie jest to poprawne rozwiązanie.

Po drugie, uważam za niewłaściwe wprowadzanie tej reguły uczniom na lekcjach matematyki w szkole. Dawno temu w jednym z krakowskich liceów miało miejsce następujące zdarzenie. Pewien (bardzo dobry) nauczyciel nie zaliczył uczniowi na pisemnym sprawdzianie rozwiązania zadania, gdyż tenże uczeń obliczył granicę za pomocą reguły de l'Hospitala (której na lekcjach w szkole nauczyciel nie podawał, nie było jej też w podręczniku). Gdy uczeń zapytał, dlaczego rozwiązanie nie zostało uznane, nauczyciel poprosił go o dokładne sformułowanie tej reguły i o jej dowód. Uczeń nawet poprawnego sformułowania nie potrafił podać, o dowodzie nie mówiąc. Nauczyciel skomentował – „jeśli z czegoś chcesz skorzystać, musisz wiedzieć, dlaczego to jest prawdą". Obecnie wiele faktów podawanych jest w szkole bez dowodu, więc ten argument traci trochę na sile. Wciąż jednak aktualne jest to, że wykorzystanie bardziej zaawansowanego rezultatu powinno iść w parze z jego pełnym zrozumieniem i umiejętnością dokładnego sformułowania. Reguła de l'Hospitala jest tu, moim zdaniem, idealnym przykładem. Można o niej powiedzieć na przykład na kółku matematycznym – uczniom, którzy są wystarczająco dojrzali matematycznie, by zrozumieć rozmaite niuanse i niebezpieczeństwa związane ze stosowaniem tego twierdzenia.

Ostatnia uwaga jest związana wyłącznie ze sprawdzianami i dotyczy szerszego aspektu. Otóż zdarza się, że nauczyciele w szkołach i prowadzący zajęcia ze studentami nie oddają poprawionych pisemnych sprawdzianów uczniom (studentom). Więcej – obecnie w niektórych szkołach i w jednostkach wyższych uczelni obowiązuje zakaz oddawania takich prac. Zgodnie z obowiązującymi tam zarządzeniami, nauczyciele i prowadzący zajęcia mają je przechowywać przez parę lat, a potem niszczyć. Nie udało mi się dotrzeć do „najwyższych" źródeł takich zakazów. Czasem słyszałem, że jest to konsekwencja pewnych „od-

[2] Po francusku *szpital* to *hôpital*.

górnych" zarządzeń (z bliżej nie sprecyzowanej „góry"), a czasem, że „przecież trzeba klasówki zachowywać".

Uważam, że nieoddawanie poprawionych prac uczniom (studentom) jest poważnym błędem dydaktycznym. Podkreślam – chodzi mi o to, by *oddawać* prace na stałe, dawanie ich tylko na chwilę „do wglądu" to za mało. Celem naszym (nauczycieli szkolnych i akademickich) jest, by młodzi ludzie się *nauczyli*. A najlepiej człowiek uczy się na własnych błędach. Ja zbyt wielu błędów na sprawdzianach z matematyki w ciągu czterech lat uczęszczania do liceum nie popełniłem, ale te, które zrobiłem, wryły mi się głęboko w pamięć i później ich nie powtórzyłem – właśnie dlatego, że do tych poprawionych sprawdzianów z zaznaczonymi błędami oraz z uwagami nauczyciela niejednokrotnie zaglądałem. Dotyczyło to nie tylko matematyki i nie tylko szkoły. Natomiast wtedy, gdy poprawionych prac nie dostawałem na własność, błędy szybko ulegały zapomnieniu...

Po co nauczyciel (tak szkolny, jak akademicki) ma trzymać u siebie poprawione prace? Wytapetuje sobie nimi ściany? Żeby mieć dowód, że uczeń czegoś nie umiał? Gdyby to miało być powodem, należałoby nagrywać wszystkie odpowiedzi ustne. Poza tym, jeśli ktoś rzeczywiście chce mieć podstawę do wykazania, że uczeń (student) popełnił błędy na sprawdzianie, to w obecnej dobie powszechnego użycia kserografów, skanerów czy fotografii cyfrowej nie ma z tym żadnego problemu. Nie widzę zresztą żadnego powodu, by a priori zakładać, że taki „dowód" będzie potrzebny. A potem jeszcze po paru latach nauczyciel będzie musiał poświęcać sporo czasu na niszczenie sprawdzianów niszczarką dokumentów. Nie można ich przecież wyrzucić do kosza albo oddać na makulaturę.

Zaznaczam, że chodzi mi o sprawdziany, które odbywają się w trakcie roku szkolnego, akademickiego czy semestru, a nie o końcowe prace egzaminacyjne. W tym przypadku sytuacja jest jednak inna, choć oddawanie studentom na własność prac pisanych podczas egzaminu też ma swoje zalety. Dodam również, że z premedytacją używam słowa „sprawdzian" (może też być „kartkówka", a w szkole „klasówka"), a nie „kolokwium". Kolokwium oznacza *ustne* sprawdzenie wiadomości – słowo to pochodzi od łacińskiego *colloquium*, czyli „rozmowa". Zdaję sobie sprawę, że apel o nieużywanie terminu „kolokwium" na pisemny sprawdzian na wyższej uczelni jest głosem wołającego na pustyni, wiem jednak, że wiele jest osób, które mają w tej sprawie zdanie zbieżne z moim.

Wracam do sprawy oddawania prac. Zetknąłem się ze stwierdzeniem, że prace należy pokazywać „organom kontrolującym". Czy istotnie prace? Przedstawianie owym czynnikom tematów egzaminów pisemnych jest jak najbardziej

uzasadnione. Można także informować o zadaniach ze sprawdzianów. Ale tematy to co innego niż poprawione prace.

Obawiam się, że obserwujemy tu konsekwencje czyjejś nadgorliwości – nie chce mi się wierzyć, że tak sprecyzowane zarządzenie o obowiązku zachowywania poprawionych sprawdzianów na jakimś „wysokim szczeblu" się kiedyś pojawiło i obowiązuje. Jeśli jednak takie zarządzenie naprawdę istnieje, to należy dołożyć starań, by zniknęło. A jeśli go nie ma, to warto to uświadomić odpowiednim decydentom. Osoby nauczające powinny zaś wiedzieć, że oddawanie poprawionych sprawdzianów nie jest zakazane.

Otrzymanie przez ucznia oraz studenta na własność poprawionego sprawdzianu (zazwyczaj z komentarzami, omawiającymi błędy w rozumowaniu czy zaznaczającymi pomyłki w obliczeniach) pomaga w nauce. A to, by uczniowie i studenci dobrze się nauczyli, jest głównym i najważniejszym celem pracy dydaktycznej.

Bibliografia

[1] B. P. Demidowicz, *Sbornik zadacz i uprażnienij po matematiczeskomu analizu*, Nauka, Moskwa 1977.
[2] L. Maligranda, *„B" jak przestrzeń Banacha*, Wiad. Mat. 56 (2020), nr 1, 15–27.
[3] L. Maligranda, *Guillaume François Antoine de l'Hospital (1661–1704) – w trzechsetlecie śmierci*, [w:] *Sławne dzieła matematyczne i rocznice* (W. Więsław, red.), Wyższa Szkoła Matematyki i Informatyki Użytkowej w Białymstoku, Białystok 2005, 81–123.
[4] K. Pawałowski, *O nauczaniu topologii*, Wiad. Mat. 56 (2020), nr 2, 349–367.
[5] H. Steinhaus, *Pogadanka (trochę historyczna)*, Wiad. Mat. 7 (1963), nr 1, 21–26.

Krzysztof Ciesielski
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
krzysztof.ciesielski@im.uj.edu.pl



Łazienka w mieszkaniu jednego z krakowskich matematyków

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 377–389
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Adam Bobrowski, Magdalena Smoleń-Wawrzusiszyn (Lublin)

Czy matematycy są „amenable”?

1. Genesis

Historia tego artykułu zaczęła się w momencie, gdy jeden z jego autorów (A. B.), przy okazji recenzowania pewnego doktoratu, dał się wciągnąć w dyskusję o tym, jak powinno się na język polski tłumaczyć termin „amenable group”. Początkowo sprawa wydawała się jasna – recenzent miał świadomość, że istnieją funkcjonujące w środowisku od dłuższego czasu polskojęzyczne odpowiedniki anglojęzycznego wyrażenia „amenable group”: „grupa ze średnią (niezmienniczą)” i „grupa dopuszczająca średnią (niezmienniczą)”, oraz głębokie przekonanie, iż „grupa średniowalna” jest terminem prawdopodobnie wygodniejszym (bo krótkim, jednowyrazowym), ale niepoprawnym formalnie i do tego nieoddającym znaczenia, które nieść powinien. Ku swemu zaskoczeniu napotkał pewien opór promotora.

Wychodząc z założenia, że być może jednak nie ma racji co do statusu normatywnego dyskutowanego przymiotnika, zwrócił się do znajomych polonistów z prośbą o opinię na temat poprawności tego neologizmu. Prośba ta dotarła przez nich do drugiego autora, językoznawcy (M. S.-W.), i stosowna opinia powstała. Poniżej odtworzymy i rozwiniemy jej treść, na razie więc poprzestańmy na stwierdzeniu, iż potwierdziła ona podejrzenia A. B. – przymiotnik „średniowalny” został utworzony niezgodnie z regułami słowotwórstwa polskiego.

Znów więc sprawa wydawała się jasna: skoro wypowiedział się specjalista... Ale stało się zupełnie inaczej: opór promotora zgęstniał, stał się wręcz zaciekły. Poza argumentami *ad personam*, które pomijamy milczeniem, pojawiły się te,

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

które podważone zostały już wcześniej, i kilka nieco nowszych, które jednak w istocie nic do sprawy nie wnosiły.

Zaistniała sytuacja sprowokowała potrzebę szerszej weryfikacji dyskursu w zakresie użycia omawianego terminu. Okazało się, ku zdumieniu A. B., że to, co dla niego było od lat oczywiste, w części rosnącego środowiska parającego się analizą na „amenable groups" (do którego niestety nie należy) wcale takie nie jest. Również matematycy o znacznie większym dorobku i autorytecie niż piszący te słowa od lat używają niepoprawnego terminu, który ich wcale nie razi. Co ciekawe, jego użycie uzasadniają na kilka sposobów, z których *każdy* jest w istocie powierzchowny i nie wytrzymuje bliższej krytyki. Wygląda na to, że w pewnym momencie zabrakło wspólnej, dogłębnej refleksji nad tym, jak poprawnie spolszczyć termin „amenable gropups".

Kwerenda internetowa wykazała, że w środowisku matematycznym problem z adaptacją „amenable groups" w polszczyźnie zauważono już dawno, a na pewno niemal dekadę temu. Poświadcza to dyskusja, która w 2011 roku pojawiła się na forum strony matematyka.pl[1], a której przedmiotem była właśnie kwestia tłumaczenia interesującej nas frazy.

Dyskusja ta potwierdziła współistnienie trzech stanowisk wśród specjalistów odnośnie do traktowania angielskiego terminu: 1) pozostawienie go w oryginalnej, angielskiej wersji językowej; 2) tłumaczenie w postaci wyrażenia „grupa średniowalna"; 3) tłumaczenie o charakterze omownym (z perspektywy lingwistycznej) „grupa dopuszczająca średnią niezmienniczą" lub jego warianty, z których najpopularniejszym wydaje się „grupa ze średnią (niezmienniczą)". W zamieszczonych na ww. stronie wypowiedziach pojawiły się też elementy oceny i argumentacji normatywnej wobec wskazywanych rozwiązań. Przyjęcie terminu „grupa średniowalna" uzasadniano jedynie kryterium uzualnym, to znaczy potwierdzeniem występowania takiego tłumaczenia w wypowiedziach/zapisach innych matematyków. Pozostawienie anglojęzycznej wersji pojęcia argumentowano również odwołaniem do pewnego uzusu w dyskursach specjalistycznych, w których zdarza się, że istnieje konieczność akceptacji formy obcojęzycznej z uwagi na jej nieprzetłumaczalność na język polski (zazwyczaj są to sytuacje wymagające wieloelementowego odpowiednika – niewygodnego w komunikacji – dla dużo krótszej formy bazowej). W części wypowiedzi derywat „średniowalny" został oceniony negatywnie ze względów estetycznych (brzmieniowych).

Widzimy więc, że kwestia polskiego odpowiednika dla terminu „amenable group" jest bez wątpienia kontrowersyjna. W środowisku matematyków używa

[1] https://matematyka.pl/viewtopic.php?t=260623 (dostęp: 2020-07-25).

się zarówno frazy „grupa średniowalna”, jak i nazwy „grupa dopuszczająca średnią niezmienniczą” oraz jej wariantów. Widoczny jest także różny stosunek specjalistów do istniejących propozycji nazewniczych. Niektórzy pozostają wobec nich obojętni, a inni wyrażają wątpliwości natury estetycznej wobec wariantu przymiotnikowego lub stawiają zarzuty co do ekonomiczności wariantu wieloelementowego – każdy z tych argumentów jest ważny w ocenie normatywnej nowych terminów z perspektywy lingwistycznej.

Niniejszy artykuł jest głosem w przedstawionej dyskusji – łącząc aktualny stan wiedzy matematycznej i językoznawczej, chcemy wyjaśnić, dlaczego termin „grupa średniowalna” jest niepoprawny, i uzasadnić, dlaczego warto go zastąpić innym: czy będzie to „grupa ze średnią”, czy „grupa dopuszczająca średnią”, czy jeszcze inna uznana przez specjalistów fraza. Analizujemy też wszystkie znane nam argumenty broniące użycia ww. terminu i pokazujemy, że są one albo oparte na błędnych przesłankach, albo na niepełnym zrozumieniu tego, jak powstają wyrazy w naszym ojczystym języku.

2. Exodus

Jedynym wyjściem z trwającego obecnie terminologicznego impasu jest odwołanie się do obowiązujących w języku polskim reguł słowotwórstwa (reguł tworzenia/powstawania nowych wyrazów) oraz kryteriów poprawności stosowanych do oceny innowacji terminologicznych.

2.1. *Wykładnia systemowa.* Literatura naukowa z zakresu słowotwórstwa podaje, że formant „-alny” jest wykładnikiem słowotwórczym dwóch kategorii przymiotników: 1) odrzeczownikowych, na przykład „medialny, multiregionalny” oraz 2) odczasownikowych, na przykład „definiowalny, sterowalny”, przy czym „połączenia z tematami werbalnymi wydają się częstsze i naturalniejsze” (zob. [2, str. 102]). Przymiotniki tworzone od czasowników to w większości tzw. czasowniki potencjalne, czyli takie, które wyrażają możliwość/niemożliwość wykonania, działania, podlegania itp., na przykład[2]:

- definiowalny – taki, który można zdefiniować,
- porównywalny – taki, który można porównywać,
- niepoliczalny – taki, którego nie można policzyć,
- nierozpuszczalny – taki, którego nie można rozpuścić.

Według ustaleń Lenki Ptak „współczesny język polski ma pewną tendencję do tworzenia przymiotników potencjalnych z formantem „-alny” od czasowni-

[2] Eksplikację znaczeń podajemy za słownikiem [12].

ków obcych, zwłaszcza w przekładach tekstów z dziedzin nauki, terminologii specjalistycznej" (zob. [7, str. 96]).

Jeśli chodzi o przymiotniki z formantem „-alny" tworzone od rzeczowników, to mają one znaczenie „dotyczący czegoś, związany z czymś", są dużo rzadsze od formacji odczasownikowych i w większości należą do słownictwa specjalistycznego, na przykład:

- medialny – związany z mediami,
- mitochondrialny – związany z funkcjonowaniem lub budową mitochondrium,
- hegemonialny – związany z dominacją uzyskaną dzięki przewadze lub władzy nad innymi.

Warto jeszcze dodać, iż zdaniem niektórych badaczy „formant «-alny» doskonale nadaje się do tłumaczenia analogicznych formacji obcych z formantami pochodzącymi od łac. «-abilis» (ang. «-able»)" (zob. [3, str. 53]).

Konkludując, na podstawie dotychczas przeprowadzonych badań mówi się o stale wzrastającej po 1989 roku produktywności przyrostka „-alny" w języku polskim, zwłaszcza w obszarze komunikacji specjalistycznej, gdzie istotny wpływ na wybory językowe mają dwie tendencje charakterystyczne dla współczesnych innowacji językowych: 1) tendencja do precyzji informacji (w tym wypadku precyzji terminologicznej), 2) tendencja do skrótu (ekonomizacji wypowiedzi).

Dyskutowana w artykule kwestia wymaga również weryfikacji uwzględniającej kryteria poprawności terminów specjalistycznych. Podstawowe kryteria stosowane w procesie kodyfikacji terminów specjalistycznych są następujące: 1) zasada funkcjonalności, 2) zasada logiczności, 3) zasada systemowości, 4) zasada reprodukcyjności, 5) zasada ekonomiczności, 6) zasada poprawności[3].

2.2. *Zastosowanie.* Jak przywołana powyżej wykładnia teoretyczna stosuje się do interesującego nas przypadku? Przypomnijmy definicję „amenable group" (a raczej jedną z kilku definicji bardzo do siebie podobnych): jest to grupa lokalnie zwarta, która dopuszcza istnienie pewnej średniej prawostronnie (równoważnie, lewostronnie) niezmienniczej na $L^\infty(G)$ (w sensie miary Haara). Z definicji wynika więc, że formalnie i merytorycznie punktem odniesienia do polskiego terminu jest rzeczownik „średnia". W związku z tym prawidłową formą przymiotnika o znaczeniu potencjalnym utworzonego od takiej podstawy

[3] Szczegółowe omówienie tych kryteriów znajduje się w haśle problemowym „Terminologia" znajdującym się w słowniku [5, str. 1681–1686].

byłby leksem „średnialny", który znaczyłby „związany ze średnią, dotyczący średniej".

Trudno go jednak zaakceptować, bo jego struktura językowa nie podpowiada jednoznacznie – ani nawet w przybliżeniu – faktycznego znaczenia. Co więcej, w interesującym nas konkretnym kontekście pojęcie grupy, na której można zbudować odpowiedni operator czy funkcjonał uśredniania, nie wydaje się być analogiczne (w sensie związków językowych) ani do macierzy mitochondrialnej, ani dominacji hegemonialnej, ani do innych znanych przykładów określeń zawierających przymiotniki odrzeczownikowe. Nazywanie takiego obiektu „grupą średnialną" nie prowadziłoby zatem do właściwych intuicji u słuchacza, nie oddawałoby sensu omawianego pojęcia albo oddawało go słabo.

O ile w przypadku „grupy średnialnej" można mieć wątpliwości, czy dobrze oddaje zamierzony sens, o tyle neologizm „średniowalny" jest po prostu formalnie niepoprawny. Aby opisana wyżej systemowa reguła tworzenia przymiotników potencjalnych miała zastosowanie, w jego przypadku musiałby istnieć – akceptowany w terminologii specjalistów – czasownik „średniować", który byłby dla niego podstawą czasownikową. Jeżeli zaś nie istnieje w języku matematycznym czasownik „średniować", to nie ma podstawy systemowej dla przymiotnika „średniowalny". Dodajmy jeszcze, że gdyby taki czasownik istniał, to „grupa średniowalna" byłaby grupą, którą można „średniować", co wcale nie znaczyłoby „wyposażać w średnią", lecz „uśredniać" (kwestię nieistnienia tego czasownika omawiamy szerzej w paragrafie 3.2).

Jeśli chodzi o ocenę w zakresie kryteriów poprawności terminów, należy stwierdzić, że oba wskazane przymiotniki – „średnialny" oraz „średniowalny" – odpowiadają zasadzie ekonomiczności: są krótkie i wygodne w użyciu. Jak pokazuje uzus, formacja „średniowalny" spełnia także wymóg reproduktywności, co potwierdza pojawiający się w tekstach specjalistycznych rzeczownik „średniowalność". Niestety, brak poprawności systemowej nakazuje negatywnie ocenić ten przymiotnik i utworzony od niego rzeczownik. Zwracaliśmy też wcześniej uwagę na jego krytykę ze względów brzmieniowych – również naszym zdaniem oba przymiotniki: zarówno „średnialny", jak i „średniowalny" należy negatywnie ocenić ze względu na kryterium estetyczne. Dodajmy jednak, że wskazany jest tu pewien margines tolerancji, ponieważ po pierwsze, jest to jednak kryterium subiektywne, i po drugie – mamy do czynienia z terminologią specjalistyczną.

2.3. *Podsumowanie.* Wobec powyższego należy się zastanowić, czy jest jakaś inna opcja na sformułowanie dobrego – i formalnie, i znaczeniowo – polskojęzycznego odpowiednika dla „amenable group". Fraza „grupa dopuszczająca

średnią (niezmienniczą)" ma bez wątpienia ten istotny mankament, że jest zbyt długa, a przez to nieporęczna w komunikacji. Powstała wskutek dążenia do precyzji znaczeniowej, jako parafraza tłumaczeniowa (omówienie tłumaczeniowe), ponieważ „amenable" nie ma w języku polskim swojego jednoelementowego ekwiwalentu. Naszym zdaniem akceptowalnym (*nomen omen*) odpowiednikiem jest wspomniana we wstępie artykułu – i stosowana dość często – „grupa ze średnią". Jest to nazwa zbudowana na konstrukcji „coś z czymś", nie tylko wszechobecnej w ogólnej polszczyźnie (zob. na przykład „kobieta z przeszłością", „sukienka z falbankami", „chleb z masłem", „pierścionek z czerwonym oczkiem", „dom z garażem", „kawa z mlekiem"), ale występującej także w terminologii matematycznej, na przykład „algebra z inwolucją" czy „przestrzeń z miarą". Fraza „grupa ze średnią" spełnia kryteria systemowości i logiczności, jest wygodna w komunikacji i nie wzbudza wątpliwości natury estetycznej. Ma również duży potencjał w zakresie eksplikacji znaczeniowej, dzięki czemu przy jej stosowaniu raczej łatwo jest prowadzić do pożądanych skojarzeń.

3. Leviticus

Choć paragraf poprzedni nie zostawia wiele do interpretacji, z doświadczenia wiemy, że zawsze pojawia się jakieś „ale". W paragrafie niniejszym służymy wyjaśnieniem wszystkich wątpliwości, które nam przedstawiano.

3.1. *Argument pierwszy.* Jego zwolennicy utrzymują, że „grupa ze średnią" to termin nie do końca poprawny. Jego pełna wersja musiałaby brzmieć „grupa, dla której istnieje niezmienniczy względem przesunięć, dodatni operator (lub funkcjonał) uśredniania zdefiniowany w przestrzeni (ciągłych) rzeczywistych funkcji ograniczonych, określonych na niej" (lub jakoś podobnie). Mahlon M. Day, autor angielskiego odpowiednika, zdawał sobie z tego sprawę i utworzył językowo niepoprawny termin „amenable", który jest w istocie grą słów (poprzez skojarzenie z nieistniejącym słowem „a-mean-able" ≈ „zdolna do średniej").

Argument ten ma w istocie dwie części.

Po pierwsze, słusznie podnosi się fakt, że „grupa ze średnią" to skrót myślowy. W żaden sposób nie uzasadnia jednak użycia terminu „grupa średniowalna", ani nawet nie dowodzi, że jest on lepszy niż „grupa ze średnią" czy „grupa dopuszczająca średnią". Jest to więc argument pozorny.

Swoją drogą wytykanie „grupie ze średnią" tego, że jest terminem niezbyt ścisłym, wygląda na kapryszenie. Kiedy mówimy, że funkcja jest całkowalna, to jesteśmy tacy ściśli? Najczęściej, chyba że zmuszają nas do tego okoliczności, nie precyzujemy, czy chodzi nam o całkowalność w sensie Riemanna, Bochnera,

Pettisa czy Itô, „zapominamy" też podać przedział całkowania, a jednak słuchacze dopowiadają sobie resztę z kontekstu. Czy naprawdę specjalista, słysząc „grupa ze średnią", nie potrafi się reszty domyślić, a w razie czego dopytać?

Po drugie, nieprawdziwe jest stwierdzenie, że „amenable" jest słowem stworzonym przez Daya dla tego konkretnego celu, zniekształceniem poprawnego „a-mean-able". To po prostu nieprawda. Słowo „amenable" jest bardzo dobrze znane w języku angielskim i w anglosaskim uchu brzmi równie dobrze jak każde inne z leksykonu. Dla przykładu, według słownika Fundacji Kościuszkowskiej [1] znaczy ono między innymi:

- amenable to sth. – „skłonny wysłuchać czegoś lub coś zaakceptować, otwarty lub podatny na coś",
- amenable to doing sth. – „skłonny coś zrobić",
- „posłuszny".

Podobne znaczenia podaje słownik Stanisławskiego [10]: „posłuszny, uległy, wrażliwy (na dobre traktowanie)". To samo dzieło „amenable to common sense" tłumaczy jako „rozsądny, skłonny do wysłuchania głosu rozsądku". Z kolei słownik Webstera [11] w notatce na temat słowa „amenable" w interesującym nas znaczeniu podaje dwa jego synonimy: „responsible" i „obedient". Słownik ten szuka źródeł „amenable" w języku francuskim i w jego genealogii sięga aż 1596 roku. Natomiast w słowniku Longmana [4] czytamy, że być „amenable" to być „ready to be guided or influenced". Wreszcie monografia Alberta F. Sissona [8] podaje równo sześćdziesiąt różnych synonimów słowa „amenable"!

Żadne z nas, niżej podpisanych, nie miałoby najmniejszych wątpliwości, że „grupa posłuszna", „grupa powolna" czy „grupa spolegliwa" to terminy poprawne językowo, choć może nieco dziwaczne[4]. Taki też jest odpowiednik angielski: poprawny, nieco żartobliwy. Sugeruje, że interesujące nas grupy są na tyle posłuszne, że pozwalają zbudować na sobie odpowiednie odwzorowanie (co ładnie oddaje termin „grupy dopuszczające średnią"). Podstawową wadą przyjęcia terminu „grupa posłuszna", do którego raczej nikt nie nawołuje, byłoby oczywiście to, że w języku polskim „posłuszeństwo" nie ma nic wspólnego ze „średnią" i gra słów znika. Podkreślmy jednak raz jeszcze, że wbrew temu, co sugerują zwolennicy argumentu pierwszego, Day wcale nie stworzył nowego, niepoprawnego terminu. Wręcz przeciwnie – zwalczył pokusę używania „a-mean-able" na rzecz poprawnego językowo, znanego od lat w języku angielskim słowa „amenable".

[4] Jak wiadomo z fizyki, kwarki mogą być czerwone, zielone lub niebieskie, choć z prawdziwym kolorem nie mają nic wspólnego i nikt z tego powodu szat nie rozdziera.

3.2. *Argument drugi.* Jego zwolennicy utrzymują, że termin „grupa średniowalna" jest analogiczny do przyjętego powszechnie „przestrzeń metryzowalna" i jako taki jest jak najbardziej poprawny. W innym wariancie – niektórzy zamiast „przestrzeni metryzowalnej" powołują się na przykład „funkcji całkowalnej".

Podstawą wyjścia do tego twierdzenia jest błędne przekonanie o analogiczności ww. terminów. Być może bierze się ono z tego, że jego wyznawcom wydaje się, iż przymiotnik „metryzowalna" pochodzi bezpośrednio od słowa „metryka". Tak nie jest. Od rzeczownika tego pochodzi przymiotnik odrzeczownikowy „metryczna", a przymiotnik odczasownikowy „metryzowalna" pochodzi od czasownika „metryzować", który znaczy „wyposażać w metrykę". Podobnie przymiotnik „całkowalna" nie pochodzi bezpośrednio od rzeczownika „całka", lecz od czasownika „całkować". Od „całki" pochodzi przymiotnik „całkowa" (na przykład „tożsamość całkowa").

Zastanówmy się, po pierwsze, czy istnieje czasownik „średniować"? Byliśmy przekonani, że nie. Z przeglądu Internetu mogłoby jednak wynikać, że jest on znany w fizyce. Tylko czy na pewno? Nawet pobieżny rzut oka dowodzi, że używany jest on (przyznajmy, przez wąską grupę) w znaczeniu „uśredniania". Przykładowo, pytanie z teorii ergodycznej, czy uśrednienie po czasie daje ten sam wynik, co uśrednianie po przestrzeni, jeden z autorów tekstów, które znajdujemy w Internecie, ujmuje tak: „czy średniowanie po czasie można zastąpić średniowaniem po zespole?". Wydaje się więc, że czasownik „średniować" istnieje, ale jest niepoprawnym wariantem czasownika „uśredniać". Błędami językowymi Polaków, w tym fizyków, nie można zaś uzasadniać swoich racji.

Załóżmy nawet, wbrew temu, co napisaliśmy wyżej, że czasownik „średniować" istnieje i jest poprawny, choćby tylko w fizyce. Czy można jego istnieniem uzasadnić „grupę średniowalną"? Wcale nie! Co bowiem „średniują" (zamiast „uśredniać") niektórzy fizycy? Wielkości fizyczne. Uśredniają je lub liczą ich średnią (będąc przekonani, że „średniują") po czasie lub po przestrzeni. Nie zastanawiają się zatem, czy po czasie lub przestrzeni uśredniać można, tylko czy wynik uśredniania w obu przypadkach wyjdzie taki sam: jest dla nich oczywiste, że obie średnie istnieją. Tak więc nawet jeśli uznamy, na podstawie odwołania do błędów językowych naszych kolegów fizyków, że „grupa średniowalna" to pojęcie poprawne, nie będzie ono oddawało zamierzonego sensu. Zgodnie z omawianym tu użyciem „średniowalne" są bowiem wielkości fizyczne, więc grupa „średniowalna" to byłoby coś, co się daje uśredniać. A przecież „grupa dopuszczająca średnią" to twór, który pozwala uśredniać „po sobie", a nie siebie.

Napiszmy to raz jeszcze: w języku polskim nie istnieje czasownik „średniować” równoważny określeniu „wyposażać w średnią”. To powoduje, że powoływanie się na analogie z „przestrzenią metryzowalną” i „funkcją całkowalną” jest bezpodstawne.

3.3. *Argument trzeci.* Niektórzy twierdzą, że jeśli zachodzi potrzeba, a nie mamy gotowego pojęcia na coś, to możemy je stworzyć i że tak postąpił Jan Śniadecki, proponując słowo *całka*.

Jest to argument pokrewny nieporozumieniu z pochodzeniem angielskiego słowa „amenable” i – jak się zaraz przekonamy – również nietrafny.

Wszyscy zgadzamy się co do tego, że jeśli brak nam jakiegoś pojęcia, to trzeba je stworzyć. Podany jednak wyżej argument sugeruje coś więcej – to mianowicie, że nowe pojęcie możemy stworzyć niezgodnie z regułami języka polskiego, a tu już zgody nie ma.

Powoływanie się zaś w takim wypadku na Jana Śniadeckiego jest *faux pas* porównywalnym do doszukiwania się w listach Świętego Pawła apoteozy leninizmu-stalinizmu. Tak się składa, że współautorka tego tekstu (M. S.-W.) doktoryzowała się z pism Śniadeckiego i może zaświadczyć, jak temperamentnie myśliciel ten walczył o sprawy czystości języka polskiego, i że w żadnej mierze nie podpisałby się pod omawianym zdaniem.

Mamy też świadectwa innych. Zofia Pawlikowska napisała, że Śniadeckiego interesowały „sporne, a delikatne sprawy językowe” oraz że „włożył niemały wysiłek w kształtowanie polskiej terminologii matematycznej” (zob. [6, str. 57–58]) i że jego zdaniem „język narodowy jest zbyt wielką świętością i powszechną własnością, aby można było pozwolić na zanieczyszczenie go niepotrzebnie i nieudolnie stworzonymi wyrazami przez ludzi do tego nieupoważnionych i niepowołanych” (zob. [6, str. 59]).

Sam Śniadecki kierował się następującymi zasadami tworzenia nowych terminów (cytujemy za [6]):

1. Wyraz nowy powinien mieć skład, zakończenie i całą fizyonomię narodową, bo przez to zbliża się do języka potocznego,
2. nie powinien być dla ucha twardy, bo nauki powinny się przykładać nie tylko do zbogacenia, ale i do ułagodzenia języka,
3. powinien mieć dosadność, dobitność, czyli dobrze ustanowione znaczenie, nastręczające się uwadze na pierwsze uderzenie ucha, [...] nie powinien być podobny do słów tułackich, które mogą wiele znaczyć, ale nic nie znaczą z pewnością,
4. wyraz nowy powinien być poważny i skromny,
5. nie rozwlekły i z wielu słów sklecony,
6. najważniejszym warunkiem w tworzeniu nowych słów jest zachowanie analogii; z podobieństwa myśli i rzeczy powinno wynikać podobieństwo nazwiska.

A całka? Zacznijmy od tego, choć to być może w kontekście naszych rozważań sprawa drugorzędna, że to nie Jan Śniadecki jest autorem tego terminu – używał on słowa całkość. Na podstawie artykułu Pawlikowskiej (zob. [6, str. 56]) przypuszczać można, że pomysłodawcą całki był Józef Jakubowski (1743–1814). Przede wszystkim jednak, wbrew omawianej tu opinii, kwerenda słowników historycznych i etymologicznych pozwala przypuszczać, że termin ten – niezależnie od tego, kto był jego autorem – nie był w czasach Jakubowskiego neologizmem, lecz neosemantyzmem. To znaczy, że nie stworzono go na nowo, ale doszło to tzw. rozszerzeń znaczeniowych, przy czym ustalenie kierunku neosemantyzacji wymagałoby pogłębionych badań. Potwierdzeniem wieloznaczności są eksplikacje znaczeniowe hasła całka w tzw. Słowniku wileńskim [9].

3.4. *Argumenty pomniejsze.* Przejdźmy do grupy argumentów pomniejszych. Podkreślmy, że żaden z nich nie przemawia *sensu stricto* za użyciem terminu „grupa średniowalna", a jedynie wskazuje, rzekome lub rzeczywiste, słabości „grupy ze średnią". Obalmy jednak je również.

Podnosi się na przykład, że to drugie określenie sugeruje, iż średnią wyciąga się z elementów grupy. Nie jest to argument zbyt mocny: przyjęty powszechnie termin „przestrzeń z miarą" nie sugeruje przecież, że mierzymy elementy tej przestrzeni czy też ją samą; wszyscy wiemy, że mierzy się jej (niektóre) podzbiory. „Dama z łasiczką", „dziewczynka z zapałkami" czy „żołnierz z karabinem" to związki oparte na modelu składniowym powszechnym w języku polskim i stosowanym w tak różnych kontekstach, że narzucanie „grupie ze średnią" zbyt wąskiego znaczenia nie wydaje się być uzasadnione. A nawet jeśli „grupa ze średnią" ma tę wadę, czy nie ma też jej to określenie niepoprawne? Jak dowiedliśmy w paragrafie 3.2, właśnie ono sugeruje jednoznacznie, że uśrednia się samą grupę.

Swoją drogą, gdyby w teorii miary zagadnienie, czy dany zbiór można wyposażyć w miarę, było równie niebanalne i intrygujące jak to, czy na grupie da się skonstruować odpowiedni funkcjonał odgrywający rolę średniej, czy ktoś rozsądny mógłby proponować termin „zbiór mierzywalny", który bez wątpienia byłby bezpośrednim analogonem „grupy średniowalnej"?

Inni, komentując termin „grupa dopuszczająca średnią", zastanawiają się „co tu dopuszczać?". Odpowiedź jest wyjątkowo prosta: średnią właśnie. To jest w istocie najgłębszy sens pojęcia „amenable group" – są grupy, które ze względu na swą bardzo dziwną, skomplikowaną strukturę nie pozwalają na konstrukcję odpowiedniego funkcjonału. Inne taką konstrukcję dopuszczają i te są nazywane „amenable". Aż dziw, że niektórzy specjaliści tego nie rozumieją.

4. Numeri

Uwagi zawarte w tym paragrafie przynależą w istocie do poprzedniego, bo stanowią – co prawda tylko żartobliwą – ripostę na argumenty podnoszone przeciwko „grupom dopuszczającym średnią”, a w obronie określenia, którego akceptować nie możemy. Ze względu na to jednak, że jest to kwestia liczb, nie mogliśmy się oprzeć chęci nawiązania do kolejnej części Pięcioksięgu i umieszczenia ich tutaj.

Otóż podnoszony jest czasami argument, że „grupa dopuszczająca średnią” to termin zbyt długi i dlatego powinien być zastępowany innym. W kryteriach oceny terminologii specjalistycznej też jest mowa m.in. o ekonomiczności, która powinna wyrażać się w tworzeniu terminów jednoelementowych, a unikaniu wieloelementowych. Kryteria jednak waży się między sobą i osądza według ciężaru różnych argumentów, dlatego nie może być z góry przesądzony wynik w sytuacji, gdy w szranki stają ilość z jakością. Przeprowadźmy mimo wszystko – wciąż tylko pół żartem, pół serio – eksperyment. Napiszmy twierdzenie „grupa $\mathcal{G}$ dopuszcza średnią” w języku, który ma rzekomo być bardziej ekonomiczny. Wychodzi nam „grupa $\mathcal{G}$ jest średniowalna”. Ile liter ma zdanie pierwsze? Dwadzieścia dwie. A drugie? Tyle samo. A jak jest z liczbą sylab? Również pod tym względem oba zdania są równie długie. A gdybyśmy zamiast „dopuszcza” napisali „ma”? No właśnie.

5. Deuteronomium

Powtórzmy i podsumujmy przedstawione wyżej argumenty: na gruncie języka polskiego nie da się uzasadnić użycia terminu „grupa średniowalna”. Jest on niepoprawny systemowo i nie oddaje zamierzonego sensu. Określenia „grupa ze średnią” czy „grupa dopuszczająca średnią”, choć niepozbawione wad, są znacznie lepsze, a przede wszystkim poprawne z formalnego (i językowego, i matematycznego) punktu widzenia. Zdaje się więc, że jedynym powodem, dla którego można by używać tego pierwszego, jest siła przyzwyczajenia lub swoisty brak refleksji nad tym, jak się wypowiadamy. Czyż jednak nie powinniśmy jako matematycy dbać nie tylko o zrozumiałość terminów w swoim środowisku, ale także i poza nim, chociażby po to, by nasze wyniki służyć mogły zastosowaniom praktycznym w innych dziedzinach życia? Co o „grupach średniowalnych” powiedziałby tak dbający o czystość polszczyzny Hugo Steinhaus?

W trakcie pracy nad tym artykułem staraliśmy się dowiedzieć, jak w różnych ośrodkach w Polsce tłumaczony jest termin „amenable group”. Wygląda

na to, że nie ma jeszcze ustalonej terminologii, choć „grupa ze średnią" i „grupa dopuszczająca średnią" zdają się być używane najbardziej powszechnie. Kilku specjalistów na swój własny, czasami lokalnie spopularyzowany, użytek wprowadzało pojęcie grup „uległych, podatnych" lub „minarnych" (zapewne od angielskiego słowa „mean"); inni proponowali, byśmy mówili o grupach „średniowych", a nawet „aminabilnych" (podobną do ostatniej kalki językowej stworzyli Rosjanie). Choć ujednolicenie terminologii byłoby niewątpliwie cenne, a spora *nomen omen* grupa specjalistów uznała, że „grupa ze średnią" i „grupa dopuszczająca średnią" to określenia pojemne i adekwatne, nie jesteśmy zwolennikami wprowadzenia ich odgórnym dekretem, który zapewne i tak nie byłby respektowany. Nie wykluczamy także, że za jakiś czas specjaliści uznają, iż – dla przykładu – „grupa minarna" to opcja najlepsza i powinna wejść do powszechnego użycia[5]. Apelujemy jedynie, by nie rozpowszechniać określenia utworzonego niezgodnie z systemem słowotwórczym polszczyzny.

Chcielibyśmy prosić tych, którzy uważają, że grupy można nazywać „średniowalnymi", by rozważyli raz jeszcze nasze argumenty. Jeden z dwojga niżej podpisanych (A. B.) zna przynajmniej jednego wybitnego uczonego, który nagminnie popełnia błędy ortograficzne (dla przykładu stale pisze „puki" zamiast „póki"), ale oczywiście je poprawia, gdy mu się na nie zwróci uwagę. Jesteśmy przekonani, że pisanie o grupach „średniowalnych" jest tak samo błędne, jak o wyjeździe w „gury".

Jak już wspomnieliśmy powyżej, jednym ze znaczeń słowa „amenable" jest „skłonny wysłuchać czegoś lub coś zaakceptować", a więc „otwarty na argumenty". Słowo to występuje też często w zwrocie „amenable to common sense", który tłumaczy się „rozsądny, skłonny do słuchania głosu rozsądku". Czy więc zwolennicy niepoprawnego terminu „grupa średniowalna" będą otwarci na przedstawiane im argumenty? Czy zechcą posłuchać głosu rozsądku?

Podziękowanie. Autorzy serdecznie dziękują Redakcji *Wiadomości Matematycznych* za życzliwe uwagi merytoryczne.

[5] Sporo zalet i duży potencjał ma wspomniany wyżej termin „grupa średniowa". Faktem jest, że „na pierwszy rzut ucha" brzmi on nieszczególnie i niektórym kojarzyć się może ze „średnią jakością", to znaczy jakością słabą. Jest jednak kompaktowy i poprawny językowo, a poza tym – z punktu widzenia procesów słowotwórczych w polszczyźnie – ma pokaźną grupę w pełni przyjętych przez środowisko matematyczne kuzynów, takich jak „przestrzeń ośrodkowa", „funkcja liniowa" czy też „rozmaitość różniczkowa". Jeśli się nad nim chwilę zastanowić, to jego używanie nabiera sensu: grupa średniowa to grupa związana ze średnią.

Bibliografia

[1] J. Fisiak (red.), *Nowy Słownik Fundacji Kościuszkowskiej*, Kościuszko Foundation, Nowy Jork 2003.
[2] H. Jadacka, *System słowotwórczy polszczyzny* (*1945–2000*), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
[3] K. Kurkowska, *Budowa słowotwórcza przymiotników polskich*, Zakład im. Ossolińskich, Wrocław 1953.
[4] *Longman Dictionary of Contemporary English*, wyd. 2, PWN, Warszawa 1989.
[5] A. Markowski, *Wielki słownik poprawnej polszczyzny PWN*, PWN, Warszawa 2012.
[6] Z. Pawlikowska, *Z historii polskiej terminologii matematycznej* (*II*), Wiad. Mat. 8 (1965), 41–64.
[7] L. Ptak, *Przymiotniki o znaczeniu potencjalnym w językach czeskim, słowackim i polskim*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2009.
[8] A. F. Sisson, *Sisson's Synonyms*, Prentice Hall, Paramus, N.J. 1969.
[9] *Słownik języka polskiego „wydany staraniem i kosztem Maurycego Orgelbranda”*, cz. 1–2, Wilno 1861.
[10] J. Stanisławski, *Wielki słownik angielsko-polski*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1983.
[11] *Webster's Ninth New Collegiate Dictionary*, Merriam–Webster, Springfield 1991.
[12] Wielki słownik języka polskiego (P. Żmigrodzki, red.), https://www.wsjp.pl (dostęp: 2020-07-25).

Adam Bobrowski
Politechnika Lubelska
a.bobrowski@pollub.pl

Magdalena Smoleń-Wawrzusiszyn
Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II
lumina@kul.lublin.pl

Nie wiem, czy państwa to zadowala, ale ja przynajmniej rozumiem ten dowód.

Pan mówi, że to widać, ja mówię, że nie widać, a na razie to ja decyduję o tym, czy coś widać, czy nie.

Strasznie nie lubię dowodów nie wprost, bo polegają one na tym, że człowiek opowiada cały czas jakieś bzdury, aż dojdzie do takiej bzdury, że wszyscy już się zgadzają, że tak dalej być nie może.

Jesteśmy w sytuacji dyskretnej, tutaj taki punkt to kawał zbioru.

Ja pierwszy raz prowadzę ten wykład i teraz widzę, że ta analiza nie jest taka trudna, jak mi się zawsze wydawało!

Ten robaczek obok to jest *g* z ptaszkiem.

Dowód nie będzie długi. Myślę, że w ciągu trzech-czterech wykładów go skończę.

Mamy dwa rodzaje jeleni: gołębie i sokoły.

Cauchy przeszedł przez matematykę jak czołg i pozostawił wiele spustoszeń.

Oddam dobry komputer za dobrą tablicę.

Rząd nie może podskoczyć.

Jedyne co mogę zrobić, to przeprosić. Nie przeciągnąć nie mogę.

Twierdzenie mamy już gotowe, brakuje jeszcze dowodu i kontrprzykładu.

Za większy zbiór rozumiemy zbiór mniejszy. To jest jasne, prawda?

Inne ciała mnie tutaj nie interesują.

Inaczej mówiąc, defekt przestrzeni mówi, ile jej brakuje do całej przestrzeni. Na przykład defektem półlitrówki jest pół litra.

To nie jest znak zapytania, to jest... obawiam się... ocena.
(*odpowiedź na pytanie studenta o znak na poprawionym sprawdzianie*)

Kołmogorow to jest gruba ryba.

Proszę uważać, abym kogoś nie oblał jeszcze przed egzaminem.
(*profesor idący na wykład ze szklanką z herbatą*)

Praca naukowa zwarta to taka, w której z dowolnej rodziny błędów zawartych w pracy można wybrać podrodzinę skończoną tak, by po jej usunięciu praca nie zmieniała sensu merytorycznego.

(*zanotowane na zajęciach przez studentów matematyki UJ*)

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 391–402
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krzysztof Ciesielski (Kraków)

Kilka uwag o przekładach

Rozmaite książki popularyzujące matematykę, napisane przez autorów z zagranicy, są tłumaczone na język polski i w Polsce wydawane. Celem tego tekstu jest zwrócenie uwagi na pewne kwestie związane z przekładami tekstów związanych z matematyką.

Simon Singh uzyskał doktorat z fizyki na Uniwersytecie w Cambridge, ale znany jest głównie z działalności na rzecz popularyzacji nauki, w tym matematyki. Napisał kilka książek popularnonaukowych. Najsłynniejsza to chyba *Wielkie Twierdzenie Fermata*; mnie najbardziej podobała się *Księga szyfrów*. Kolejna wydana w Polsce pozycja to *Simpsonowie i ich matematyczne sekrety* (Wydawnictwo Albatros, 2016 rok, przełożyła Anna Binder). Czwarty rozdział zatytułowany jest *Tajemnice humoru matematycznego*. Singh kończy go słowami:

> [...] zebrałem najlepsze na świecie dowcipy matematyczne, uporządkowałem je według stopnia trudności i podzieliłem na pięć arkuszy egzaminacyjnych, które rozmieściłem w książce co parę rozdziałów. W miarę zgłębiania humoru matematycznego *Simpsonów* będziecie natrafiać na coraz trudniejsze testy. Wasze zadanie polega na tym, żeby przeczytać dowcipy i sprawdzić, ile z nich wywoła w was śmiech (lub jęknięcie), dzięki czemu będziecie mogli ocenić własne postępy w zakresie wiedzy matematycznej i poczucia humoru.

Przy pierwszym arkuszu egzaminacyjnym jest też komentarz

> Te żarty, gagi i absurdalne historyjki przekazywane są przez geeków z pokolenia na pokolenie, więc nazwiska autorów zaginęły, niestety, w pomroce dziejów (bądź też autorzy ze zrozumiałych powodów woleli pozostać anonimowi).

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Z wielkim zainteresowaniem zabrałem się do czytania pierwszego „egzaminu". Jednak już pierwszy dowcip mnie zdziwił. Oto on:

> Przychodzi iloraz do lekarza, a lekarz pyta:
> – A gdzie reszta?

Dowcip ten był mi znany wcześniej. Pochodzi z wymyślonej kilkadziesiąt lat temu na Tradycyjnym Rajdzie Otrzęsinowym Matematyków Brzegiem Akwenu (w skrócie TROMBA) serii, której jednym z autorów był Jerzy Bednarczuk. Jak mi opowiadał, wspólnie z grupą innych uczestników rajdu wpadli na pomysł tworzenia matematycznych żartów wzorowanych na cyklu „przychodzi baba do lekarza". Efekty były znakomite. Zacząłem się zastanawiać nad tym, jak dowcip o ilorazie u lekarza sensownie i zabawnie dał się sformułować po angielsku oraz jak Singh mógł się o nim dowiedzieć.

Dowcip, od którego zaczyna się drugi „egzamin", również pochodzi z warszawskiej serii. Tym razem jest to:

> Przychodzi wektor do lekarza, a lekarz pyta:
> – Kto pana tu skierował?

Zarówno na pierwszym, jak i na drugim „egzaminie" było wiele dowcipów, które od dawna znałem. W szczególności na początku każdego z kolejnych „arkuszy egzaminacyjnych" znajdował się któryś z warszawskiego zestawu. Mieliśmy zatem:

> Przychodzi wielomian do lekarza, a lekarz mówi:
> – Uwaga, stopień!
>
> Przychodzi rozkład do lekarza, a lekarz pyta:
> – Czy jest pan normalny?
>
> Przychodzi *i* do lekarza, a lekarz mówi:
> – Coś się pani uroiło!

Od razu nasuwają się kolejne wątpliwości – przecież w języku angielskim stopień wielomianu to „degree". Takich przykładów związanych z polską grą słów było więcej. Czy jest możliwe, że istnieją angielskie wersje tych dowcipów? Najbardziej jednak zaskoczył mnie tekst podany w „egzaminie" czwartym.

> Twierdzenie o lokalnych geniuszach: Dla każdego matematyka istnieje otoczenie, w którym jest on najwybitniejszy.

Jak to się stało, że Singh to twierdzenie zna? Sformułowanie w książce było idealnie zgodne z oryginalną, polską wersją. I w tym przypadku wiem, skąd twierdzenie pochodzi.

Wiadomo, że podczas wykładu, w szczególności matematycznego, nie raz i nie dwa zdarzy się, że z ust wykładowcy padnie jakieś oryginalne sformułowanie... Na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych XX wieku grupa studentów matematyki UJ podjęła akcję notowania usłyszanych na zajęciach niestandardowych wypowiedzi nauczycieli akademickich. Do niektórych cytatów dorabiano nawet rysunki. Tym pracownikom Instytutu Matematyki, którzy zasłużyli się największymi liczbami zanotowanych wypowiedzi, wręczano później, na specjalnych uroczystościach, odznaczenia: Brązowy Cudzysłów, Srebrny Cudzysłów, Złoty Cudzysłów, a Andrzej Lasota otrzymał nawet Złoty Cudzysłów ze Wstęgą Möbiusa. I to właśnie Lasota powiedział kiedyś na wykładzie: „dla każdego matematyka istnieje otoczenie, w którym jest on najwybitniejszy" i dodał: „istnieją przypadki, że jest ono dyskretne." To niezwykle trafne stwierdzenie stało się popularne, a jakiś czas później nadano mu nazwę *twierdzenie o lokalnych geniuszach* (mówiono też: *twierdzenie Lasoty o lokalnych geniuszach*). Kolejne roczniki studentów matematyki UJ zbierały niebanalne cytaty[1], a zasady ich wyróżniania z czasem się zmieniały. Od kilkunastu lat corocznie wybierany jest *Cytat Roku*.

Wśród pracowników i studentów matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego twierdzenie o lokalnych geniuszach było (i nadal jest) bardzo popularne. Wspomnieliśmy o nim (bez genezy) ze Zdzisławem Pogodą w książce *Bezmiar matematycznej wyobraźni*. Jak mogło dotrzeć do Singha? Rzecz wydawała się mocno podejrzana.

Zirytowałem się, gdy dotarłem do „egzaminu" ostatniego. Tam zamieszczony został dowcip w pewnym sensie ze mną związany, podany jednak w formie, która moim zdaniem go znacznie zubożyła, albo nawet zepsuła.

Zacznę od opisu pewnego zdarzenia, które miało miejsce w październiku 1998 roku. Dwaj studenci, którzy przed wakacjami zdali u mnie egzamin z topologii, z radością opowiedzieli mi, co im się przydarzyło na wakacjach. Wybrali się mianowicie na kilkudniową wycieczkę w Beskidy. W trakcie tej wycieczki weszli do małego sklepiku w pewnej wsi, by zrobić zakupy spożywcze. Tak się złożyło, że mieli ochotę na bułeczki.

– Czy są bułeczki? – zapytał jeden z nich.

– Są – odpowiedziała sprzedawczyni.

– Jakie? – zapytali, bo na półkach żadnych bułek nie widzieli.

– Normalne.

– Jakie to są „normalne"?

Na to sprzedawczyni, pokazując ręką półkę z pieczywem za jej plecami:

– No, te cztery!

[1] Niektóre z nich można przeczytać na str. 390 tego numeru *Wiadomości Matematycznych*.

Jak widać, zaskakująca jest znajomość topologii ogólnej w społeczeństwie...

Opowiadałem później tę historię na paru konferencjach matematycznych, ku wielkiej radości słuchaczy. A potem na pewnej stronie internetowej znalazłem dowcipy matematyczne, w tym taki, który w idealnie takiej samej formie pojawia się w polskim przekładzie „Simpsonów":

> Przychodzi topolog do piekarni i mówi:
> – Poproszę bułki.
> – Które?
> – T4.

Uważam, że przy takim przedstawieniu historia wiele traci. A poza tym brakuje czegoś, co jest niezwykle istotne – informacji o autentyczności historii i opisu tego, co zdarzyło się naprawdę...

Byłem już przekonany, że istnieje rozbieżność polskiego tłumaczenia z oryginałem, jednak bardzo chciałem zobaczyć, jak wygląda książka Singha w swej pierwotnej formie. Na szczęście obecnie nie sprawiało to wielkiego problemu – nabyłem ją na portalu eBay. I rzeczywistość przerosła moje najgorsze obawy...

W wersji oryginalnej dowcipów „egzaminacyjnych" było 42 – w polskim przekładzie aż 55. Ale tylko około jedna czwarta dowcipów z angielskiej wersji książki Singha została przełożona! Ponad 40 żartów z polskiej wersji to takie, których w oryginale nie było.

Oczywiście zdaję sobie sprawę z tego, że pewne dowcipy są nieprzekładalne. Zacytuję z książki Singha kilka, które mi się bardzo spodobały:

> Q: Why did 5 eat 6?
> A: Because 7 8 9.
>
> Student: "What's your favorite thing about mathematics?"
> Professor: "Knot theory."
> Student: "Yes, me neither."
>
> Q: Why do computer scientists get Halloween and Christmas mixed up?
> A: Because Oct. 31 = Dec. 25.

Tych i pewnych innych dowcipów istotnie nie da się przetłumaczyć. Ale nie można przecież – bez żadnej na ten temat informacji – wstawiać do przekładu czegoś, czego autor nie napisał! Tym bardziej, że poinformował on, że zebrał „najlepsze na świecie dowcipy matematyczne". Wcale nie jest powiedziane, że te, które znalazły się w polskiej wersji, by mu się spodobały; ponadto sądzę, że niektórych nie miałby szans zrozumieć. Nie wiem, czy tak poważna modyfikacja tekstu została z nim skonsultowana. Ale nawet jeśli tak się stało, to czytelnicy

w Polsce powinni się dowiedzieć, że dowcipy z serii matematycznych wizyt u lekarza, twierdzenie o lokalnych geniuszach i liczne inne żarty są nasze, polskie, a nie pochodzą z zagranicy. Nie mówiąc o tym, że w niejednym przypadku warto podać dokładne źródła czy nawet autorów, choć czasem może to okazać się niebanalnym wyzwaniem.

Co zrobić w sytuacji, gdy dowcipów nie da się przełożyć, pokazał Paweł Strzelecki w przekładzie książki Iana Stewarta *Listy do młodego matematyka* (wydanej przez *Prószyński i S-ka*). W osiemnastym rozdziale zatytułowanym *Społeczność matematyków* autor poświęca parę stron dowcipom matematycznym, podając kilka, opublikowanych wcześniej w artykule w *Notices of the AMS* – w tym taki (w oryginale):

> The Flood has receded and the ark is safely aground a top Mount Ararat; Noah tells all the animals to go forth and multiply. Soon the land is teeming with every kind of living creature in abundance, except for snakes. Noah wonders why. One morning two miserable snakes knock on the door of the ark with a complaint. "You haven't cut down any trees." Noah is puzzled, but does as they wish. Within a month, you can't walk a step without treading on baby snakes. With difficulty, he tracks down the two parents. "What was all that with the trees?" "Ah," says one of the snakes, "you didn't notice which species we are." Noah still looks blank. "We're adders, and we can only multiply using logs."

Dowcip uważam za rewelacyjny, jest on jednak zrozumiały jedynie dla osób z pewną znajomością matematyki oraz znających język angielski. Tego dowcipu nie da się przełożyć na język polski. Co zrobił Strzelecki? W przypisie tłumacza czytamy:

> Niżej pozwoliłem sobie na spore odstępstwo od oryginału. Otóż, Ian Stewart przytacza z owego tekstu wyłącznie takie dowcipy, które są oparte na wielopoziomowej grze słów w języku angielskim, albo na takich cechach gramatyki angielskiej, której brak gramatyce polskiej. Jakikolwiek przekład dosłowny nie tylko nie byłby dowcipny – byłby również bezsensowny. Dlatego zdecydowałem się wybrać ze wspomnianego tekstu [...] kilka dowcipów, które mają naprawdę międzynarodowy charakter i funkcjonują w społeczności matematycznej w różnych językach – także po polsku. Czytelnik powinien mieć bardzo wyraźną świadomość, że przez kilka akapitów mówi do niego nie tyle Ian Stewart za pośrednictwem tłumacza, ale sam tłumacz, z cichą nadzieją, że intencję Iana Stewarta oddaje w akceptowalnym przybliżeniu [...]

I tu w zasadzie nie trzeba niczego dodawać. Proste, naturalne i uczciwe w stosunku do czytelników rozwiązanie.

Przekład jest trudną sztuką. Trzeba biegle znać dwa języki, a w przypadku książki związanej z matematyką konieczna jest odpowiednia znajomość matematyki. Należy też pamiętać o tym, że to ma być przekład, a nie tekst własny, czyli zachować wierność oryginałowi. A co zrobić, jeśli tłumacz zauważy błąd, albo uważa, że czytelnikowi należy się koniecznie dodatkowe wyjaśnienie? Najlepiej umieścić odpowiedni przypis (z zaznaczeniem, że to przypis tłumacza). We wspomnianych *Listach do młodego matematyka* tak w kilku przypadkach zrobił Paweł Strzelecki. I nie jest to przypadek odosobniony: niektóre błędy w książce Mickaëla Launaya *Pi razy drzwi, czyli dziwne przypadki matematyki*, wydanej przez Wydawnictwo Feeria Science, zaznaczył w przypisach tłumacz, Krzysztof Rejmer. Tłumacz jednak nie ma obowiązku wiedzieć wszystkiego, a poza tym ile przypisów można dodawać? Akurat w książce Launaya roi się od błędów, niekiedy bardzo poważnych, i tylko o niektórych z nich czytelnik został poinformowany. Zaszokowała mnie informacja, że autor jest doktorem nauk matematycznych. Żeby nie być gołosłownym, podam przykłady. Czytamy, że kwadratura koła nie jest możliwa, gdyż liczba π nie jest rozwiązaniem żadnego równania pierwszego lub drugiego stopnia. Niczego nie opuszczam, jedyne podane w tekście wymagania dotyczące równania to te, by było ono pierwszego lub drugiego stopnia, w szczególności nic nie jest powiedziane o współczynnikach. Launay pisze, że Gödel wykazał, że nie istnieje aksjomatyka niesprzeczna i zupełna. Nieprawda – wykazał, że nie istnieje wtedy, gdy zawiera w sobie aksjomatykę liczb naturalnych. Niewiarygodne, że matematyk stawia w jednym rzędzie – pisząc, że są to twierdzenia – zdania „jedna jaskółka nie czyni wiosny", informację o tym, co jest najlepszym lekarstwem na reumatyzm, oraz „trójkąt o bokach 3, 4, 5 jest prostokątny". Autor oznajmia, że „żadnemu znanemu fizycznemu zjawisku nie odpowiada struktura przypominająca zbiór Mandelbrota". Nic podobnego! Poza tym, z tego co pisze, można wywnioskować, że zbiór ten zrobił karierę wyłącznie ze względu na oryginalny, piękny wygląd – a jest całkiem inaczej. Choć mowa o zbiorze Mandelbrota, w książce nie ma nawet wzmianki o fraktalach. Błędów i usterek w tej książce jest cała masa, ponadto jest ona napisana bardzo chaotycznie. Reklama z bloga Crazy Nauka mówi: „[l]ektura obowiązkowa dla tych wszystkich humanistów, którzy skrycie boją się matematyki. I dla niehumanistów również". Mam inne zdanie. Jest to lektura co najmniej niewskazana, a osoby bez wykształcenia matematycznego tej książki czytać nie powinny – nie będą wiedzieć, co w niej jest bzdurą. Smutne dla mnie jest, że ta pozycja została wydana po polsku.

Dodam jeszcze, że Launay na końcu poleca literaturę. W polskim wydaniu dodano kilkanaście pozycji dla polskiego czytelnika. Bardzo mi miło, że znalazły się tam *Diamenty matematyki* – ale tej książki nie napisał sam Krzysztof

Ciesielski, jak tam podano, lecz duet: Krzysztof Ciesielski i Zdzisław Pogoda! Polecane są cztery książki Michała Szurka – ale tylko przy jednej z nich jest napisane, że to Szurek jest autorem. Są wymienione *Lilavati* i *Śladami Pitagorasa* – jedynie przy pierwszej dowiadujemy się, że napisał ją Szczepan Jeleński... To już wina wydawcy. W ten sposób płynnie przeszliśmy do kolejnej usterki przekładów, z którą niestety całkiem często można się spotkać. Wielokrotnie na końcu książki autor poleca dodatkową lekturę. Często w przekładzie dodane są przez tłumacza kolejne pozycje. I czasem podana jest informacja, że są one dodane przez tłumacza (lub wydawnictwo), a czasem nie ma o tym mowy. A to bezwzględnie powinno być zaznaczone. Raz, że tych dodatkowych pozycji nie ma w oryginale, a dwa – skąd wiadomo, że autor by je polecił?

Chciałbym też wspomnieć o kolejnej sprawie związanej z przekładami, – zmianie tytułu książki. Zdarza się to wcale nie tak rzadko i zupełnie nie rozumiem dlaczego, tym bardziej, że wielokrotnie oryginał odpowiada treści książki, to zaś, co jest na okładce polskiego wydania – nie. Nie wiem, z czyjej się to dzieje inicjatywy – czy tłumacza, czy wydawnictwa, które uważa, że pod zmienionym tytułem książka lepiej się sprzeda... Podam kilka przykładów. Zacznę od wspomnianej wyżej książki Launaya. Tytuł oryginału francuskiego to *Le grand roman des maths: de la préhistoire à nos jours* (w polskim wydaniu w stopce redakcyjnej podanych zostało tylko pięć pierwszych słów). Jak widać, o liczbie π we francuskim tytule nie ma ani słowa... W tym przypadku możemy zaobserwować zjawisko znacznie gorsze – książka o tytule *Pi razy drzwi* została w Polsce wydana (przez Wydawnictwo *Prószyński i S-ka*) w 1996 roku. Jej autor to John Barrow, a tytuł oryginału to *Pi in the sky*. Tu też mamy modyfikację tytułu, ale uważam, że w pełni uzasadnioną, a co więcej – znakomitą, bo zachowuje rym.

Wśród wydanych w Polsce prawie trzydziestu książek Iana Stewarta jest parę, których polskie tytuły nie odpowiadają treści i intencjom autora. Jednym z przykładów jest *Krótka historia wielkich umysłów* (ona i następna, o której mowa, wydane przez *Prószyński i S-ka*). Tytuł od razu budzi skojarzenie ze słynną książką Stephena Hawkinga *Krótka historia czasu*. Można byłoby przypuszczać, że Stewart, znany z licznych aluzji i gry słów, nawiązując do dzieła swojego znakomitego rodaka przedstawił rozwój matematyki na przestrzeni tysiącleci, opisując dokonania najwybitniejszych matematyków w historii, zwłaszcza że książka ma podtytuł *Genialni matematycy i ich arcydzieła*. Tymczasem tytuł oryginału to nie *A Brief History of Time*, ale *Significant Figures*. Podtytuł natomiast brzmi *Lives and Works of Trailblaizing Mathematicians*. Stewart po prostu wybrał dwadzieścia pięć postaci, znaczących dla matematyki w jej historii („znaczących" jest tu idealnym słowem) i opisał ich życie oraz dokonania. Stewart, jak mu się to nieraz zdarza, w kapitalny sposób użył homonimu – „cyfry znaczące" to po

angielsku „significant figures"! Oczywiście dowcip jest nieprzetłumaczalny, ale bardzo mnie razi użyte w polskim tytule słowo „genialni". Tym przymiotnikiem można określić jedynie naprawdę wyjątkowych uczonych – moim zdaniem, spośród tych przedstawionych przez Stewarta, jedynie kilku. Stewart zresztą wcale nie twierdzi, że wszyscy przez niego opisani byli genialni. W książce użył tego słowa zaledwie kilkakrotnie, zawsze w mocno uzasadnionych przypadkach. Słowo „trailblazing" (ang. „pionierski") znakomicie odpowiada wyborowi przedstawionych uczonych – matematycy, którym poświęcone są kolejne rozdziały, mają na swoim koncie właśnie przełomowe dokonania. Nie jest to wcale wybór wyłącznie najjaśniejszych gwiazd jaśniejących na matematycznym firmamencie. Nie wiem, czemu tytuł oryginału został tak przeinaczony.

Inny przykład to *Oswajanie nieskończoności. Historia matematyki*. Polski tytuł sugeruje coś innego niż to, co jest zawarte w książce. „Historia matematyki" to dział matematyki, po angielsku „History of mathematics". Tego sformułowania nie ma w tytule oryginału, który w pierwszym wydaniu brzmiał *The Story of Mathematics. From Ancient Babylon to the Last Unsolved Problems*, potem został zmieniony na *Taming the Infinite. The Story of Mathematics*, by w końcu stać się samym *Taming the Infinite*. Umieszczenie w polskim tytule przekładu słów *The Story of Mathematics* jest dobrym pomysłem, ale nie można z nich robić „historii matematyki". Tym bardziej, że we wstępie Stewart napisał: „[i]n short, this is a history, not the history. And it is history in the sense that it tells a story about the past." Sensownie można byłoby, na przykład, zatytułować książkę *Opowieści o matematyce*.

Niedawno Wydawnictwo Naukowe PWN wydało książkę Davida Achesona *1089 and All That. A Journey into Mathematics* pod tytułem *Krótka podróż w głąb matematyki*. Jak widać, przecięcie obu tytułów jest niepuste. Gorzej jest w przypadku książki Johna Barrowa o dowcipnym tytule *100 Essential Things You Didn't Know You Didn't Know*. Ta została w Polsce wydana przez Wydawnictwo Literackie jako *Jak wygrać na loterii? Czyli z matematyką na co dzień*.

Jacob Bronowski, Anglik polskiego pochodzenia, stał się sławny dzięki trzynastoodcinkowemu serialowi dokumentalnemu *The Ascent of Man*, wyprodukowanemu przez BBC w pierwszej połowie lat siedemdziesiątych XX wieku. Serial (z podtytułem *A personal view by Jacob Bronowski*), przedstawiający rozwój nauki (albo raczej – przede wszystkim nauki) na przestrzeni stuleci, stał się niezwykle popularny w wielu krajach. Bronowski, oprócz tego, że opracował scenariusz, we wszystkich odcinkach pełnił rolę narratora. Wielu z entuzjastów serialu nie wie, że uzyskał on doktorat z matematyki, i to w Cambridge. Tytuł pracy doktorskiej (z 1935 roku) to *The cubic primals in five dimensions with isolated nodes*. Promotorem rozprawy był Henry Frederick Baker. Na liście

doktorantów Bakera pojawiają się takie nazwiska, jak H. S. M. Coxeter i Louis Mordell, a wspomniany wyżej dwukrotnie John D. Barrow to praprawnuk naukowy Mordella.

Na podstawie serialu telewizyjnego Bronowski napisał książkę (zawierającą również materiał nie pokazany w filmach), wydaną także w Polsce przez Państwowy Instytut Wydawniczy. Tytuł – *Potęga wyobraźni*. Taka modyfikacja jest tym bardziej irytująca, że oryginalny tytuł jest wyraźnym nawiązaniem do dzieła Darwina z 1871 roku *The Descent of Man*. Bronowski napisał zresztą w przedmowie do książki:

> The content of these essays is in fact wider than the field of science, and I should not have called them *The Ascent of Man* had I not had in mind other steps in our cultural evolution too.

Zdanie to w polskim przekładzie brzmi:

> Dałem tym esejom tytuł *Potęga wyobraźni*, gdyż ich treść wykracza istotnie poza obszar nauki i obejmuje również inne obszary.

Analogia do dzieła Darwina jest nawet *explicite* zapisana we wstępie. W polskim przekładzie zniknęła.

Oczywiście dziwna zmiana tytułów przy przekładach nie jest cechą wyłącznie książek matematycznych; można podać liczne inne przykłady. Jednym z wzorcowych jest fantastycznonaukowa powieść Arkadija i Borysa Strugackich *Małysz*, wydana w Polsce jako *Koniec akcji Arka*, a później wznowiona jako *Koniec eksperymentu Arka*. Rosyjski tytuł to bynajmniej nie aluzja do znakomitego skoczka narciarskiego; „małysz" to po polsku malec, maluch, w tekście jest to określenie jednego z bohaterów książki: *Mały*. Notabene zarówno oryginał rosyjski, jak i polski przekład ukazał się przed narodzinami Adama Małysza.

Przywołanie w tym momencie literatury fantastycznonaukowej nie było przypadkowe.

Książki Stanisława Lema zostały przełożone na czterdzieści jeden języków i sprzedane na świecie w ponad czterdziestu pięciu milionach egzemplarzy. Lem w swoich utworach wielokrotnie nawiązuje do matematyki. Nie miał on żadnego wykształcenia w tej dziedzinie, ale jego matematyczna intuicja budzi zachwyt. Wiele dzieł Lema przełożył na język angielski Michael Kandel. Przekłady Kandla są znakomite i wspaniale oddają klimat oryginału, a chyba każdy, kto zetknął się z twórczością Lema, zdaje sobie sprawę z tego, przed jak trudnym zadaniem stają tłumacze. Wojciech Zemek (który był sekretarzem Lema) uzyskał w 2009 roku na Uniwersytecie Jagiellońskim tytuł magistra na podstawie pracy *Listy*

a literatura: *korespondencja Stanisława Lema z Michaelem Kandlem*. W pracy tej można przeczytać:

> Tłumaczenie *Cyberiady* jest przedsięwzięciem piekielnie trudnym, nie tylko ze względu na jej barokową językową maestrię, ale także z powodu niezliczonych odniesień kulturowych, całych bibliotek kryjących się za każdym zdaniem gęstego tekstu.

i nie można się z tym nie zgodzić. Zemek informuje w pracy, że Lem udzielał Kandlowi licznych szczegółowych wskazówek.

Wydaje mi się jednak, że w Kandla przekładzie *Cyberiady* w pewnym fragmencie zagrał rolę brak znajomości polskiej terminologii matematycznej. Wśród *Siedmiu wypraw Trurla i Klapaucjusza* jest *Wyprawa trzecia, czyli smoki prawdopodobieństwa*. Można się domyślić, że znajdziemy tam fragmenty związane z matematyką. Już w pierwszym akapicie czytamy:

> Tak tedy genialny Kerebron, zaatakowawszy problem metodami ścisłymi, wykrył trzy rodzaje smoków: zerowe, urojone i ujemne. Wszystkie one, jak się rzekło, nie istnieją, ale każdy rodzaj w zupełnie inny sposób. Smoki urojone i zerowe, przez fachowców zwane urojakami i zerowcami, nie istnieją w sposób znacznie mniej ciekawy aniżeli ujemne. Od dawna znany był w smokologii paradoks, polegający na tym, że kiedy dwa ujemne herboryzuje się (działanie odpowiadające w algebrze smoków mnożeniu w zwykłej arytmetyce), w rezultacie powstaje niedosmok w ilości około 0,6.

A to ten fragment w przekładzie Kandla.

> The brilliant Cerebron, attacking the problem analytically, discovered three distinct kinds of dragon: the mythical, the chimerical, and the purely hypothetical. They were all, one might say, nonexistent, but each non-existed in an entirely different way. And then there were the imaginary dragons, and the a-, anti- and minus-dragons (colloquially termed nots, noughts and oughtn'ts by the experts), the minuses being the most interesting on account of the well-known dracological paradox: when two minuses hypercontiguate (an operation in the algebra of dragons corresponding roughly to simple multiplication), the product is 0.6 dragon, a real nonplusser.

Widać w tym fragmencie pewne różnice między oryginałem a przekładem, w szczególności pewien dowcip zniknął. Smoki „zerowe, urojone i ujemne" stały się smokami „mythical, chimerical, and purely hypothetical" – takie terminy w matematycznej terminologii w języku angielskim nie występują. Słowo „urojony" można przetłumaczyć na język angielski również jako „chimeric", ale wtedy niknie matematyczna analogia. Termin „imaginary" pojawił się, ale za późno, nie w tym miejscu, co trzeba. W przekładzie mamy co prawda świetne

„a real nonplusser", a sformułowanie „termed nots, noughts and oughtn'ts by the experts" jest nadzwyczajne, ja jednak – jako matematyk – odczuwam niedosyt.

Poświęcę jeszcze trochę uwagi poezji z *Wyprawy pierwszej A, czyli Elektrybałcie Trurla*. Klapaucjusz polecił maszynie, stworzonej przez Trurla i nazwanej Elektrybałtem, ułożenie wiersza „o miłości i śmierci, ale wszystko to musi być wyrażone językiem wyższej matematyki, a zwłaszcza algebry tensorów. Może być również wyższa topologia i analiza. A przy tym erotycznie silne, nawet zuchwałe i w sferach cybernetycznych". Elektrybałt, wbrew wątpliwościom Trurla, sprostał zadaniu. Rewelacyjnego wiersza nie będę tu w całości przytaczał (odsyłam do *Cyberiady*), zacytuję jedynie jedną z ośmiu zwrotek.

O, nie dożył rozkoszy, kto tak bez siwizny
Ani w przestrzeni Weyla, ani Brouwera
Studium topologiczne uściskiem otwiera
Badając Moebiusowi nieznane krzywizny!

W przekładzie Kandla również mamy osiem zwrotek, niewątpliwie z zachowanym stylem oryginału. Oto jedna ze zwrotek.

In Riemann, Hilbert or in Banach space
Let superscripts and subscripts go their ways
Our asymptotes no longer out of phase,
We shall encounter, counting, face to face.

Wiersz kończy się zwrotką następującą.

I see the eigenvalue in thine eye,
I hear the tender tensor in thy sigh.
Bernoulli would have been content to die,
Had he but known such
$a^2 \cos 2\varphi$?!

W przekładzie nie ma nazwisk Brouwera, Weyla, Moebiusa. Nie ma też rozmaitych obiektów matematycznych występujących w oryginale. Z kolei w polskiej wersji nie pojawiają się nazwiska Banacha, Hilberta, Riemanna, jak również Cauchy'ego, Venna, Eulera, Fouriera, występujące u Kandla. Jeśli porównamy nazwiska, to stwierdzimy, że wspólny dla obu utworów jest jedynie Christoffel. Kandel wspomina nieobecne u Lema łańcuchy Markowa, gradienty, asymptoty. Ostatnia zwrotka w wersji Kandla jest zupełnie inna niż u Lema – w oryginale nie ma żadnego wyrażenia matematycznego.

Wiersz w wersji angielskiej jest wspaniały i za taki utwór na pewno Kandlowi należą się wielkie wyrazy uznania. Jest to jednak inny wiersz – jak widać, „o miłości i śmierci językiem wyższej matematyki... itd.", można (choć Trur-

lowi wydawało się to niemożliwe) pisać wierszem nawet na wiele sposobów. W książce informacji o tak dużej ingerencji tłumacza nie znalazłem.

Sądzę, że Lem autoryzował tłumaczenie wiersza. Nie wiem, czy zauważył w przekładzie różnicę dotyczącą smoków zerowych i urojonych oraz rozbieżności w zawartej w obu wersjach matematyce.

Warto może dodać, że wiersz został przełożony na co najmniej osiem języków (przekłady można zobaczyć na stronie internetowej https://homepages.inf.ed.ac.uk/rmayr/cyberiad.html), przy czym na przykład tłumaczenie na język włoski jest ewidentnie wykonane na podstawie wersji Kandla, a na szwedzki, hiszpański i francuski według oryginału.

Nie było w tym tekście mowy o matematycznych (i innych) błędach w przekładach książek popularnonaukowych. Lista pomyłek i przekłamań, które zauważyłem w różnych pozycjach, jest bardzo długa, ale nie o to mi chodziło. Celem powyższych uwag było wskazanie pewnych niepokojących zjawisk, które pojawiają się przy tłumaczeniach związanych z matematyką, a przy okazji przekazanie dodatkowych informacji związanych z niektórymi wspomnianymi wyżej książkami.

Krzysztof Ciesielski
Uniwersytet Jagielloński
Instytut Matematyki
krzysztof.ciesielski@im.uj.edu.pl

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 403–421
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Michał Szurek (Warszawa)

Matematyka – moja droga

Wszyscy jesteśmy przyzwyczajeni, by swoje artykuły zaczynać od „The aim of the present paper is..." – i ja tak zacznę. Proszę przeczytać uważnie tytuł, dostrzec w nim podwójną interpretację. Celem artykułu jest jej rozwinięcie. Pomyślałem sobie: jeśli nie w *Wiadomościach Matematycznych*, to gdzie? Jeśli nie *teraz*, to kiedy?

Krótki biogram. Jak każdy czytelnik, od zawsze byłem zafascynowany matematyką. W szkole słyszałem o triumfach Polskiej Szkoły Matematycznej i studia przeszedłem „na głębokim wdechu". W egzaltacji utwierdziły mnie wykłady naszych Wielkich. Miałem jeszcze okazję słuchać Wacława Sierpińskiego, Kazimierza Kuratowskiego i Karola Borsuka, a także młodszego od nich Andrzeja Mostowskiego. Chodziłem na seminaria Stanisława Mazura i Andrzeja Grzegorczyka, a pracę magisterską pisałem z topologii geometrycznej pod kierunkiem Karola Borsuka. Piszę o tym również dlatego, by *w sposób uwikłany* dać do zrozumienia, ile mogę mieć lat.

1. Co to jest matematyka?

Jak wiemy, Richard Courant i Herbert Robbins napisali grubą książkę pod tym tytułem. Wydana po raz pierwszy w 1942 roku, nie straciła wiele ze swojej aktualności.

Myślę, że matematyka ma coś wspólnego z literaturą. Spotkałem się nawet z poglądem, że nasza nauka wzięła się z retoryki – konieczności uzasadniania własnych racji! A przecież taka konieczność powstaje w ustrojach demokratycznych, wobec tego matematyka jest pochodną demokracji. Mówi się teraz, że

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Babilończycy i Egipcjanie mieli raczej preinformatykę, nie prematematykę, bo nie troszczyli się o dowody. Jeśli sznurek 3-4-5 daje zawsze kąt prosty, to co tu deliberować dalej?

Przyjrzyjmy się zatem, jak piszemy (my, matematycy) własną powieść. Twórca powieści musi przyjąć pewne aksjomaty, być konsekwentny i wyprowadzać wnioski. Spotyka się (to raczej już nie autor, ale czytelnik) nawet z nieokreślonością, czymś w duchu pewnika wyboru albo hipotezy continuum. Co to jest *czterdzieści i cztery*? Czy 44, czy $\{40, 4\}$, no i w ogóle o co chodzi? Ile włosów miał na głowie Andrzej Kmicic, gdy wysadzał szwedzką kolubrynę? Wiemy, owszem, że była to liczba dodatnia (gdzieś w tekście jest, że mierzwił sobie czuprynę), ale w szerokim zakresie możemy przyjąć dowolnie. Zauważmy, że rzecz ma się inaczej z liczbą włosów Juliusza Cezara w idy marcowe 796 roku (licząc *ab urbe condita*). Tej liczby nie znamy, ale może dzięki nauce XXIII wieku ją poznamy? W każdym razie była to konkretna, dobrze określona liczba.

Jak wiemy, Bóg (który według Leopolda Kroneckera stworzył liczby naturalne, podczas gdy wszystko inne jest dziełem człowieka) ma pozaskończoną księgę ze wszystkimi najpiękniejszymi dowodami i gdy jest do nas szczególnie dobrze usposobiony, pokazuje nam jej fragment. Ta przypowieść Pála Erdősa (przypomnę jego lata życia: 1913–1996) dobrze się przyjęła, znamy *Dowody z księgi* [1]. Odnotujmy, że filozof brytyjski Peter Frederick Strawson (1919–2006) twierdził, że zdania fikcji (zarówno literackiej, jak i matematycznej) nie są zdaniami w sensie logicznym. Odnoszą się bowiem do przedmiotów nieistniejących, a więc nie są ani prawdziwe ani fałszywe... *Déjà vu*, wszystko już było – sofiści greccy (V–IV wiek p.n.e) wytykali, że geometria rozpatruje obiekty, których nie ma i być nie może. Nie jest więc nauką! W dwa tysiące lat później irlandzki filozof George Berkeley (1685–1753) w podobnym duchu krytykował Newtona – wielkości nieskończenie małych nie ma, a wszystko jest dzieleniem zera przez zero... Nawet Julian Tuwim, który snobował się na nieznajomość matematyki (wszak ułatwia to sukces towarzyski) pisał, że – tu cytat – „linią prostą łączą gwiazdy tylko głupcy i tchórze". W tym samym wierszu jest zresztą prorocze „chaosu, chaosu się uczmy" – polecam wyszukanie sobie tego wiersza w sieci. Z bardziej poważnych myślicieli, na przykład Roman Ingarden (1893–1970) był bliski poglądów Strawsona – zdania dzieła literackiego są to tak zwane quasi-sądy, ze względu na ich formalne podobieństwo do realnych sądów, twierdzeń. Nie posiadają jednak asercji, to znaczy nie roszczą sobie prawa do prawdziwości poza obrębem utworu (zob. [8]). Nieco podobnie wypowiadał się filozof Jerzy Pelc (1924–2017) – utwór literacki jest samodzielny i istnieje poza życiem.

Znany teoretykom literatury Gérard Genette (1930–2018, profesor Sorbony, kojarzony z narratologią) inaczej postrzega utwór literacki – typowo postmo-

dernistycznie – jako swoistą deklarację, ustanawiającą byt przedstawionych zjawisk. *Soit, sei, let it be*, niech się stanie. Dostrzegamy w tym dalekie echo średniowiecznego sporu o uniwersalia (streszczę, zniekształcając nieco – czy, gdyby nie było ludzkości, to siódemka byłaby liczbą pierwszą? A czy w ogóle istniałyby liczby?). Przenieśmy to na nasze podwórko. Mogę tak powiedzieć – definiując, powiedzmy, przestrzeń $C^{\infty}[0,1]$ ustanawiam, kreuję jej istnienie. Już ją widzę, jak daleki ląd. Wyodrębniając spośród wszystkich przestrzeni topologicznych te przestrzenie Hausdorffa, w których z każdego pokrycia mogę wybrać pokrycie skończone, działam, jak chciał Arystoteles – określam *genus proximum* (najbliższy rodzaj – przestrzenie topologiczne) i pokazuję, czym jest *differentia specifica* (różnica gatunkowa – być przestrzenią Hausdorffa i żeby się dało wybrać pokrycie skończone).

Mamy podobne zdanie o naszej, matematycznej twórczości, co poeci (o swojej) i ogólnie, twórcy literatury. Stwarzamy odrębne światy, do których wprowadzamy odbiorcę – jesteśmy odkrywcą i przewodnikiem. Czyż nie tak? W znanej anegdotce asystent informuje Hilberta, że pan X zrezygnował z pisania doktoratu i został poetą – „trochę szkoda, ale prawdę mówiąc, to i tak miał za mało wyobraźni, żeby zostać matematykiem." Czytelnikom zapewne spodoba się smaczna opinia Aleksandra Puszkina – „natchnienie trzeba mieć nawet w geometrii" – cytuję za Julianem Tuwimem.

Sądzę, że do każdego matematyka przemawia koncepcja *make-believe*, stanowisko spotykane właśnie w teorii literatury. Stwarzamy coś z wiarą, z nadaniem temu cech wiarygodności, ale odcienie tej wiary mogą być zróżnicowane. Stajemy się uczestnikami gry, prawie dziecinnej zabawy, gdzie udajemy, że tapczan to łódź podwodna, foremki z piaskiem to towar sprzedawany w sklepie i tak dalej. Wierzymy, że każda zabawa przerodzi się pewnego dnia w poważne zajęcie. Inne porównanie to teatr. Umawiamy się, by wierzyć w prezentowane wydarzenia, nie ingerując w akcję – nie wskakujemy przecież na scenę, by uwolnić Jasia i Małgosię z rąk czarownicy. Ale głęboko wierzymy w naszą fikcję matematyczną i odczuwamy wzruszenie, gdy zobaczymy ładne twierdzenie, dowód, pomysłową konstrukcję. Czytelnik może poczuć się dotknięty, że użyłem terminu „fikcja" na naszą twórczość. Odwołam się do konkretnej sytuacji. Bardzo wiele lat temu zapytałem – specjalnie – swojego bardzo utalentowanego studenta, jak rozumie właśnie to słowo. Zaczął „fikcja to oszu..." i nie dokończył zdania. Nie muszę wyjaśniać, co powiedział dalej. Jak wiemy, *novel* należy przecież do gatunku *fiction*. A mój były student jest teraz jednym z najlepszych matematyków swojego pokolenia.

Wspomnę Hala Bregga, astronautę w przejmującej powieści Stanisława Lema *Powrót z gwiazd* z 1960 roku (sam Lem oceniał ją nie najlepiej). W dziesię-

cioletniej podróży do Fomalhaut narrator powieści Hal ma zrozumiałe problemy ze swoją psychiką. By odzyskać równowagę, bierze się za matematykę:

> (...) z matematyką? Tam to dopiero zrozumiałem. Bo ona jest ponad wszystkim. Rzeczy Abla i Kroneckera są takie dobre dziś, jak przed czterystu laty, i zawsze tak będzie. Powstają nowe drogi, ale stare dalej prowadzą. Nie zarastają. Tam... tam jest wieczność. Tylko matematyka nie obawia się jej. Tam zrozumiałem, jaka jest ostateczna. I mocna. Nie było nic takiego. I to, że tak ciężko mi szło, też było dobre.

Czytelnicy łatwo pojmą, że trudno mi było docenić pogląd pewnego znanego i cenionego „starszego kolegi", pracującego w podstawach matematyki, który stwierdził, że dla niego matematyka to tylko i wyłącznie przekształcanie znaczków na papierze lub tablicy. Pomyślałem sobie, że albo chce odgrywać swoistego „macho", albo... nie ma szerszych horyzontów umysłowych. Francuski poeta Nicolas Boileau (1636–1711) napisał „umysł nie może się wzruszyć tym, w co nie wierzy".

Andrzej Grzegorczyk (1922–2014) mawiał, że matematyk ma dwa rodzaje przyjemności – dowodzenie i konstruowanie. Sądzę, że takich przyjemności mamy więcej (o czym dalej), a opinię Grzegorczyka rozumiem czasownikowo. Dowód czy konstrukcja jest, owszem, celem. Przyjemnością jest sama czynność. W piosence zespołu Skaldowie (z tekstem Agnieszki Osieckiej z mniej więcej 1968 roku) mamy wyraźnie: „[n]ie o to chodzi, by złowić króliczka, ale by gonić go".

2. Do rzeczy, czyli do matematyki

Ludwig Wittgenstein (1889–1951) na serio rozważał ontologiczną różnicę między takimi zdaniami, jak na przykład „niech *C* oznacza przestrzeń funkcji ciągłych" a „niech *C* będzie przestrzenią funkcji ciągłych." Na szczęście matematyk, dopóki jest matematykiem, nie musi parać się filozofią. Podobno to powiedział Leibniz, ale nie znalazłem potwierdzenia w źródłach.

Na pewnych zajęciach z dydaktyki dla przyszłych nauczycieli rzuciłem pytanie, po co uczymy matematyki. Ku mojemu zaskoczeniu, siedzący w pierwszym rzędzie pan powiedział zdziwiony: „jak to, po co? Żeby nauczyć matematyki, tej usługowej nauki dla fizyki!"

Miałem w związku z tym temat do dyskusji na zajęciach. Szkoda miejsca na jej opisywanie. Wszyscy wiedzą, jaka mogła być. Ale jest i druga skrajność – pogląd, że uczymy matematyki, żeby nauczyć myślenia. Spieszę wyjaśnić, że jak najbardziej się z tym zgadzam, tyle, że myślenia uczą i szachy, i brydż, i krzy-

żówki, i sudoku (popieram sudoku), i łamigłówki logiczne, i analiza kazusów prawnych, a być może nawet uważne słuchanie przemówień polityków (*być może* – bo nie słucham).

Wiemy, że matematyka uczy myślenia najlepiej, ale dlaczego? Tego nie umiem racjonalnie opisać. Może dlatego, że łączy ona nauki humanistyczne ze ścisłymi? Co więcej, jest przecież jedyną humanistyczną nauką ścisłą. Wyważę otwarte drzwi – mamy nauczać kombinacji liniowej kilku wektorów. Wymienię trzy z nich:

– czysta, schludna matematyka,
– pokazanie, że *to* się jednak przydaje,
– sposoby pracy z problemem intelektualnym.

Możemy się spierać, jakie powinny być współczynniki tej kombinacji liniowej. Nikt z czytelników nie wątpi, że dodatnie! Mam jednak wrażenie, że w praktyce niektórych nauczycieli bywają i ujemne. A zerowe to już na pewno.

3. Po co uczyć się skakać dwa metry? Weź tyczkę, skoczysz sześć!

Moje pierwsze własne pomysły wspomagania nauczania miały miejsce jeszcze w epoce *komputera łupanego*, w roku szkolnym 1985/1986, gdy uczyłem w warszawskim X liceum imienia Klementyny Hoffmanowej. Były tam klasy z rozszerzonym programem matematyki – tak jak w szkole imienia Klementa Gottwalda (w pięć lat potem wróciła ona do przedwojennego patrona, Stanisława Staszica). Kolega pokazał mi dowód (prostego zresztą) twierdzenia geometrycznego. Mniejsza o treść – chodziło o to, czy pewne proste są współpękowe. Wprowadził dane do programu Derive, nacisnął Enter i po nanosekundzie na ekranie pojawiło się *zero*. „O, widzisz, przecinają się w jednym punkcie!" Przyznałem, że to prawda, „przecież widzę! Zero to zero!" Spodobało mi się.

Próbowałem zatem dać uczniom do ręki „tyczkę-pomocniczkę" – komputer. Uwolnić ich od żmudnych rachunków – niech zostanie tylko myślenie. To była efektowna klapa! Nikt tego nie lubił. Dyrekcja, bo naruszam porządek i program nauczania. Nauczyciele informatyki, bo zabieram im pracownię i rządzę się nie na swoim podwórku. Ale skarżyli się i uczniowie – nie dość, że mamy umieć rozwiązywać równania normalnie, to jeszcze Szurek podwaja nam pracę i każe to robić przy klawiaturze.

Uczyłem na wyższej uczelni informatycznej – niepublicznej, ale „pod egidą PAN". „Gdzie jak gdzie, ale tu mogę intensywnie wykorzystywać komputer, w szczególności na zajęciach z algebry liniowej" – pomyślałem. Nie było programów „online", ale studenci (ówcześni niedawni maturzyści) już sprawnie posługiwali się Excelem.

Stało się. Studenci nauczyli się, że wyznacznik to coś, co oblicza się naciskając takie a takie klawisze. Zadanie „wyznacz taką liczbę x, że wektory $[1,1,1,1]$, $[1,2,3,4]$, $[2,3,4,x]$ są liniowo zależne" było poza ich zasięgiem. Nie przesadzam. To na wiele lat kazało mi wrócić do epoki króla Ćwieczka, na przykład do obliczania wyznaczników metodą „ma pan wyznacznik i szmatkę". Dorobiłem do tego ideologię, w którą nawet uwierzyłem. Tak bywa z ideologiami. Ale wierzę, że czytelnicy przyznają mi rację. Po prostu nawet, gdy mamy koparki, trzeba umieć wykopać dołek łopatą. Programy obliczeniowe pomagają tym, którzy... potrafiliby obliczenia wykonać i bez komputera. Jest to prawdą i teraz, gdy mamy świetne programy typu CAS. Teraz już wiem, jak wykorzystać je w nauczaniu, żeby niczego nie popsuć. Może skromniej – sądzę, że wiem.

To zjawisko ładnie spointował Szymon Kobyliński (1927–2002), znany „za moich czasów" rysownik, karykaturzysta, scenograf i felietonista. Mamy dwa znane znaki graficzne przedstawiające płeć męską i płeć żeńską. Który jest który? Jedno z nich jest schematycznym wyobrażeniem tarczy Marsa, drugie – zwierciadła Wenus. Dla osób, które znają choć trochę mitologię, ta wskazówka jest ułatwieniem. Dla osób bez kindersztuby jest to dodatkowa trudność – co ma z tym wspólnego Mars, co Wenus?

4. Dobre zadania

Wróćmy do tradycyjnej matematyki elementarnej. Pokażę kilka zadań. Nie pamiętam, z jakiego konkursu pochodziło takie oto. Graniastosłup sześciokątny prawidłowy przecięto płaszczyzną niedotykającą podstawy i przecinającą krawędzie boczne w punktach $A_1, \ldots, A_6$. Wykaż, że suma kwadratów odległości punktów A_1, A_3, A_5 od podstawy graniastosłupa jest równa sumie kwadratów odległości punktów A_2, A_4, A_6.

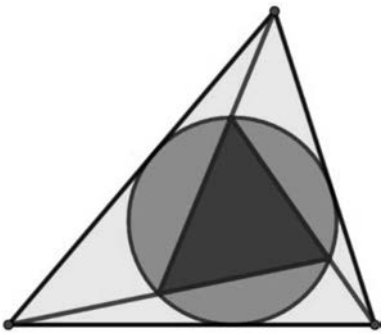
Napisanie kilku komend w programie Mathematica zajęło mi nie więcej niż dziesięć minut. Pojawiło się zero. Czytelnicy domyślają się, że obliczałem sumę naprzemienną kwadratów tych odległości. Zmieniłem graniastosłup sześciokątny na ośmiokątny. Zero. Potem na dziesięciokątny i dwunastokątny. Zero. Coś mnie tknęło i zmieniłem wykładnik dwa na trzy, myśląc sobie, że to nie ma sensu, bo potęgi wyższe niż druga pojawiają się w geometrii bardzo rzadko – chociaż, jeżeli czytelnik zaprotestuje: „jak to, a krzywe eliptyczne!" to... będzie miał rację. A w moim zadaniu wynik dla sześciokąta i trzecich potęg nie był zerowy, choć też interesujący (polecam jako zadanie). Dla ośmiokąta, dziesięciokąta i dwunastokąta tak! Dla piętnastokąta i szesnastokąta program się z początku zawieszał, poprawiłem – i tak, podczas zabawy, odkryłem, że jeżeli płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego $2n$-kątnego (ale nie

dochodzi do podstawy), tworząc w przekroju wielokąt wypukły $D_1D_2 \dots D_{2n}$ i jeżeli d_i jest odległością punktu D_i od płaszczyzny podstawy graniastosłupa, to dla $k = 0, 1, \dots, n-1$ mamy

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i d_i^k = 0.$$

Piszę, że wtedy odkryłem – bo nie miałem wątpliwości, że to jest prawda ogólna. Opublikowałem ten wynik w Delcie, prosząc czytelników o ścisłe uzasadnienie. Pierwszym, który je przysłał, był Zbigniew Marciniak. Teza moja jest oczywista – bez komputera nie miałbym szans wpaść na to, by badać wyższe potęgi. Kolejne zadanie dla czytelników brzmi: wymyślić i rozwiązać jak najwięcej wariantów tego zadania (a jakby tak wziąć walec i przeciąć go płaszczyzną?). Lubię właśnie zadania polegające na „ułożeniu zadania". Hans Freudenthal (1905–1990) sformułował to *explicite* – wykształcenie matematyczne ucznia nie będzie pełne, jeżeli nie rozwiąże on samodzielnie przez siebie ułożonego zadania.

Zadanie drugie wygląda nadzwyczaj niepozornie. Sformułuję je w postaci, w jakiej chciałbym widzieć zadania olimpijskie (przynajmniej niektóre). Spójrz, olimpijczyku, na rysunek 1 i ułóż zadanie, do którego on mógłby być ilustracją. Oceniać będziemy zarówno twoją fantazję, jak i elegancję rozwiązania.



1. Zadanie z przyszłej Olimpiady Matematycznej, rok 20xy.
Znajdź twierdzenie, do którego ilustracją jest ten rysunek.
Uogólnij, jak tylko potrafisz

I oto Filip Rękawek, uczeń liceum z Garwolina wyliczył, pod jakimi kątami należy poprowadzić proste z wierzchołków, przecinające okrąg wpisany tak, żeby konstrukcja się zamknęła. Przypomina to trochę *porism* Ponceleta (zob. [13]). To było jedno z wielu twierdzeń z pracy ucznia (odkrył między innymi związki tej konfiguracji ze złotym podziałem). Dostał za tę pracę dwa

srebrne medale – w polskich eliminacjach konkursu EUCYS w 2017 roku oraz w konkursie uczniowskich prac matematycznych redakcji Delty w 2018 roku.

Z innych zagadnień kuriozalnej geometrii elementarnej wspomnę ciekawe zadanie o kulach wpisanych w narożniki brył foremnych. Jak wiemy, od wymiaru pięć są tylko trzy wielościany foremne – kostka (odpowiednik sześcianu), bryła do niej dualna (odpowiednik ośmiościanu) i sympleks (jego krawędzie tworzą graf pełny). Kostka ma 2^n wierzchołków, bryła do niej dualna (będę ją nazywać „ośmiościanem", w cudzysłowie) $2n$, sympleks $n+1$. W narożniki tych brył wpisano jednakowe kule, sąsiednie styczne do siebie wzajemnie. Między nie wpisano „małą" kulkę. Wyznaczyć rozmiary tych kul.

Zadanie jest interesujące z dwóch względów. Po pierwsze są tu ciekawe rachunki (oczywiście wykonuje wszystko maszyna) i intrygujący wynik. Na przykład kule wpisane w narożniki sympleksu mają promienie

$$c_n = \frac{\sqrt{T(n)}-1}{n^2+n-2},$$

przy czym $T(n)$ jest n-tą liczbą trójkątną.

Wyznaczamy stąd promień „małej" kulki:

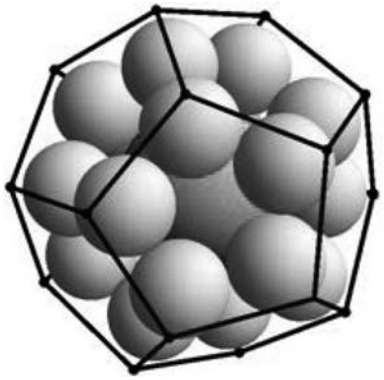
$$\rho(n) = \frac{(n+1)^2-(n+3)\sqrt{T(n)}}{(n+1)(n-1)(n+2)}.$$

Interesujące, że ich stosunek dąży do $\sqrt{2}-1$ (dobre zadanie dla studentów!) Po drugie, ciekawe jest, co dzieje się z kulką w środku. W kostce rozrasta się ona tak szybko, że wystaje poza nią, w „ośmiościanie" stabilizuje się, w sympleksie maleje asymptotycznie liniowo.

Na rysunku 2 mamy konfigurację dla dwunastościanu. Takich zadań jest bez liku – programy obliczeniowe otworzyły przed nami również takie możliwości. Można mieć zastrzeżenia ideologiczne, że nie jest to matematyka zbyt wysokich lotów. Ot, namiastka dla tych, którzy nie są zdolni latać pod obłoki. Co komu przyjdzie z takich rezultatów? Każdy się uśmiechnie, gdy podam wynik dla dwunastościanu. Jeżeli krawędź dwunastościanu ma długość jeden, to promień tej kulki wynosi ni mniej ni więcej, tylko

$$\tfrac{1}{38}\sqrt{3}\Big(23+11\sqrt{5}-2\sqrt{65+22\sqrt{5}}\Big) - \tfrac{1}{38}\sqrt{\tfrac{1}{10}(5+\sqrt{5})}\Big(-20+2\sqrt{5}+\sqrt{65+22\sqrt{5}}+\sqrt{5(65+22\sqrt{5})}\Big).$$

Kto nie wierzy, niech sprawdzi. Nie żartuję. Największa trudność to „wklepać" współrzędne wierzchołków dwunastościanu. Potem wszystko „samo się oblicza" – na odcinkach łączących wierzchołki ze środkiem dwunastościanu



2. Kule w dwunastościanie

umieszczamy kule styczne do ścian i wyliczamy, kiedy sąsiednie są styczne. Nie wychodzimy poza równania kwadratowe – to widać z wyniku.

Jakie jeszcze przyjemności może mieć matematyk? Z dużym zaangażowaniem wróciłem całkiem niedawno do bardzo klasycznej geometrii różniczkowej – tyle, że stosownie wyposażony. Z odkryć cieszyłem się... jak młody student. Nawet, gdy zdałem sobie sprawę, że to „musi być znane", że ktoś bawił się już tak samo. Mówimy przecież: „to należy do folkloru" – jeśli nawet nikt o tym nie pisał, to może dlatego, że nie widział potrzeby. Otóż wykazałem, że śruby (krzywe ślizgające się same po sobie ruchem posuwistym) istnieją tylko w nieparzystych wymiarach. Dowód da się szybko opowiedzieć. Dla krzywej opisanej w $\mathbb{R}^n$ parametrycznie przez funkcję $s \mapsto \rho(s)$, przy czym s jest długością łuku, określamy reper $r(s)$ jako ortonormalizację Grama–Schmidta $\rho(s)$. Wtedy hiperkrzywizny podlegają temu samemu prawu, co w wymiarze trzy:

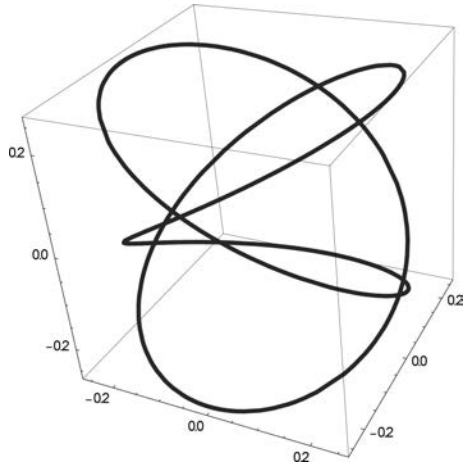
$$r' = \Delta r,$$

(wzory Freneta–Serreta), przy czym Δ jest macierzą antysymetryczną, której jedyne niezerowe elementy górnej części to właśnie hiperkrzywizny $\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$, położone równolegle do przekątnej macierzy. Dwie pierwsze z nich to znane z $\mathbb{R}^3$ krzywizna i torsja (skręcenie). Szukając krzywych o stałych hiperkrzywiznach, całkujemy równania Freneta–Serreta. Wielomian charakterystyczny macierzy Δ stopnia parzystego nie ma pierwiastków rzeczywistych. Dalej, z teorii równań różniczkowych o stałych współczynnikach wiemy, że w tej sytuacji rozwiązania równania różniczkowego są kombinacją liniową funkcji sinus i cosinus. Na przykład w $\mathbb{R}^4$ otrzymujemy (program *Mathematica* dobrze sobie radzi z prostymi równaniami różniczkowymi) takie krzywe o stałych hiperkrzywiznach:

$$r(s) = \left(\frac{a\cos\frac{s}{c}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{d^2}}}, \frac{a\sin\frac{s}{c}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{d^2}}}, \frac{b\cos\frac{s}{d}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{d^2}}}, \frac{b\sin\frac{s}{d}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{d^2}}} \right).$$

Zauważmy, że krzywe te są ograniczone. Nie ma tu koniecznego dla zwykłej śruby ruchu posuwistego. Oczywiście można zastąpić trzecią i czwartą współrzędną przez funkcje liniowe. Wtedy jednak krzywa będzie się mieścić w pewnej hiperpłaszczyźnie zawartej w $\mathbb{R}^4$.

No, właśnie. Za taki wynik (jeśli nawet byłby nowy) nie dostałbym żadnych punktów do „kariery naukowej". Ot, własność, którą mogę się delektować we własnym ogródku i pokazywać tylko przyjaciołom. Może studentom, jako ćwiczenie. Przyjemnie też było zobaczyć te krzywe, rzutowane na cztery niezależne $\mathbb{R}^3$.



3. Rzut krzywej o stałych niezerowych trzech hiperkrzywiznach w $\mathbb{R}^4$, odpowiadającej parametrom $a = b = 1$, $c = 2$, $d = 3$ na hiperpłaszczyznę $x_4 = 0$. Aż miło popatrzeć

I tak, to jest jedna z kolejnych przyjemności matematyka. Z Andrzejem Grzegorczykiem stykałem się rzadko – ale ceniłem jego opinie.

Choć jest to przecież zawarte w programie z Erlangen Feliksa Kleina, to być może dopiero Henri Poincaré (przypomnę lata życia: 1854–1912) pierwszy stwierdził otwarcie, że matematycy nie badają obiektów, tylko relacje między nimi. Alexander Grothendieck (1928–2014) powiedział, że w całej jego twórczości matematycznej nie interesowały go ani liczby ani wielkości – a tylko formy i struktury ukryte w obiektach matematycznych. Uważam, że to bardzo ważna opinia. Ja odbieram to jako powrót do Arystotelesa, do jego pytania o stosunek

materii i formy (zob. [9]), choć nie wiem, czy Grothendieck studiował dzieła Stagiryty. Jak w tym mieszczą się moje zadania o trójkącie, graniastosłupie i krzywych? Została mi w pamięci scenka z ćwiczeń z topologii algebraicznej, gdy byłem na trzecim roku studiów. Obliczaliśmy grupy homotopii sfer. Kolega zapytał, dlaczego zajmujemy się takimi mało ważnymi problemami. Prowadzący ćwiczenia asystent spojrzał na niego z góry i powiedział flegmatycznie – „a bo, proszę pana, to jest takie ciekawe!" Swoją drogą, mnie też ciekawi ten kalejdoskop wyników. I wobec tego jeszcze jedna ważna wypowiedź Heinricha Hertza z jego wykładu na 62 Zjeździe Przyrodników i Lekarzy Heidelbergu w 1889 roku (zob. [7]). Każdy z nas się zgodzi z jej przesłaniem, ale ktoś ją musiał pierwszy wypowiedzieć.

> Nie można studiować tych wspaniałych teorii bez odczucia, że formuły matematyczne mają niekiedy swoje niezależne życie, swój własny wewnętrzny rozum, że są mądrzejsze niż my, nawet mądrzejsze od swojego odkrywcy i dają nam więcej, niż przedtem w nie włożono.

I takie jest moje przesłanie. Jeżeli nas zaciekawią spektakularne własności oddzielnych obiektów, to może potem, w dorosłym już życiu matematycznym, łatwiej nam będzie zachować się tak, jak chciał i Poincaré, i Banach (dobry matematyk widzi analogie między twierdzeniami, bardzo dobry między teoriami, a znakomity – analogie między analogiami).

5. Co to jest dowód?

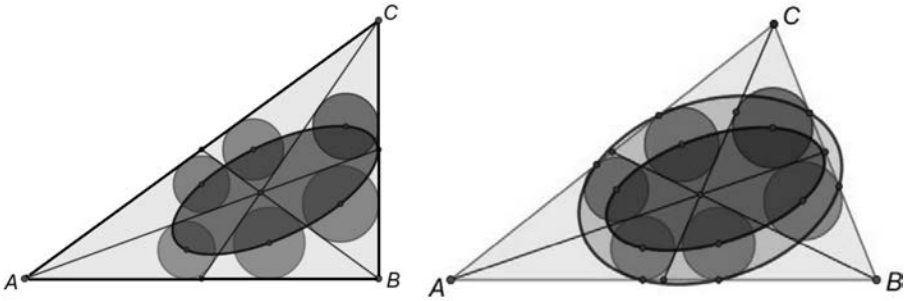
Wszyscy wiemy, że jest to ciąg formuł, wynikających kolejno jedna z drugiej, zaczynający się założeniem, a kończący tezą. Wszyscy też wiemy, że sprawdzenie tezy na kilku(-nastu, -dziesięciu, -set) przykładach dowodem nie jest.

Ale w innych dziedzinach słowo „dowód" może znaczyć trochę co innego. Gdy prokurator przeprowadzi dowód, że oskarżony jest winny – to rozumiemy, że po prostu *przekonał o tym* ławę przysięgłych. Gdyby wyrok w procesie karnym zależał od przekonania sądu o prawdziwości jakiejś hipotezy teorioliczbowej, nie liczący się z etyką zawodową prawnik mógłby argumentować: „wysoki sądzie, weźmy kilka przypadkowych liczb, a może wysoki sąd sam poda – sprawdzimy". Szansa, że sędzia trafi w kontrprzykład, jest zazwyczaj znikoma.

I jeszcze dwa powody, dla których to omawiam. Otóż zdarzyło mi się mieć zajęcia z matematyki w Instytucie X.Y przy humanistycznym wydziale jednego z najlepszych uniwersytetów w kraju. Miał to być wykład dla studenckiej elity i chodziło właśnie o humanistyczne aspekty Królowej Nauk. Próbowałem omówić pojęcie nieskończoności (potencjalnej i aktualnej), pokazać różnicę

między alef zero i continuum, a potem wdać się w dyskusję „jak jest naprawdę" – czy alef jeden to jest continuum, czy nie. Zacząłem od wykazania równoliczności $\mathbb{Z}$ i $2\mathbb{Z}$. „Ja rozumiem ten dowód, ale w niego nie wierzę" – powiedział na egzaminie student, o którym miałem dobre mniemanie. „Przecież widać, że liczb parzystych jest dwa razy mniej!". Czy nie tak reagowali matematycy *tamtego* fin de siècle na odkrycia Georga Cantora?

Drugi powód jest poważniejszy. Podoba mi się twierdzenie Antreasa P. Hatzipolakisa z 2003 roku. Podzielmy trójkąt ABC środkowymi boków na sześć małych trójkątów. W każdy z tych sześciu trójkątów wpisujemy okrąg. Wtedy środki tych okręgów leżą na elipsie. Dla czytelników, którym... też to się podoba, mam dwa zadania: czy prawdą jest (jak można przypuszczać na podstawie prawej części ilustracji przedstawionej na rys. 4), że i punkty styczności leżą na elipsie? Czy w trójkącie prostokątnym owa elipsa jest styczna do boku?



4. Ilustracja dotycząca twierdzenia Hatzipolakisa

Bez większego trudu zrobiłem te rysunki i *widzę*, że leżą (środki na elipsie). Jestem o tym przekonany, tak jak Bhâskara o prawdziwości twierdzenia Pitagorasa (słynne „patrz!"). Sprawdziłem „wszelkie możliwe" konfiguracje, jeżdżąc punktami. Nie potrzeba mi już matematycznego dowodu. Wiem, że to jest prawda. Więcej – nie jestem już takim dowodem zainteresowany. Skoro już wiem, to po co jeszcze dowód? No, może jako ciekawostka – wisienka na torcie, łamigłówka umysłowa. Gdy Królik zapytał Kubusia Puchatka, czy woli miód, czy marmoladę do chleba, Kubuś odpowiedział: „[j]edno i drugie" i zaraz potem dodał: „[a]le po co jeszcze chleb, Króliku? Nie rób sobie za wiele kłopotu".

Świadomie koloryzuję z tą „wisienką na torcie", ale podoba mi się sofizmat, że twierdzeń matematycznych nie trzeba w ogóle udowadniać. Bo jeżeli jest prawdziwe, to po co jeszcze dowód? A jeżeli nie jest prawdziwe, to i tak udowodnić się nie da.

Jednak, gdy na wydziałach, na których matematyka jest tylko użytkowa, chcę *przekonać* studentów o prawdziwości jakiegoś twierdzenia, zaczynam od

przykładów. Migam rysunkami, przeprowadzam animację... i wtedy dowód już pomijam. Po pewnym czasie i staraniach z mojej strony studenci już wierzą, że mam rację. To działa i przekonuje. Z drugiej strony, wspomnę kolegę, który – wykładając statystykę studentom geografii – włożył dużo wysiłku w uświadomienie słuchaczy, że mają do czynienia z funkcjami mierzalnymi. Nie sprawdzałem, czy mu się powiodło.

6. Zbrodnia bez kary?

Pewnego dnia przysiadłem i napisałem program (no, zestaw komend), który teoretycznie ma w małym palcu całą planimetrię (w wersji analitycznej, rzecz jasna). Pomysł był prosty, a i wykonanie niezbyt skomplikowane. W geometrii euklidesowej płaszczyzny są cztery podstawowe konstrukcje – prowadzenie linii prostej przez dwa punkty, wyznaczanie punktów przecięcia dwóch prostych, prostej z okręgiem i dwóch okręgów. Wszystko da się wrzucić do dowolnego programu, potrafiącego wykonywać rachunki symboliczne. Tak zaprogramowany „mózg elektronowy" wymyśli każdy dowód. Po prostu sprawdzi, co i jak.

W rzeczywistości nie jest tak prosto. Po pierwsze, trzeba się wykazać zręcznością programisty. Po drugie, niektóre zadania i tak okażą się obliczeniowo za trudne dla domowego prostego laptopa. Tak jest na przykład z cytowanym wyżej twierdzeniem Hatzipolakisa. Ale udaje mi się rozwiązać sporą część zadań olimpijskich.

Sam uważam, że jest to mordowanie geometrii z zimną krwią. Ale nie ja pierwszy... To śliski temat. Na szczęście geometria ma twardy żywot.

7. Twierdzenie o czterech barwach i moja rozprawa habilitacyjna

Mój szacunek dla „metod komputerowych" ma bardzo konkretne podstawy. Nie, nie, moja rozprawa habilitacyjna nie dotyczyła *four-color problem*. Każdy z czytelników *Wiadomości* wie, że dowód prawdziwości tej hipotezy (z 1976 roku) był pierwszym dowodem komputerowym – wywołało to spory o zasadność takich metod. Nie chodzi o to, że w procesorze komputera coś źle zadziała, tylko o ideologię – dowód ma być do końca zrozumiały dla człowieka.

Życie zweryfikowało te obiekcje. Jedną z głównych prac, składających się na moją rozprawę, był artykuł [11] napisany wspólnie z przemiłym Giorgio Ottavianim. Otóż, aby dowód jednego z kluczowych lematów był poprawny, musieliśmy wiedzieć, że zbiór punktów osobliwych pewnego zbioru algebraicznego ma wysoki kowymiar. Nie wahaliśmy się użyć *Macalauya* – wtedy bardzo

świeżego programu do obliczeń geometrii algebraicznej. Nie przyszło nam nawet do głowy, że ktoś (na przykład recenzent) będzie miał zastrzeżenia do takiego dowodu. Oczywiście nie miał. Pozwolę sobie zacytować dwa zdania z tej pracy. Nie jest istotne, co to wszystko znaczy.

> For the computations of singular loci the program [2] was useful. Moreover, with the help of [2] one can check that the equation of H in matrix form is $BQ^{-1}B = 0$ and the equation of G is (up to multiple structures) $BQ^{-1}BQ^{-1}B = 0$.

Znów wrócę do opinii o przyjemnościach matematyka w ujęciu Andrzeja Grzegorczyka i... Alexandra Grothendiecka. Było o tym wyżej. Odkrywanie ogólnych twierdzeń i szukanie „analogii między analogiami" jest na pewno przyjemnością bardzo wyrafinowaną. Porównuję ją zarówno do wspinaczki na niezdobyty zimą szczyt himalajski Nanga Parbat, jak i do gry w golfa na nieskazitelnie przystrzyżonym trawniku w ekskluzywnym klubie na Hawajach. Ale czy nie mieliście, czytelnicy, przyjemności z „policzenia" czegoś, z drobiazgowego opisu czegoś stosunkowo drobnego? Moja najlepsza praca naukowa zawierała właśnie opis *moduli space* dla pewnych klas stabilnych holomorficznych wiązek wektorowych na trójwymiarowej kwadryce. Wyjaśnię na uproszczonym przykładzie, dlaczego to takie ładne. Zamiast trójwymiarowej kwadryki wezmę najpierw zespoloną płaszczyznę rzutową i niech wiązki stabilne rangi dwa (wszystko jedno, co to są wiązki stabilne) będą miały klasy Cherna 0 lub 2. Jaką przestrzeń wypełniają one sobą? Gdzie mieszkają? Gdzie żyją w platońskim świecie idei? Do zrozumienia, o co mi chodzi, streszczę najpierw swoją „bajkę kwadratową".

Na pięknej, rozległej płaszczyźnie euklidesowej o osiach p, q mieszkają równania kwadratowe $x^2 - px + q = 0$ (minus przy p ma znaczenie kosmetyczne), każde takie równanie ma swojego *awatara* w punkcie (p, q). To jest *przestrzeń moduli* równań. Ich platoński świat idei. Po płaszczyźnie płynie modra rzeka Delta o równaniu $p^2 - 4q = 0$. „Rybki w rzece się pluskają, pierwiastki podwójne mają. Lecz wyróżnik w niej zerowy, więc nie mają rybki mowy, oj dana." Na północ od Delty rozciągają się Dzikie Pola, zasiedlone przez hultajów przeróżnych, zbiegów i ludzi luźnych. Ciemno tam, głucho i zimno. Obszar ten ogrzewa tylko ognisko, w punkcie $(0,1)$ rozpalone. Tam mieszkają równania o ujemnym wyróżniku, a więc bez pierwiastków rzeczywistych. Inaczej życie toczy się w ciepłym kraju na południe od Delty. Czytelnik bez trudu przekona się, jaki obszar zamieszkuje arystokracja, mająca dwa dodatnie pierwiastki („życie piękne i dostatnie, gdy obydwa masz dodatnie"), gdzie mieszka *upper middle class* ($x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $|x_1| > |x_2|$) , gdzie przebywa *lower middle class* ($x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $|x_1| < |x_2|$) i gdzie najubożsi (oba ujemne). „Gdy oba pierwiastki masz mniejsze od zera, to niedostatek ci w oczy spoziera."

W bajkach jest zawsze pewien wydźwięk społeczny. Z jakiej warstwy wywodzi się Król? Wszyscy czytelnicy zgodzą się, że Królem jest Równanie Złotego Podziału, a więc element niższej klasy średniej, ale mieszka on na kierownicy Delty (ćwiczenie z geometrii analitycznej). Rządzący krajem nie powinni mieć w sobie ani krzyny pychy.

I to byłaby właśnie przestrzeń *moduli* dla równań kwadratowych. Gdy uzwarcimy ją do płaszczyzny rzutowej, wtedy w punktach w nieskończoności leżeć będą równania liniowe. Bardzo teoretycznie rzecz biorąc, całe bogactwo geometrii płaszczyzny możemy teraz przełożyć na własności równań kwadratowych i na odwrót. Na jednej z dawnych Olimpiad Matematycznych (nie sprawdzałem, kiedy) było zadanie, które można w konwencji mojej bajki sformułować tak. Z danego punktu poza Dzikimi Polami prowadzimy styczną do Delty. Co wspólnego mają równania odpowiadające punktom tej prostej? Polecam także łatwe zadania dla rozgarniętych licealistów. Jedno z nich może brzmieć następująco: opisz w języku „bajki kwadratowej" graficzny sposób rozwiązywania równań kwadratowych (ten za pomocą okręgu Carlyle, zob. na przykład stronę [3]) . A oto przykład innego zadania. Niech *Deltunaj* będzie rzeką $p^2 - 4q = 1$. Przepływa on dwukrotnie pod szosą $q = 0$ w punktach x_1, x_2. Autostrady A_1 i A_2 są styczne do Deltunaju w tych punktach. Wykazać, że spotykają się one pod kątem prostym.

Na zajęciach z matematyki dyskretnej staram się przekonać studentów, by do zadania starali się dopisać jakąś treść – nawet dowcipną, śmieszną i absurdalną. Na własny użytek porównuję to – nieco ryzykownie – do kręcenia scen erotycznych w filmach (bądź co bądź, matematyka *dyskretna*). Otóż przed przystąpieniem do zdjęć należy dać parze aktorskiej czas na, jak to mówią filmowcy, oswojenie dekoracji. Ale studentom tak nie tłumaczę, bo mogliby sobie o mnie pomyśleć coś niewłaściwego. Niemniej jednak zasada „oswojenia zadania" jest przecież słuszna. Wszyscy wiemy to z własnej pracy.

Wracam jednak do wspomnianych nieco wyżej wiązek wektorowych na płaszczyźnie. Okazuje się, że mieszkają one w $\mathbb{P}^5 \setminus Q$ (przestrzeni pięciowymiarowej z usuniętą kwadryką), a odpowiedniość jest frapująca. Każda wiązka ma swoje „spektrum" – zbiór prostych, na których jest inna niż na prostej ogólnej. Rządzi tu bowiem twierdzenie, łączone z Grothendieckiem (1957), chociaż – jak to często bywa – prawdziwi odkrywcy to... Dedekind i Weber (zob. [5]). Dla wiązek, o których mowa, owo spektrum składa się z linii prostych, stycznych do pewnej nieosobliwej stożkowej. Mamy stąd odpowiedniość 1–1: wiązka–stożkowa. No, a stożkowe (czyli macierze symetryczne 3×3 modulo proporcjonalność) żyją sobie w właśnie w $\mathbb{P}^5$, a osobliwe są tam, gdzie zeruje się wyznacznik ich macierzy (to znikanie daje równanie kwadratowe). Czytelnikom, pamiętającym

geometrię elementarną, od razu kojarzy się to z „poryzmem" Ponceleta. Piękny powrót do przeszłości. To mi się zawsze podobało, związek starego z nowym – „lot w abstrakcję ma się zaczynać i kończyć na ziemi" (zob. [10]).

Dla wiązek (stabilnych, rangi 2, o klasach Cherna $c_1 = 0$, $c_2 = 4$) na trójwymiarowej kwadryce klasyfikacja ich *moduli space* doprowadza do *remake* ładnego wyniku Williamsona z pracy [14] z 1936 roku, klasyfikującego wzajemne położenie dwóch form kwadratowych sześciu zmiennych: symetrycznej i antysymetrycznej – a zatem klasyfikacji kwadryk w $\mathbb{P}^5$ względem pewnej dualności, pochodzącej od *null-correlation*. Jeszcze wyjaśnię to ostatnie zdanie: *null-correlation* to dualność punkt-hiperpłaszczyzna polegająca na odpowiedniości $x \leftrightarrow xN$, przy czym N jest nieosobliwą macierzą antysymetryczną. Na przykład w trójwymiarowej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^3$, po wyborze

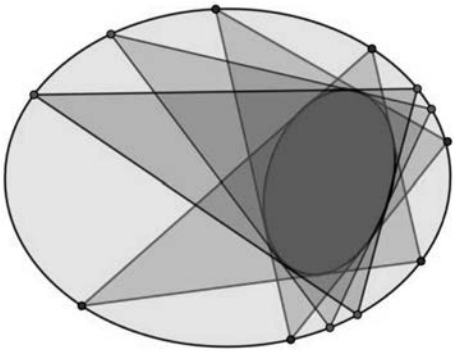
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

punktowi o współrzędnych jednorodnych $\{1, 2, 3, 4\}$ odpowiada hiperpłaszczyzna o „wektorze normalnym" $[-2, 1, 4, -3]$, czyli opisana równaniem $-2x_0 + x_1 + 4x_3 - 3x_4 = 0$. Z własności macierzy antysymetrycznych wynika, że punkt zawsze należy do skorelowanej z nim hiperpłaszczyzny. Przypomnę też, że algebra liniowa uczy, że nie ma naturalnego izomorfizmu przestrzeni skończenie wymiarowej z jej przestrzenią dualną. Potrzebne są bazy – albo właśnie wybór korelacji zerowej.

Taki jest mój gust matematyczny – łączenie starego z nowym. Nie jestem w tym bardzo oryginalny, prawda?

Reasumując i odnosząc się znów do myśli Andrzeja Grzegorczyka: miałem przyjemność z wyliczenia wszystkiego czegoś aż do końca. Przyznam się, że myślę o tym jeszcze dziś z przyjemnością... i wyobrażam sobie, jak ucieszyły się wiązki z naszego odkrycia. Zupełnie, jak rdzenni mieszkańcy Ameryki, którzy zawołali w 1492 roku – „jak to dobrze, że jesteś, Kolumbie! Wreszcie jesteśmy odkryci!"

Jean Dieudonné (1906–1992) był typowym bourbakistą i cenił twierdzenia jak najbardziej ogólne, a nie „przyziemne", jak na przykład własności okręgu dziewięciu punktów w trójkącie. Był chyba „osobistym wrogiem" tej nieskomplikowanej, choć ciekawej zależności, ładnie przenoszącej się zresztą na sympleksy ortocentryczne dowolnego wymiaru, zob. na przykład przedmowę w [4]. Jak i wszyscy bourbakiści, głosił, że w matematyce należy szukać idei, formy i ogólności. Nie na darmo opowiadano, że uczniowie szkół francuskich na pytanie,



5. Dwie stożkowe w „położeniu Ponceleta" (Jean-Victor Poncelet, 1788–1867). Styczne do „mniejszej" przecinają się na „większej". Każdej nieosobliwej stożkowej odpowiada stabilna holomorficzna wiązka wektorowa rangi 2, na płaszczyźnie $\mathbb{P}^2$, o klasach Cherna 0, 2. Myślę, że nie trzeba tu wszystkiego rozumieć do końca, żeby zachwycić się takim „powrotem do przeszłości". Polecam też czytelnikom prosty, acz zdumiewający dowód tej własności za pomocą... krzywych eliptycznych

ile to jest dwa razy trzy, mieli odpowiadać „tyle samo, co trzy razy dwa, albowiem mnożenie jest przemienne". Ale nie wierzę, że tak naprawdę było.

To prawda, rzeczy ogólne są wzniosłe, trudne, a ci, co je odkrywają, wytyczają kierunki rozwoju. Mówiąc dzisiejszym językiem, „dają zarobić" sferze młodych chłopców i dziewcząt, proponując im tematy doktoratów i habilitacji. Słusznie stawiamy tych *pionierów* na piedestały. Ale piedestały mają to do siebie, że nie ma na nich wiele miejsca, no i nie każdy umie się tam wdrapać. A ja, kiedy przystaję przy ławeczce Banacha–Nikodyma na krakowskich Plantach, nie czuję przecież zawiści ani zazdrości, a tylko radość, że rozumiem, na czym polegała wielkość tych uczonych. Nie jestem skazany na dziennikarskie, obiegowe, nie zawsze prawdziwe opowieści o nietypowych metodach pracy i zachowaniach Stefana Banacha (stolik szkocki, koniak, egzamin doktorski na korytarzu, czek z jedynką bez zer itp.).

8. Covid, blended learning, przyszłość

Pierwszą wersję tego artykułu pisałem wczesnym latem 2020 roku, świeżo po trzymiesięcznych wykładach i ćwiczeniach za pomocą Microsoft Teams. Spisałem tam swoje przemyślenia i doświadczenia. Do jesieni (a kończę artykuł pod koniec listopada) bardzo wiele się zmieniło i tamten fragment mojego tekstu błyskawicznie się zestarzał. Skasowałem więc to, co wcześniej napisałem na ten temat.

Rozmawiałem z wieloma nauczycielami, od nauczania początkowego do uniwersytetu. W listopadzie brałem udział w Kongresie Nauczycieli Innowacyj-

nych. Wszyscy (około 300 osób) byli właściwie zainteresowani głównie jednym – jak nauczać zdalnie. Wnioski były jednoznaczne. Gdy mamy nauczać zdalnie, trzeba to robić zupełnie, ale to zupełnie inaczej. Chodzi nie tylko o formę, ale o treść. Jak? Może będziemy wiedzieć za pięć lat, może dopiero za piętnaście. Nauczanie się na pewno zmieni, tak jak zmieniła się matematyka, którą nazywam „akademicką". Jak się zmieniła matematyka? No cóż, Hermann Weyl (1885–1955) powiedział: „gdyby ktoś chciał podać jednozdaniową definicję matematyki, należałoby powiedzieć, że jest to nauka o nieskończoności". W latach siedemdziesiątych przeczytałem wypowiedź naprawdę znakomitego polskiego matematyka, jednego z najlepszych w swoim pokoleniu: „zadania dotyczące zbiorów skończonych nie są zagadnieniami matematycznymi, bo wystarczy sprawdzić wszystkie przypadki". Dziś nawet trudno z tą opinią polemizować. *Tempora mutantur et nos mutamur in illis.* Czasy się zmieniają i my się z nimi zmieniamy.

Oczywiście, że trochę mi żal starej matematyki, również w naszym, rodzimym, z lekka siermiężnym wydaniu. Rozumiem jednak, że wszyscy zawsze tęsknimy „tylko i aż" do określonego punktu w naszej prywatnej czasoprzestrzeni. To, jak i narzekanie na „dzisiejszą młodzież" przewija się przez całe dzieje. A tym, jak będzie wyglądać nauczanie matematyki, jestem bardzo zaciekawiony. Może ktoś mi jeszcze opowie?

Miałem w życiu zawodowym dużo szczęścia. Po zerowe, że w szkole znałem *Lilavati* i *Śladami Pitagorasa* niemal na pamięć. Po pierwsze, że studiowałem wtedy, gdy Wielcy Polskiej Szkoły Matematycznej byli jeszcze aktywni. Po drugie, że Hanna Szmuszkowicz (1910–1993) wyłuskała mnie spośród wielu dobrych studentów. Po trzecie, że trafiłem do zakładu Andrzeja Białynickiego-Biruli. Po czwarte, że mój student, XY, szybko (a właściwie natychmiast) okazał się lepszy ode mnie. Po piąte, że tematyka, którą się zająłem w wieku dojrzałym, okazała się być „na topie" i dalej się rozwija, a ja zdążyłem dorzucić jakieś przyczynki. Od czasu do czasu oglądam sobie, co się tam dzieje. Proszę, proszę, już uzwarcamy przestrzenie *moduli*. Po szóste... ale pora kończyć artykuł. *Matematyka – moja droga*.

9. Koda (w tonacji molowej)

Jak podają niektóre źródła, wchodzących do Akademii Zamojskiej (istniejącej w latach 1595–1784) witał napis „Takie będą Rzeczypospolite, jakie ich młodzieży chowanie". Powinniśmy sobie uświadomić, że prawdziwe jest i twierdzenie odwrotne: „Takie będzie młodzieży chowanie, jakie są Rzeczpospolite".

Bibliografia

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Dowody z Księgi*, PWN, Warszawa 2002.
[2] D. Bayer, M. Stillman, *Macaulay. A system for computation in algebraic geometry and commutative algebra*, https://www.math.columbia.edu/~bayer/Macaulay/ (dostęp: 2020-11-25).
[3] C. Boucher, *Carlyle Circle*, https://demonstrations.wolfram.com/CarlyleCircle/ (dostęp: 2020-11-25).
[4] J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964.
[5] R. Dedekind, H. Weber, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen*, J. Reine Angew. Math. 92 (1882), 181–290.
[6] A. Grothendieck, *Récoltes et semailles. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, 1986, https://jmrlivres.files.wordpress.com/2009/11/recoltes-et-semailles.pdf (dostęp: 2020-11-25).
[7] H. Hertz, *Über die Beziehungen zwischen Licht und Elektrizität, 1889*, [w:] *Von der Naturforschung zur Naturwissenschaft* (H. Autrum, red.), Springer, Berlin––Heidelberg 1987.
[8] R. Ingarden, *O tak zwanej „prawdzie" w literaturze*, Przegląd Współczesny 61 (1937), nr 182, 80–94, nr 183 (1937), 72–91.
[9] L. Kołakowski, *O co nas pytają wielcy filozofowie*, Znak, Kraków 2005.
[10] M. Kline, *Why the Professor Can't Teach*: *Mathematics and the Dilemma of University Education*, St. Martin's Press, New York 1977.
[11] G. Ottaviani, M. Szurek (appendix: N. Manolache), *On moduli of stable 2-bundles with small Chern classes on* Q_3, Ann. Mat. Pura Appl. 157 (1994), 191–241.
[12] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Springer, Boston, MA 1980.
[13] E. W. Weisstein, *Poncelet's Porism, from MathWorld – a Wolfram web resource*, https://mathworld.wolfram.com/PonceletsPorism.html (dostęp: 2020-11-25).
[14] J. Williamson, *On an algebraic problem, concerning the normal forms of linear dynamical systems*, Amer. J. Math. 58 (1936), 141–163.

Michał Szurek
Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
szurek.michal@gmail.com

URZĄD DZIELNICOWY
Kraków-Krowodrza
WYDZIAŁ SPRAW SPOŁECZNO-ADMINISTRACYJNYCH
ul. Lobeiska 27; 30-088 Kraków

Nr SA.II-6018/192/82 Kraków dnia 1 lipca 1982r.

D E C Y Z J A

Na podstawie art.13 ust.4 Dekretu z dnia 12 grudnia 1981r. o stanie wojennym / Dz.U.Nr 29, poz.154 / oraz art.104 k.p.a. po rozpatrzeniu wniosku Krakowskiego Oddziału Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Krakowie ul.Reymonta 4 o wydanie zezwolenia na zorganizowanie w dniu 1 lipca 1982r. odczytu w lokalu Instytutu Matematyki U.J. w Krakowie ul.Reymonta 4

o d m a w i a s i ę

udzielenia zezwolenia Zarządowi Krakowskiego Oddziału Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Krakowie na zorganizowanie i odbycie w dniu 1 lipca 1982r. zgromadzenia w formie posiedzenia naukowego / odczytu / w lokalu Instytutu Matematyki UJ w Krakowie ul.Reymonta 4.

U z a s a d n i e n i e :

Odbycie zgromadzenia mogłoby zagrozić interesom bezpieczeństwa.

Zgodnie z treścią art.53 ust.1 powołanego Dekretu - decyzja niniejsza jest ostateczna.

URZĄD DZIELNICOWY KRAKÓW-KROWODRZA 1

Z up. Naczelnika Dzielnicy
Tadeusz Kilina
Kierownik Wydziału Spraw Społeczno-Administracyjnych

Otrzymują:

1/ Zarząd Krak.Oddziału Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Krakowie ul.Reymonta 4
2/ Komenda Dzielnicowa MO Krowodrza w Krakowie ul.Batorego 25
3/ A/a

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 423–431
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krzysztof Ciesielski (Kraków)

Tryptyk wyborczy, czyli przygody matematyka z wyborami

Matematycznymi aspektami wyborów zacząłem się interesować w 1991 roku. Wtedy właśnie odbywały się w Polsce pierwsze po II wojnie światowej naprawdę wolne wybory do sejmu. Głosowano „na listy" (każdy oddawał jeden głos, na przykład w okręgu wyborczym obejmującym województwo krakowskie wybierano trzynastu posłów) – i nie mogłem się dowiedzieć, jak te głosy będą przeliczane na mandaty poselskie... W telewizji, radiu, prasie podawano liczne wiadomości o partiach i ich kandydatach; wielokrotnie tłumaczono, jak głosować, by głos był ważny; opisywano rozmaite wydarzenia z kampanii wyborczej – ale nie informowano o tym, w jaki sposób ustalane są liczby mandatów na podstawie liczb głosów uzyskanych przez odpowiednie ugrupowania. W Internecie sprawdzić tego nie mogłem – pierwsza polska strona www powstała cztery lata później. W końcu udałem się do budynku sądu w Krakowie i nabyłem (o ile pamiętam, za kwotę porównywalną z ceną biletu tramwajowego) *Dziennik Ustaw*, w którym wydrukowano odpowiednią ustawę, zawierającą w szczególności zasady przeliczania głosów na liczby mandatów. Te zasady były wyjątkowo proste. Można się zastanawiać, czemu są one, również teraz, praktycznie skrywane w tajemnicy (choć obecnie można je jednak znaleźć w Internecie). Czyżby dlatego, by wyborcy się nad nimi zbyt dokładnie nie zastanawiali?

Po przeczytaniu odnośnych fragmentów ustawy dość szybko zobaczyłem, do jakich paradoksów takie przeliczanie głosów może doprowadzić... Wówczas robiono to metodą Hamiltona (zob. [2]). Uznałem, że warto się podzielić moją wiedzą z innymi, a przede wszystkim wytłumaczyć, na jakiej zasadzie posłowie zostali wybrani. Napisałem na ten temat artykuł [4] i wysłałem do

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

redakcji wydawanego w Krakowie *Dziennika Polskiego*. Opublikowano. Tak zaczęły się moje przygody z matematyką wyborczą. O trzech z nich będzie tu mowa.

1. Prawo Ciesielskiego

Od czasu do czasu wygłaszam (najczęściej dla uczniów i nauczycieli) pogadanki matematyczne. Zdarzało mi się opowiadać o matematyce ukrytej za wyborami i o paradoksach wyborczych. W latach dziewięćdziesiątych XX wieku współpracowałem z miesięcznikiem *Wiedza i Życie*. Kiedyś wspomniałem o tych prelekcjach redaktorowi naczelnemu tego czasopisma, Andrzejowi Gorzymowi, a on zasugerował, bym na ten temat napisał artykuł. Tak się stało i ukazał się tekst [3]. Jednym z paradoksów w nim opisanych była obserwacja, że przy metodzie liczenia głosów zmodyfikowaną metodą Sainte-Laguë może się zdarzyć, że dwa ugrupowania, na które w sumie padnie mniej głosów niż na trzecie ugrupowanie, dostaną w parlamencie więcej mandatów niż to trzecie. W algorytmie określania liczby mandatów według metody Sainte-Laguë liczby głosów uzyskane przez poszczególne partie dzielone są przez kolejne liczby nieparzyste, po czym spośród uzyskanych ilorazów wybiera się tyle największych, ile w okręgu jest mandatów do rozdziału – ugrupowanie, któremu przypadło k z tych ilorazów, dostaje k mandatów. Matematyczna geneza tej metody podana jest artykule [2]. W zmodyfikowanej metodzie Sainte-Laguë zamiast dzielić przez 1 dzieli się przez 1,4. W tekście [3] podany był przykład przedstawiony poniżej (zawsze w takich sytuacjach używam fikcyjnych nazw partii) – gwiazdkami zaznaczone są ilorazy dające mandat.

	Głosów	: 1,4	: 3	: 5	: 7	Liczba mandatów
Saperzy	1050	⋆750	⋆350	⋆210	150	3
Piłkarze	504	⋆380	⋆168	101		2
Koszykarze	504	⋆380	⋆168	101		2

Przykład pokazuje, że przy przyjęciu tej zasady rozdziału mandatów może się okazać, że pewna partia otrzymuje ponad połowę głosów wyborców, ale to ich przeciwnicy mają bezwzględną większość w parlamencie. W artykule napisałem również, że gdyby o mandaty ubiegały się tylko dwie partie: Saperów i Sportowców, i gdyby Sportowcy mieli poparcie nieznacznie mniejsze, to mogli-

by się sztucznie podzielić na Piłkarzy i Koszykarzy, by dzięki temu manewrowi zyskać większość w wybranym organie.

Artykuł ukazał się w sierpniu 1997 roku, a wybory do Sejmu RP miały miejsce we wrześniu tego roku. Jak się później dowiedziałem, artykuł wywołał spore zainteresowanie w kilku sztabach wyborczych, a w niektórych – jak mi powiedziano – stał się „lekturą obowiązkową". Niemniej, przyniósł jeszcze jeden oryginalny skutek.

Opisaną wyżej obserwację rozpowszechnił Jerzy Przystawa[1], nadając jej nazwę *prawa Ciesielskiego* (zob. książkę [5]). Co więcej, prawo to zostało zastosowane w praktyce... W 2002 roku wybory do rad miejskich przeprowadzane były właśnie zmodyfikowaną metodą Sainte-Laguë. Zacytuję fragment tekstu [6] autorstwa Janusza Sanockiego[2].

> Ponieważ okręgi w wyborach do Rady Miejskiej w Nysie były 4-5-mandatowe, do zdobycia większości musieliśmy zdobyć w każdym okręgu co najmniej 3 mandaty.
>
> Wstępna analiza wskazywała, że nasza Liga Nyska może liczyć na ok. 40% poparcia wyborczego, co pozwalało spokojnie zdobyć 2 mandaty, ale ten dający większość – trzeci – już mógł być poza naszym zasięgiem.
>
> Postanowiliśmy zatem, że podzielimy nasze siły na dwa ugrupowania i utworzyliśmy oprócz Ligi Nyskiej drugą listę – Komitet Obywatelski Ziemi Nyskiej.
>
> Całą kampanię wyborczę, nakłady na materiały, intensywność propagandy etc. prowadziliśmy wg proporcji 2:1 – planując, że część poparcia trzeba umiejętnie przekazać z Ligi na drugą listę.
>
> [...]
>
> Plan opracowany i zrealizowany konsekwentnie na podstawie „Prawa Ciesielskiego" przyniósł pełen sukces. W 23-osobowej Radzie Miejskiej w Nysie Liga Nyska zdobyła 9 mandatów, Komitet Obywatelski 3. Nasi przeciwnicy z SLD, którzy mieli jedną listę, zdobyli 6 mandatów, 5 mandatów zdobyły pozostałe cztery ugrupowania.
>
> Mając 12 mandatów stanowiliśmy bezwzględną większość w radzie. Gdybyśmy nie zastosowali wybiegu z dwoma listami i utworzyli wspólną listę, zdobylibyśmy najprawdopodobniej 11 mandatów i nasza pozycja byłaby znacznie słabsza.

I oto mamy nader wymowny przykład praktycznego zastosowania matematyki w jakże życiowych sprawach.

---

[1] Jerzy Przystawa (1939–2012), fizyk, profesor Uniwersytetu Wrocławskiego, aktywnie działający na rzecz wprowadzenia w Polsce jednomandatowych okręgów wyborczych.

[2] Janusz Sanocki (1954–2020), w latach 1994–2006 radny miejski Nysy, w latach 1998–2001 burmistrz Nysy.

2. Protest wyborczy

Teraz przejdę do sprawy wielce odległej w wymowie od opisanej przed chwilą. Otóż jestem jedną z – bardzo nielicznych, jak sądzę – osób, o której można na podstawie wyroku Sądu Najwyższego (!) powiedzieć, że nie nadaje się do wykonywanego przez siebie zawodu matematyka.

Od 1991 roku wybory do Sejmu RP odbywają się według głosowania „na listy" zgodnie z ordynacją nazywaną „proporcjonalną", mimo że wcale proporcjonalną nie jest. W 1993 roku obowiązywała metoda d'Hondta (zob. [2]), przy czym wprowadzono wymóg, że przy ustalaniu składu Sejmu brane pod uwagę będą wyłącznie ugrupowania, które osiągnęły odpowiedni wynik w skali kraju (zastosowano tzw. „próg wyborczy"). Próg ten był inny dla startujących w wyborach partii (wynosił 5%), a inny dla koalicji wyborczych (8%).

W wyborach 1993 roku brało udział wiele ugrupowań – można było się spodziewać, że głosy wyborców będą mocno rozrzucone. Mogło się zdarzyć, iż próg zostanie osiągnięty przez bardzo małą liczbę partii czy koalicji. Uznano zatem za celowe wpisać do ordynacji punkt mówiący o obniżeniu progu w przypadku, gdy tylko nieliczni uzyskają wymagany rezultat. Progi dla partii i koalicji były różne, więc obniżenia też były różne. Zacytujmy teraz fragment ustawy z dnia 2 czerwca 1993 roku *Ordynacja wyborcza do Sejmu Rzeczypospolitej Polskiej*:

> Art. 3. 1. W podziale mandatów w okręgach wyborczych uwzględnia się wyłącznie okręgowe listy kandydatów na posłów tych komitetów wyborczych, których listy otrzymały co najmniej 5% ważnie oddanych głosów w skali kraju.
>
> 2. Okręgowe listy kandydatów na posłów koalicyjnych komitetów wyborczych uwzględnia się w podziale mandatów w okręgach wyborczych, jeżeli ich listy otrzymały co najmniej 8% ważnie oddanych głosów w skali kraju.
>
> [...]
>
> Art. 6. Jeżeli warunku określonego w art. 3 ust. 1 lub ust. 2 nie spełnią okręgowe listy kandydatów na posłów żadnego komitetu wyborczego bądź któryś z wymienionych warunków spełniony zostanie przez listy kandydatów tylko jednego komitetu wyborczego, w podziale mandatów w okręgach wyborczych uwzględnia się listy kandydatów komitetów wyborczych, które otrzymały co najmniej 3% ważnie oddanych głosów w skali kraju. Listy koalicji wyborczych uwzględnia się, jeżeli otrzymały co najmniej 5% ważnie oddanych głosów w skali kraju.

Można się domyślić, że posłom przygotowującym ustawę chodziło o obniżenie progów w przypadku, gdyby z powodu nieosiągnięcia progu do Sejmu weszli kandydaci co najwyżej jednego komitetu wyborczego. Sformułowano to

jednak inaczej – ustawa została przegłosowana przez Sejm i Senat, a następnie podpisana przez Prezydenta.

Procentowe wyniki wyborów komitetów z najlepszymi wynikami (nie będę tu podawał, które ugrupowania osiągnęły te wyniki) były następujące:

Koalicje: 20,41%, 6,37%;

Partie: 15,40%, 10,59%, 7,28%, 5,77%, 5,41%, 4,90%, 4,42%, 3,99%, 3,18%.

Odpowiednie progi osiągnęła jedna koalicja i pięć partii. Warunek z artykułu 3 ust. 2 został spełniony przez tylko jeden komitet. Zgodnie z artykułem 6, progi powinny zostać obniżone – tak się jednak nie stało.

Zgodnie z ustawą – w sytuacji, gdy naruszone zostały przepisy ustawy o ordynacji wyborczej, do Sądu Najwyższego protest może wnieść każdy wyborca. I ja taki protest złożyłem, wnioskując o obniżenie progów.

Nie będę tu cytował dokładnego (ponad dwustronicowego) uzasadnienia, w którym powoływałem się na prawa logiki, dokonam jedynie krótkiego streszczenia. Napisałem, że w art. 6 jest implikacja, a jeśli poprzednik implikacji jest prawdziwy, to – by implikacja była prawdziwa – następnik też musi zostać spełniony. W poprzedniku implikacji jest zaś alternatywa, dla której prawdziwości wystarczy spełnienie jednego z podanych w niej warunków. A warunek *któryś z wymienionych warunków spełniony zostanie przez listy kandydatów tylko jednego komitetu wyborczego*, przy czym „wymienione warunki" to były warunki o progach dla partii i koalicji, został spełniony – tylko jedna koalicja osiągnęła próg...

W proteście opisałem wszystko bardzo dokładnie, niezwykle starannie powołując się na odpowiednie prawa logiki, i dodatkowo podałem przykład:

> [...] gdy dziecko w szkole otrzyma ocenę niedostateczną, nauczyciel wzywa ojca do szkoły. Pan Kowalski ma synów Jasia i Stasia oraz córkę Małgosię. Stwierdzamy: „Gdy córka pana Kowalskiego bądź któryś z synów pana Kowalskiego otrzyma ocenę niedostateczną, pan Kowalski zostanie wezwany do szkoły". Jaś i Małgosia dostali z klasówki piątki, Staś niestety ocenę niedostateczną. Czy pan Kowalski zostanie wezwany do szkoły? Oczywiście, że tak!

O posiedzeniu Sądu Najwyższego nie zostałem powiadomiony. Otrzymałem pocztą decyzję, że Sąd Najwyższy w składzie: przewodniczący Janusz Borkowski oraz sędziowie Maria Mańkowska i Walery Masewicz wydał opinię, że protest wyborczy jest nieuzasadniony. Uzasadnienie zawierało ponad 8 (!) stron maszynopisu, zacytuję fragment.

> Uzasadnienie.
>
> Pan Krzysztof Ciesielski, używający tytułu dr nauk matematycznych, zamieszkały w Krakowie, wniósł protest wyborczy [...]

> Sąd Najwyższy uznaje za konieczne podkreślić, że zarzuty protestu wyborczego dotknięte są podstawową wadą wnioskowania dedukcyjnego, które polegać powinno na wyciąganiu logicznych wniosków z prawdziwych, sprawdzonych przesłanek, a ma raczej cechy znamienne dla wnioskowania spontanicznego, które znamienne jest tym, że nie uwzględnia zależności między tym co „poprzedza" i „następuje" i w którym wniosek końcowy nie jest kierowany przez uprzednio postawione, prawdziwe i zweryfikowane zdanie.

Od decyzji Sądu odwołać się już nie mogłem. Jednakże to, co Sąd Najwyższy uznał za konieczne podkreślić, było opinią miażdżącą i wyraźnie pokazywało, że nie mam wystarczających kompetencji do tego, by pracować jako matematyk na uniwersytecie. Poszedłem więc do ówczesnego dyrektora Instytutu Matematyki UJ, a jednocześnie kierownika mojej katedry, profesora Andrzeja Pelczara i powiedziałem mu, że otrzymałem wyrok Sądu Najwyższego, z którego jednoznacznie wynika, że zatrudnienie mnie w Instytucie Matematyki jest nieporozumieniem. Zapytałem, czy w związku z tym powinienem się zwolnić z pracy na UJ. Andrzej Pelczar, bardzo zainteresowany tym, co ode mnie usłyszał, zapytał o szczegóły, a gdy o nich opowiedziałem, rzekł „niech pan pracuje dalej".

3. Biegły sądowy

Przytrafiło mi się również matematyczne zetknięcie z sądem w zupełnie innym charakterze. Byłem bowiem biegłym sądowym jako matematyk.

W 2002 roku do dyrektora Instytutu Matematyki UJ nadeszło pismo z prośbą o wskazanie matematyka, który mógłby być biegłym sądowym w sprawie dotyczącej wyborów. Dyrektor zaproponował mnie, a Sąd Rejonowy to zaakceptował (zapewne komunikacja między Sądem Najwyższym i sądami rejonowymi nie była najlepsza i nie znajdowałem się na żadnej „czarnej liście" jako osoba niekompetentna w tych sprawach).

O co chodziło? Otóż parę lat wcześniej odbywały się w Krakowie wybory do rad dzielnic, kilka osób zostało w związku z tym skazanych przez Sąd Rejonowy, ale odwołały się od wyroku – przy rozpatrywaniu tego odwołania potrzebowano biegłego.

Wybory do rad dzielnic odbywały się równocześnie z wyborami do Rady Miasta Krakowa, wyborcy głosowali w tych samych lokalach, przy czym w innych komisjach. Wybory do rad dzielnic odbywają się inaczej niż wybory do rady miasta, mianowicie w okręgach jednomandatowych. Dzielnica podzielona zostaje na kilkadziesiąt obwodów wyborczych, w każdym z nich o mandat radnego ubiega się kilka osób — wybrany zostaje ten kandydat, który otrzyma najwięcej głosów. Liczba lokali, w których wyborcy głosują, jest jednak mniejsza

niż liczba mandatów we wszystkich dzielnicach Krakowa, poza tym zazwyczaj liczba osób gotowych do pracy w komisjach wyborczych nie wystarcza do oddzielnego przeprowadzenia wyborów w każdym obwodzie osobno (w komisjach zajmujących się wyborami do Rady Miasta muszą być inne osoby). W tej sytuacji w niektórych lokalach ta sama obwodowa komisja wyborcza przeprowadzała wybory dla dwóch (jednomandatowych) obwodów wyborczych do tej samej rady dzielnicy. Sprawa, o której mowa, dotyczyła właśnie jednej z takich komisji – przeprowadzającej wybory do rady pewnej dzielnicy w obwodach 1 i 2 (prawdziwe numery tych obwodów były inne).

Cóż się zdarzyło? Gdy do lokalu wyborczego przychodził wyborca zamierzający oddać głos, to obwodowa komisja (oczywiście wcześniej przeszkolona za pieniądze podatników) wręczała wyborcy – niezależnie od tego, w którym mieszkał obwodzie – dwie karty do głosowania: dotyczącą obwodu 1 i obwodu 2. Wyborcy (oczywiście w pełni świadomi zasad wyborów do rad dzielnic) brali obie karty, stawiali krzyżyki i wrzucali do urny.

Nic dziwnego, że przy tak szczodrym gospodarowaniu kartami do głosowania po kilku godzinach ich zabrakło. Przy takich wyborach liczba drukowanych kart jest znacznie mniejsza od liczby zarejestrowanych wyborców, gdyż wiadomo, że frekwencja wyborcza wynosi zazwyczaj mniej niż 50%. Jeśli okazuje się, że kart brakuje, to natychmiast są one dodrukowywane i przekazywane odpowiedniej komisji. Tak się stało i w tym przypadku. Po informacji, że kart zabrakło, Miejska Komisja Wyborcza błyskawicznie zaordynowała wydrukowanie po 200 dodatkowych kart dla obu obwodów. Karty przekazano obwodowej komisji, która nadal dawała każdemu wyborcy po dwie karty... Oczywiście po pewnym czasie znowu kart zabrakło i komisja poprosiła o kolejne.

Ta prośba wzbudziła zrozumiałe zainteresowanie Miejskiej Komisji Wyborczej. Miała ona informacje o dotychczasowej frekwencji wyborczej i tu nagle się okazało, że w dwóch obwodach frekwencja ta jest dwukrotnie wyższa... Co tam się dzieje, jakaś wyjątkowa walka wyborcza? Wraz z kolejnymi kartami do głosowania na miejsce przyjechał przedstawiciel Miejskiej Komisji. Dowiedział się, co się stało, chwycił się za głowę, po czym polecił obwodowej komisji wydawać wyborcom już po jednej (odpowiedniej) karcie, komentując, że te wybory i tak będą unieważnione i zostaną powtórzone.

Zauważmy, że ta decyzja mogła okazać się przedwczesna. Wybory wcale nie musiałyby być powtórzone (oszczędność czasu, pieniędzy...), gdyby się okazało, że zwycięzca w okręgu ma nad następnym kandydatem przewagę większą, niż liczba błędnie wydanych kart. Niemniej, decyzja o powtórzeniu wyborów zapadła od razu.

A co z procesem sądowym i rolą matematyka jako biegłego? Otóż członkowie obwodowej komisji zostali oskarżeni i skazani za świadome wpisanie w protokół nieprawdziwych treści. Zacytujmy fragment uzasadnienia wyroku sądowego:

> [...] bezsporne jest, iż wszyscy oskarżeni musieli mieć świadomość, że treść protokołu w pewnym zakresie nie odpowiada stanowi rzeczywistemu, a w związku z tym nieprawdziwe są te ich twierdzenia, w których podnosili iż treść protokołu odpowiadała ich obliczeniom. Na fałszywość tego twierdzenia wskazują adnotacje zawarte w protokołach odnośnie ilości kart wydanych podwójnie w poszczególnych okręgach. Nikt z członków Komisji nie odnotował wcześniej, ile kart błędnie wydano wyborcom w ten sposób, a jednak w protokołach znajdują się stanowcze zapisy odnośnie tej okoliczności, co więcej – o fałszywości tych zapisów znamiennie świadczy, iż nie przystają one do siebie, bowiem wg zapisu w protokole głosowania w okręgu 1 wydano w ten sposób 182 karty, podczas wg zapisu w protokole głosowania w okręgu 2 wydano w ten sposób 102 karty, podczas gdy wartości te powinny się zgadzać.

I to właśnie było głównym argumentem na to, że

> W tej sytuacji bezsporne jest, iż sporządzając protokół głosowania w okręgu 1 członkowie komisji musieli mieć świadomość niezgodności jego treści ze stanem rzeczywistym w zakresie ilości kart przekazanych komisji i ilości kart wydanych wyborcom, co stanowiąc przypadek tzw. fałszu intelektualnego wypełnia ustawową określoność przestępstwa poświadczenia nieprawdy przez osobę uprawnioną do wystawienia dokumentu...

Napisałem opinię, w której stwierdziłem, że praktycznie niemal niemożliwe jest, by liczby błędnie wydanych kart w tych obwodach były równe (a to, że „powinny one być równe", było główną podstawą wyroku skazującego w pierwszej instancji). Napisałem też m.in., że w opisanej sytuacji liczbę błędnie wydanych kart można było łatwo obliczyć. Potem dokładnie wszystko wytłumaczyłem, wezwany na rozprawę odwoławczą przed Sądem Rejonowym.

Cóż – jak się okazuje, w takich sprawach nie można się obejść bez dyplomowanego matematyka.

Wypadałoby zapewne zakończyć ten tekst jakąś pointą. Może odpowiednią będzie następująca. Przez siedem lat współredagowałem w miesięczniku *Delta* samodzielną kolumnę *Epsilon* (wszystkie odcinki zostały zebrane potem w książce [1]). W numerze wydanym w kwietniu 1995 roku (prima aprilis) poinformowaliśmy czytelników o ośmiu nowych wirusach komputerowych i zaoferowaliśmy dyskietki z darmowymi programami antywirusowymi zwal-

czającymi te wirusy. Udało nam się kilka osób nabrać, otrzymaliśmy prośby o dyskietki... Oto charakterystyka jednego z tych ośmiu wirusów, jej autorem był Marcin Poźniak[3]:

> *Dura lex sed lex*. Wirus, który przerabia teksty matematyczne na język prawniczy. Zabójczy! Choć zdarzały się wypadki, że autor tekstu nie zauważył zmiany.

Bibliografia

[1] D. Ciesielska, K. Ciesielski, Z. Pogoda, *Epsilon*, Wydawnictwo Szkolne Omega, Kraków 2002.
[2] K. Ciesielski, *O matematycznej teorii wyborów*, Wiad. Mat. 56 (2020), nr 1, 29–62.
[3] K. Ciesielski, *Paradoksy ordynacji, czyli matematyka wyborcza*, Wiedza i Życie 8/1997, 18–23.
[4] K. Ciesielski, *Wyborcza arytmetyka*, Dziennik Polski (4.11.1991), 9.
[5] J. Przystawa, *Konieczność nieuświadomiona*, Wektory, Kąty Wrocławskie 2006.
[6] J. Sanocki, *Wojownicy*, Nyskie Towarzystwo Społeczno-Kulturalne, Nysa 2005.

Krzysztof Ciesielski
Uniwersytet Jagielloński
Instytut Matematyki
krzysztof.ciesielski@im.uj.edu.pl

[3] Marcin Poźniak (1963–1996), matematyk, zob. dział *Z żałobnej karty* w tomie 33 *Wiadomości Matematycznych*.

Co zmotywowało grupę młodych ludzi z Instytutu Maszyn Matematycznych do ślęczenia po nocach w monitorowni komputerów? Ma pewno nie pieniądze. „Praca ta, tak bardzo interesująca i zaszczytna, była jednak bardzo nisko płatna – opisuje początki tej instytucji Leon Łukaszewicz. – Dwukrotnie wyższą pensję, a także upragnione mieszkanie niejeden z nas mógł łatwo otrzymać gdzie indziej. Zwróciliśmy się więc do profesora Kuratowskiego z prośbą o podwyżkę uposażeń. Otrzymaliśmy odpowiedź, że tak niskie płace są wprawdzie surowym, ale niezbędnym sprawdzianem młodych ludzi, czy praca naukowa jest istotnie jedynym ich powołaniem. – *Gdybyśmy dobrze płacili, to kogo byśmy tu mieli?* – pytał z troską profesor Kuratowski."

Fragment książki Karoliny Wasielewskiej
Cyfrodziewczyny. Pionierki polskiej informatyki
Wydawnictwo Krytyki Politycznej 2020

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 433–450
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Laureaci nagród

Yuriy Tomilov

laureat Nagrody Głównej PTM im. Stefana Banacha za 2019 rok



Z największą przyjemnością przedstawiam czytelnikom *Wiadomości Matematycznych* sylwetkę wybitnego specjalisty z analizy funkcjonalnej, Yuriya Tomilova, laureata Nagrody Głównej PTM im. Stefana Banacha.

Yuriy Tomilov w 1996 roku obronił z wyróżnieniem pracę doktorską na Uniwersytecie Kijowskim. Od 2000 roku przebywa w Polsce – najpierw pracował na UMK, gdzie uzyskał habilitację w 2005 roku, a od 2006 roku jest zatrudniony w IM PAN. W styczniu 2013 roku otrzymał tytuł profesora.

Za wyniki naukowe Tomilov został wyróżniony w 2009 roku Nagrodą Wacława Sierpińskiego III Wydziału PAN, w 2012 roku Nagrodą IM PAN za wybitne osiągnięcia naukowe, a w 2020 roku Uniwersytet Jagielloński przyznał mu Nagrodę im. Włodzimierza Mlaka i Zdzisława Opiala. Inne bardzo prestiżowe wyróżnienie to przyznanie mu Leverhulme Visiting Professorship, w ramach którego w 2012 i 2018 roku prowadził wykłady i seminaria na uniwersytecie w Oksfordzie. Nowatorskie wyniki Tomilova uzyskały szeroki rozgłos w środowisku matematycznym, czego dowodem są liczne zaproszenia na wykłady i konferencje naukowe do najlepszych ośrodków naukowych w kraju i za granicą.

Badania naukowe Tomilova są związane z teorią operatorów, półgrup operatorów na przestrzeniach Banacha oraz ich zastosowań w teorii równań różniczkowych, w teorii ergodycznej i teorii funkcji zmiennej zespolonej. W ostatniej dekadzie opublikował ponad dwadzieścia prac w bardzo prestiżowych czasopismach, a rezultaty tych publikacji stanowiły przełom w powyższych działach matematyki.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Głębokie i jedne z najciekawszych wyników otrzymał Tomilov we współpracy z Borichevem, Battym oraz Chillem. Dotyczyły one charakteryzacji tempa malenia orbit mocno ciągłych półgrup operatorowych na przestrzeniach Hilberta. W szczególności, w pracy [5], wielomianowe tempa malenia zostały scharakteryzowane w języku rezolwent generatorów tych półgrup. Wyniki te znalazły wiele zastosowań, a powyższa publikacja Tomilova jest jedną z najczęściej cytowanych jego prac – w *Mathematical Reviews* ma ponad dwieście cytowań. W pracy [2] została rozwinięta nowatorska teoria subtelnych skal szybkości malenia dla orbit półgrup operatorowych, używająca technik z różnych działów analizy i uogólniająca wyniki z artykułu [5] dla skal wielomianowych. Wśród rezultatów uzyskanych dzięki tej metodzie można znaleźć kilka atrakcyjnych twierdzeń wykraczających poza teorię półgrup i ciekawych z punktu widzenia ogólnej analizy funkcjonalnej, m. in. twierdzenie typu Katznelsona–Tzafririego dla miar na półprostej (niekoniecznie absolutnie ciągłych, jak w wersji klasycznej). Ponadto, tempa malenia w sensie L^p dla półgrup na dowolnych przestrzeniach Banacha zostały wprowadzone i dogłębnie zbadane w artykule [1]. Zawiera on dość nieoczekiwany wynik, który rozszerza klasyczne twierdzenie tauberowskie Inghama–Karamaty z przestrzeni L^∞ na wszystkie przestrzenie L^p dla dowolnego $p \geqslant 1$, z zachowaniem odpowiedniej szybkości zbieżności. Rezultat ten był podstawą do uzyskania optymalnej szybkości malenia pochodnych energii zaburzonych równań falowych na rozmaitościach. Abstrakcyjne wyniki z prac [1, 2] już znalazły wiele ciekawych zastosowań w badaniu równań różniczkowych cząstkowych.

Drugim istotnym nurtem badań Tomilova są rachunki funkcyjne operatorów nieograniczonych oraz ich zastosowania do badania półgrup i spokrewnionych zagadnień. Teoria rachunków funkcyjnych okazała się pomocna do badania subordynacji – podstawowej konstrukcji w analizie funkcjonalnej i teorii prawdopodobieństwa. W pracy [7] rozwiązane zostały stare problemy postawione przez Kishimoto i Robinsona w 1981 roku oraz Berga, Boyadzhieva i deLaubenfelsa w 1989 roku. Wykazano w niej, że subordynacja półgrup operatorowych zachowuje własność holomorficzności półgrupy (razem z odpowiednim kątem holomorficzności). Ponadto, w tym samym artykule, uzyskano wiele kryteriów gwarantujących holomorficzność półgrup subordynowanych. Są one znacznym wzmocnieniem znanych rezultatów Carraso–Kato z 1991 roku i Fujity z 1993 roku. Badania te otworzyły drzwi do udowodnienia podobnych własności wierności dla szerszych rachunków funkcyjnych oraz w kontekście dyskretnym. W szczególności, badania opisane w pracy [7] zostały w artykule [3] przeniesione na grunt funkcji Nevanlinny–Picka. Ponadto dyskretna wersja teorii subordynacji w duchu pracy [7] została opracowana w artykule [8].

Tomilov wspólnie z Gomilko i Kosowicz w pracy [6] zaproponował nowe techniki badania i unifikacji wzorów aproksymacyjnych dla mocno ciągłych półgrup operatorowych na przestrzeniach Banacha. Techniki te istotnie wykorzystują teorię rachunków funkcyjnych oraz nowe własności funkcji Bernsteina. Pozwalają uzyskać optymalne tempo zbieżności aproksymacji oraz znalezienie wielu nowych wzorów aproksymacyjnych. Rezultaty tej pracy zawierają większość znanych wyników dotyczących tempa zbieżności klasycznych metod aproksymacji półgrup jako przypadki szczególne. Poza tym po raz pierwszy przedstawiono tam głębokie i ważne oszacowania dotyczące aproksymacji drugiego rzędu.

Rachunki funkcyjne były też podstawą do zbudowania obszernej i spójnej teorii tempa malenia średnich ergodycznych półgrup operatorowych (z czasem ciągłym bądź dyskretnym). Na tej drodze udało się rozwiązać stare problemy dotyczące dziedziny operatorowej transformaty Hilberta oraz opisać tę transformatę w terminach tempa zbieżności odpowiednich średnich Cesáro. Do tego nurtu można też zaliczyć wyniki wyjaśniające jedną z podstawowych własności rachunków funkcyjnych, tzw. zasadę iloczynową.

W bardzo obszernej (71 stron) i głębokiej pracy [4] autorzy skonstruowali nowy ograniczony rachunek funkcyjny dla generatorów półgrup na przestrzeniach Hilberta oraz generatorów półgrup holomorficznych na przestrzeniach Banacha. Rachunek ten opiera się na odpowiedniej algebrze funkcji holomorficznych Besova i jest ścisłym, istotnym i jednocześnie bardzo naturalnym rozszerzeniem klasycznego rachunku funkcyjnego Hille–Phillipsa. Ma on wszystkie standardowe własności rachunków funkcyjnych i prowadzi do jednolitego i bezpośredniego ujęcia wielu ważnych oszacowań. Ponadto pozwala uzyskać wiele nowych ciekawych oszacowań i jest optymalny względem rozważanych klas generatorów.

Bardzo ważne są również wyniki Tomilova uzyskane we współpracy z Gesztesyim oraz grupą Sukocheva z Australii. Dotyczą one indeksu Fredholma oraz jego uogólnienia, tzw. indeksu Wittena. Otrzymano charakteryzację i uogólnienia indeksu Fredholma dla operatorów różniczkowych pierwszego rzędu ze współczynnikami operatorowymi. Rezultaty te istotnie rozszerzają i precyzują klasyczne twierdzenia Calliasa, Gesztesyego, Simona i innych, a nowe metody rozwijają teorię funkcji przesunięcia spektralnego Kreina–Lifszyca i jej związki z klasyczną teorią funkcji.

Wspomnę na koniec, że wiele ciekawych rezultatów Tomilova z ostatnich lat, m.in. otrzymanych we współpracy z Müllerem, dotyczy różnorodnych zagadnień abstrakcyjnej teorii operatorów. W szczególności, udowodnili oni, że ograniczony operator liniowy na przestrzeni Hilberta zawiera w swoim widmie

okrąg jednostkowy wtedy i tylko wtedy, gdy ten operator spełnia pewne warunki ortogonalności i prawie ortogonalności. Wynik ten wykorzystuje nowe własności obrazów numerycznych i wspólnych widm zestawów operatorów. Wśród konsekwencji są daleko idące uogólnienie twierdzenia Arvesona o wolnych działaniach grup abelowych oraz dość zaskakujący fakt, że słaba zbieżność potęg operatorów implikuje zbieżność jednostajną obcięć tych potęg na podprzestrzeń nieskończenie wymiarową. Badania Tomilova i Müllera doprowadziły do znalezienia nowych technik konstruowania przekątnych operatorów i ich zestawów na przestrzeni Hilberta przy naturalnych założeniach typu Blaschkego na ich obrazy liczbowe. Techniki te pozwalają dokładnie opisać „duże" podzbiory przekątnych dowolnych operatorów ograniczonych i ich zestawów za pomocą ich widm i obrazów liczbowych. Ponadto te wyniki istotnie wzmacniają i uzupełniają znane twierdzenia Arvesona, Kadisona, Bourina, Herrero i Stouta. Müller z Tomilovem uogólnili również klasyczne twierdzenie Krengela o wektorach słabo wędrujących operatorów unitarnych, zastępując operatory unitarne operatorami potęgowo ograniczonymi. Z kolei, wspólnie z Battym, Tomilov opisał kwazi-hiperboliczne półgrupy operatorowe w terminach własności spektralnych ich generatorów. Wyniki tej ostatniej pracy stanowią wersję abstrakcyjną teorii Mañe kwazi-hiperbolicznych układów dynamicznych.

Metody pojawiające się w pracach Tomilova stanowią imponującą, a jednocześnie elegancką mieszankę technik analizy zespolonej, analizy harmonicznej i klasycznych metod przestrzeni Hilberta. Dowody zawartych w nich abstrakcyjnych rezultatów często wymagają trudnych oszacowań, a same twierdzenia są inspirowane konkretnymi problemami (na przykład dotyczącymi równań różniczkowych cząstkowych) oraz ilustrowane niebanalnymi przykładami.

Cytowane prace laureata

[1] *L^p-tauberian theorems and L^p-rates for energy decay*, J. Funct. Anal. 270 (2016), 1153–1201 (współautorzy: C. J. K. Batty, A. Borichev).

[2] *Fine scales of decay of operator semigroups*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18 (2016), 853–929 (współautorzy: C. J. K. Batty, R. Chill).

[3] *Resolvent representations for functions of sectorial operators*, Adv. Math. 308 (2017), 896–940 (współautorzy: C. J. K. Batty, A. Gomilko).

[4] *A Besov algebra calculus for generators of operator semigroups and related norm-estimates*, Math. Ann. 379 (2021), 23–93 (współautorzy: C. J. K. Batty, A. Gomilko).

[5] *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups*, Math. Ann. 347 (2010), 455–478 (współautor: A. Borichev).

[6] *A general approach to approximation theory of operator semigroups*, J. Math. Pures Appl. 127 (2019), 216–267 (współautorzy: A. Gomilko, S. Kosowicz).
[7] *On subordination of holomorphic semigroups*, Adv. Math. 283 (2015), 155–194 (współautor: A. Gomilko).
[8] *On discrete subordination of power bounded and Ritt operators*, Indiana Univ. Math. J. 67 (2018), 781–829 (współautor: A. Gomilko).

Marek Bożejko (Wrocław)

Adam Bobrowski

laureat Nagrody Głównej PTM im. Hugona Steinhausa za 2019 rok



Jak powszechnie wiadomo, jeżeli ktoś zajmujący się działalnością przyziemną i konkretną (jak budowanie modeli matematycznych w biologii) natrafia na problem nie do rozwiązania, powinien jak najprędzej wezwać na ratunek prawdziwego matematyka. Bardzo łatwo to powiedzieć. Przy próbie uczynienia czegoś takiego natychmiast wychodzi na jaw zupełny brak porozumienia. Najbardziej zwodnicza jest sytuacja, kiedy wydaje się obu osobom, że znakomicie się rozumieją, a potem okazuje się, że coś bardzo podstawowego znaczy zupełnie co innego dla każdej ze stron. Korekta takich nieporozumień jest bardzo trudna, wymaga czasu, cierpliwości i dobrej woli. W epoce, w której większości wykształconych ludzi wydaje się, że sukces wymaga wąskiej specjalizacji, jest to szczególnie trudne.

Najlepszym w praktyce rozwiązaniem jest przypuszczalnie długoletnia współpraca, oparta o coś w rodzaju wzajemnych uprzejmości. Współpraca, w trakcie której obie strony są bardzo zajęte swoimi problemami, ale są wystarczająco altruistyczne, żeby z wyrozumiałością przyjmować „zadziwiające" pomysły partnera, a nawet o nich myśleć. Po latach pojawia się również przyzwyczajenie.

Dodatkowym elementem sprzyjającym wytrwałej współpracy jest pewien typ idealizmu, rzadkie już poczucie integralnej jedności nauki, sztuki, literatury i religii oraz wynikająca z tego wewnętrzna potrzeba koordynacji i poczucie estetyki, z grubsza jak u Steinhausa w *Kalejdoskopie Matematycznym*.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Jak można doprowadzić do współpracy, o której mowa? Nasza wspólna historia z panem Bobrowskim (nadal jesteśmy „na pan", co ja sobie bardzo chwalę), może być przykładem. Jesteśmy bardzo różnymi ludźmi, Bobrowski na przykład stroni od używek, a ja jestem fanem czerwonego wina. Poznaliśmy się w 1998 roku, jak mi się wydaje, za pośrednictwem Andrzeja Lasoty. Przyjechałem już wtedy z rodziną z Nowego Jorku do Houston i rozpocząłem współpracę z Ranajitem Chakrabortym, znanym genetykiem populacyjnym. Zacząłem przyjeżdzać do Polski – akurat zwrócono mi polski paszport. W czasie jednej z wizyt poznałem bardzo młodego, świeżo wypromowanego doktora matematyki – był to właśnie Adam Bobrowski. Zaczęliśmy od pracy o eksponencie operatorowej, której on doszukał się niespodziewanie w jednym z moich modeli rozmnażania się komórek – i tak niepostrzeżenie sprawy nabierały rozpędu.

Pracowaliśmy wówczas z Ranajitem nad modelowaniem matematycznym ewolucji mikrosatelitów DNA – krótkich periodycznych sekwencji, których zmienność można opisać rodzajem błądzenia losowego, i które dzięki dużemu tempu mutacji nadają się do datowania ewolucji ludzi – powiedzmy – od *Homo erectus* do *Homo sapiens*. Adam Bobrowski przyjechał do Houston jako stażysta podoktorancki, a bogaty – jak to bramin – Ranajit zatrudnił go w Human Genetics Center w University of Texas. Rzeczą, którą udało się nam zrobić wspólnie (jak zwykle, ja upraszczałem rzeczywistość, a kolega Bobrowski znajdował metody, żeby toto wyrazić w języku ideałów platońskich), była półgrupa operatorów opisująca mutacje oraz dryf genetyczny. Dryf jest procesem genetycznym słabo znanym szerokiej publiczności, a polega na losowej utracie wariantów genetycznych przez bezpotomną śmierć nosicieli tych wariantów. Modelowanie dryfu jest znacznie bardziej złożone od modelowania samych mutacji, do czego wystarcza ciągły w czasie łańcuch Markowa, zwykle o prostej strukturze. Modelowanie dryfu wymaga sprzężenia ze sobą co najmniej dwóch łańcuchów Markowa. Półgrupa operatorów, która z tego wynika, jest w pewnym sensie uogólnieniem ewolucji rozwiązań równania Riccatiego (nazwaliśmy ją półgrupą typu Lapunowa). Bobrowski zbadał wszechstronnie własności tej półgrupy i podsumowanie części tych prac ukazało się jako nasza wspólna krótka monografia wydana przez Springer Verlag.

Jako krótkie interludium, chciałbym wtrącić uwagę, że pobyty Bobrowskiego w Houston zaowocowały również kontaktami z odwiedzającymi mnie młodymi (wówczas) współpracownikami z Gliwic (Krzysztofem Fujarewiczem, Andrzejem Polańskim, Joanną Polańską i Jarosławem Śmieją) i z Warszawy (Tomaszem Lipniackim). Niektórzy z nich zostali również współpracownikami Bobrowskiego. Joanna Polańska pracowała ze mną wówczas (był to 2005 rok) nad modelem rekombinacji chromosomów, która w połączeniu z mutacjami

równoważy zubożający wpływ dryfu i prowadzi do „heterogenizacji" genomów w populacji. Nasza praca dotyczyła łącznych rozkładów alleli (wariantów genomicznych) w dwóch punktach chromosomu. Adam Bobrowski zabrał się poważnie do pracy i wkrótce przy współpracy Tomasza Wojdyły, doktoranta z Politechniki Śląskiej, oraz moim skromnym wkładzie, opracował model z rekombinacjami wielopunktowymi. Powstała całkiem długa praca, która została opublikowana w *Journal of Mathematical Biology*. Model opisany w tej pracy pokazuje ogromną złożoność kombinatoryczną rekombinacji (pewną rolę odgrywają tam liczby Bella), aczkolwiek praca dotyczy właściwie tylko podzbioru możliwych łącznych rozkładów rekombinacji wielopunktowych, tworzącego rodzaj stożka w przestrzeni wszystkich możliwych rozkładów. Pracę tę uważam za ważną między innymi z tego powodu, że w modelach rekombinacji z naturalnym czasem (biegnącym, jak Pan Bóg przykazał, do przodu), trudno jest znaleźć zamknięte układy równań. Zamknięte modele można znaleźć, stosując podejście retrospektywne, w którym specjalizuje się właściwie większość genetyków matematycznych z takich szkół, jak Oxford, Bielefeld i inne. Koncepcja rozkładów ze stożka w najprostszym dwupunktowym przypadku z binarnymi allelami (aA i bB) została notabene wprowadzona w pracy Polańskiej i Kimmla w *Human Heredity*.

Współpraca z Adamem Bobrowskim oraz z Andrzejem Polańskim przyniosła serię prac w nieco innej dziedzinie, mianowicie dotyczących ogólnie teorii koalescentu w populacji o wielkości zmieniającej się w czasie. Koalescent, wprowadzony przez Tajime i Kingmana w latach osiemdziesiątych XX wieku, jest drzewem genealogicznym wariantów genetycznych zbiegających się w odwróconym czasie do najbliższego wspólnego przodka (taki przodek jest zwykle jeden, jeżeli nie zachodzi rekombinacja). Koalescent jest po prostu modelem dryfu genetycznego widzianego „od tyłu". Praca z tej serii, która jest być może najbardziej wyrafinowana matematycznie, dotyczy koalescentu dla całych genomów, z mutacjami przedstawionymi jako proces punktowy (ogólniejszy niż na przykład jednorodny proces Poissona). Wypróbowaliśmy ten model na danych dotyczących mitochondriów ludzkich, które jako pozostałości symbiontów bakteryjnych mają własne małe koliste genomy (kilka tysięcy na każdą ludzką komórkę).

Najnowszy element współpracy z Adamem Bobrowskim to model ewolucji populacji o nazwie „tug-of-war" (przeciąganie liny), który jest metaforycznym odzwierciedleniem okresów inwazji i stazy w procesach nowotworowych, wprowadzony w 2014 roku przez McFarlanda i współautorów. Model stał się dość popularny jako paradygmat konceptualny, wyjaśniający w elegancki sposób łączny efekt rzadkich korzystnych i częstych słabo szkodliwych mutacji, które

mogą być identyfikowane odpowiednio z mutacjami typu „driver" i „passenger" w nowotworach. Podejście Bobrowskiego i współpracowników umieszcza „tug-of-war" w kontekście modelu Morana. Filozofię tego modelu można postrzegać jako „wymianę konkurencyjną", w wyniku której poszczególne komórki stają naprzeciw siebie i uniemożliwiają sobie nawzajem zastąpienie przez bezpośredniego potomka. Analiza wymaga zbudowania półgrupy operatorów Markowa i użycia aparatu osobliwej zbieżności półgrup (takiego, jak w niedawno wydanej przez Cambridge University Press monografii Adama Bobrowskiego). Ciąg dalszy, miejmy nadzieję, nastąpi...

Reasumując, Adam Bobrowski jest niewątpliwie ewenementem na skalę nie tylko kraju (czemu oczywiście on sam będzie uporczywie zaprzeczać). Mam prywatnie nadzieję, że przyznanie nagrody Steinhausa właśnie jemu wzmocni prestiż niebanalnych zastosowań matematyki w biologii i pomoże w wychowaniu godnych następców.

Marek Kimmel (Houston)
Zdjęcie: Bożena Rożek

Dominik Burek

laureat Nagrody dla Młodych Matematyków PTM za 2019 rok



Dominik Burek urodził się 9 sierpnia 1993 roku w Tuchowie. Jako uczeń liceum był trzykrotnym finalistą Olimpiady Matematycznej, przy czym w finale LXII Olimpiady został wyróżniony. W 2012 roku otrzymał srebrny medal w Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki za pracę *O tajemniczym punkcie* X_{442}. W tym samym roku ukończył III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Tarnowie i rozpoczął studia na Uniwersytecie Jagiellońskim na specjalności matematyka teoretyczna. Pod moim kierunkiem przygotował pracę magisterską *Finite Quotients of Calabi–Yau Threefolds* i w 2017 roku z wyróżnieniem ukończył studia. W tym samym roku rozpoczął studia doktoranckie w ramach projektu Kartezjusz.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Głównym obiektem badań Dominika Burka prowadzonych w ramach studiów magisterskich i doktoranckich są rozmaitości Calabiego–Yau. Zespoloną rozmaitość rzutową wymiaru n nazywamy *rozmaitością Calabiego–Yau*, jeżeli spełnia następujące dwa warunki:

- $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$, czyli nie istnieją niezerowe holomorficzne i-formy na X dla $i = 1, \ldots, n-1$,
- $K_X = 0$, czyli istnieje nigdzie nieznikająca holomorficzna n-forma na X (zespolony element objętości).

Nazwa „rozmaitości Calabiego–Yau" została utworzona od nazwisk matematyków Eugenio Calabiego oraz Shing-Tung Yau. Na mocy hipotezy sformułowanej przez Calabiego w 1954 roku, a dowiedzionej przez Yau w 1976 roku, każda zwarta rozmaitość kählerowska ze znikającą pierwszą klasą Cherna posiada Ricci-płaską metrykę kählerowską. W konsekwencji podana powyżej definicja (sformułowana w terminach geometrii algebraicznej) jest „prawie równoważna" definicji wyrażonej w języku geometrii różniczkowej (grup holonomii lub krzywizny Ricciego).

Rozmaitości Calabiego–Yau są uogólnieniem krzywych eliptycznych oraz powierzchni K3 na dowolny wymiar zespolony. Nowym zjawiskiem pojawiającym sie w wymiarze większym od dwóch jest występowanie przykładów niedyfeomorficznych, czyli różniących się jako rozmaitości rzeczywiste. Teoria Hodge'a zadaje rozkład grup kohomologii rozmaitości kählerowskiej na sumę prostą zespolonych podprzestrzeni wektorowych

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X).$$

Rozkład Hodge'a umożliwia zdefiniowanie niezmienników rozmaitości kählerowskich, *liczb Hodge'a*

$$h^{p,q}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X), \quad 0 \leqslant p, q \leqslant n.$$

Liczby Hodge'a spełniają warunki symetrii

$$h^{p,q} = h^{q,p} = h^{n-p,n-q}$$

oraz sumują się do liczb Bettiego

$$\sum_{p+q=i} h^{p,q} = b_i(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathbb{C}).$$

Intensywne badania rozmaitości Calabiego–Yau wymiaru trzy inspirowane są ich znaczeniem w fizyce teoretycznej, a w szczególności w teorii superstrun. Najważniejszą hipotezą matematyczną wywodzącą się z fizyki jest

hipoteza symetrii lustrzanej, która w najprostszej wersji stanowi, że dla rozmaitości Calabiego–Yau X wymiaru trzy istnieje taka rozmaitość Calabiego–Yau Y, że

$$h^{1,1}(X) = h^{1,2}(Y) \quad \text{oraz} \quad h^{1,2}(X) = h^{1,1}(Y)$$

(ogólniej $h^{i,j}(X) = h^{n-i,j}(Y)$ w przypadku rozmaitości wymiaru n).

Pierwsza klasa rozmaitości Calabiego–Yau wymiaru trzy spełniająca hipotezę symetrii lustrzanej została skonstruowana niezależnie przez Cipriana Borcea i Claire Voisin jako rozwiązanie osobliwości ilorazu produktu krzywej eliptycznej i powierzchni K3 przez działanie inwolucji.

Konstrukcja Borcea–Voisin doczekała się licznych uogólnień, na przykład Andrea Cattaneo i Alice Garbagnatti wykazali w pracy [4] istnienie krepantnego rozwiązania osobliwości ilorazu krzywej eliptycznej E i powierzchni K3 S ze ściśle niesymplektycznym automorfizmem. W pracy [1] Dominik Burek podał dużo prostszy dowód istnienia krepantnego rozwiązania osobliwości ilorazu oraz formuł na liczby Hodge'a otrzymanej rozmaitości Calabiego–Yau. Krepantne rozwiązania osobliwości są zwykle bardzo skomplikowane i dlatego bardzo trudne do skonstruowania oraz badania w sposób bezpośredni. Aby obejść tę trudność, Burek skorzystał między innymi z odpowiedniości McKaya gwarantującej istnienie w pewnych sytuacjach rozwiązania krepantnego, a w szczególności z twierdzenia Roana orzekającego, że jeżeli G jest skończoną podgrupą specjalnej grupy liniowej $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, to iloraz $\mathbb{C}^3/G$ posiada krepantne rozwiązanie osobliwości.

W celu wyznaczenia liczb Hodge'a skonstruowanych rozmaitości Calabiego–Yau Burek skorzystał z wprowadzonych przez Weimina Chena i Yongbin Ruana kohomologi orbifoldowych. Dla rozmaitości rzutowej X z działaniem grupy skończonej G definiujemy

$$H^{p,q}_{\mathrm{orb}}(X/G) := \bigoplus_{[g]\in \mathrm{Conj}(G)} \left(\bigoplus_{U\in\Lambda(g)} H^{p-\mathrm{age}(g),q-\mathrm{age}(g)}(U) \right)^{C(g)},$$

przy czym $\mathrm{Conj}(G)$ oznacza zbiór klas sprzężeń w grupie G (wybieramy po jednym przedstawicielu każdej klasy sprzężeń), $C(g)$ jest centralizatorem g, natomiast $\Lambda(g)$ jest zbiorem składowych spójnych zbioru punktów stałych elementu $g \in G$. Wiek macierzy g oznaczany przez $\mathrm{age}(g)$ definiujemy następująco: jeżeli $g \in \mathrm{GL}(n)$ jest macierzą rzędu skończonego, $a_1, \ldots, a_n \in [0,1)$ są takimi liczbami wymiernymi, że $e^{2\pi i a_1}, \ldots, e^{2\pi i a_n}$ są wartościami własnymi macierzy g (z uwzględnieniem krotności), to

$$\mathrm{age}(g) = a_1 + \cdots + a_n.$$

Jeżeli iloraz X/G posiada krepantne rozwiązanie osobliwości $\widetilde{X/G}$ to, na mocy twierdzenia Yasudy, istnieje izomorfizm

$$H^{p,q}(\widetilde{X/G}) \cong H^{p,q}_{\mathrm{orb}}(X/G).$$

Powyższe twierdzenia umożliwiają wyznaczenie liczb Hodge'a skonstruowanej rozmaitości Calabiego–Yau bez wskazywania konkretnego rozwiązania krepantnego osobliwości, a jedynie poprzez dokładne zbadanie działania automorfizmów i_E oraz i_S.

Każda gładka rozmaitość rzutowa ma przypisaną kohomologiczną L-funkcję zdefiniowaną jako iloczyn Eulera

$$L(X,s) = L^*(s) \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(P_{n,p}(p^{-s})\right)^{-1},$$

przy czym $\mathcal{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych p, dla których redukcja rozmaitości X modulo p jest rozmaitością gładką X_p, $P_{n,p}(T)$ jest wielomianem stopnia $b_n(X)$ występującym w hipotezach Weila, natomiast iloczyn $L^*(s)$ oznacza iloczyn skończonej liczby czynników Eulera. Przypuszczamy, że dla rozmaitości Calabiego–Yau zachodzić powinien odpowiednik hipotezy Taniyamy–Shimury–Weila. Z hipotezy Serre'a wynika, że dla dowolnej rozmaitości Calabiego–Yau X zdefiniowanej nad $\mathbb{Q}$ wymiaru n spełniającej warunek $b_n(X) = 2$ zachodzi twierdzenie o modularności orzekające, że jej L-funkcja jest równa L-funkcji formy modularnej wagi $n+1$ dla pewnej podgrupy $\Gamma_0(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Odwrotny problem geometrycznej realizacji form modularnych wagi $n+1$ przy pomocy rozmaitości Calabiego–Yau X wymiaru n został rozwiązany pozytywnie jedynie dla wymiarów jeden i dwa. W większych wymiarach sytuacja jest bardziej skomplikowana – znamy jedynie niewielką liczbę przykładów form modularnych, których L-funkcja jest równa L-funkcji rozmaitości Calabiego–Yau wymiaru n o liczbie Bettiego $b_n = 2$.

W pracy [2] Dominik Burek zbadał przykłady trójwymiarowych rozmaitości Calabiego–Yau typu podwójna oktyka z liczbą Bettiego $b_3 = 4$, dla których L-funkcja jest iloczynem $L(X,s) = L(f,s)L(g,s-1)$, przy czym f i g są formami modularnymi wagi odpowiednio cztery i dwa. Badane przykłady posiadają automorfizm rzędu dwa zachowujący formę kanoniczną. Dla siedmiu spośród rozważanych rozmaitości iloraz przez działanie automorfozmu posiada rozwiązanie osobliwości, które jest rozmaitością Calabiego–Yau $b_3(X) = 2$, w konsekwencji L-funkcja skonstruowanej rozmaitości pokrywa się z L-funkcją formy modularnej f. W przypadku form modularnych 96k4B1 oraz 96k4E1 skonstruowane rozmaitości Calabiego–Yau są pierwszymi realizacjami geometrycznymi w ścisłym sensie.

Pierwsze przykłady modularnych rozmaitości Calabiego–Yau w dowolnym wymiarze $n > 3$ zostały skonstruowane w pracy [5] jako rozwiązania osobliwości $X_{d,n}$ ilorazu $E_d^n/\mathbb{Z}_d^{n-1}$, przy czym E_d jest krzywą eliptyczną z automorfizmem rzędu $d = 3, 4$. W pracy [3] Dominik Burek rozszerzył tę konstrukcję o przypadek $d = 6$ oraz wyliczył liczby Hodge'a i charakterystykę Eulera wszystkich skonstruowanych rozmaitości Calabiego–Yau. Zastosowana w pracy [5] rekurencyjna metoda krepantnego rozwiązania osobliwości ilorazu $(E_d^n)/\mathbb{Z}_d^{n-1}$ nie przenosi się na przypadek $d = 6$. Również konstrukcja rozwiązania oparta na rozkładzie działania grupy $\mathbb{Z}_6$, stosowana w pracy [4], nie może być wykorzystana w tym przypadku. Podana przez Burka konstrukcja jest znacznie bardziej zaawansowana technicznie, wykorzystuje techniki torycznego rozwiązania osobliwości. Ponadto, ponownie z wykorzystaniem kohomologii Chena–Ruana i formuły orbifoldowej, Burek wyznaczył funkcje tworzące dla liczb Hodge'a $\sum_{p,q=0}^{n} h^{p,q}(X_{d,n}) X^p Y^q$ jako sumę jednomianów o wykładnikach naturalnych następujących wielomianów Puiseaux:

$$\begin{aligned}
&\left(XY + 4\sqrt{XY} + 1\right)^n + X^n + Y^n && \text{dla } d = 2,\\
&\left(1 + \sqrt[3]{XY}\right)^{3n} + X^n + Y^n && \text{dla } d = 3,\\
&\left(1 + XY + 2\sqrt[4]{XY} + 3\sqrt[4]{(XY)^2} + 2\sqrt[4]{(XY)^3}\right)^n \\
&\quad + \left(\sqrt[4]{(XY)^2}\right)^n + X^n + Y^n && \text{dla } d = 4,\\
&\left(1 + XY + \sqrt[6]{XY} + 2\sqrt[6]{(XY)^2} + 2\sqrt[6]{(XY)^3} + 2\sqrt[6]{(XY)^4} + \sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n \\
&\quad + 2 \cdot (XY)^{\frac{n}{2}} + \left(\sqrt[6]{(XY)^2} + \sqrt[6]{(XY)^4}\right)^n + X^n + Y^n && \text{dla } d = 6.
\end{aligned}$$

Dzięki odpowiedniej modyfikacji konstrukcji rozmaitości $X_{3,n}$ oraz $X_{4,n}$ skonstruował rozmaitości Zariskiego dla dowolnej liczby pierwszej $p \not\equiv 1 \pmod{12}$. Rozmaitość Zariskiego to rozmaitość Calabiego–Yau wymiaru n w charakterystyce p, mająca całkowicie nierozdzielczą parametryzację wymierną stopnia p. Są to pierwsze znane przykłady uniwymiernych rozmaitości Calabiego–Yau dowolnego wymiaru.

Dotychczasowe osiągnięcia naukowe Burka zostały nagrodzone Nagrodą im. Franciszka Leji w 2017 roku oraz Stypendium im. Michała Jakuba Łyska dla najlepszego młodego matematyka Uniwersytetu Jagiellońskiego w 2018 roku. Burek jest kierownikiem grantów Etiuda i Preludium Narodowego Centrum Nauki.

Dominik Burek jest również bardzo zaangażowany w działalność dydaktyczną i popularyzującą matematykę. Przygotowuje uczniów do krajowych i międzynarodowych olimpiad matematycznych w Polsce, Arabii Saudyjskiej i Iranie. Jest również członkiem Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej,

Komitetu Okręgowego Olimpiady Matematycznej w Krakowie, a także członkiem Komitetu Głównego i Komisji Zadaniowej Olimpiady Matematycznej Juniorów. Burek jest autorem kilkudziesięciu zadań, które pojawiały się na większości krajowych i międzynarodowych olimpiad matematycznych.

Cytowane prace

[1] D. Burek, *Hodge numbers of generalised Borcea–Voisin threefolds*, [w:] *Phenomenological approach to algebraic geometry* (J. Buczyński, S. Cynk, T. Szemberg, red.), Banach Center Publication, t. 116, Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warszawa 2018, 47–62.
[2] D. Burek, *Rigid realizations of modular forms in Calabi–Yau threefolds.*, J. Pure Appl. Algebra 223 (2019), nr 2, 547–552.
[3] D. Burek, *Higher dimensional Calabi–Yau manifolds of Kummer type*, Math. Nachr. 293 (2020), nr 4, 638–650.
[4] A. Cattaneo, A. Garbagnati, *Calabi–Yau 3-folds of Borcea-Voisin type and elliptic fibrations*, Tohoku Math. J. (2) 68 (2016), nr 4, 515–558.
[5] S. Cynk, K. Hulek, *Higher-dimensional modular Calabi–Yau manifolds*, Canad. Math. Bull. 50 (2007), nr 4, 486–503.

Sławomir Cynk (Kraków)

Agnieszka Hejna

laureatka Nagrody PTM dla Młodych Matematyków za 2019 rok



Agnieszka Hejna jest absolwentką Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego. Jej praca magisterska z 2017 roku, zatytułowana *O zlokalizowanych sharp funkcjach*, otrzymała drugą nagrodę w Konkursie prac studenckich z matematyki im. Józefa Marcinkiewicza i pierwszą nagrodę w drugiej edycji konkursu mBanku Krok w przyszłość. W październiku 2017 roku Agnieszka Hejna rozpoczęła w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego studia doktoranckie z matematyki.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Agnieszka Hejna jest autorką bądź współautorką siedmiu prac opublikowanych lub przyjętych do druku oraz trzech preprintów.

Badania zawarte w publikacjach Agnieszki Hejny nagrodzonych w konkursie PTM ([1–5]) związane są z rzeczywistą analizą harmoniczną. Dotyczą one przede wszystkim opisów struktur przestrzeni funkcyjnych oraz badania ograniczoności operatorów liniowych i podliniowych na nich.

W 1972 roku Charles Fefferman i Elias M. Stein wprowadzili pojęcie *sharp funkcji* i udowodnili nierówność, obecnie zwaną nierównością Feffermana–Steina, wiążącą normę sharp funkcji z normą L^p funkcji. Nierówność ta pozwala uzyskać twierdzenia interpolacyjne dla szerszej klasy operatorów niż klasyczne twierdzenie interpolacyjne Riesza–Thorina. W pracy [2] zostało wprowadzone pojęcie zlokalizowanej sharp funkcji i – przy pewnych założeniach – udowodniona nierówność typu Feffermana–Steina.

Znanych jest kilka równoważnych charakteryzacji przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^N)$ za pomocą analizy rzeczywistej, w szczególności przez funkcje maksymalne i kwadratowe związane z operatorem Laplace'a. Taka charakteryzacja ma również sens, gdy operator Laplace'a zastąpimy generatorem L półgrupy operatorów e^{tL} działającej na przestrzeniach funkcyjnych. Nagrodzone pracy Agnieszki Hejny wpisują się program badań przestrzeni H^1 dla struktur/półgrup innych niż te związane z operatorem Laplace'a. Punktem wyjścia są operatory Dunkla, których teoria w szczególnym przypadku redukuje się do klasycznej analizy na przestrzeniach euklidesowych.

W pracach [1, 4] stworzono teorię przestrzeni Hardy'ego dla operatorów Dunkla, a tym samym rozszerzono wyniki klasycznej analizy. Główna trudność, jaką trzeba było przezwyciężyć, była związana z nielokalnością operatorów Dunkla, a także ze zbyt ubogą wiedzą na temat własności półgrupy ciepła generowanej przez operator Δ_k Dunkla–Laplace'a. Praca [3] dotyczy badania ograniczoności operatorów związanych z operatorami Dunkla. W pracy [5] podane są charakteryzacje przestrzeni Hardy'ego dla oscylatora harmonicznego Dunkla $\Delta_k - \|\mathbf{x}\|^2$, a przy okazji zbudowana jest teoria lokalnych przestrzeni Hardy'ego, stanowiąca rozszerzenie wyników innych autorów.

Agnieszka Hejna kontynuuje badania w tej tematyce, zajmując się m.in. ograniczonością całek singularnych, półgrupami generowanymi przez wyższe potęgi operatorów Dunkla oraz operatorami Schrödingera–Dunkla.

Lista nagrodzonych publikacji

[1] *Harmonic functions, conjugate harmonic functions and the Hardy space H^1 in the rational Dunkl setting*, J. Fourier Anal. Appl. 25 (2019), 2356–2418 (współautorzy: J.-P. Anker, J. Dziubański).
[2] *Remarks on localized sharp functions on certain sets in $\mathbb{R}^n$*, Monatsh. Math. 185 (2018), nr 3, 397–413 (współautor: J. Dziubański).
[3] *Hörmander's multiplier theorem for the Dunkl transform*, J. Funct. Anal. 277 (2019), nr 7, 2133–2159 (współautor: J. Dziubański).
[4] *Remark on atomic decompositions for the Hardy space H^1 in the rational Dunkl setting*, Studia Math. 251 (2020), nr 1, 89–110 (współautor: J. Dziubański).
[5] *Hardy spaces for the Dunkl harmonic oscillator*, Math. Nachr. 293 (2020), nr 11, 2112–2139.

Jacek Dziubański (Wrocław)

Mateusz Wasilewski

laureat Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego za 2020 rok



Mateusz Wasilewski, laureat Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego za 2020 rok, urodził się 23 czerwca 1990 roku w Warszawie. Studiował na Uniwersytecie Warszawskim, a następnie, już jako doktorant, w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk. Rozprawę doktorską *On q-deformed von Neumann algebras*, napisaną pod kierunkiem Adama Skalskiego, obronił z wyróżnieniem 21 czerwca 2018 roku. We wrześniu tego samego roku rozpoczął pracę na KU Leuven w Belgii w grupie Stefaana Vaesa, czołowego eksperta w dziedzinie algebr von Neumanna, wykładowcy na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 2010 roku oraz dwukrotnego laureata indywidualnych grantów European Research Council. Początkowo pracował w Leuven w ramach stypendium podoktorskiego finansowanego przez tamtejszy uniwersytet, od października 2019 roku jest natomiast stypendystą prestiżowego trzyletniego stypendium FWO Junior Postdoctoral Fellowship, belgijskiej agencji finansującej badania naukowe. Nagrodzony projekt nosi nazwę *Kwantowe symetrie i algebry operatorów*. W 2018

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

roku otrzymał nagrodę dla młodych matematyków PTM – przy tej okazji w tym samym roku, w zeszycie 54 (2) *Wiadomości Matematycznych*, pojawiła się notka dotycząca jego wcześniejszych osiągnięć. Trzykrotnie odbył kilkumiesięczne staże badawcze we Francji i USA, wygłaszał też zaproszone wykłady w Polsce, USA, Francji, Niemczech, Wielkiej Brytanii, Belgii oraz Danii.

Tematyka badań Wasilewskiego to szeroko rozumiana współczesna analiza funkcjonalna, ze szczególnym naciskiem na teorię algebr operatorów i przestrzeni operatorowych. Ten powstały blisko wiek temu dział matematyki, początkowo inspirowany mechaniką kwantową i naturalnymi strukturami pojawiającymi się przy badaniu przestrzeni Banacha, jest wciąż żywo badany na całym świecie i wchodzi w bogate interakcje z fizyką matematyczną, teorią prawdopodobieństwa, analizą harmoniczną, układami dynamicznymi, kombinatoryką czy geometryczną teorią grup. Mateusz Wasilewski opublikował już dziewięć prac, w których przedstawił rozwiązania problemów dotyczących różnych aspektów wspomnianej teorii. Warto tu krótko wspomnieć niedawne wyniki z artykułu [5], w którym wraz z Przemysławem Ohryską udowodnił pewne ilościowe i jakościowe wyniki dotyczące odwracalności elementów algebry miar na grupie przemiennej, a następnie rozszerzył je do badania analogicznych problemów dla algebry Fouriera–Stieltjesa związanej z dowolną grupą lokalnie zwartą, a także rezultaty z pracy [2], w której wraz z kilkoma współautorami analizował problemy pochodzące z kwantowej teorii informacji, badając związki pojęcia kwantowego izomorfizmu grafów z działaniami odpowiednich kwantowych grup symetrii.

Istotna część wyników Wasilewskiego, szczególnie doceniona przez jury nagrody Kuratowskiego, dotyczy badania własności aproksymacyjnych dla naturalnych przykładów algebr von Neumanna, w szczególności dla modeli tak zwanych q-deformacji relacji komutacyjnych, postrzeganych jako interpolacja między bozonowymi i fermionowymi regułami komutacji, z ściśle matematycznego punktu widzenia zdefiniowanych przez Marka Bożejkę, Burkharda Kümmerera i Rolanda Speichera w latach dziewięćdziesiątych XX wieku. Przypomnijmy, że algebry von Neumanna to domknięte w $*$-słabej topologii $*$-podalgebry z jedynką algebry operatorów ograniczonych działających na przestrzeni Hilberta. Każda z takich algebr posiada rozkład (w ogólności całkowy) na faktory, czyli algebry o jednowymiarowym centrum. Te ostatnie stanowią więc kluczowe obiekty teorii. Niemal natychmiast po ich zdefiniowaniu zostały sklasyfikowane na trzy typy. Faktory typu I są stosunkowo najprostsze – to algebry pełne, czyli postaci $B(H)$ dla przestrzeni Hilberta H. Faktory typu II powstają w naturalny sposób na przykład przy rozważaniu reprezentacji regularnych grup dyskretnych o nieskończonych klasach sprzężoności. Faktory

III to klasa, która długo pozostawała najbardziej tajemnicza – to za wyniki ich dotyczące Alain Connes otrzymał w 1983 roku w Warszawie Medal Fieldsa. Wspomniane wyżej algebry Bożejki, Kümmerera i Speichera, nazywane algebrami *q-Gaussowskimi*, to deformacje tak zwanych faktorów grup wolnych, czyli algebr von Neumanna związanych z grupami wolnymi o różnych liczbach generatorów. Warto wspomnieć, że wzajemny (nie)izomorfizm tych ostatnich pozostaje największą zagadką teorii algebr operatorowych już od osiemdziesięciu lat. Inne q-deformacje, które wspomnimy niżej, to algebry *q-Arakiego–Woodsa*, zdefiniowane przez Fumio Hiai deformacje pewnych algebr pochodzących od Dimy Szlachtienki – te ostatnie można postrzegać jako wersje typu III faktorów grup wolnych.

Już same definicje algebr q-zdeformowanych, choć naturalne, są dość skomplikowane. Mimo tego wspomniane algebry stanowią popularną klasę przykładów z jednej strony ilustrujących zaawansowane aspekty teorii, z drugiej zaś na tyle konkretnych, że rozmaite techniki kombinatoryczne czy analityczne pozwalają na ich badanie. Mateusz Wasilewski w pracy [6] udowodnił własność Haagerupa dla algebr q-Arakiego–Woodsa, a w artykule [1] wraz ze Stevenem Avsekiem i Michaelem Brannanem wykazał, że algebry te posiadają też całkowitą metryczną własność aproksymacji. Później z Martijnem Caspersem i Skalskim w pracy [4] zajął się badaniem maksymalnych algebr przemiennych w algebrach q-gaussowskich; w szczególności dowiódł, że pewne narzędzia teorii sztywności i deformacji Sorina Popy zwykle stosowane dla algebr „wolnych" dają się przenieść także do q-deformacji. Wreszcie w niedawnej pracy [3] z Caspersem i Yusuke Isono, za pomocą zupełnie nowych technik, inspirowanych prawdopodobieństwem kwantowym, poprawił należące do Szlachtienki wyniki dotyczące własności Akemanna–Ostranda dla algebr q-Gaussowskich.

Wspomniane własności aproksymacyjne mają swoje źródło z jednej strony w fundamentalnych pojęciach analizy funkcjonalnej, z drugiej w klasycznych problemach związanych z rodzajem zbieżności szeregów Fouriera. W opisanej wyżej sytuacji ich wykazanie wymagało nie tylko głębokiego zrozumienia algebr von Neumanna typu III, ale także opracowania nowej metody kwantyzacji w kontekście algebr q-Arakiego–Woodsa, wymyślonej i rozwiniętej samodzielnie przez Wasilewskiego. Inne narzędzia stosowane we wspomnianych pracach to między innymi metody związane z kombinatoryką q-relacji komutacyjnych, własności analogów mnożników typu Herza–Schura oraz zaawansowane rozważania ultraproduktowe. Szczególnie ciekawe techniki pojawiają się w pracy [3], w której kluczową rolę odgrywają kwantowe odpowiedniki półgrup Markowa i własności kohomologiczne ich generatorów. W pewnym sensie łączy to w wysoce niebanalnym kontekście w dość zaskakujący

sposób metody analityczne i geometryczne, otwierając perspektywy dalszych badań.

Mateusz Wasilewski potrafi przedstawiać swoje rezultaty – zarówno w artykułach, jak i podczas wykładów – w czytelny, przekonujący sposób. Oprócz naturalnej specjalizacji w algebrach operatorowych posiada też głęboką wiedzę dotyczącą szeroko rozumianej analizy, prawdopodobieństwa klasycznego i kwantowego oraz wielką łatwość poznawania nowych narzędzi, umożliwiającą mu skuteczne atakowanie otwartych, ciekawych i ważkich problemów. Jestem przekonany, że lista jego istotnych wyników będzie systematycznie rosła.

Lista nagrodzonych publikacji

[1] *Complete metric approximation property for q-Araki–Woods algebras*, J. Funct. Anal. 274 (2018), nr 2, 544–572 (współautorzy: S. Avsec, M. Brannan).
[2] *Bigalois extensions and the graph isomorphism game*, Comm. Math. Phys. 375 (2020), nr 3, 1777–1809 (współautorzy: M. Brannan, A. Chirvasitu, K. Eifler, S. Harris, V. Paulsen, X. Su).
[3] *L_2-cohomology, derivations and quantum Markov semi-groups on q-Gaussian algebras*, IMRN (2018) (współautorzy: M. Caspers, Y. Isono).
[4] *On masas in q-deformed von Neumann algebras*, Pacific J. Math. 302 (2019), nr 1, 1–21 (współautorzy: M. Caspers, A. Skalski).
[5] *Inversion problem in measure and Fourier–Stieltjes algebras*, J. Funct. Anal. 278 (2020), nr 5, 19 pp. (współautor: P. Ohrysko).
[6] *q-Araki–Woods algebras: extension of second quantisation and Haagerup approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), nr 12, 5287–5298.

Adam Skalski (Warszawa)

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 451–455
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Andrzej Czarnecki (Kraków)

Wybrane rozdziały z matematycznych przygód Mikołajka – twierdzenie Tietzego

Dziś w szkole pani powiedziała, że ma dla nas niespodziankę. Pan Dyrektor Do Spraw Dydaktycznych poprosił, żeby zamiast następnej lekcji arytmetyki zrobić dowód twierdzenia Tietzego. Wszyscy bardzośmy się ucieszyli, bo to zawsze fajnie, kiedy w szkole jest coś inaczej. A potem, kiedy wyszliśmy na pauzę, Rufus powiedział:

– Chłopaki, a co to właściwie jest twierdzenie Tietzego?

Wtedy żeśmy wszyscy zaczęli mówić jeden przez drugiego, a Euzebiusz, ten, co jest bardzo silny i lubi dawać innym fangi w nos, powiedział, że słyszał jak starsze chłopaki mówiły, że to jest coś gorszego niż geografia i historia i gramatyka razem wzięte.

– I mówili, że przy dowodzie rozcina się brzuch i wszędzie jest pełno krwi – dokończył, a mnie już wcale nie było tak do śmiechu, że jutro nie będzie arytmetyki.

Kiedy wróciłem do domu, zaraz poszedłem do siebie do pokoju i nawet nie chciało mi się bawić nowym czerwonym samochodzikiem strażackim, tym, który kupiła mi Bunia. Po chwili drzwi się otworzyły i zobaczyłem mamę i tatę, którzy robili wielkie oczy, jakby się czemuś dziwili.

– Mikołaj – powiedziała mama – czy coś się stało? Nie trzasnąłeś drzwiami i pozwoliłeś ojcu czytać w spokoju gazetę.

Wtedy ja się rozpłakałem i powiedziałem, że to niesprawiedliwe, że skoro już nie ma arytmetyki, to nie powinno być jakiegoś twierdzenia Tietzego, które jest strasznie trudne i że nie chcę, żeby Pan Dyrektor Do Spraw Dydaktycznych rozcinał mi brzuch. Wtedy rodzice roześmiali się, a tata usiadł na łóżku i wziął mnie na kolana.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

– Posłuchaj, Mikołaj – powiedział – nikt ci nie będzie nic rozcinać, to nie jest twierdzenie Jordana. Twierdzenie Tietzego jest bardzo fajnym twierdzeniem i ma niesamowity dowód!

– Naprawdę? – powiedziałem, ale na wszelki wypadek postanowiłem jeszcze trochę popłakać.

– Oczywiście, chłopie! Pamiętam, kiedy byłem młody, nikt nie potrafił udowadniać twierdzenia Tietzego jak ja, i kto wie, czy nie opublikowałbym prostszego dowodu, ale po ślubie nie miałem na to czasu.

No więc przestałem płakać, a mama powiedziała, że na deser zrobi szarlotkę, żeby jej króliczek miał jutro siłę dowodzić twierdzenie Tietzego. Moi rodzice są strasznie fajni!

Następnego dnia, kiedy przyszedłem do szkoły, wszyscy już byli i trzeba powiedzieć, że mimo wszystko byliśmy trochę podenerwowani. Spokojni byli tylko Gotfryd, którego tata jest bardzo bogaty i kupuje mu masę rzeczy, na przykład przebranie muszkietera, w którym przyszedł kiedyś do szkoły, i który tym razem założył T3, i Kleofas, który przyniósł usprawiedliwienie, które napisał mu tata.

– Powiedział, że to nie do pomyślenia, żeby już w tym wieku uczyć dzieci rachunku prawdopodobieństwa, więc teraz gwiżdżę na twierdzenie Tietzego – powiedział Kleofas i zaczął gwizdać.

Kiedy weszliśmy do sali, pani posłała Ananiasza po mapę ze zbioru domkniętego w $[0,1]$, a nas zapytała, co wiemy o twierdzeniu Tietzego. Po krótkiej chwili ciszy pani westchnęła i powiedziała, że w takim razie może ona o nim opowie.

– Otóż dzieci, wyobraźcie sobie, że mamy przestrzeń topologiczną i chcielibyście...

Ale pani nie powiedziała, czego byśmy chcieli, bo z tyłu klasy rozległ się rumor i zbiór wypukły, który stał w kącie, upadł na ziemię. Pani wstała i podeszła do ławki Kleofasa, który zaczął płakać, pochlipując „to nie ja".

– Kleofasie, dlaczego ruszyłeś zbiór wypukły? – powiedziała pani.

Wtedy Kleofas zaczął płakać jeszcze bardziej i powiedział, że to nieprawda, że zawsze jest wszystko na niego, że nikt go nie kocha, że nikt nie ruszył, że on nie ruszył, i że jeśli pani chce, to może się spytać Pana Dyrektora Do Spraw Dydaktycznych, czy ten przedmiot ruszył. Pani westchnęła ciężko i kazała Kleofasowi i Maksencjuszowi postawić zbiór na swoje miejsce, po czym wróciła do biurka.

– Dobrze – powiedziała – więc szczególnym typem przestrzeni topologicznej jest odcinek $[0,1]$ i dlatego warto zajmować się odwzorowaniami, które...

Ale pani nie powiedziała, którymi odwzorowaniami warto się zajmować, bo z tyłu klasy znów rozległ się rumor, i tym razem zaczął płakać Rufus, który siedzi z Euzebiuszem.

– Co się stało!? Rufus! – krzyknęła pani

– To Ebzebiusz – powiedział Rufus, trzymając się za nos – uberzył bnie w noc.

– To nieprawda! – krzyknął Euzebiusz – Rufus kłamie!

Pani wstała, zdenerwowana jak nie wiem co, powiedziała, że to skandal bić kolegę w klasie, i że Euzebiusz natychmiast pójdzie z nią do Pana Dyrektora Do Spraw Dydaktycznych.

– Dobrze ci tak – powiedział Rufus i palnął Euzebiusza w głowę i pani wyprowadziła ich obu, mówiąc, żeby Ananiasz przeczytał na głos kilka stron z książki.

Ananiasz stanął za katedrą i zaczął czytać:

– Gospodarz niesie na targ zwartą i spójną kurę. Kura znosi jajka w postępie geometrycznym, przy czym każde jajko jest doklejone do poprzedniego skorupką przy pomocy nietrywialnego odwzorowania gładkiego. Jeśli wiesz, że przestrzeń pętli kury ma typ homotopii wielościanu, policz, w którym roku umarła babka stróża...

– Chłopaki, zagramy w dwa ognie?! – krzyknął Maksencjusz.

– Maksencjusz, proszę o ciszę! – powiedział Ananiasz, ale myśmy wszyscy wstali i zaczęli ustawiać ławki. Ananiasz zaczął walić linijką w stół – wariat z tego Ananiasza! – więc Maksencjusz podszedł do niego zapytać, czy raczej nie wolałby dostać w ucho. Ananiasz rozpłakał się, a zbiór wypukły znów upadł na ziemię (widocznie nie był zbalansowany) i na to weszła pani. Nie wyglądała na zachwyconą.

– Dobrego porządku to tu nie ma – powiedziała.

– Psze pani, ale przecież Ananiasz jest pierwszy, a poza tym zbiór jest skończony! – wyrwał się Joachim.

– Tak, ale Kleofas jest elementem ostatnim, a Alcest największym – powiedział Gotfryd i już mieliśmy się rozejść, bo w klasie była sprzeczność, ale spojrzeliśmy na panią i zobaczyliśmy, że nie ma żartów.

– Bardzo dobrze, Gotfrydzie – powiedziała pani – skoro jesteś taki rozmowny, to może przyjdziesz do tablicy i opowiesz nam o założeniach twierdzenia Tietzego.

Gotfryd już miał się rozpłakać, ale na jego szczęście zadzwonił dzwonek na pauzę. Pani westchnęła i powiedziała:

– Moglibyśmy przedłużyć lekcję, ale to wymagałoby użycia twierdzenia Tietzego, albo podania o przedłużenie lekcji do Pana Dyrektora Do Spraw Dydaktycznych, więc tym razem upiekło ci się, Gotfrydzie. Ale po przerwie wrócimy do tematu – i pani pogroziła mu palcem.

Na podwórku Gotfryd nie miał tęgiej miny.

– Chłopaki – powiedział – co właściwie trzeba założyć do twierdzenia Tietzego?

– Wypchaj się – powiedział Alcest, ten kolega, co ciągle je i co nie lubi, jak się go nazywa elementem największym – nic ci nie powiem, a poza tym nie wystarczy T_3, trzeba założyć normalność.

– Rozśmieszasz mnie – powiedział Gotfryd – od kiedy to do twierdzenia Tietzego potrzebna jest normalność?

– Alcest ma rację – powiedział Ananiasz – potrzebny jest warunek równoważny, mówiący...

Ale nie dowiedzieliśmy się, co mówił warunek, bo Gotfryd zaczął krzyczeć, że nie jesteśmy prawdziwymi kolegami, że nikt go nie uprzedził, i że jego tata, który ma masę pieniędzy, wybuduje mu własną szkołę na kampusie i że wszyscy będziemy mu zazdrościć i że twierdzenie Tietzego będzie tam chodziło tylko przy założeniu T_3, tak jak twierdzenie Atiyaha–Singera o indeksie i hipoteza Serre'a!

– W nosie mam twoje hipotezy – powiedział Kleofas – bo to nie my będziemy pytani po pauzie, więc gwiżdżę na nie! – i zaczął gwizdać, ale nie zdążyli się pobić, bo znów zadzwonił dzwonek.

W klasie pani powiedziała „Gotfrydzie, zapraszam do tablicy", a Gotfryd zaczął tłumaczyć, że twierdzenie Tietzego, jak hipoteza Serre'a, wymaga tylko założenia T_3, a może i $T_{2\frac{3}{4}}$, a pani zrobiła wielkie oczy.

– Bo tak naprawdę to ja przygotowałem się do tej lekcji – mówił Gotfryd – tylko to ten wstrętny złodziej Kleofas zabrał mi zeszyt, gdzie na marginesie miałem zapisany bardzo prosty dowód...

– Kto jest wstrętnym złodziejem, ty wstrętny złodzieju! – krzyknął Kleofas i wszyscy zaczęliśmy krzyczeć jeden przez drugiego, a pani zrobiła jeszcze większe oczy, bo wszedł Pan Dyrektor Do Spraw Dydaktycznych, który przyprowadził Rufusa i Euzebiusza.

– Brawo, chłopcy, brawo! Tuż po przerwie słychać was w całej szkole! Czy może mi pani powiedzieć, co tu się dzieje? – zwrócił się do pani.

– Właśnie jeden z chłopców proponował dowodzić hipotezę Serre'a... – powiedziała pani, która zrobiła się cała czerwona.

– Ach tak? Bardzo dobrze, który to? – powiedział Pan Dyrektor Do Spraw Dydaktycznych i zwrócił się do Gotfryda – czy możesz mi w takim razie powiedzieć, o czym mówi hipoteza Serre'a?

Gotfryd powiedział, że nie pamięta dokładnie, ale wie, że chodziło o kruka, który siedział na gałęzi logarytmu i trzymał w dziobie kawałek sera marki roquefort...

– Nic podobnego – wyrwał się Rufus – to był camembert!

Na co Gotfryd powiedział, że Rufus jest głupi, że kruk nie mógłby trzymać w dziobie camemberta, bo ten ser śmierdzi, a poza tym z niego wynika 1AP, a Pan Dyrektor Do Spraw Dydaktycznych krzyknął „dosyć!".

– Dosyć! – powtórzył, machając rękami – mam dosyć tej klasy! Wszyscy za karę przyjdziecie jutro do szkoły[1]! To was oduczy zajmować się algebrą na zajęciach z topologii! – powiedział i wyszedł, trzaskając drzwiami.

Nasza pani jest jednak strasznie fajna. Powiedziała, że może rzeczywiście twierdzenie Tietzego w całej ogólności jest dla nas za trudne, więc jutro zajmiemy się tylko przedłużaniem na otoczenia odwzorowań ze zbioru otwartego i że może nie będzie tego na egzaminie. Więc wychodząc powiedzieliśmy sobie, że topologia jest jednak strasznie fajna i poszliśmy do domów zwartą grupą.

Andrzej Czarnecki
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
Andrzej.Czarnecki@im.uj.edu.pl

[1] W szkołach francuskich czwartek był dniem wolnym od nauki (obecnie grupą wolną jest $\mathbb{Z}$).

Na zbiór zwarty

Zbiorze nieoceniony, zacny zwarty zbiorze
Na tobie człek określić funkcję sobie może
Co jeśli tylko ciągła, zachowa twą zwartość
I przyjmie gdzieś po drodze swą największą wartość.

o autorstwo fraszki podejrzewany jest Jan Kochanowski z Czarnolasu

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 457–466
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Krótkie informacje

W 2020 roku Prezydent RP nadał tytuł naukowy profesora nauk ścisłych i przyrodniczych matematykom:

- w dniu 28 lutego – Ewie Bednarczuk z Politechniki Warszawskiej i Instytutu Badań Systemowych PAN,
- w dniu 21 lipca – Małgorzacie Bogdan z Uniwersytetu Wrocławskiego, Grzegorzowi Graffowi z Politechniki Gdańskiej i Marcie Tyran-Kamińskiej z Uniwersytetu Śląskiego,
- w dniu 21 września – Marcinowi Magdziarzowi z Politechniki Wrocławskiej.

W 2021 roku Prezydent RP nadał tytuł naukowy profesora nauk ścisłych i przyrodniczych matematykom:

- w dniu 4 stycznia – Joannie Janczewskiej z Politechniki Gdańskiej, Adamowi Nowakowi z Instytutu Matematycznego PAN i Andrzejowi Rozkoszowi z Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.
- w dniu 14 stycznia – Piotrowi Sołtanowi z Uniwersytetu Warszawskiego,
- w dniu 20 stycznia – Dariuszowi Idczakowi z Uniwersytetu Łódzkiego,
- w dniu 11 lutego – Pawłowi Kolwiczowi z Politechniki Poznańskiej,
- w dniu 26 lutego – Annie Jaśkiewicz z Politechniki Wrocławskiej.

* * *

Nagrodę Nobla z fizyki w 2020 roku otrzymał między innymi Roger Penrose z University of Oxford za odkrycie, że powstawanie czarnych dziur jest naturalną konsekwencją ogólnej teorii względności.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

* * *

Nagrodę Abela w 2021 roku otrzymali László Lovász z Alfréd Rényi Institute of Mathematics (ELKH, MTA Institute of Excellence) i Eötvös Loránd University oraz Avi Wigderson z Institute for Advanced Study za fundamentalny wkład w rozwój informatyki teoretycznej i matematyki dyskretnej oraz kluczową rolę w przekształceniu tych dziedzin w kluczowe dyscypliny matematyki współczesnej.

* * *

Aline Bonami z Université d'Orléans oraz Peter Ebenfelt z University of California w San Diego zostali uhonorowani w 2021 roku Nagrodą Stefana Bergmana. Aline Bonami nagrodzono za głęboki wkład w badania w zakresie analizy zespolonej wielu zmiennych i przestrzeni analitycznych. Peter Ebenfelt otrzymał nagrodę za znaczący wkład w rozwój analizy zespolonej wielu zmiennych, geometrii Cauchy'ego–Riemanna i równań różniczkowych cząstkowych.

* * *

Nagrody Główne PTM za 2020 rok otrzymali:

- Jerzy Weyman z UJ, Nagrodę im. Stefana Banacha, za cykl prac z algebry dotyczących teorii syzygii oraz teorii półniezmienników reprezentacji kołczanów,
- Małgorzata Bogdan z UWr, Nagrodę im. Hugona Steinhausa, za całokształt dorobku w dziedzinie zastosowań matematyki,
- Danuta Ciesielska z Instytutu Historii Nauki PAN im. L. i A.Birkenmajerów, Nagrodę im. Samuela Dicksteina, za bardzo aktywną i wytrwałą działalność oraz poważny dorobek w każdej z dziedzin: badaniach nad historią matematyki, edukacji matematycznej oraz popularyzacji matematyki.

* * *

Nagrodę PTM dla Młodych Matematyków w 2020 roku otrzymali:

- Wojciech Górny z UW za cykl prac dotyczących zagadnienia najmniejszego gradientu dla pewnej klasy funkcjonałów,
- Marcin Sroka z UJ za cykl dotyczących istnienia i regularności rozwiązań pewnej klasy nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych II rzędu.

* * *

Wojciech Kucharz z UJ otrzymał w 2020 roku nagrodę naukową im. Mikołaja Kopernika w dziedzinie matematyki przyznawaną przez Polską Akademię Umiejętności za przedstawienie wyników w ramach rzeczywistej geometrii algebraicznej.

* * *

Klaudiusz Wójcik z UJ otrzymał w 2020 roku nagrodę Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego za znaczące osiągnięcia w zakresie działalności organizacyjnej.

* * *

Nagrody Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego w 2021 roku otrzymali:
- Piotr Tworzewski z UJ za całokształt dorobku naukowego,
- Zbigniew Palmowski z PWr za znaczące osiągnięcia w zakresie działalności naukowej.

* * *

Laureatką nagrody Prezesa Rady Ministrów w 2020 roku za 2019 rok w kategorii wyróżniającej się rozprawy doktorskiej została Marta Strzelecka z UW. Wyróżniona zastała jej rozprawa *Estimates for moments of random vectors*, w której autorka uzyskała nowe wyniki z zakresu badania oszacowań norm wektorów losowych w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej oraz udowodniła nowe twierdzenie dotyczące norm operatorowych macierzy losowych.

* * *

Zbigniew Marciniak z UW otrzymał tytuł doktora honoris causa Uniwersytetu Pedagogicznego im. KEN w Krakowie.

* * *

Marta Lewicka z University of Pittsburgh została uhonorowana tytułem Fellow of the American Mathematical Society, Class of 2021, za wyniki w dziedzinie równań różniczkowych cząstkowych i rachunku wariacyjnego, z zastosowaniami w mechanice ośrodków ciągłych.

* * *

Franciszek Hugon Szafraniec z UJ otrzymał Béla Szőkefalvi–Nagy Medal 2020, przyznany przez Instytut Bolyaia Uniwersytetu w Szeged za osiągnięcia naukowe oraz za publikację wybitnych prac z teorii operatorów w *Acta Scientarium Mathematicarum*.

* * *

Kapituła Nagrody im. Andrzeja Malawskiego przyznała nagrodę za osiągnięcia w 2019 roku Rajani Singh za, wspólne z Agnieszką Wiszniewską-Matyszkiel, artykuły naukowe *Discontinuous Nash equilibria in a two-stage linear--quadratic dynamic game with linear constraints*, IEEE Transactions on Optimal Control 64 (2019), 3074–3079 oraz *A class of linear quadratic dynamic optimization problems with state dependent constraints*, Mathematical Methods of Operations Research 91 (2020), 325–355.

* * *

Jury pierwszej edycji konkursu o Nagrodę im. J. P. Schaudera dla młodych matematyków przyznało pierwszą nagrodą Jackowi Jendrejowi z CNRS i LAGA, Université Sorbonne Paris Nord za osiągnięcia w badaniach dynamiki nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Ponadto Jury postanowiło przyznać pierwsze wyróżnienie – Maciejowi Starostce z PG oraz *ex aequo* dwa drugie wyróżnienia – Wojciechowi Górnemu z UW i Marcinowi Sroce z UJ.

* * *

W drugiej edycji konkursu Politechniki Łódzkiej o nagrodę im. Profesor Urszuli Ledzewicz z dziedziny zastosowań matematyki dwie równorzędne pierwsze nagrody zdobyli:

- Adam Gregosiewicz z PL za rozprawę poświęconą analizie modelu rozwoju populacji komórkowych,
- Piotr Knosalla z UO za pracę, w której badany jest model zjawiska aerotaksji.

* * *

Laureatką trzeciej edycji Konkursu o nagrodę im. Edyty Szymańskiej została Iwona Chlebicka z UW. W dniu 25 marca 2021 roku laureatka wygłosiła online odczyt *Bardzo słabe rozwiązania równań różniczkowych*. Nagrodę ufundowaną przez Polskie Towarzystwo Kobiet w Matematyce otrzymała Agnieszka Hejna z UWr. Ponadto Jury konkursu wyróżniło osiągnięcia Anny Szymusiak z UJ, Karoliny Okrasy z PW, Dominiki Pilarczyk z PWr i Justyny Szpond z UP w Krakowie.

* * *

Żywilla Fechner z PŁ została laureatką Nagrody Polskiego Towarzystwa Kobiet w Matematyce za 2020 rok.

* * *

W IV edycji konkursu Krok w przyszłość organizowanego przez Fundację mBanku nagrodę główną i statuetkę STEFCIO otrzymał Wojciech Wawrów z UAM za pracę licencjacką *Algebraic curves and Jacobian conjecture*, natomiast wyróżnienia otrzymali Daniel Danielski z UW za pracę magisterską *Prostokątne grupy Coxetera o brzegu homeomorficznym z krzywą Mengera* i Kamil Rychlewicz z UW za pracę magisterską *Formal sums of lattice points in cones and toric geometry*. Ponadto nagrodę specjalną zarządu Fundacji mBanku otrzymał Jakub Skrzeczkowski z UW za pracę magisterską *Differentiability of solutions to perturbed structured population models with respect to perturbation parameter*.

* * *

W Konkursie PTM im. Józefa Marcinkiewicza na najlepszą studencką pracę z matematyki organizowanym przez Oddział Toruński PTM w 2020 roku nagrody otrzymali:

– pierwsze nagrody – Rafał Bistroń z UJ za pracę *Symetrie kwantowych sfer jako splątane algebry Hopfa*, Tymoteusz Chmiel z UJ za pracę *Picard–Fuchs operators of one-dimensional families of Calabi–Yau threefolds and their monodromy representations* oraz Marek Sokołowski z UW za pracę *Bounds on semi-ladder orders in sparse graph classes*,

– drugie nagrody – Przemysław Grabowski z UW za pracę *Canonical lifts of Calabi–Yau varietes* oraz Julia Lenczewska z PWr za pracę *Nierówności Hardy'ego dla ułamkowego laplasjanu*,
– trzecie nagrody – Krystian Gajdzica z UJ za pracę *Specjalne typy wyróżników* oraz Mateusz Górski z UJ za pracę *Uogólniony problem Turána dla cykli*,
– wyróżnienia – Wojciech Duliński z UJ za pracę *Homotopies and transcendental extensions in colouring problems*, Damian Głodkowski z UW za pracę *Stabilność stanów podstawowych Sturma* oraz Paweł Poczobut z UW za pracę *An algebraic variant of the Fischer–Grauert theorem*.

W 2020 roku fundatorami nagród w Konkursie byli Towarzystwo Upowszechniania Wiedzy i Nauk Matematycznych oraz firma Apator S.A.

* * *

W Konkursie PTM na najlepszą pracę studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki organizowanym przez Oddział Wrocławski PTM w 2020 roku nagrody otrzymali:

– pierwsze nagrody – Stanisław Cichomski z UW za pracę *Coherent distributions*: *examination of some open problems* oraz Tomasz Cąkała z UW za pracę *Filtr cząsteczkowy z repróbkowaniem Poissonowskim*,
– drugą nagrodę – Mikołaj Słupiński z UWr za pracę *Hidden Markov models in ultra-high frequency time series processing*,
– wyróżnienia – Oliwier Biernacki z UWr za pracę *Random walks in random environment*: *ruin probability in ballistic regime*, Kajetan Janiak z UW za pracę *Mathematical modeling of radiationaugmented T-cell extravasation*, Monika Jędrzejkowska z PWr za pracę *Numerical methods for nonlocal differential equations* oraz Martyna Wiśniewska z UWr za pracę *Model Lee–Cartera*.

* * *

W Konkursie PTM im. Anny Zofii Krygowskiej na najlepszą pracę studencką z dydaktyki matematyki w 2020 roku nagrody otrzymali:

– I nagrodę – Zofia Gąsienica-Sieczka z UP w Krakowie za pracę *Zamiana reprezentacji funkcji liniowej przez uczniów liceum i przyszłych nauczycieli w świetle porównawczych badań empirycznych*,
– II nagrodę – Piotr Marcin Czarnowski z UAM za pracę *Rozumienie pojęcia wysokości przez uczniów szkoły podstawowej*,

– III nagrodę – Paulina Hutek z UP w Krakowie za pracę *Zdalne nauczanie i uczenie się matematyki wśród uczniów szkół średnich w świetle własnych badań empirycznych*.

* * *

Jury Konkursu im. Witolda Wilkosza na najlepszą studencką pracę popularyzującą matematykę w 2020 roku postanowiło przyznać nagrody III stopnia:
– Alicji Hołowieckiej z PL za pracę *Enigma* (*nie*) *do złamania*,
– Justynie Łapuszek z UŚ za pracę *Piękno krzywej Jordana*.

* * *

Laureatem konkursu o Stypendium im. Michała Jakuba Łyska w 2021 roku został Tymoteusz Chmiel.

* * *

W dniu 17 listopada 2020 roku Jarosław Wiśniewski z UW wygłosił zdalnie XXVIII Wykład im. Władysława Orlicza *Działanie grupy multyplikatywnej i geometria odwracania macierzy*.

* * *

W dniu 1 grudnia 2020 roku Marcin Pilipczuk z UW wygłosił zdalnie XXVII Wykład im. Wojtka Pulikowskiego *Grafy bez długich indukowanych ścieżek*.

* * *

W dniu 17 grudnia 2020 roku Günter M. Ziegler z Freie Universität Berlin wygłosił zdalnie wykład *Semi-algebraic sets of integer points* w ramach Wykładów z Informatyki im. Mariana Rejewskiego, Jerzego Różyckiego i Henryka Zygalskiego.

* * *

W związku z odwołaniem finałów olimpiad przedmiotowych Komitet Główny Olimpiady Matematycznej przyznał wyróżnienia 56 zawodnikom za

najlepsze wyniki uzyskane w II etapie zawodów LXXI Olimpiady Matematycznej w roku szkolnym 2019/20. Wyróżnienia pierwszego stopnia otrzymali: Kosma Kasprzak, Aleksandra Kowalska, Piotr Kubaty, Łukasz Orski, Iwo Pilecki-Silva, Rafał Pyzik, Radosław Żak, Juliusz Banecki i Stanisław Hauke.

* * *

W dniach 19–28 września 2020 roku odbyła się w trybie zdalnym LXI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Uczestniczyło w niej 616 zawodników ze 105 państw. Drużyna Polski uplasowała się na 6 miejscu *ex aequo* z reprezentacją Włoch. Z zawodników polskich złote medale zdobyli Łukasz Orski i Juliusz Banecki, srebrne: Radosław Żak, Piotr Kubaty i Kosma Kasprzak, a Aleksandra Kowalska zdobyła medal brązowy.

* * *

W dniu 29 sierpnia 2020 roku odbyła się w trybie zdalnym XIV Środkowoeuropejska Olimpiada Matematyczna (MEMO). W klasyfikacji indywidualnej złote medale, zajmując pierwsze dwa miejsca, zdobyli Antoni Buraczewski i Paweł Gadziński; srebrny medal zdobył Mateusz Scharmach, a brązowe Korneliusz Obarski i Adam Dankowiakowski.

* * *

XXVI Międzynarodowe Zawody Matematyczne dla Studentów Uniwersytetów odbyły się w trybie zdalnym w dniach od 25 do 30 lipca 2020 roku. Drużyna Uniwersytetu Jagiellońskiego zajęła szóste miejsce, a Uniwersytetu Warszawskiego dziewiąte. Indywidualne nagrody pierwszego stopnia zdobyli: Szymon Zwara z UW, Tomasz Kiełbasa z UW, Damian Burczyk z UW, Jan Fornal z UJ, Azur Đonlagić z UJ, Semen Słobodianiuk z UW, Anatoli Shatsila z UJ, Radomił Baran z UJ i Daniel Kacper Murawski z UW.

* * *

W dniach 26–28 sierpnia 2020 roku w trybie online odbyły się Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne. W zawodach cztery pierwsze miejsca zajęli Polacy, byli to kolejno: Juliusz Banecki, Kosma Kasprzak, Łukasz Orski, Iwo Pilecki-Silva. Aleksandra Kowalska zajęła szóste miejsce, a Piotr Kubaty zajął miejsce jedenaste.

* * *

Finał Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego organizowanego przez redakcję *Delty* odbył się w dniu 24 września 2020 roku. Jury Konkursu przyznało:

- złote medale: Bartoszowi Chomińskiemu (XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu) za pracę *O pewnym kryterium zbieżności szeregów trygonometrycznych* oraz Radosławowi Żakowi (V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie) za pracę *Sprzężenie izogonalne i kilka własności punktu X25*,
- srebrny medal: Stanisławowi Majchrzakowi (III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie) za pracę *Od trójkątów do krzywych stożkowych, czyli o prostej innej niż wszystkie*,
- brązowe medale: Danielowi Gocowi (V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie) za pracę *W-zbieżność funkcji*, Piotrowi Juszczykowi (XII LO im. Stanisława Wyspiańskiego w Łodzi) za pracę *O ciągu z zadania 12. LXX Olimpiady Matematycznej*, Gabrielowi Kicińskiemu (III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni) za pracę *O nierówności jednorodnej z permutacjami i jej Shapiro-podobnym analogu*, oraz Filipowi Koniecznemu (III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie) za pracę *Przekształcenia rzutowe i inwolucje*.

* * *

W dniu 6 września 2020 roku zmarł w wieku 68 lat Vaughan Jones, laureat Medalu Fieldsa w 1990 roku, autor prac z teorii algebr von Neumanna i algebr planarnych, fizyki matematycznej, topologii niskowymiarowej, w szczególności z teorii węzłów.

W dniu 14 września 2020 roku zmarł w wieku 86 lat Andrzej Zajtz, specjalista w zakresie geometrii różniczkowej, w szczególności teorii obiektów geometrycznych.

W dniu 17 września 2020 roku zmarł w wieku 90 lat Jerzy Płonka, algebraik, twórca konstrukcji matematycznej określanej mianem sumy Płonki.

W dniu 22 września 2020 roku zmarł w wieku 81 lat Julian Ławrynowicz, specjalista w zakresie analizy zespolonej i geometrii różniczkowej, wychowawca dużej grupy matematyków, autor szeregu monografii i podręczników.

W dniu 27 września 2020 roku zmarł w wieku 67 lat John D. Barrow, słynny matematyk, kosmolog i fizyk, autor wielu książek popularnonaukowych.

W dniu 5 października 2020 roku zmarł w wieku 86 lat Zbigniew Ciesielski, jeden z najwybitniejszych polskich matematyków, specjalista w zakresie

teorii prawdopodobieństwa, znany między innymi z konstrukcji ruchu Browna, członek honorowy PTM, prezes PTM w kadencji 1980–1983.

W dniu 11 października 2020 roku zmarł w wieku 92 lat Julian Musielak, współtwórca poznańskiej szkoły analizy funkcjonalnej, który wraz z Władysławem Orliczem zapoczątkował teorię przestrzeni modularnych, członek honorowy PTM, prezes PTM w kadencji 1991–1993.

W dniu 15 października 2020 roku w wieku 90 lat zmarł Andrzej Kazimierz Kapcia, założyciel Oddziału Częstochowskiego PTM i jego prezes przez okres 11 lat. Przez prawie 40 lat związany z Politechniką Częstochowską. W swojej pracy naukowej zajmował się równaniami różniczkowymi zwyczajnymi.

W dniu 2 listopada 2020 roku w wieku 71 lat zmarł Andrzej Fryszkowski, specjalista w zakresie inkluzji różniczkowych i teorii optymalnego sterowania.

W dniu 22 grudnia 2020 roku w wieku 88 lat zmarł Krzysztof Moszyński, specjalista z nieliniowych równań różniczkowych w zagadnieniach fizyki i biologii oraz z analizy numerycznej.

W dniu 29 stycznia 2021 roku w wieku 72 lat zmarł Tadeusz Bednarski, wybitny specjalista w zakresie statystycznej analizy danych, ekonometrii, statystyki ubezpieczeniowej i wnioskowania statystycznego.

W dniu 2 marca 2021 roku zmarła w wieku 75 lat Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz, w latach 1992–2012 redaktor naczelna czasopisma dla nauczycieli *Matematyka*, laureatka Nagrody im. Samuela Dicksteina za 2005 rok.

W dniu 25 marca 2021 roku zmarł w wieku 76 lat Jan Waszkiewicz, pracownik naukowy PWr, samorządowiec, laureat Nagrody im. Samuela Dicksteina za 1991 rok.

Redakcja prosi o nadsyłanie informacji do działu *Krótkich informacji* na adres: Grzegorz Łysik, Instytut Matematyki UJK, ul. Uniwersytecka 7, 25-406 Kielce, e-mail: glysik@ujk.edu.pl.

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 467–469
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Henryk Hudzik (1945–2019)





W dniu 2 marca 2019 roku zmarł Henryk Hudzik, profesor nauk matematycznych pracujący na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, były członek Prezydium Zarządu Głównego PTM, były prezes Oddziału Poznańskiego PTM, były redaktor naczelny *Commentationes Mathematicae*, wybitny matematyk, ceniony w świecie specjalista z zakresu geometrii przestrzeni Banacha, niezwykle zasłużony dla polskiego i międzynarodowego środowiska naukowego, a przede wszystkim człowiek o wielkiej wrażliwości, wspierający rozwój naukowy młodych matematyków.

Urodził się 16 marca 1945 roku w Kelcin Hawel w Niemczech jako syn Jadwigi i Marcina Hudzików, przymusowych robotników rolnych, których zawierucha wojenna rzuciła na te tereny. Po powrocie do Polski rodzina zamieszkała we wsi Mielcuchy w powiecie ostrzeszowskim. Po ukończeniu szkoły podstawowej Henryk, z powodu śmierci matki, przez dwa lata pomagał ojcu w gospodarstwie i wychowaniu dwóch młodszych sióstr. Następnie podjął naukę

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

w zawodzie stolarza w Technikum Przemysłowo-Pedagogicznym w Łomży. Już wtedy pojawiło się jego wielkie zainteresowanie matematyką, co zaowocowało decyzją o podjęciu studiów na kierunku matematyka na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

W trakcie studiów Henryk zainteresował się teorią przestrzeni funkcyjnych. W 1977 roku obronił pracę doktorską *O uogólnionych przestrzeniach Orlicza–Sobolewa*, której promotorem był Julian Musielak. W kolejnych latach zafascynowały go badania geometrycznych własności przestrzeni Banacha. Stopień naukowy doktora habilitowanego uzyskał w 1986 roku na podstawie rozprawy *Geometryczne i topologiczne własności przestrzeni Orlicza i Musielaka–Orlicza*, a nominację profesorską otrzymał w 1994 roku.

Praca naukowa stanowiła dla Henryka centrum jego zainteresowań, była jego pasją, której oddawał się bezgranicznie. Opublikował ponad dwieście dwadzieścia artykułów naukowych w ponad czterdziestu czasopismach o międzynarodowym zasięgu. Jego wyniki są cytowane w kilkunastu monografiach. Tematy badawcze dotyczyły głównie geometrii przestrzeni Banacha, przestrzeni funkcyjnych, teorii aproksymacji i teorii punktów stałych, zastosowań przestrzeni funkcyjnych w równaniach różniczkowych cząstkowych i równaniach całkowych. Jego praca była wielokrotnie nagradzana – m.in. pięciokrotnie nagrodami ministra, a w 1986 roku Wielką Nagrodę PTM im. Stefana Banacha. Prowadził rozległą współpracę naukową z ośrodkami w kraju i na świecie, m.in. w Chinach, Hiszpanii, Czechach, Niemczech, USA. W latach od 2001 do 2014 był redaktorem naczelnym *Commentationes Mathematicae*. Był również członkiem redakcji ponad piętnastu czasopism międzynarodowych. Henryk był wielokrotnie zapraszany na konferencje naukowe w celu wygłoszenia referatów plenarnych. Był również stałym członkiem komitetu naukowego cyklicznej konferencji *Function Spaces* od chwili jej powstania, to jest od 1986 roku.

Aktywność Henryka nie ograniczała się wyłącznie do badań. Wysoka umiejętność łączenia pracy naukowej z aktywnością na rzecz wydziału, uniwersytetu i środowiska matematycznego pozwoliły mu pełnić szereg funkcji, w tym prodziekana ds. studenckich, a następnie prodziekana ds. naukowych, członka Senatu UAM, prezesa Oddziału Poznańskiego PTM, członka Prezydium Zarządu Głównego PTM. Wiele czasu poświęcał studentom i młodym matematykom, nie tylko na swojej macierzystej uczelni, ale również – od 2005 roku – w Państwowej Wyższej Szkole Zawodowej w Płocku. Był promotorem szesnastu rozpraw doktorskich, w tym doktorantów zagranicznych (pięciu z Chin i jednego z Syrii). Jedna z jego doktorantek – Małgorzata Doman – ma już tytuł profesora, a dwóch doktorantów – Paweł Foralewski oraz Radosław Kaczmarek – uzyskało stopień doktora habilitowanego.

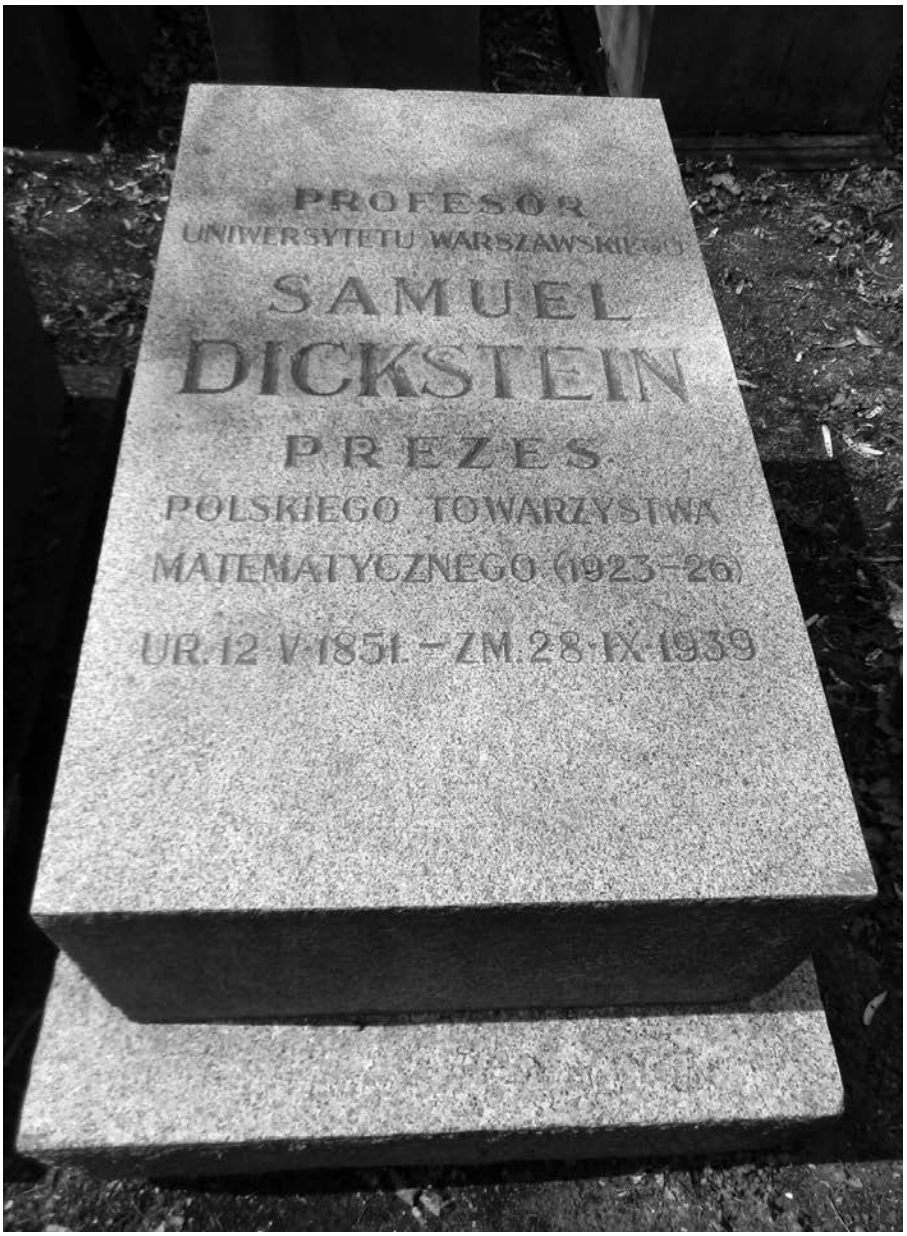
Henryk był człowiekiem niesamowicie pracowitym, bardzo dobrze zorganizowanym, broniącym swoich przekonań, a jednocześnie bardzo wrażliwym. Życie doświadczyło go wielokrotnie – wczesna śmierć matki, długa choroba i śmierć pierwszej żony, ciężka choroba wnuka. Jednak nigdy swoich osobistych kłopotów nie przenosił poza sferę prywatną. Wręcz przeciwnie – dostrzegał problemy u innych i starał się służyć im jak największą pomocą. Dotyczyło to również studentów. W okresie egzaminów przed jego gabinetem gromadziły się liczne grupy studentów, którym Henryk po raz kolejny starał się wytłumaczyć zawiłości matematyki – zawsze wierząc, że poświęcenie dodatkowego czasu nie tylko uchroni ich przed złą oceną, ale przede wszystkim pozwoli im na zrozumienie piękna matematyki.

Bertrand Russell powiedział, iż „matematyka zawiera w sobie nie tylko prawdę, ale i najwyższe piękno – piękno chłodne i surowe, podobne do piękna rzeźby". Notatki Henryka były napisane nienagannym, wręcz kaligraficznym pismem podkreślającym to piękno przejawiające się w postaci formułowanych tez i twierdzeń. Niestety, Henryk już nie weźmie pióra do ręki i nie napisze kolejnej pracy. Baoxiang Wang, profesor matematyki Uniwersytetu Pekińskiego, na wiadomość o nagłej i niespodziewanej śmierci Henryka napisał:

> W Chinach wierzymy, że dobrzy ludzie idą do nieba. Być może będzie Ci trochę trudno odnaleźć się w tym nowym miejscu, ale mamy takie przysłowie – nie bój się trudnej drogi, którą masz przed sobą, gdyż wszyscy pragną mieć szlachetnego człowieka za przyjaciela!

Henryk Hudzik został pochowany 9 marca 2019 roku na cmentarzu parafialnym w Suchym Lesie.

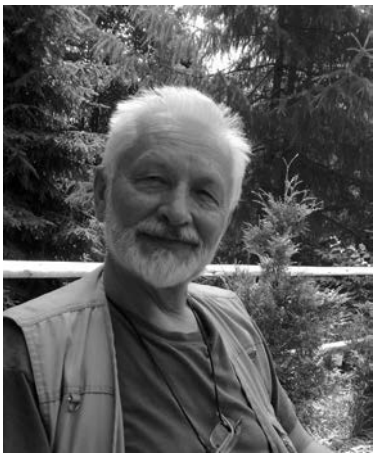
Marek Wisła (Poznań)



Grób Samuela Dicksteina na cmentarzu żydowskim w Warszawie (fot. Remigiusz Sosnowski)

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 471–474
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Zdzisław Denkowski (1940–2019)





W dniu 28 czerwca 2019 roku odszedł od nas Zdzisław Denkowski, emerytowany profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, nestor krakowskiego środowiska matematycznego, pracujący w Katedrze Teorii Optymalizacji i Sterowania na Wydziale Matematyki i Informatyki. Poznałem go w okresie moich studiów na Uniwersytecie Jagiellońskim około 1992 roku, więc nasza znajomość i wspólna praca obejmowała okres ponad dwudziestu pięciu lat. Był światowej klasy specjalistą w zakresie równań różniczkowych oraz teorii optymalizacji i sterowania, znanym i uznanym matematykiem.

Zdzisław Denkowski urodził się 16 października 1940 roku w Dzierzkowicach w powiecie kraśnickim (obecnie województwo lubelskie). Był także sądeczaninem. Jego ojca, Kazimierza Michotę, w czasie II wojny światowej zastrzelili Niemcy. Został adoptowany przez wujostwo Jadwigę i Tomasza Denkowskich, zamieszkał z nimi w Trzycierzu w gminie Korzenna. Ukończył I Liceum Ogólnokształcące im. Jana Długosza w Nowym Sączu w 1958 roku. Był finalistą IX

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Olimpiady Matematycznej. Studia w zakresie matematyki ukończył na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego i uzyskał w 1963 roku tytuł magistra matematyki. Przez wiele lat był pracownikiem Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego. W 1969 roku obronił na UJ rozprawę doktorską przygotowaną pod kierunkiem Andrzeja Lasoty. Habilitację uzyskał dziesięć lat później także w swojej Alma Mater. W dniu 4 stycznia 1995 roku nadano mu tytuł profesora nauk matematycznych.

Zdzisław Denkowski był współzałożycielem powstałego w 1975 roku Instytutu Informatyki UJ. Całym sercem oddany był pracy na rzecz nowej jednostki Uniwersytetu Jagiellońskiego. W latach 1980–2005 był kierownikiem Katedry Optymalizacji i Sterowania w Instytucie Informatyki UJ, a funkcję dyrektora Instytutu Informatyki pełnił w latach 1981–1984, 1987–1990 oraz 2005–2006. Przez okres wielu lat był przewodniczącym Rady Naukowej Instytutu. W 1981 roku, w pierwszych od wielu lat wyborach władz dziekańskich na UJ, został wybrany prodziekanem Wydziału Matematyki i Fizyki – funkcję tę pełnił do następnych wyborów. Był członkiem Polskiego Towarzystwa Matematycznego od 1965 roku. Żona Zdzisława Denkowskiego, Zofia, jest matematykiem pracującym we Francji, a ich młodszy syn Maciej Denkowski, również matematyk, jest profesorem zatrudnionym w Instytucie Matematyki UJ w Katedrze Teorii Osobliwości. Cała działalność naukowa, dydaktyczna i organizacyjna Zdzisława Denkowskiego związana była z Uniwersytetem Jagiellońskim.

Zdzisław Denkowski jest autorem lub współautorem ponad sześćdziesięciu prac naukowych i dwóch obszernych monografii [2, 3] z 2003 roku. Każda z tych monografii może służyć jako materiał do poprowadzenia kilkusemestralnego kursu w zakresie analizy nieliniowej. Zdzisław Denkowski pracował w Scuola Normale Superiore di Pisa, na uczelniach w Trieście oraz Poitiers we Francji. W Pizie współpracował z Ennio De Giorgim, który przez wielu uważany jest za największego włoskiego matematyka dwudziestego wieku i twórcę włoskiej szkoły analizy matematycznej. Działalność Zdzisława Denkowskiego wykraczała daleko poza jego bogaty wkład w społeczność matematyczną. Za książką [4] zacytuję uwagę Zdzisława Denkowskiego dotyczącą De Giorgiego:

> De Giorgi odegrał szczególnie istotną rolę dla mnie i moich młodych kolegów z Krakowa, J. Traplego i S. Migórskiego. Nie tylko pokazał mi nową dziedzinę matematyki i zachęcił do badań, ale również zapraszał często do Scuola Normale. Na przykład, gdy był na urlopie naukowym w roku akademickim 1985/1986, poprosił mnie o objęcie swojego stanowiska profesora kontraktowego w Scuola Normale Superiore. Podczas tego rocznego urlopu De Giorgi wciąż pracował w Scuola Normale Superiore. Jego wtorkowy kurs z analizy przejąłem ja, ale środowy kurs z podstaw matematyki trwał bez zmian.

Tematyka prac naukowych Zdzisława Denkowskiego obejmuje zagadnienia sterowania optymalnego, istnienie i stabilność rozwiązań optymalnych, równania różniczkowe zwyczajne, inkluzje różniczkowe, analizę asymptotyczną dla równań różniczkowych, zagadnienia optymalizacji kształtu, teorię nierówności wariacyjnych i nierówności hemiwariacyjnych, zastosowania matematyki w medycynie, w mechanice (teoria sprężystości, lepkosprężystości, termolepkosprężystości, piezoelektryczności, zadania kontaktowe), zagadnienia eliptyczne z rezonansem, krotność rozwiązań, zagadnienia odwrotne i zadania identyfikacji parametrów. Interesująca publikacja Denkowskich [1] przedstawia rozwinięcie idei De Giorgiego dotyczącej istnienia uogólnionych rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych z nieciągłą prawą stroną – rozwiązania równań można otrzymać jako minima pewnych funkcjonałów, które są Γ-granicami odpowiednio wprowadzonego ciągu funkcjonałów. W oparciu o teorię Γ-zbieżności zbadano rozwiązania w sensie De Giorgiego, Fillipova i Krasowskiego.

Zdzisław Denkowski był człowiekiem o wyjątkowej życzliwości dla innych. Był znakomitym wykładowcą, zawsze gotowy nieść pomoc dla studentów, doktorantów i młodszych koleżanek i kolegów. Był wychowawcą kilku pokoleń matematyków i informatyków oraz promotorem młodej kadry naukowej. Na Uniwersytecie Jagiellońskim wypromował pięcioro doktorów: Nguyena Hoę (1982), Stanisława Migórskiego (1990), Macieja Smołkę (1999), Leszka Gasińskiego (2000) i Martę Kornafel (2013), spośród których prawie wszyscy są pracownikami naukowo-dydaktycznymi polskich uniwersytetów.

Zdzisław Denkowski odszedł w 79 roku życia i został pochowany w dniu 2 lipca 2019 roku na cmentarzu głównym w Nowym Sączu przy ul. Śniadeckich. Pożegnaliśmy wspaniałego człowieka, bardzo cenionego matematyka i mojego niezapomnianego przyjaciela.

Cytowane prace

[1] Z. Denkowska, Z. Denkowski, *Generalized solutions to ordinary differential equations with discontinuous right-hand sides via* Γ*-convergence*, [w:] *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations* (F. Colombini, A. Marino, L. Modica, S. Spagnolo, red.), t. 1, Birkhäuser, Boston 1989, 371–400.

[2] Z. Denkowski, S. Migórski, N. S. Papageorgiou, *An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, Boston–Dordrecht–London––New York 2003.

[3] Z. Denkowski, S. Migórski, N. S. Papageorgiou, *An Introduction to Nonlinear Analysis: Applications*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, Boston–Dordrecht––London–New York 2003.
[4] A. Parlangeli, *A Pure Soul. Ennio De Giorgi, A Mathematical Genius*, Springer International Publishing, Cham 2019.

Stanisław Migórski (Kraków)

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 475–478
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Jan Stanisław Lipiński (1923–2019)



Jan Stanisław Lipiński urodził się 24 listopada 1923 roku w Przemyślu. Rodzice byli nauczycielami. W mieście rodzinnym uczęszczał do szkoły powszechnej i gimnazjum. Wybuch II wojny światowej spowodował, że nie ukończył gimnazjum i kontynuował naukę w polsko-ukraińskiej szkole średniej w Lubaczowie. Zamiłowanie do matematyki rozwinęli w nim rodzice. W młodzieńczym wieku z ogromnym zainteresowaniem czytał polecane przez rodziców popularnonaukowe książki matematyczne.

W 1941 roku, po kolejnym najeździe niemieckim na tereny, na których mieszkał z rodziną, podjął pracę w tartaku. W 1944 roku przeniósł się do Warszawy i wkrótce doświadczył pierwszych dni powstania warszawskiego. Następnie trafił do obozu w Pruszkowie, a stąd został wywieziony do przymusowej pracy na Dolnym Śląsku. Po wyzwoleniu Polski spod okupacji niemieckiej w 1945 roku osiadł w Zgierzu, gdzie zdał eksternistycznie maturę ogólnokształcącą, a następnie pedagogiczną i rozpoczął tam pracę jako nauczyciel w szkole powszechnej.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

W 1952 roku uzyskał dyplom magistra filozofii w zakresie matematyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Łódzkiego. W czasie studiów swoim talentem matematycznym przyciągnął uwagę profesorów tego wydziału. Już w 1949 roku współpracę z Janem Lipińskim rozpoczął Zygmunt Zahorski, ówczesny wykładowca Uniwersytetu Łódzkiego. Liczne dyskusje i uczestnictwo w seminariach Zahorskiego zaowocowały pierwszymi oryginalnymi wynikami Jana Lipińskiego ogłoszonymi w 1955 roku w *Fundamenta Mathematicae*.

Po zakończeniu studiów podjął pracę w II Katedrze Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego. Na tym uniwersytecie uzyskał w 1958 roku stopień kandydata nauk, który w pewnym sensie można uznać za odpowiednik dzisiejszego doktoratu, a w 1960 roku nominację na stanowisko docenta. W 1967 roku otrzymał tytuł profesora nadzwyczajnego, a w 1977 roku – profesora zwyczajnego. W 2010 roku na Uniwersytecie Łódzkim odbyła się uroczystość odnowienia jego doktoratu.

W swojej karierze zawodowej Jan Lipiński pracował – pełniąc różne funkcje – na kilku uczelniach w Polsce i poza jej granicami. Współpracował też z wieloma instytucjami naukowymi w kraju i na świecie. W 1956 roku został adiunktem Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk. Przez jeden semestr roku akademickiego 1960/1961 przebywał na uniwersytecie w Moskwie, gdzie uczestniczył w seminariach matematycznych. Po powrocie do kraju kierował Zakładem Funkcji Rzeczywistych w II Katedrze Matematyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego i przez dwie kadencje był prodziekanem tego wydziału.

W 1969 roku przeniósł się do Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Gdańsku, która pilnie potrzebowała wysoko kwalifikowanej kadry. W tym okresie środowisko naukowe razem z władzami Gdańska dążyło do utworzenia uniwersytetu w tym mieście. Decyzja o zatrudnieniu Lipińskiego przyniosła wyjątkowo pozytywne rezultaty dla rozwoju nie tylko gdańskiego ośrodka matematycznego, ale też uczelni. W Wyższej Szkole Pedagogicznej w Gdańsku Lipiński bardzo aktywnie włączył się w działania związane z organizacją nowego uniwersytetu. Po utworzeniu Uniwersytetu Gdańskiego w 1970 roku na dwa lata objął stanowisko dyrektora Instytutu Matematyki i nadał temu instytutowi odpowiednią strukturę dla dalszego rozwoju matematycznego. Sprowadził też na uniwersytet innych matematyków, niejednokrotnie wybitnych, w tym późniejszego założyciela kierunku informatyka na Uniwersytecie Gdańskim. W latach 1970–1991 był kierownikiem Zakładu Funkcji Rzeczywistych i Rachunku Prawdopodobieństwa. W latach 1975–1993 pracował również w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Słupsku. O kształceniu matematycznym młodzieży myślał w szerszym zakresie. Utworzył dla młodzieży uzdolnionej matematycznie klasę uniwersytecką przy

I Liceum Ogólnokształcącym w Gdańsku. W 1991 roku przeszedł na emeryturę, ale na Uniwersytecie Gdańskim pracował jeszcze do 1998 roku.

Był zapraszany przez wybitnych światowych specjalistów z teorii funkcji rzeczywistych jako profesor wizytujący. Gościnnie prowadził wykłady i odczyty na uczelniach w Kanadzie, Wielkiej Brytanii i USA.

Lipiński był człowiekiem skromnym, pozytywnym, ukierunkowanym na profesjonalne działanie. W okresie wzmożonej aktywności zawodowej, w tym również dotyczącej organizacji uczelni, z którymi był związany, współpracował z różnymi jednostkami naukowymi Polskiej Akademii Nauk i agendami ówczesnych ministerstw edukacji i szkolnictwa wyższego. Za swoją działalność wielokrotnie otrzymywał ministerialne nagrody i wyróżnienia.

Aktywnie działał w Polskim Towarzystwie Matematycznym. W latach 1963–1965 był prezesem Oddziału Łódzkiego PTM, a w latach 1979–1983 prezesem Oddziału Gdańskiego PTM. Za jego zasługi przyznano mu w 2006 roku godność członka honorowego Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Był też członkiem Gdańskiego Towarzystwa Naukowego.

Lipiński miał ogromny dar zrzeszania wokół siebie uzdolnionych matematycznie ludzi, z którymi nawiązywał współpracę jako specjalista z teorii funkcji rzeczywistych, teorii miary i teorii całki. Działania te przyczyniły się do ukształtowania licznej grupy zaangażowanych matematyków, zarówno w Łodzi, jak i w Gdańsku, Bydgoszczy i Słupsku. Tematyka, którą zapoczątkował na swoich seminariach naukowych, była rozwijana nie tylko przez jego uczniów, ale też przez uczniów jego uczniów. Lipiński wypromował ośmiu doktorów, po czterech w Łodzi i w Gdańsku. Dwóch z nich jest dziś profesorami, a kolejna osoba uzyskała habilitację. Natomiast jego uczniowie i uczniowie jego uczniów, do chwili obecnej, wypromowali w sumie siedemdziesięciu doktorów. W tej grupie jest kolejnych trzech profesorów i ośmiu doktorów habilitowanych.

Był bardzo dobrym i wyrozumiałym nauczycielem. Pracował na różnych uczelniach, ale nigdy nie zapominał o swoich uczniach. Mogli przyjechać do niego na konsultację i uczestniczyć w prowadzonych przez niego seminariach. Zachęcał też swoich doktorantów do udziału w krajowych i zagranicznych konferencjach naukowych, niejednokrotnie zasiadał też w ich komitetach organizacyjnych.

Uczniowie Lipińskiego z całą mocą podkreślają ogrom zaszczytu, jakiego dostąpili współpracując z tak znamienitą postacią, dzięki czemu ich wiedza i umiejętności zostały pogłębione. Na rozwój kariery naukowej uczniów Lipińskiego istotnie wpłynęły też liczne jego kontakty ze światowymi specjalistami w dziedzinie funkcji rzeczywistych. W uznaniu wyjątkowego zaangażowania w działalność dla środowiska uczniowie Lipińskiego zorganizowali sesje nauko-

we z okazji jego urodzin. W 2003 roku odbyła się sesja matematyczna z okazji osiemdziesiątej, a w 2013 roku z okazji dziewięćdziesiątej rocznicy urodzin. Obie uroczystości, na których gościem honorowym był sam jubilat, zorganizowano w Instytucie Matematyki Wydziału Matematyki, Fizyki i Techniki Uniwersytetu Gdańskiego. Z okazji dziewięćdziesiątej rocznicy urodzin wydana też została pamiątkowa monografia *Traditional and present-day topics in real analysis. Dedicated to Professor Jan Stanisław Lipiński*.

W sesjach i konferencjach matematycznych uczestniczył do ostatnich lat życia, wzbogacając je swoją wiedzą i doświadczeniem.

Lipiński jest autorem blisko pięćdziesięciu publikacji zawierających oryginalne wyniki przede wszystkim z teorii funkcji rzeczywistych, ale też z teorii miary, teorii całki czy równań funkcyjnych. Dorobek naukowy Lipińskiego był wielokrotnie honorowany przez środowisko matematyczne. Okazją do opisu dorobku badawczego profesora było przyznanie Wielkiej Nagrody Polskiego Towarzystwa Matematycznego im. Stanisława Zaremby za 1965 rok, uroczystości związane z obchodami urodzin w latach 2003 i 2013, przyznanie honorowego członkowstwa PTM w 2006 roku i odnowienie doktoratu Uniwersytetu Łódzkiego w 2010 roku. Należy w tym miejscu podkreślić, że oryginalne wyniki badań Lipińskiego ujęte są w licznych monografiach, między innymi autorstwa czołowych specjalistów z teorii funkcji rzeczywistych, takich jak *Differentiation of Real Functions* Brucknera czy *Real Functions* Thomsona.

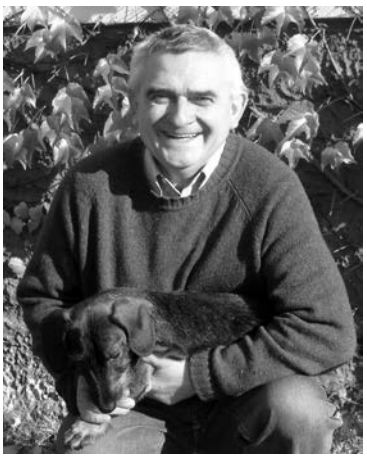
Jan Stanisław Lipiński jest uznanym przez środowisko matematyków kontynuatorem Polskiej Szkoły Funkcji Rzeczywistych zapoczątkowanej przez Wacława Sierpińskiego, Zygmunta Zahorskiego i Romana Sikorskiego. Wśród wszystkich wyróżnień, nagród i odznaczeń za najbardziej prestiżowe należy uznać – obok Nagrody im. St. Zaremby i członkostwa honorowego PTM – Medal Komisji Edukacji Narodowej i Krzyż Kawalerski Orderu Odrodzenia Polski.

Zmarł 20 grudnia 2019 roku w Gdańsku w wieku 96 lat. Został pochowany na cmentarzu komunalnym w Sopocie.

Zbigniew Grande, Ewa Strońska (Bydgoszcz)

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 479–483
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Wojciech Okrasiński (1950–2020)





W niedzielę 7 czerwca 2020 roku zadzwonił mój telefon, na ekranie wyświetliło się imię Wojtek. Ucieszyłem się, bo oznaczało to dłuższą rozmowę z Wojciechem Okrasińskim, z którym przyjaźniłem się od czasów naszych studiów na Uniwersytecie Wrocławskim. Rzadko potrafiłem przewidzieć, jaki będzie główny temat naszej rozmowy, ale byłem pewny, że Wojtek, niezależnie od tego, jak długo będzie ona trwać, zakończy ją słowami „Tadziu, musimy się spotkać i porozmawiać". Ku mojemu zaskoczeniu w słuchawce usłyszałem głos jego córki Hani, która poinformowała mnie, że jej ojciec zmarł nagle 6 czerwca.

Wojciech Okrasiński urodził się 27 marca 1950 roku w Rawiczu w rodzinie o patriotycznych tradycjach. Jego dziadkowie ze strony ojca przed odzyskaniem niepodległości mieszkali we Wrocławiu, a po jej odzyskaniu przeprowadzili się do Rawicza, gdzie przez kilka lat przed wybuchem II wojny światowej ojciec Wojtka był architektem miejskim.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Szkołę podstawową i średnią ukończył Okrasiński w swoim rodzinnym mieście. W latach 1968–1973 studiował matematykę teoretyczną na Uniwersytecie Wrocławskim. Był z tą uczelnią mocno związany, w latach 1973–1997 na niej zatrudniony. Pracę magisterską *Lokalna zasada maksimum jako warunek konieczny i dostateczny optymalności sterowania układami liniowymi z ograniczeniami w przestrzeni fazowej* napisał pod opieką Adama Rybarskiego. Rozprawę doktorską *O pewnej klasie nieliniowych równań splotowych* obronił na UWr w 1979 roku, promotorem była Hanna Marcinkowska. Habilitację uzyskał w 1994 roku. Recenzentami rozprawy habilitacyjnej *O pewnej klasie nieliniowych równań całkowych typu Volterry* byli Jan Kisyński, Hanna Marcinkowska, Roger Nussbaum i Wojciech Zajączkowski. Nominację profesorską otrzymał w 2004 roku. Procedura przyznania tytułu została przeprowadzona przez Radę Wydziału Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego.

Wojciech Okrasiński był bardzo aktywnym uczestnikiem seminarium z równań różniczkowych prowadzonego w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XX wieku przez Andrzeja Krzywickiego i Hannę Marcinkowską w Instytucie Matematycznym UWr. Główną tematyką tego seminarium w tych latach były równania filtracji, które pojawiły się w związku ze współpracą z Poltegorem i Cuprum. Opisywały one zachowanie się wód gruntowych w otoczeniu kopalń odkrywkowych oraz infiltrację zanieczyszczeń ze zbiorników poflotacyjnych. Jedno z badanych zagadnień doprowadziło do niebanalnego równania całkowego (zob. [1]). Wojtek poświęcił mu wiele lat swej działalności naukowej. Najważniejsze jego wyniki dotyczyły pewnej klasy równań całkowych typu Volterry. Dowodził istnienia rozwiązań niezerowych oraz ich jednoznaczności (zob. [2–4]). Interesowało go też określenie przedziału, na którym rozwiązanie wybuchało (zob. [5]).

Wkrótce stał się jednym z najbardziej znanych i cenionych ekspertów w teorii nieliniowych równań całkowych. Dowodem niech będzie zaproszenie go do napisania rozdziału w tomie *Integral and Integrodifferential Equations. Theory, Methods and Applications* oraz nazwanie jednej z nierówności stosowanych w badaniu równań całkowych nierównością Bushella–Okrasińskiego (zob. [6, str. 42]). Wyniki naukowe Wojtka były doceniane, otrzymywał granty polskie, brytyjskie, hiszpańskie i amerykańskie.

W latach 1991–1997 związał się z Universidad de Extremadura w Badajoz w Hiszpanii, gdzie współpracował z fizykami, chemikami oraz matematykami zajmującymi się konstruowaniem modeli zjawisk przyrodniczych. Ten rodzaj działalności matematycznej go zafascynował. Po powrocie do kraju w 1997 roku zatrudnił się na Politechnice Zielonogórskiej i na kilka lat zwią-

zał się ze środowiskiem matematycznym Zielonej Góry. Bardzo szybko udało mu się zebrać grupę studentów zainteresowanych zastosowaniami matematyki. Dla nich stworzył, przy poparciu władz Wydziału, specjalność „matematyka przemysłowa". Nawiązał też kontakt z niektórymi zakładami pracy w Zielonej Górze i okolicy. Prezes Lumelu – zakładu produkującego urządzenia i systemy automatyki przemysłowej – bywał gościem na seminariach i zajęciach ze studentami. Po pewnej takiej wizycie zaproponował pracę w Lumelu wszystkim studentom jednego rocznika. Paru z nich skorzystało z propozycji. Wojtek bardzo cenił współpracę z Lumelem. Pamiętam, jakie wrażenie zrobił na nim gabinet prezesa, w którym zamiast tradycyjnej palmy była tablica i kreda!

Pod koniec lat dziewięćdziesiatych Wojtek nawiązał kontakt z European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI). Szybko doceniono jego walory i wysiłki na rzecz matematyki przemysłowej. Od 2010 roku był członkiem ECMI Council, a w latach 2000–2009 członkiem ECMI Education Committee. Organizował pod patronatem ECMI szkoły międzynarodowe (w Zielonej Górze w 2001 roku, w Będlewie w latach 2006 i 2010 oraz we Wrocławiu w 2009 roku). Był też instruktorem podczas szkół w Kaiserslautern i Nowym Sadzie.

W latach 2000–2006 roku szesnastu studentów matematyki przemysłowej UZ uczestniczyło w organizowanych przez ECMI Międzynarodowych Tygodniach Modelowania Matematycznego w Lund, Klagenfurcie, Eindhoven, Kaiserslautern, Bristolu, Lappeenranta, Barcelonie i Lungby. Studenci ci zostali bardzo wysoko ocenieni przez przedstawicieli różnych zachodnioeuropejskich centrów ECMI. Pięcioro absolwentów zielonogórskiej matematyki przemysłowej zakwalifikowało się na studia doktoranckie z matematyki technicznej w Holandii, Niemczech i Finlandii. Obronili tam doktoraty.

Pamiętam *Tydzień modelowania matematycznego* w Zielonej Górze, którego byłem współorganizatorem, choć początkowo sprzeciwiałem się jego organizacji. Trzeba było znaleźć w okolicy siedem zakładów pracy, które zaproponowałyby tematy do modelowania matematycznego. Studenci podzieleni na grupy międzynarodowe mieli modelować przedstawione przez zakłady zagadnienia. Tłumaczyłem Wojtkowi: „gdzie ty znajdziesz w tych lasach wokół Zielonej Góry siedem zakładów pracy, które zgodzą się na międzynarodowym forum przedstawić swoje problemy". Uparł się i znalazł – i to kilkanaście!

Po dziesięciu latach pracy w Zielonej Górze Wojtek postanowił wrócić do Rawicza. Chyba zawsze tęsknił za nim i Wielkopolską. Wieść o zamiarze opuszczenia UZ rozniosła się po mieście, którego władze zareagowały w niecodzienny sposób. Wojtek został zaproszony przez prezydenta miasta, który bardzo namawiał go do pozostania na UZ. Nie znam innego takiego przypadku,

aby prezydent miasta starał się zatrzymać profesora matematyki – to jest urok niektórych mniejszych miast akademickich.

Swoją działalność na rzecz matematyki przemysłowej kontynuował Wojtek na Politechnice Wrocławskiej, gdzie rozpoczął pracę w 2007 roku. Był inicjatorem i współorganizatorem angielskojęzycznych studiów magisterskich w systemie ECMI Mathematics for Industry na tej uczelni.

Mocno przykładał się do przygotowania zajęć dydaktycznych. Jego kursowe zajęcia cieszyły się powodzeniem, choć może ci zdolniejsi studenci mogli się czasami na nich nudzić, bo przeznaczone były one raczej dla tych średnio zdolnych – i to był celowy zabieg Wojtka. Natomiast wykłady specjalistyczne (modelowanie matematyczne, analiza wymiarowa i metody perturbacyjne, wstęp do metod nieliniowych, elementy matematyki przemysłowej) dotykały bardzo specjalnych i trudnych zagadnień. Warto dodać, że swej działalności dydaktycznej nie ograniczał do środowiska akademickiego. Współpracował też ze szkołami w Rawiczu i okolicy. Prowadził dla ich uczniów zajęcia z modelowania matematycznego.

Wojciech Okrasiński wypromował siedmioro doktorów, trzech w Hiszpani, trzech w Zielonej Górze i jednego we Wrocławiu. Jedna z jego doktorantek w Hiszpanii w swej rozprawie zajmowała się matematycznym modelem rozwoju anoreksji. Praca zyskała rozgłos, artykuł poświęcił jej jeden z największych dzienników hiszpańskich *El Pais*.

Wchodził w skład komitetów redakcyjnych czasopism: *Extracta Mathematica* (Hiszpania), *Mathematical Modelling and Applied Analysis* (Litwa), *Wiadomości Matematyczne* i *Matematyka Stosowana*.

Wojtek miał swoje słabostki. Był wielbicielem i znawcą kuchni wielkopolskiej. Zdarzało się, że za jego namową jechałem do Rawicza, aby zakosztować potraw przyrządzanych przez jego mamę. Nawet w czasie pobytu w Zielonej Górze w wędliny zaopatrywał się tylko w pewnej masarni z Rawicza. Przywoził też dla mnie wielkopolskie produkty. Pewnego razu dowiedział się o moich kłopotach zdrowotnych i postanowił zadbać o moje zdrowie. Zamawiał specjalnie dla mnie w tejże masarni dietetyczne wyroby. Smaczne one nie były, nie powiedziałem jednak o tym Wojtkowi i starałem się częściej bywać u niego na kolacji, aby zasmakować prawdziwych wielkopolskich wędlin.

Drugą jego słabostką była miłość do psów – upodobał sobie jamniki, a te odwzajemniały jego uczucia. Potrafił godzinami opowiadać o ich wyczynach.

W osobie Wojciecha Okrasińskiego polskie środowisko matematyczne utraciło matematyka bardzo zaangażowanego w jego rozwój i promującego nowe obszary działalności matematycznej.

Wojciech Okrasiński został pochowany 12 czerwca 2020 roku na cmentarzu parafialnym w Rawiczu.

Cytowane prace Wojciecha Okrasińskiego

[1] *On a nonlinear convolution equation occuring in the theory of water percolation*, Ann. Polon. Math. 37 (1980), 223–229.
[2] *Uniqueness of solutions for a class of nonlinear Volterra integral equations with convolution kernel*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 106 (1986), 547–552 (współautor: P. J. Bushell).
[3] *Nonlinear Volterra integral equation with convolution kernel*, J. London Math. Soc. 41 (1990), 503–510 (współautor: P. J. Bushell).
[4] *Nontrivial solutions to nonlinear Volterra integral equations*, SIAM J. Math. Anal. 22 (1991), 1007–1015.
[5] *On the maximal interval of existence for solutions to some non-linear Volterra integral equations with convolution kernel*, Bull. London Math. Soc. 28 (1996), 59–65 (współautor: P. J. Bushell).

Cytowane prace innych autorów

[6] P. S. Bullen, *A Dictionary of Inequalities*, CRC Press, New York 1998.

Tadeusz Nadzieja (Opole)



Zdjęcie Medalu Erdősa, przyznawanego przez World Federation of National Mathematics Competitions co dwa lata dwóm lub trzem osobom za wybitne osiągnięcia związane z organizacją współzawodnictwa matematycznego na szczeblach międzynarodowym i krajowych

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 485–490
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Andrzej Zajtz (1934–2020)





Czternastego września 2020 roku zmarł w Krakowie Andrzej Zajtz, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego i Wyższej Szkoły Pedagogicznej (później Akademii Pedagogicznej) w Krakowie. Odszedł wybitny specjalista w zakresie geometrii różniczkowej i kontynuator idei powstania szkoły geometrii różniczkowej w Krakowie.

Andrzej Zajtz urodził się 9 grudnia 1934 roku w Radomiu. Do wybuchu wojny rodzina przebywała w Radomiu, skąd po wybuchu wojny matka, Waleria, z domu Malinowska, przeniosła się do swojej rodziny w Jędrzejowie. Ojciec, Antoni, wstąpił do wojska jako ochotnik w 1939 roku i w stopniu porucznika brał udział w kampanii wrześniowej. Po bitwie pod Kockiem dostał się do niewoli radzieckiej i został zamordowany w Starobielsku w 1940 roku.

Liceum Andrzej Zajtz ukończył w Jędrzejowie. Już w szkole średniej wykazywał duże zdolności matematyczne. Jego koledzy szkolni wspominali, że

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

myślał bardzo szybko i często poprawiał nauczycieli. Mimo predyspozycji do matematyki zamierzał studiować leśnictwo. Dokumenty złożone wraz z podaniem o przyjęcie na studia zaginęły jednak w tajemniczych okolicznościach. Rodzina kojarzyła to zdarzenie ze śmiercią Antoniego w Starobielsku. W 1951 roku zaczął studiować matematykę na Uniwersytecie Jagiellońskim. Podczas studiów zwrócił na siebie uwagę Stanisława Gołąba, chyba najlepszego wtedy w Polsce specjalisty w dziedzinie geometrii różniczkowej. Dzięki niemu – jeszcze jako student – w 1954 roku został asystentem w Katedrze Matematyki Akademii Górniczo-Hutniczej. Po ukończeniu studiów w 1955 roku podjął pracę asystenta w Katedrze Geometrii Uniwersytetu Jagiellońskiego, kierowanej właśnie przez Stanisława Gołąba. W 1961 roku uzyskał stopień doktora nauk matematycznych, a w 1966 roku doktora habilitowanego w zakresie matematyki. W latach 1966–1980 zatrudniony był na stanowisku docenta, a w 1980 roku otrzymał tytuł naukowy i stanowisko profesora. W 1970 roku został kierownikiem Zakładu Geometrii w Instytucie Matematyki UJ, przekształconego później w Katedrę Geometrii. Funkcję tę pełnił do 1990 roku, kiedy to przeniósł się do Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie. Tam był zatrudniony na stanowisku profesora nadzwyczajnego, a od 2000 roku profesora zwyczajnego już w Akademii Pedagogicznej (rok wcześniej nastąpiła zmiana nazwy uczelni). W 1994 roku został kierownikiem Zakładu Geometrii i Równań Różniczkowych w Instytucie Matematyki WSP.

Geometria różniczkowa powstawała niemal równocześnie z analizą matematyczną. Jednak jako dyscyplina matematyczna ze swoimi specyficznymi metodami zaczęła się kształtować dopiero pod koniec XIX wieku, a jej gwałtowny rozwój nastąpił po sukcesach ogólnej teorii względności wykorzystującej intensywnie rachunek tensorowy. W tekstach omawiających rozwój matematyki na ziemiach polskich, w tym wspomnieniach wybitnych uczonych, geometria różniczkowa znajduje się zawsze na dalszym miejscu. Pierwszym Polakiem, który prowadził systematyczne badania z zakresu geometrii różniczkowej już na przełomie XIX i XX wieku był Kazimierz Żorawski pracujący na Uniwersytecie Jagiellońskim. Geometrią różniczkową zajmował się również inny krakowski matematyk, Antoni Hoborski. Marzył on o stworzeniu silnej szkoły geometrii różniczkowej w Krakowie. Realizację jego marzeń brutalnie przerwała wojna i jego śmierć w obozie koncentracyjnym. Skuteczne starania o stworzenie takiej szkoły podjął Stanisław Gołąb, uczeń Hoborskiego. Jego zainteresowania skoncentrowały się na teorii obiektów geometrycznych, a teoria ta stała się niebawem główną specjalnością nie tylko krakowskich geometrów. Godnym następcą i kontynuatorem badań Stanisława Gołąba w krakowskim ośrodku został właśnie Andrzej Zajtz.

Działalność naukowa Zajtza koncentrowała się z początku wokół tematyki jego mistrza – teorii obiektów geometrycznych. Był to główny nurt badań geometrycznych w ośrodku krakowskim i jeden z ważniejszych w geometrii różniczkowej w ogóle. Obiektami geometrycznymi są w szczególności tak ważne twory, jak tensory i koneksje. Zbadanie własności oraz klasyfikacja obiektów geometrycznych miały ogromne znaczenie nie tylko dla samej geometrii różniczkowej, lecz również dla zastosowań – szczególnie w fizyce. Andrzej Zajtz dokonał klasyfikacji ważnych rodzin obiektów oraz zbadał własności w wielu szczególnych przypadkach, a także zależności pomiędzy różnymi obiektami geometrycznymi.

Klasyczna teoria obiektów geometrycznych jest ściśle związana z teorią równań funkcyjnych. I w tej dziedzinie Andrzej Zajtz uzyskał znaczące rezultaty. Na uwagę zasługują prace poświęcone macierzowej wersji równania funkcyjnego Cauchy'ego.

Na początku lat siedemdziesiątych XX wieku wydawało się, że teoria obiektów geometrycznych stała się już teorią praktycznie zamkniętą. Jednak właśnie wtedy uzyskała nowy globalny opis w postaci wiązek naturalnych i ich uogólnień – funktorów naturalnych. Geometria wiązek naturalnych znalazła się także w polu zainteresowań Andrzeja Zajtza. Udowodnił on wiele ważnych twierdzeń dotyczących skończoności rzędu wielu typów funktorów naturalnych. Na uwagę zasługuje napisany wspólnie z M. Palusznym skrypt *Foundations of differential geometry of natural bundles* wydany w 1984 roku w Caracas, w którym zawarte były najnowsze wyniki z teorii wiązek naturalnych oraz uogólnienia wielu ważnych twierdzeń. Został tam umieszczony jeden z najmocniejszych – jeśli nie najmocniejszy – wynik dotyczący szacowania rzędu funktorów naturalnych, który znalazł szybkie zastosowanie w fizyce matematycznej, a w szczególności w teorii cechowania (*gauge*). Wraz z teorią funktorów naturalnych rozwijała się również teoria naturalnych operatorów różniczkowych. Andrzej Zajtz zajmował się problemami skończoności rzędu operatorów naturalnych. Udowodnił też wiele twierdzeń typu Petreego o operatorach lokalnych. Stosował wypracowane przez siebie efektywne metody i uzyskał ciekawe rezultaty dotyczące równoważności i rzędów wybranych typów reprezentacji grup dyfeomofizmów. Wspomniane zagadnienia były intensywnie badane na seminarium zakładowym. Jacek Gancarzewicz, Jacek Dębecki, Włodzimierz Mikulski, a także piszący te słowa uzyskali sporo ciekawych rezultatów.

Andrzej Zajtz swoje wyniki zawarł w ponad sześćdziesięciu artykułach. Współpracował z matematykami z różnych ośrodków w kraju i za granicą, w tym w Czechach (Brno, Praga) i Hiszpanii (Santiago de Compostella, Barcelona). Owocem tej współpracy były wspólne publikacje. Andrzej Zajtz aktywnie uczest-

niczył w wielu konferencjach naukowych, na których wygłaszał referaty i często był zapraszany do prowadzenia obrad. Tylko w latach 1997–2001 brał udział w dziesięciu konferencjach krajowych i zagranicznych i na każdej prezentował nowe, oryginalne rezultaty.

Warto wspomnieć seminarium Zakładu (Katedry) Geometrii w Instytucie Matematyki UJ. Za czasów Andrzeja Zajtza miało swój stały termin: piątki, godzina 17.15. W czasach, gdy nie było wolnych sobót albo było ich mało, nie było to zbyt uciążliwe, chociaż od czasu do czasu słuchacze sugerowali nieśmiało, żeby termin zmieć. Profesor nie zgadzał się twierdząc, że jest to wieloletnia tradycja oraz że zainteresowani w kraju i za granicą przyzwyczaili się do tej pory rozpoczęcia seminarium. Rzeczywiście, niemal na każdym seminarium pojawiali się rozmaici goście spoza uniwersytetu, a także często z zagranicy. Przyjeżdżali stażyści z innych ośrodków oraz przedstawiciele innych dziedzin – w szczególności fizyki.

Andrzej Zajtz szczególnie dbał o nowych uczestników tego seminarium. Interesował się ich rozwojem naukowym. Nie było jednak łatwo. Pilnował, żeby każdy z nowo przybyłych otrzymał problem do studiowania i zachęcał do referowania, a termin przygotowania referatu przeważnie nie był długi. Profesor udzielał rad i odpowiadał na pytania, jednak często były to informacje ważne, lecz bardzo ogólnikowe. Andrzej Zajtz obserwował, jak młody człowiek poradzi sobie z zazwyczaj niełatwym problemem. Nierzadko taki referat był podstawą pracy magisterskiej, a nawet zaczynem oryginalnego artykułu. Na seminarium omawiane były zawsze najnowsze wyniki geometrii różniczkowej oraz dyskutowane nowe trendy badań. Gdy w 1970 roku obejmował kierownictwo Zakładu Geometrii na UJ, w zakładzie – oprócz kierownika – była tylko jedna osoba z doktoratem. W 1990 roku było takich osób już osiem, w tym siedem (niektórzy z habilitacją) wypromowanych przez Andrzeja Zajtza.

W czasie swojej działalności naukowo-dydaktycznej Andrzej Zajtz wypromował ogromną liczbę magistrów oraz trzynastu doktorów, z których wielu uzyskało później stopień doktora habilitowanego i zostało profesorami. Był recenzentem wielu rozpraw doktorskich i przewodów habilitacyjnych oraz wniosków o tytuł profesora.

Wiele czasu Andrzej Zajtz poświęcał na pracę organizacyjną i dydaktyczną. W ciągu ponad pięćdziesięciu lat pracy zawodowej prowadził zajęcia ze wszystkich podstawowych przedmiotów matematycznych, w szczególności z geometrii, geometrii różniczkowej, algebry i analizy matematycznej. Wykładał również matematykę na innych kierunkach studiów – jego wykłady z analizy szczególnie cenili sobie studenci fizyki.

W latach 1977–1981 pełnił funkcję zastępcy dyrektora Instytutu Matematyki UJ, a w latach 1977–1979 był prezesem Oddziału Krakowskiego PTM. Przez dwie kadencje był członkiem Senackiej Komisji do spraw Współpracy ze Szkolnictwem Średnim. W latach 1983–1990 był opiekunem specjalnych klas matematycznych, tzw. klas uniwersyteckich, w których realizowany był oryginalny program nauczania matematyki. Zapraszany był też przez wiele lat na przewodniczącego jury Sesji Prac Matematycznych Szkół Podstawowych i Średnich. Mimo licznych obowiązków nigdy nie odmawiał uczestnictwa w sesjach.

Działalność Andrzeja Zajtza nie ograniczała się do uczelni polskich. W latach 1972–1975 wykładał w Ahmadu Bello University w Zarii w Nigerii, w latach 1982–1983 w Universidad Central de Venezuela w Caracas. Prowadził również zajęcia w Université de Tlemcen w Algierii w latach 1987–1989 oraz w University of Zimbabwe w Harare w latach 1990–1992. Za granicą brał aktywny udział w organizowaniu pracy naukowej i dydaktycznej uczelni, na których pracował – zajmował się między innymi opracowywaniem i opiniowaniem programów wykładów z różnych przedmiotów, w szczególności z geometrii.

Za swoją działalność naukową, dydaktyczną i organizacyjną został odznaczony w 2005 roku Krzyżem Oficerskim Orderu Odrodzenia Polski, w 1981 roku Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski, w 1977 roku Złotym Krzyżem Zasługi oraz w 2001 roku Medalem Komisji Edukacji Narodowej. Otrzymywał także nagrody ministerialne i rektorskie. Jako młody doktor był również w 1962 roku laureatem nagrody PTM dla młodych matematyków.

W 1959 roku Andrzej Zajtz poślubił Aleksandrę z domu Sokołowską. Był ojcem dwóch córek – Małgorzaty i Ismeny, uwielbiał podróże, w których wiernie towarzyszyła mu jego żona. Wolny czas poświęcał na zwiedzanie ciekawych i trudno dostępnych miejsc, szczególnie na kontynencie afrykańskim. Pasjonował się astronomią, śledził ciekawe zjawiska na niebie i chętnie opowiadał o nich zaprzyjaźnionym. Lubił literaturę faktu oraz interesował się historią. Pod koniec życia szczególnie dogłębnie studiował literaturę dotyczącą historii obozów koncentracyjnych.

Przez współpracowników i bliskich został zapamiętany jako człowiek bardzo ciepły i uczynny. Czasem sprawiał wrażenie roztargnionego, jakby żyjącego obok spraw bieżących. Jednak żona zapewnia, że przygotowując wyprawy, czasem bardzo skomplikowane i wymagające wysiłku, zawsze miał wszystko perfekcyjnie przygotowane w najdrobniejszych szczegółach.

Andrzej Zajtz swoją działalnością niewątpliwie udowodnił, że był znakomitym matematykiem o szerokich zainteresowaniach. Był wychowawcą kadry naukowej i dał się poznać jako profesor wymagający i sprawiedliwy, szczególnie

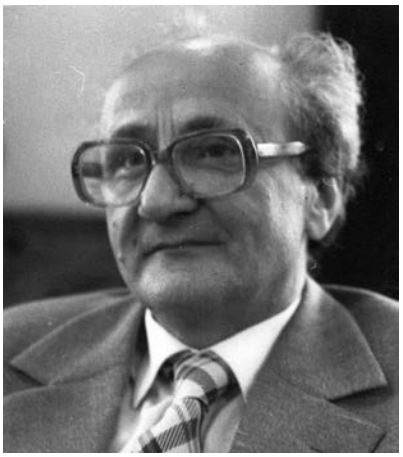
ceniący u podopiecznych samodzielne myślenie i poszukiwanie prawdy naukowej. Potrafił zachęcić młodych ludzi do atakowania problemów i zainteresować nowymi dziedzinami geometrii.

Jest pochowany na cmentarzu Batowickim w Krakowie.

Zdzisław Pogoda (Kraków)

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 491–506
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Julian Musielak (1928–2020)



W dniu 11 października 2020 roku zmarł Julian Musielak, profesor Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, prezes Polskiego Towarzystwa Matematycznego w latach 1991–1993, wybitny matematyk, ceniony w świecie specjalista z zakresu analizy funkcjonalnej. Człowiek niezwykle zasłużony dla polskiego, a zwłaszcza poznańskiego środowiska naukowego.

Należał do pokolenia, którego dzieciństwo przerwała II wojna światowa, a lata jego młodości przypadły na czasy stalinowskie. Obydwa te bardzo trudne okresy w naszej najnowszej historii wpłynęły na jego poglądy i postawę życiową. Z natury pogodny i życzliwie nastawiony wobec rozmówcy, był jednocześnie zdeklarowanym przeciwnikiem panującego w Polsce po wojnie systemu politycznego. To, jaką postawę wobec komunizmu przyjmowali ludzie, było dla niego do końca życia ważnym kryterium ich oceny.

Urodził się 7 listopada 1928 roku w Poznaniu, jako jedyne dziecko Haliny i Antoniego Musielaków. Oboje rodzice byli w czasach II Rzeczpospolitej

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

urzędnikami Samorządu Wojewódzkiego w Poznaniu, co nie było potem dobrze widziane przez komunistyczne władze. Wskutek tego po wojnie zostali zmuszeni do wykonywania pracy nie odpowiadającej ich kwalifikacjom.

Julian Musielak nadrabiał szybko zaległości edukacyjne z czasów okupacji. Wtedy też ujawniły się jego zdolności matematyczne. Już w 1946 roku zaczął uczęszczać jako wolny słuchacz na wykłady z matematyki wygłaszane na Uniwersytecie Poznańskim. Rok później, po zdaniu matury w Państwowym Gimnazjum i Liceum im. Bergera w Poznaniu, rozpoczął na tym uniwersytecie studia matematyczne, które ukończył w 1951 roku.

W latach powojennych najważniejszym i najwybitniejszym matematykiem w Poznaniu był niewątpliwie Władysław Orlicz, który zaszczepiał na tej uczelni problematykę i metodykę badań szkoły lwowskiej z kręgu Stefana Banacha i Hugona Steinhausa. Nic więc dziwnego, że to właśnie jego wpływowi ulegali najzdolniejsi studenci. Należał do nich również Julian Musielak. Pod kierunkiem Orlicza napisał pracę magisterską. Orlicz był również promotorem dysertacji *O bezwzględnej zbieżności szeregów Fouriera funkcji prawie okresowych wielu zmiennych*, którą dzisiaj nazwalibyśmy doktorską, ale wówczas zamiast stopnia naukowego doktora nadawano stopień kandydata nauk. W związku z tym Julian Musielak lubił potem żartować, że nie ma dostatecznych kwalifikacji, aby pracować na uczelni, bo nigdy nie został doktorem żadnej z dyscyplin naukowych.

Wspomniana dysertacja została obroniona w 1958 roku, a cztery lata później, w 1962 roku, kandydat nauk matematycznych Julian Musielak uzyskał stopień docenta habilitowanego (sic!) na podstawie cyklu prac dotyczących dystrybucji M-całkowalnych. Teoria dystrybucji była wówczas nową, szeroko dyskutowaną i budzącą kontrowersje teorią. Monografia Laurenta Schwartza *Théorie des distributions* ukazała się w 1951 roku, a Salomon Bochner pisał o niej w swojej recenzji, że „nie jest łatwo stwierdzić, na czym polega nowatorstwo omawianej książki, zarówno z punktu widzenia analizy matematycznej, jak i ogólnej koncepcji".

Nie jest moim celem omawianie dorobku naukowego Juliana Musielaka. Pozwolę sobie jednak zaznaczyć, że – moim zdaniem – najważniejsze miejsce zajmują w nim prace związane z teorią przestrzeni modularnych, przestrzeni Orlicza i Musielaka-Orlicza. Badania te zapoczątkował wspólnymi publikacjami z Władysławem Orliczem. Wymienić tu należy niewątpliwie ich artykuł *On modular spaces*, który ukazał się w *Studia Mathematica* w 1959 roku. Jego zainteresowania naukowe nie ograniczały się jednak jedynie do wymienionych przestrzeni. Prowadził badania również z zakresu teorii sumowalności szeregów, teorii aproksymacji, teorii interpolacji, teorii liniowych i nieliniowych

operatorów całkowych oraz geometrii przestrzeni Banacha. Serwis *MathSciNet* wymienia łącznie sto czterdzieści pięć jego publikacji, choć z pewnością nie obejmuje całego jego dorobku. Szeroko cytowana jest jego monografia *Orlicz spaces and modular spaces*, która ukazała się w springerowskiej serii *Lecture Notes in Mathematics* w 1983 roku. Ostatnią publikacją książkową była monografia *Nonlinear integral operators and applications*, którą napisał wraz z dwoma matematykami włoskimi (Carlo Bardaro i Gianlucą Vintim) i opublikował w 2003 roku.

Miałem szczęście zetknąć się z Julianem Musielakiem już na pierwszym roku studiów. Przez cztery semestry byłem słuchaczem jego wykładu z analizy matematycznej, zafascynowanym wiedzą i klarownością prowadzonych przez niego rozumowań. Pamiętam, że bardzo poważnie podchodził do pytań zadawanych przez studentów i – nawet jeśli nie zawsze potrafił udzielić natychmiastowej odpowiedzi – wracał do kwestii na następnych zajęciach lub też przynosił stosowną literaturę, pożyczając studentom swoje książki. O trosce, z jaką traktował nauczanie świadczą liczne podręczniki, jakie napisał. Wymienić tu należy *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, który został dwukrotnie wydany przez PWN oraz wielotomowy podręcznik *Analiza matematyczna* opublikowany przez Wydawnictwo Naukowe UAM. Do pisania tej ostatniej książki zaprosił kilkoro współautorów. Pierwszy tom napisał wraz z żoną Heleną, drugi z Magdaleną Jaroszewską, a trzeci z autorem tego wspomnienia.

Przez ponad trzydzieści lat Julian Musielak prowadził seminarium naukowe z analizy funkcjonalnej i teorii funkcji rzeczywistych. Seminarium to, którego tematyka zogniskowana była głównie na teorii przestrzeni modularnych i przestrzeni Orlicza, służyło w dużej mierze procesowi kształcenia doktorantów. Pod jego kierunkiem trzydzieści sześć osób przygotowało rozprawy doktorskie. Jego uczniami byli między innymi Anna Kamińska (obecnie University of Memphis), Ryszard Płuciennik (obecnie Politechnika Poznańska), Wojciech Kozłowski (obecnie University of New South Wales w Sydney), Zhongrui Shi (obecnie University of Shanghai) oraz Magdalena Jaroszewska, Henryk Hudzik, Ryszard Urbański, Stanisław Stoiński, Marek Wisła i autor tych wspomnień, zatrudnieni później na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Wielu z jego doktorantów w swych badaniach kontynuowało zainteresowania swego mistrza w zakresie analizy funkcjonalnej, rozszerzając je – czy to o inne przestrzenie funkcyjne, czy też o zagadnienia związane z geometrią przestrzeni Banacha. Swoim uczniom pozwalał na dużą swobodę poszukiwań i cieszył się z ich samodzielności. Moje zainteresowania naukowe dość szybko zaczęły odbiegać od jego badań. W efekcie nie napisaliśmy żadnej wspólnej pracy, a i cytowałem go bardzo spora-

dycznie. Zawsze jednak czułem jego uważne i życzliwe zainteresowanie tym, co robię.

Oprócz pracy badawczej i dydaktycznej Julian Musielak prowadził intensywną działalność organizacyjną, zarówno na UAM, jak i w ogólnopolskim środowisku matematycznym. W 1981 roku, a więc w okresie względnych swobód akademickich po strajkach sierpniowych, wybrany został na dziekana Wydziału Matematyki i Fizyki. Funkcję tę pełnił przez trzy lata. Wciąż jeszcze na fali posolidarnościowej odwilży w 1984 roku został prorektorem UAM. Jednak już po roku ówczesne władze państwowe odwołały rektora Franciszka Kaczmarka wraz z wszystkimi prorektorami. Do pełnienia funkcji kierowniczych na UAM powrócił w 1991 roku, zostając na dwa lata dyrektorem Instytutu Matematyki.

Działalność Juliana Musielaka nie ograniczała się do jego macierzystej uczelni. Przez wiele lat aktywnie działał w Polskim Towarzystwie Matematycznym. W latach 1989-1991 był wiceprezesem, a w następnej kadencji prezesem Zarządu Głównego. Przez wiele lat pełnił też funkcję redaktora naczelnego roczników PTM *Commentationes Mathematicae*. W 1973 roku założył inne czasopismo *Functiones et Approximatio*, którego przez długie lata był redaktorem naczelnym. Był również inicjatorem cyklu konferencji naukowych *Function Spaces*, z których pierwsza odbyła się w Poznaniu w 1986 roku, a kolejne były organizowane w Krakowie, Wrocławiu, Zielonej Górze i również w Poznaniu. Trzynasta z rzędu miała się odbyć w tym roku, jednak pandemia pokrzyżowała te plany.

Różnorodna i owocna działalność Juliana Musielaka została dostrzeżona i doceniona. Pod koniec życia otrzymał wiele odznaczeń i nagród, między innymi godność honorowego członka Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Palmae Universitatis Studiorum Posnaniensis UAM, doktorat honorowy Uniwersytetu Zielonogórskiego. Uhonorowano go też Krzyżem Oficerskim Orderu Odrodzenia Polski.

Julian Musielak był szanowany przez wielu, nie tylko za swoje osiągnięcia naukowe, ale również za życzliwość i bezkompromisowość. W uznaniu zasług i dla podkreślenia jego postawy uczniowie postanowili z okazji pięćdziesięciolecia jego działalności akademickiej wydać okolicznościową książkę zatytułowaną *Viro docto atque iusto Iuliano Musielak*.

Pochowany został na Cmentarzu Komunalnym na Junikowie w Poznaniu, w rodzinnym grobowcu znajdującym się w kwaterze Powstańców Wielkopolskich (powstańcem był jego ojciec).

Leszek Skrzypczak (Poznań)

Julian Musielak – uczony i nauczyciel

Profesora Juliana Musielaka poznałam w 1968 roku jako studentka pierwszego roku matematyki podczas wykładów ze wstępu do matematyki. Przedmiot ten, pomimo raczej niegroźnej nazwy, nie był dla nas łatwy, ponieważ w ówczesnym programie nauczania w szkole średniej nie było żadnych elementów teorii zbiorów czy logiki elementarnej. Na ćwiczeniach nasza grupa zmagała się z niemałymi trudnościami. Uczyliśmy się ze skryptu autorstwa Musielaka oraz z monografii Heleny Rasiowej. Skrypt był naszym ratunkiem, ponieważ nie tylko tłumaczył szczegółowo subtelności logiczne, ale również posiadał diagramy i całą liczbę różnej trudności problemów do rozwiązania. Poznałam profesora lepiej podczas egzaminu końcowego. Każdy student otrzymywał kartkę z wydrukowanymi pytaniami i czas na przygotowanie. Profesor bardzo uprzejmie przesłuchiwał kolejnych studentów, decydował na miejscu o końcowej ocenie, wpisywał stopień do indeksu i jeszcze do wielkiej księgi, gdzie miał spis z nazwiskami studentów, datami, przedmiotami i stopniami. Egzamin był przeprowadzany bardzo sprawnie, ale bez pośpiechu i nerwów. Profesor Musielak egzaminował zawsze w podobny sposób. Podejrzewam, że w jego spuściźnie znajduje się wiele podobnych tomów zawierających oceny setek studentów z całej gamy przedmiotów matematycznych.

Drugi raz miałam okazję słuchać Juliana Musielaka podczas wykładów z teorii miary i całki, gdy byłam na sekcji teoretycznej. Wykłady te chyba każdy z nas – studentów – zapamiętał, ponieważ odbywały się dwa razy w tygodniu o ósmej rano i na dodatek była na nich sprawdzana obecność. Mieliśmy poczucie, że nie możemy lekkomyślnie opuszczać wykładów – zwłaszcza, że nas było tylko około dziesięcioro. Profesor wykładał bardzo systematycznie i dokładnie przeprowadzał dowody twierdzeń, a nawet pomniejszych faktów. Okazało się to później bezcenne – notatki służyły mi przez wiele lat jako podręcznik miary i całki, a nawet pojechały ze mną do USA. Wiem, że nie tylko ja, ale i moi koledzy, gdy zapomnieli jakiegoś szczegółu, to sięgali do tych wykładów. Było powszechnie wiadomo, że Musielak nie opuścił żadnego epsilona.

Gdy pod koniec studiów decydowałam się na temat pracy magisterskiej, to wybrałam Juliana Musielaka jako mojego promotora. Moim pierwszym zadaniem było przestudiowanie jego wspólnych z Władysławem Orliczem artykułów na temat miary wektorowej (niekoniecznie σ-skończonej). To stało się podstawą całej pracy magisterskiej. Potem zostałam asystentem w Zakładzie Funkcji Rzeczywistych Instytutu Matematyki UAM kierowanym przez Juliana Musielaka. Przez wszystkie lata, które przepracowałam na UAM, wchodziłam w skład jego zakładu, napisałam doktorat i habilitację pod jego kierunkiem i regularnie

uczęszczałam na czwartkowe seminarium. Odbywało się ono systematycznie co tydzień, wcześnie rano – o 8:30. Niespóźnienie się nieraz stanowiło wyzwanie – zwłaszcza w tamtych latach, kiedy w domu były małe dzieci, a dojazd na ulicę Matejki (gdzie mieścił się instytut) zajmował godzinę. Profesor Musielak nigdy się nie spóźniał i był zawsze wcześniej w swoim pokoju – na tym samym piętrze, gdzie była sala seminaryjna. To dawało okazję, aby zamienić z nim parę słów lub załatwić jakąś drobną sprawę, jak na przykład poprosić o list rekomendacyjny albo o poprawienie angielszczyzny kolejnej wersji artykułu naukowego, niekoniecznie wspólnego z profesorem.

Julian Musielak pisał nie dziesiątki, lecz setki listów rekomendacyjnych dla młodszych pracowników naukowych, dla doktorantów, studentów oraz dla dojrzałych matematyków z różnych ośrodków ubiegających się o promocję lub nowe zatrudnienie. Otrzymywało się taki list bardzo szybko, gotowy do przepisania na maszynie i podpisania. Musielak pisał swobodnie, gładko, bez poprawek czy skreśleń i bardzo dobrą polszczyzną. Miał świetny styl oraz bogate słownictwo. Był też bardzo szczodry w dzieleniu się swoją znajomością języka angielskiego. W latach siedemdziesiątych znajomość angielskiego w naszym instytucie wśród młodszych pracowników nie była dobra. Profesor natomiast, po swoich dłuższych pobytach zagranicznych, władał swobodnie angielskim w mowie i w piśmie. Korzystaliśmy z tego bardzo często, a on nigdy nie okazał niezadowolenia, nawet gdy nie miał czasu.

Czwartkowe seminarium gromadziło sporą grupę matematyków ze środowiska poznańskiego i nie tylko. Byli to bieżący i byli doktoranci profesora, młodzi magistranci, którzy przychodzili, aby się czegoś nauczyć i wybrać dziedzinę swojego doktoratu, pracownicy naukowi zainteresowani danym tematem czy goście z innych polskich lub zagranicznych ośrodków matematycznych. Dla doktorantów profesora był to świetny moment, aby przedstawić szczegółowo nowe wyniki, wysłuchać opinii koleżanek/kolegów lub przedyskutować czy poradzić się co do taktyki dalszych badań. Na niejednym takim seminarium wykrywało się błędy, usterki, otrzymywało dobre rady dotyczące danego zagadnienia naukowego, a zawsze bodźce do dalszej pracy. Atmosfera była naukowa, ale nie sztywna, przeplatana żartami czy ostatnimi wiadomościami ze świata. Zwłaszcza dla młodszych uczestników spotkania były doskonałą okazją doskonalenia swoich umiejętności matematycznych bez nadmiernego obciążenia psychicznego.

Jako promotor doktoratu profesor wskazywał temat, opatrywał go wskazówkami, a następnie oczekiwał, że doktorant będzie samodzielnie nad tym pracował. Wymagał od doktorantów samodzielności i pomysłowości w szukaniu referencji, nowych kontaktów naukowych oraz oryginalnych rezultatów,

które pomogą posuwać badania w odpowiednim kierunku. Oczekiwał wyników naukowych, które będą publikowalne. Był przy tym realistą – nie tracił czasu na przykład na wielostronicowe „dowody" twierdzenia Fermata, a takie próby w naszym środowisku się zdarzały. Jednocześnie był w stanie ocenić potencjał swoich wychowanków. Dobierał odpowiednie tematy, stopniował trudność w zależności od umiejętności kandydata. Miał pod tym względem dobrą intuicję – świadczy o tym wielka liczba prac doktorskich, którymi kierował.

W pewnym okresie, pod koniec lat siedemdziesiątych, spotykaliśmy się w czwartkowe wieczory – profesor Musielak, Heniu Hudzik i Rysiu Urbański (późniejsi profesorowie) i ja, aby dyskutować na pewne tematy naukowe. Były to bardzo owocne spotkania, na których Musielak słuchał, komentował, doradzał i w razie czego krytykował. Dawał siebie bezwarunkowo. To wiele lat później pozwoliło mi uświadomić sobie, jak wielką szczodrość Julian nam okazał. W efekcie tych dyskusji powstało później kilka prac naukowych, w których nawet nie ma wzmianki o jego roli. Profesor miał zasadę „nie dopisywać" się do artykułów, w których bezpośrednio nie uczestniczył, czyli nie udowodnił chociaż kawałka twierdzenia.

Był człowiekiem szerokiego formatu, otwartym, tolerancyjnym i jednocześnie głęboko religijnym. Miał też duże poczucie humoru i pogodną osobowość. Był człowiekiem bardzo porządnym, o co nie jest wcale łatwo w świecie konkurencji naukowej. Jednej rzeczy nie lubił i nie tolerował – lenistwa u swoich studentów czy asystentów. Wprawdzie trzeba było dużo czasu, aby nadwerężyć jego cierpliwość, ostatecznie jednak nikt nie chciał okazać się leniwym delikwentem.

W latach dziewięćdziesiątych XX wieku Musielak przebywał corocznie przez jeden letni miesiąc w Perugii, gdzie współpracował naukowo z matematykami z tamtego uniwersytetu. Wczesne godziny poranne wykorzystywał na pracę naukową, a popołudnia spędzał wraz z małżonką na spacerach po pięknym starożytnym mieście. Był wykształcony tradycyjnie w klasycznym gimnazjum, gdzie największą trudność sprawiała łacina, ale jednocześnie wyniósł ze szkoły fascynację światem starożytnym, greckim i rzymskim. Z jego wspomnień wynika, że był ciekawy świata i lubił podróżować.

Po moim wyjeździe do USA utrzymywałam stały kontakt z Julianem Musielakiem. Spotykaliśmy się na konferencjach i seminariach. Kontakty na odległość były utrudnione, gdyż Julian nie używał poczty elektronicznej. Jak sam twierdził, miał niewytłumaczoną niechęć do tej nowości, chociaż nie unikał nowych wynalazków. Na przykład bardzo dobrze pisał na komputerze i doceniał zalety edytorów tekstów. Jego długie, ciekawe i dokładne wspomnienia były w całości napisane przez niego. W ostatnich latach, gdy Julian był już słabszy,

odwiedzałam go w domu podczas moich letnich wizyt w Poznaniu. Był bardzo gościnny i cieszył się z moich odwiedzin. Przeżył śmierć żony Heleny, z którą stworzył bardzo szczęśliwe małżeństwo obdarzone piątką dzieci. Sam mi powiedział, że to było najlepsze, co go w życiu spotkało. Pomimo niedogodności późniejszego wieku zachował żywotność i pogodę ducha. Miał szczęście mieszkać do końca w domu rodzinnym, wśród dzieci i wnuków.

Profesor Musielak wywarł bardzo duży wpływ na poznańskie środowisko matematyczne. Swoim stylem zachowania, dbałością o poziom wykładów i ćwiczeń, uprzejmością okazywaną każdemu człowiekowi, otwartością, troską o rozwój matematyki poprzez popieranie współpracy między ośrodkami krajowymi i zagranicznymi, liczbą swoich doktorantów odznaczył się wielce w historii matematyki poznańskiej. Wykształcił pokolenia matematyków, którzy później zostali nauczycielami, uczonymi, profesorami rozrzuconymi po całym świecie – mam szczęście należeć do tego grona.

Osiągnięcia naukowe Juliana Musielaka oraz ich zastosowania

Julian Musielak jest autorem stu czterdziestu dwóch artykułów naukowych oraz trzech monografii z analizy funkcjonalnej. Jest to różnorodny dorobek, w omówieniu którego zamierzam szczególnie wyodrębnić wyniki mające znaczny wpływ na rozwój badań naukowych. Chcę również podkreślić ich różnorodne zastosowania w innych działach matematyki.

Jedne z najważniejszych wyników profesora Musielaka (otrzymane wspólnie z Orliczem) dotyczą przestrzeni modularnych generowanych przez modulary niewypukłe. Koronnym przykładem takich przestrzeni są przestrzenie Musielaka–Orlicza, mające wiele zastosowań. Modulary wypukłe zostały pierwszy raz zdefiniowane w latach pięćdziesiątych przez japońskiego matematyka Hidegaro Nakanô i potem badane dalej przez niego i jego szkołę (zob. [13]).

Przypomnijmy, że według Nakanô funkcjonał $x \mapsto \rho(x) \in [0, \infty]$ zdefiniowany na liniowej przestrzeni X nazywany jest *modularem*, jeżeli

(i) $\rho(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
(ii) $\rho(-x) = \rho(x)$ dla dowolnego $x \in X$,
(iii) $\rho(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$ dla dowolnych $x, y \in X$ oraz $\alpha, \beta \geqslant 0$ spełniających warunek $\alpha + \beta = 1$.

Przestrzeń modularna jest zdefiniowana jako $X_\rho = \{x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0\}$, a norma każdego elementu $x \in X_\rho$ określona wzorem

$$\|x\| = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \rho\left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right) \leqslant 1\right\}. \tag{1}$$

Zauważmy, że nierówność (iii) oznacza, że ρ jest funkcjonałem wypukłym.

W istocie $\|\cdot\|_\rho$ jest funkcjonałem Minkowskiego zbioru wypukłego $\{x \in X : \rho(x) \leqslant 1\}$.

W artykule *On modular spaces* [11] Musielak i Orlicz zdefiniowali modular bez założenia jego wypukłości i tym samym uogólnili pojęcie modularu wypukłego.

Według ich definicji $\rho\colon X \to [0, \infty]$ spełnia następujące własności

(i′) $\rho(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,

(ii′) $\rho(-x) = \rho(x)$ dla dowolnego $x \in X$,

(iii′) $\rho(\alpha x + \beta y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$ dla dowolnych $x, y \in X$ oraz $\alpha, \beta \geqslant 0$ spełniających warunek $\alpha + \beta = 1$.

Widzimy, że warunek wypukłości (iii) został zastąpiony przez prosty, ale bardzo pomysłowy warunek (iii′). Przestrzeń modularna X_ρ została zdefiniowana podobnie jak wcześniej u Nakanô, natomiast każdemu $x \in X_\rho$ przyporządkowano liczbę skończoną

$$\|x\|_\rho = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \rho\left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right) \leqslant \varepsilon\right\}. \tag{2}$$

Autorzy wykazali, że $\|\cdot\|_\rho$ jest F-normą na X_ρ, zatem X_ρ jest przestrzenią metryczną.

W artykule tym podano przykłady przestrzeni modularnych. Do najważniejszych należy przestrzeń generowana przez funkcje Orlicza z parametrem, później nazwana przestrzenią Musielaka–Orlicza.

Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią mierzalną, przy czym Σ jest σ-algebrą podzbiorów dowolnego zbioru Ω oraz μ jest miarą na Σ. Niech $M\colon \Omega \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ będzie funkcją Orlicza z parametrem – innymi słowy, M spełnia następujące warunki:

(a) $M(t, v) = 0$ dla prawie wszystkich $t \in \Omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v = 0$.

(b) $M(t, v)$ jest funkcją parzystą, ciagłą i rosnącą (ze względu na drugą zmienną) w $[0, +\infty)$ dla prawie wszystkich $t \in \Omega$.

(c) $M(t, v)$ jest funkcją μ-mierzalną względem $t \in \Omega$ dla każdego $v \geqslant 0$.

Niech teraz L^0 oznacza przestrzeń wszystkich μ-mierzalnych funkcji $x\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Zdefiniujmy na L^0 funkcjonał

$$\rho(x) = \int_\Omega M(t, x(t))\,\mathrm{d}\mu(t). \tag{3}$$

Można wykazać, że ρ jest modularem na przestrzeni L^0. Przestrzeń modularna X_ρ będzie dalej oznaczona przez L_M. Przestrzeń ta jest wyposażona w F-normę zdefiniowaną równością (2). Szczególnym przypadkiem przestrzeni L_M jest przestrzeń modularna $L^{p(\cdot)}$, przy czym $M(t, v) = |v|^{p(t)}$, $v \in \mathbb{R}$, $p(t) > 0$ dla prawie wszystkich $t \in \Omega$. Przestrzeń tę nazwano w latach pięć-

dziesiątych przestrzenią Nakanô (przy założeniu wypukłości – innymi słowy, zakładamy, że $p(t) \geqslant 1$ prawie wszędzie), ale ostatnio nazywana jest także przestrzenią Lebesgue'a o zmiennym wykładniku.

Jeżeli M nie zależy od parametru, tzn. $M(t,v) = \Phi(v)$ dla prawie wszystkich $t \in \Omega$, a funkcja Φ spełnia warunki (a) oraz (b), to przestrzeń $L_M = L_\Phi$ jest przestrzenią Orlicza generowaną przez funkcję Φ, rosnącą na $\mathbb{R}_+$, rozważaną przez Mazura i Orlicza w 1958 roku, przy czym F-normę zdefiniowano w sposób analogiczny do wzoru (2). Jeżeli w dodatku Φ jest funkcją wypukłą na $\mathbb{R}_+$, to L_Φ jest oryginalną przestrzenią Orlicza wprowadzoną w 1932 roku przez Orlicza. Jeśli $M(t,v)$ jest funkcją wypukłą względem $v \geqslant 0$, to ρ dane przez warunek (3) jest modularem wypukłym Nakanô.

Funkcja Orlicza z parametrem $M(t,v)$ została później nazwana funkcją Musielaka–Orlicza, a przestrzeń L_M przestrzenią Musielaka–Orlicza. Nazwy tej używa się również w przypadku wypukłej funkcji M i przestrzeni L_M unormowanej przez funkcjonał (1).

Istnieje wersja ciągowa przestrzeni Musielaka–Orlicza, w którym to wypadku parametrem jest liczba naturalna. Niech (M_n) będzie ciągiem funkcji Orlicza, tzn. $M_n\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ są dla $n \in \mathbb{N}$ ciągłymi funkcjami parzystymi, rosnącymi w $[0,\infty)$ i spełniającymi warunek $M_n(v) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v = 0$. Zdefiniujmy funkcjonał ρ na przestrzeni liniowej ℓ^0 wszystkich rzeczywistych lub zespolonych ciągów $x = (x_n)$ wzorem

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(x_n).$$

Wtedy ρ jest modularem na ℓ^0, a przestrzeń modularna X_ρ oznaczana przez ℓ_M jest ciągową przestrzenią Musielaka–Orlicza.

Nazwa „Musielak–Orlicz spaces" pojawiła się po raz pierwszy w artykule Kazimierza Urbanika [17]. Urbanik użył przestrzeni Musielaka–Orlicza w kontekście badań deterministycznych ciągów zmiennych losowych.

Późną jesienią 1968 lub 1969 roku odbyło się w Instytucie Matematyki UAM seminarium, na którym wykład miał Wojbor Woyczyński, doktorant Urbanika, który pierwszy raz w Poznaniu użył nazwy „przestrzenie Musielaka–Orlicza". Na tym wykładzie byli obecni profesorowie Musielak i Orlicz oraz Iwo Labuda, który mnie o tym poinformował. Później zresztą Musielak sam mi powiedział, że Urbanik pierwszy raz użył określenia przestrzeni z jego nazwiskiem.

W latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych w środowisku poznańskim intensywnie badano przestrzenie modularne. Wprowadzono różne wersje modularów – na rzeczywistych lub zespolonych przestrzeniach liniowych – speł-

niające bardziej specyficzne warunki typu (iii) lub (iii′). Na przykład pojawiły się modulary s-wypukłe (dla $s \in (0,1]$), które „leżą" między modularem spełniającym warunki (iii) i (iii′). W szczególnych przypadkach przestrzeni Orlicza czy Musielaka–Orlicza te idee łączą się z ważnymi pojęciami indeksów Matuszewskiej–Orlicza czy indeksów Boyda.

W 1974 roku powstało dalsze uogólnienie modularów autorstwa Juliana Musielaka i Jaaka Peetrego poprzez zastosowanie odwzorowania dwuargumentowego F, określonego na produkcie $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, o pewnych ogólnych własnościach. Odwzorowanie to pełni rolę działania arytmetycznego na liczbach rzeczywistych. Między innymi funkcje dane wzorami $F_p(u,v) = (u+v)^{1/p}$ $(p > 0)$ lub $F_\infty(u,v) = \max\{u,v\}$ spełniają te własności. Wtedy modularem na liniowej przestrzeni X nazywa się taki funkcjonał $\rho\colon X \to \mathbb{R}_+$, że $\rho(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$, $\rho(-x) = \rho(x)$ dla dowolnego $x \in X$ oraz $\rho(\alpha x + \beta y) \leqslant F(\rho(x), \rho(y))$ dla wszystkich $\alpha, \beta \geqslant 0$, dla których $\alpha + \beta = 1$. Przestrzeń modularną definiuje się analogicznie jak poprzednio, czyli przyjmujemy, że $X_\rho = \{x \in X : \rho(\lambda x) \to 0 \text{ jeśli } \lambda \to 0+\}$.

Od lat siedemdziesiątych przestrzenie Orlicza i Musielaka–Orlicza stały się przedmiotem badań ich (lokalnej) izomorficznej lub izometrycznej geometrii przez wielu matematyków, głównie w środowisku izraelskim, francuskim, hiszpańskim, polskim (poznańskim i krakowskim), chińskim i amerykańskim. Uczestnicy seminarium Juliana Musielaka intensywnie zaangażowali się w te badania. Do najbardziej aktywnych należeli Henryk Hudzik, Ryszard Płuciennik, Marek Wisła, Mieczysław Mastyło oraz autorka tego artykułu. W latach 1977 i 1979 wydana została dwutomowa, ważna monografia *Classical Banach Spaces I, II* [9, 10]. Znajdują się tam obszerne rozdziały omawiające strukturalne i geometryczne własności przestrzeni Orlicza i ciągowych przestrzeni Musielaka–Orlicza.

Nastąpiły też dalsze badania uogólnień lub specyficznych podklas tych przestrzeni. W latach 1976–1980 Andrzej Kozek opublikował interesującą serię artykułów, w których uogólnił funkcje Musielaka–Orlicza na iloczyn kartezjański $\Omega \times X$, przy czym X jest przestrzenią unormowaną. Następnie zdefiniował (analogicznie) przestrzenie modularne na przestrzeniach funkcji na Ω o wartościach w X. W tak ogólnej sytuacji udało mu się wykazać wiele klasycznych twierdzeń znanych w przypadku funkcji skalarnych. Jego wyniki łączą się z analizą wypukłą na przestrzeniach unormowanych.

Julian Musielak opublikował w 1983 roku monografię *Orlicz Spaces and Modular Spaces* [12]. Zawarł tam obszerne i bardzo detaliczne rozdziały o przestrzeniach modularnych oraz uogólnionych przestrzeniach Orlicza, czyli prze-

strzeniach Musielaka–Orlicza. Monografia ta spopularyzowała wiedzę na temat przestrzeni Musielaka–Orlicza.

W 1996 roku Chen Shutao opublikował książkę o geometrii przestrzeni Orlicza zawierającą duży rozdział o przestrzeniach Musielaka–Orlicza. Z punktu widzenia geometrii przestrzenie te wyróżnia fakt, że nie są symetryczne – w przeciwieństwie do innych klasycznych przestrzeni, na przykład przestrzeni Lebesgue'a, Orlicza czy Lorentza. Stanowią też bardzo szeroką gamę naturalnych przykładów rozmaitych geometrycznych własności abstrakcyjnych przestrzeni Banacha lub quasi-Banacha.

Przy pewnych zagadnieniach brak symetrii stanowi poważny problem do przezwyciężenia. Przykładem są między innymi badania operatora maksymalnego w przestrzeniach $L^{p(\cdot)}$ czy w ogólnych przestrzeniach Musielaka–Orlicza L_M. Już w latach osiemdziesiątych była znana w środowisku poznańskim charakteryzacja operatora przesunięcia w tych przestrzeniach (zob. [6]). Wynika z niego, że pewne kryterium zwartości spełnione jest w stosunkowo wąskiej grupie przestrzeni Musielaka–Orlicza, a w szczególności w przestrzeniach $L^{p(\cdot)}$. Rezultat ten został zamieszczony w książce Musielaka i później przez niego wielokrotnie wykorzystywany w badaniach operatorów całkowych. Pomimo braku ograniczenia operatora translacji istnieją klasy przestrzeni L_M, w których operator maksymalny jest ograniczony. Zagadnienia te zaczęto badać w pierwszej dekadzie XXI wieku, a pierwszym pozytywnym wynikiem było podanie warunku dostatecznego, tzw. ciągłości *log-convex* wykładnika $x \mapsto p(x)$, na ograniczenie operatora maksymalnego w $L^{p(\cdot)}$ i zastosowanie do operatorów włożenia w przestrzeniach Sobolewa $W^{k,p(\cdot)}$. Autorem tych wyników jest Lars Diening. Przez wiele lat przedtem nie było wiadomo, kiedy badany maksymalny operator jest ograniczony w $L^{p(\cdot)}$, zatem po pojawieniu się warunku charakteryzacji powstały liczne dalsze prace dotyczące zastosowań operatora maksymalnego, na przykład w zastosowaniu do badań przestrzeni Sobolewa $W^{k,p(\cdot)}$, jak i w równaniach różniczkowych cząstkowych. Nastąpiły również próby scharakteryzowania ograniczoności tego operatora w ogólnej przestrzeni Musielaka–Orlicza. To się częściowo powiodło i jest przedmiotem dalszych badań przedstawionych w licznych artykułach opublikowanych w ostatnim dziesięcioleciu. Znanych jest wiele wyników dotyczących istnienia rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych w przestrzeniach L_M. Ogólne podejście badania tych problemów w przestrzeniach Musielaka–Orlicza ujednolica i implikuje analogiczne wyniki w przestrzeniach Lebesgue'a o zmiennym wykładniku, przestrzeniach Orlicza oraz w tzw. przestrzeniach dwufazowych. Występują tutaj dodatkowe problemy techniczne, ale równocześnie przy tym uogólnieniu widać, gdzie tak naprawdę interweniuje symetria przestrzeni (jak na

przykład w przestrzeniach Orlicza) lub jej brak (jak w przestrzeniach Musielaka–Orlicza).

Omawianą tematyką zajmują się głównie matematycy polscy, czescy, słowaccy, fińscy, amerykańscy oraz – w mniejszych grupach – w wielu innych krajach. Prace na ten temat publikowane są w znanych międzynarodowych czasopismach naukowych. Trzy ostatnio wydane monografie (*Variable Lebesgue Spaces* [3], *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents* [4] oraz *Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces* [5]) są poświęcone przestrzeniom Musielaka–Orlicza i ich zastosowaniom do analizy harmonicznej oraz równań różniczkowych cząstkowych. Pojawiają się tam w sposób naturalny przestrzenie Musielaka–Orlicza–Sobolewa.

Poza wyżej wymienionymi dziedzinami, przestrzenie Musielaka–Orlicza są ważne w zastosowaniach w probabilistyce, w teorii całkowania stochastycznego oraz w zagadnieniach fizycznych.

Jedną z ważniejszych pozycji w literaturze na temat powiązań probabilistycznych i przestrzeni Musielaka–Orlicza jest artykuł Kwapienia i Woyczyńskiego [7]. W artykule tym wykazano, że przewidywalny proces F jest całkowalny względem semimartyngału X wtedy i tylko wtedy, gdy F należy do zrandomizowanej przestrzeni Musielaka–Orlicza $L_{\varphi(w)}$, przy czym $\varphi(w)$ jest jednoznacznie określone poprzez charakterystyki Grigelionisa semimartyngału X. Nierówności typu *decoupling* i procesy styczne dla całek stochastycznych względem semimartyngałów są głównymi narzędziami w dowodzie. Należy również wspomnieć o dwóch monografiach [8,16], w których autorzy wyjaśniają szczegółowo, jak stosuje się teorie przestrzeni Musielaka–Orlicza (zwykle w przypadku ogólnym, czyli niewypukłym) do rozmaitych zagadnień z probabilistyki.

Istnieje ponadto wiele artykułów, w których również stosuje się techniki oraz rozmaite rezultaty z przestrzeni modularnych, w szczególności przestrzeni Musielaka–Orlicza. Pozwolę sobie wspomnieć o kilku takich pracach.

Dla przykładu w artykule [2] chaotyczne zachowanie procesu nieskończenie podzielnego opisuje się w języku przestrzeni Musielaka–Orlicza generowanej przez ten proces.

W pracy [14] opisano przestrzeń przewidywalnych procesów o wartościach operatorowych, które są całkowalne względem semimartyngałów o wartościach w przestrzeni Hilberta. Ta przestrzeń jest identyfikowana ze zrandomizowaną przestrzenią Musielaka–Orlicza generowaną przez modular jawnie wyrażony przez charakterystyki Jacoda–Grigelionisa. Jest to uogólnienie pracy Kwapienia i Woyczyńskiego [7] z 1991 roku.

W 1986 roku ukazała się praca Zhikova [18] o uśrednianiu funkcjonałów w rachunku wariacyjnym i w teorii elastyczności. Definiuje się tam tzw. la-

granżjany uogólnione, które są funkcjami dwóch zmiennych i są bezpośrednio związane z funkcjami Musielaka–Orlicza. Główne wyniki dotyczą uśredniania stochastycznych lagranżjanów niestandardowych, lagranżjanów plastyczności oraz lagranżjanów zdegenerowanych. Autor wykorzystał metody dualności (podobne do tych stosowanych w teorii funkcjonałów wypukłych lub teorii modularów) do uśredniania problemów wariacyjnych. Metody asymptotyczne używane wcześniej w uśrednianiu problemów liniowych nie znajdują tutaj zastosowania. Jest to następne zastosowanie przestrzeni Musielaka–Orlicza i technik z teorii modularów do zagadnień fizycznych.

W literaturze występują również inne przestrzenie w naturalny sposób związane z przestrzeniami Musielaka–Orlicza, jak na przykład przestrzenie Musielaka–Orlicza–Hardy'ego, Musielaka–Orlicza–Sobolewa–Hajłasza lub Besicovicha–Musielaka–Orlicza. W bazach danych łatwo znaleźć bardzo obszerną literaturę na te tematy.

Pozwolę sobie na krótką uwagę o ważnych przestrzeniach Hajłasza–Sobolewa, pierwszy raz zdefiniowanych i badanych przez Piotra Hajłasza w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku. Wkrótce po odkryciu, że definicja klasycznych przestrzeni Sobolewa nie musi zawierać pochodnej, zaczęto badać również przestrzenie Hajłasza–Orlicza–Sobolewa. Nowość polegała na tym, że są to przestrzenie funkcji określonych na przestrzeniach metrycznych wyposażonych w miarę. Ostatnio pojawiły się uogólnienia tych przestrzeni na przypadek funkcji Orlicza z parametrem – tym samym mamy do czynienia z przestrzeniami Hajłasza–Musielaka–Orlicza–Sobolewa (zob. [15]).

Poza przestrzeniami modularnymi Musielak zajmował się wieloma innymi zagadnieniami. Do wcześniejszych należą artykuły o przestrzeniach o ograniczonej wariacji w kontekście funkcji Orlicza, które też stanowią przykłady przestrzeni modularnych. W latach sześćdziesiątych XX wieku powstały liczne prace dotyczące przestrzeni funkcyjnych i dystrybucji. Również w latach sześćdziesiątych XX wieku wspólnie z Orliczem napisał trzy artykuły na temat całkowalności funkcji wektorowych względem miary addytywnej na zbiorze abstrakcyjnym. Brak założenia σ-skończoności miary był główną nowością w ich teorii całkowania funkcji wektorowych.

Pod koniec lat siedemdziesiątych i na początku lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku Musielak – wspólnie z Hudzikiem i Urbańskim – napisał serię artykułów o interpolacji w przestrzeniach Musielaka–Orlicza oraz o operatorach liniowych w ogólnych przestrzeniach modularnych.

W latach 1991–2002 Julian Musielak współpracował z włoskimi matematykami Carlo Bardaro i Gianlucą Vinti z uniwersytetu w Perugii. Owocem współpracy była seria artykułów, na podstawie której współautorzy opublikowali

w 2003 roku monografię *Nonlinear Integral Operators and Applications* [1] w serii wydawniczej *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*. Zawiera ona m.in. wyniki dotyczące nieliniowych operatorów całkowych, aproksymacji przez operatory splotu, całkowych operatorów Urysona i zastosowań w analizie sygnałów. Istotą monografii jest prezentacja rozszerzeń na przestrzenie modularne klasycznych rezultatów dotyczących przestrzeni unormowanych. W szczególności wykazane zostały wyniki w przestrzeniach Orlicza, Musielaka–Orlicza czy przestrzeniach o skończonej φ-wariacji, przy czym standardowa zbieżność normowa jest zastąpiona zbieżnością modularną.

Z powyższego, bardzo wyrywkowego szkicu badań naukowych Juliana Musielaka wynika, że jego wyniki znalazły niezwykle duży oddźwięk w środowisku matematycznym – zarówno krajowym, jak i międzynarodowym. A termin „przestrzeń Musielaka–Orlicza" pojawia się według baz danych tysiące razy – zarówno w matematyce teoretycznej, jak i stosowanej. Takiego wpływu i zasięgu własnych badań naukowych niewątpliwie życzyłby sobie niejeden matematyk. Mogę być dumna, że jestem wychowankiem matematycznym profesora Juliana Musielaka.

Cytowane prace innych autorów

[1] C. Bardaro, J. Musielak, G. Vinti, *Nonlinear Integral Operators and Applications*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, t. 9, Walter de Gruyter & Co., Berlin 2003.

[2] S. Cambanis, K. Podgórski, A. Weron, *Chaotic behavior of infinitely divisible processes*, Studia Math. 115 (1995), nr 2, 109–127.

[3] D. V. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces*, Birkhäuser, Springer, Heidelberg 2013.

[4] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Math., t. 2017, Springer, Heidelberg 2011.

[5] P. Harjulehto, P. Hästö, *Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces*, Lecture Notes in Math., t. 2236, Springer, Cham 2019.

[6] A. Kamińska, *On some compactness criterion for Orlicz subspace* $E_\Phi(\Omega)$, Comment. Math. 22 (1981), nr 2, 245–255.

[7] S. Kwapień, W. A. Woyczyński, *Semimartingale integrals via decoupling inequalities and tangent processes*, Probab. Math. Statist. 12 (1991), nr 2, 165–200.

[8] S. Kwapień, W. A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integrals*: *Single and Multiple*, Probability and its Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA 1992.

[9] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. I*, Springer, Berlin–New York 1977.

[10] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. II*, Springer, Berlin–New York 1979.
[11] J. Musielak, W. Orlicz, *On modular spaces*, Studia Math. 18 (1959), 49–65.
[12] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Math., t. 1034, Springer, Berlin 1983.
[13] H. Nakano, *Modulared linear spaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 6 (1951), 85–131.
[14] P. Nowak, *Integration with respect to Hilbert space-valued semimartingales via Jacod–Grigelionis characteristics*, Stochastic Anal. Appl. 21 (2003), nr 5, 1141–1168.
[15] T. Ohno, T. Shimomura, *Musielak–Orlicz–Sobolev spaces on metric measure spaces*, Czechoslovak Math. J. 65 (140) (2015), nr 2, 435–474.
[16] J. Szulga, *Introduction to Random Chaos*, Chapman & Hall, London 1998.
[17] K. Urbanik, *Random measures and harmonizable sequences*, Studia Math. 31 (1968), 61–88.
[18] V. V. Zhikov, *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 50 (1986), nr 4, 675–710, 877.

Anna H. Kamińska (Memphis, TN)

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 507–525
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Recenzje



Bartłomiej Bzdęga, *10^2 zadań na 10-lecie Wielkopolskiej Ligi Matematycznej*, Wydawca: Bartłomiej Bzdęga, Poznań 2020, 63 str.

Recenzowany zbiorek, bo trudno inaczej nazwać zbiór, w którym znalazło się zaledwie 10^2 zadań, bardzo mnie zaciekawił z dwóch powodów. Po pierwsze, stanowi on swego rodzaju dokumentację prowadzonej już od ponad dziesięciu lat Wielkopolskiej Ligi Matematycznej, a więc konkursu organizowanego przez bliżej mi nieznane środowisko, a po drugie oczywiście z uwagi na same zadania, jakie autor zdecydował się w zbiorku umieścić.

To drugie okazało się bardzo miłą niespodzianką. Teksty zadań – można by rzec – tchnęły świeżością, zachęcając przynajmniej do podjęcia próby „wejścia w klimat".

W myśl parafrazy znanej skądinąd zasady: „wszystkich zadań nie rozwiążesz, ale trzeba do tego dążyć", nie będę ukrywał, że próbowałem rozwiązać jak najwięcej zadań. Te zaś, jak zresztą autor obiecywał we wstępie, okazały się bardzo różne pod względem trudności. Niektóre z zadań sprawiły kłopot nie tylko mnie, ale i naprawdę dobrym uczniom, z którymi mam okazję pracować.

Najważniejsze jest jednak to, że w samej Lidze nie narzuca się uczestnikom zbyt dużej presji czasowej. Uczniowie mają do rozwiązania trzy serie po pięć zadań, a na rozwiązania zadań każdej serii przeznaczone są dwa miesiące. W tej sytuacji każdy uczestnik Ligi ma dość czasu, by popracować nad problemem jak matematyk, a nie jak sportowiec. Z tego punktu widzenia dobór zadań także wydaje się bardzo trafny.

Zadania w zbiorku podzielone zostały na rozdziały, których tytuły w większości zgodne są z tradycją uświęconą przez większość zbiorów zadań z olimpiad i konkursów matematycznych: *Liczby naturalne*, *Analiza i algebra*, *Geometria*, *Kombinatoryka*. Dla uatrakcyjnienia autor dodał jeszcze rozdział *Zadania z kosmosu*, w którym – jak mi się wydaje – umieścił zadania wyróżniające się szczególnie oryginalną treścią.

Poszczególne rozdziały dzielą się z kolei na mniejsze części, których tytu-

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

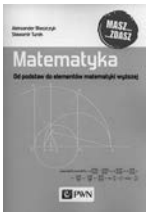
ły stanowią najbardziej charakterystyczne pojęcia związane z tematami zamieszczonych tam zadań (na przykład *Liczby pierwsze*, *Równania*, *Wielomiany*). Wyjątek stanowi geometria i kombinatoryka. W tym przypadku autor częściowo zdecydował się na podział zadań ze względu na metody rozwiązywania (na przykład *Rachunki na kątach*, *Rachunki na polach*, *Zasada szufladkowa*, *Niezmienniki i półniezmienniki*), co uważam za trochę niefortunne, bo taki podział często zawiera istotną wskazówkę dla rozwiązującego.

Natknąłem się też na drobne niekonsekwencje nazewnicze, jeśli chodzi o liczby całkowite i naturalne. Sam pierwszy rozdział powinien raczej nosić tytuł *Liczby całkowite*. Przydałoby się też może wyjaśnienie niektórych symboli i pojęć niezbyt powszechnie znanych wśród uczniów, na przykład wielomian unormowany.

Książeczka ta wyróżnia się na tle innych, podobnych opracowań tym jeszcze, że sporo w niej – jak mi się wydaje – zadań plasujących się poziomem trudności między zadaniami Olimpiady Matematycznej Juniorów a Olimpiady Matematycznej dla uczniów szkół ponadpodstawowych.

Podsumowując, zbiorek ów śmiało można polecić uwadze wszystkich miłośników niestandardowych zadań z – jak to się kiedyś zwykło określać – matematyki elementarnej.

Jacek Uryga
Politechnika Śląska
Katedra Matematyki
Wydział Matematyki Stosowanej



Aleksander Błaszczyk, Sławomir Turek, *Matematyka. Od podstaw do elementów matematyki wyższej*, PWN, Warszawa 2015, 515 str.

Książka liczy ponad pół tysiąca stron. Tytuł w zasadzie wyjaśnia, po co ją napisano. Autorzy piszą w pierwszym zdaniu wstępu: „[i]stnieje duża rozbieżność w programach nauczania między matematyką szkolną a matematyką wykładaną na uczelniach wyższych." Dziś wiele osób wypowiada się na temat nauczania w szkołach. Często pytają, po co uczyć tego lub owego, czy to się przyda w życiu. Domyślna odpowiedź brzmi „nie". Wiele osób zmienia w życiu nie tylko pracę, ale też zawód, zresztą więcej niż raz. Nie wiadomo, kim uczeń będzie. Wiadomo, czym się człowiek zajmował, gdy umiera, ale to nie pora na ustalanie, czego warto było go uczyć. Argumenty o przydatności to czysta demagogia. W szkole chodzi o pewne zrozumienie świata i nabycie umiejętności uczenia się różnych rzeczy, bo gdy przyjdzie zmienić zawód, trzeba będzie nauczyć się czegoś nowego.

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Zrozumienie świata obejmuje umiejętność słuchania innych i czytania ze zrozumieniem. Zwłaszcza słuchanie ze zrozumieniem jest trudne. Uczyć się tego trzeba już w szkole. Na różnych przedmiotach. W różnych dziedzinach wiedzy różnego rodzaju argumenty uznawane są za dowód. Inaczej jest w matematyce, inaczej w fizyce, jeszcze inaczej w biologii czy chemii, o literaturze nie wspominając. Niezależnie od dziedziny wiedzy po to, by móc coś pojąć, należy zapamiętać wiele rzeczy. Bez tego nie ma mowy o zrozumieniu bardziej złożonych spraw. Trzeba więc ćwiczyć pamięć.

Matematyka ma nauczyć poprawnego rozumowania, precyzyjnego formułowania myśli, dokładnego uzasadniania różnych stwierdzeń i to nie zmieniło się od starożytności, choć próbowano usunąć dowody z programów szkolnych i skasować zadania na dowodzenie. Niestety, częściowo się to udało. Prawie wszyscy licealiści pamiętają wzór na pierwiastki równania kwadratowego. Zdecydowana większość nie ma pojęcia o jego wyprowadzeniu. Dowód tego wzoru jest znacznie ważniejszy od jego zapamiętania. Nie jest też trudny.

Książka została napisana, by zainteresowani mogli poznać dowody i twierdzenia, których w szkole nie ma oraz dowody wielu twierdzeń wspominanych w szkole, ale których dowody zastąpiono tekstami typu: „za trudne dla uczniów". Czasem to prawda, ale rzadko. Z maniakalnym uporem autorzy podręczników szkolnych informują uczniów szkół podstawowych, że liczba π jest niewymierna, co jest sprzeczne z teorią o uczeniu rzeczy przydatnych. Trudno o jakikolwiek wniosek z niewymierności π dający się wypowiedzieć w szkole. Co więcej, dzięki temu, że przez długi czas uczono, że jakieś liczby są niewymierne bez uzasadnień, mało który uczeń rozumie, co mu wmawiają. Pytaliśmy (pomysł świetny, ale nie mój) w trakcie egzaminów wstępnych do LO nr XIV w Warszawie (teraz im. Staszica, wtedy im. Gottwalda) o niewymierność liczby 3,14, która wedle bardzo wielu zdających do klas z mocno rozszerzonym programem matematyki była niewymierna, bo 3,14 to przecież π, które jest liczbą niewymierną. W książce jest dowód niewymierności π, pochodzący od I. Nivena (ok. 1948 roku). Zrozumiały dla każdego studenta I roku studiów, na których jest matematyka, nie licząc tych, którzy zaraz po egzaminie chcą zapomnieć o wszystkim jak najszybciej. Starczy całkowanie iloczynu wielomianu i sinusa, poza tym proste nierówności. Dowód jest krótki, ale jego geneza to inna sprawa. Dobrze, że tu jest i może trafić do nauczycieli.

Niżej krótko o zawartości książki – spis treści to prawie trzy strony druku.

Rozdział pierwszy to *Repetytorium z matematyki elementarnej*. Pojawia się indukcja zupełna, dwumian Newtona, nierówność Bernoulliego, zasady maksimum i minimum, trójkąt Pascala, pewnik ciągłości (Dedekinda) i definicja potęgi o dodatniej podstawie i dowolnym rzeczywistym wykładniku (w szkole jej nie ma, choć potęgi są używane), twierdzenie Bézouta (tak nazywane w Polsce i na wschód od niej), twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianów o współczynnikach całkowitych, twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze, sito Eratostenesa, wzory Carda-

no, uwagi o niewymierności pewnych liczb – tyle szkolnej, nieco rozszerzonej, algebry.

Potem geometria. Przedstawiana tradycyjnie bez liczb rzeczywistych. Są cechy przystawania trójkątów i inne podstawowe rzeczy związane z geometrią płaszczyzny – definicje bazowych pojęć, wybrane twierdzenia i pewne konstrukcje geometryczne. Twierdzenie Talesa z dowodem korzystającym ze wzoru na pole trójkąta, więc krótkim. Cechy podobieństwa trójkątów. Twierdzenie Pitagorasa z dowodem. Jest też układ współrzędnych kartezjańskich. Sporo o trygonometrii. Definicje funkcji trygonometrycznych na „kole trygonometrycznym". Podstawowe ich własności udowodniono – poprawnie i krótko.

Na 98 stronach omówiono szkolną matematykę z pewnym rozszerzeniami z wyjątkiem granic (są w następnym rozdziale) i rachunku prawdopodobieństwa, który śladowo występuje w szkołach.

Rozdział *Elementy analizy matematycznej* zawiera krótki wstęp do teorii mnogości: relacje równoważności, równoliczność, przeliczalność, hipoteza continuum. Następnie mowa jest o podstawowych funkcjach (liniowych, potęgowych, trygonometrycznych i cyklometrycznych, wykładniczych), o równaniach prostej i okręgu. Pojawiają się ciągi, w tym ciąg Fibonacciego, twierdzenie Bolzano–Weierstrassa i lemat Lebesgue'a o pokryciu. Dalej szeregi i najprostsze kryteria ich zbieżności. Następnie iloczyny nieskończone, w tym przedstawienie sinusa w postaci iloczynu nieskończonego i wzór Wallisa. To już spory fragment materiału wykładanego studentom matematyki na pierwszym roku.

Trzeci rozdział *Elementy algebry wyższej* zawiera wiele twierdzeń, które studenci matematyki poznają w czasie studiów niekoniecznie już na pierwszym roku. Są grupy, pierścienie, ciała, przestrzenie liniowe i teoria Galois do zasadniczego jej twierdzenia włącznie. Potem wyznaczniki wraz z podstawowymi o nich twierdzeniami. Wszystko z dowodami. Wyznacznik jest zdefiniowany klasycznie, więc potrzebny jest znak permutacji, ale definicje są, a użyte twierdzenia są dowiedzione. Są przykłady zastosowań rozwijanej teorii, na przykład do konstrukcji geometrycznych. W sumie ponad sto pięćdziesiąt stron tekstu, który daje się zrozumieć i to bez wielkiego wysiłku, choć nie w minutę. Za swą pracę czytelnik otrzyma nagrodę. Dowie się na przykład, czemu trysekcja kąta jest niewykonalna. Ma szanse pojąć, że jest to twierdzenie algebraiczne i zrozumieć, że przetłumaczenie problemu geometrycznego na język algebry jest kluczem do jego rozwiązania. Jest konstrukcja siedemnastokąta foremnego, przy czym można zrozumieć, skąd ona się bierze. Jest też twierdzenie Gaussa charakteryzujące te liczby naturalne n, dla których n-kąt foremny jest konstruowalny za pomocą cyrkla i linijki. Ten rozdział może przydać się tym nauczycielom licealnym, którzy pragną w ramach kółek pokazać uczniom ciekawe twierdzenia i związki różnych działów matematyki. To ważne, bo wszystko jest w wielu podręcznikach, ale tu jest w jednym miejscu z dowodami. To bardzo zwiększa szanse na przeczytanie i zrozumienie twierdzeń.

Ostatni rozdział poświęcili autorzy rachunkowi różniczkowemu i całkowemu. Są tu podstawowe twierdzenia o funkcjach ciągłych, różniczkowalnych

i całkowalnych, w tym kryterium całkowe zbieżności szeregu. Jest wzór Taylora, jednostajna zbieżność ciągów i szeregów funkcyjnych, w tym twierdzenie Diniego. Jest twierdzenie Liouville'a o przybliżaniu pierwiastków wielomianów o współczynnikach całkowitych liczbami wymiernymi, co pozwoliło na podanie konkretnej liczby przestępnej. Istnienie liczb przestępnych wykazano wcześniej – dowód wykorzystywał porównanie mocy zbiorów. Pokazano funkcję ciągłą bez skończonej pochodnej – przykład Weierstrassa – rzadko omawiany w podręcznikach, bo łatwiej jest użyć funkcji przedziałami liniowych niż kosinusów. Jest funkcja Γ Eulera, jej przedstawienie w formie iloczynu nieskończonego i całki oraz wzór na dopełnienie. Wreszcie pojawia się ζ-funkcja Riemanna. Zdefiniowana jako suma szeregu, ale też jako iloczyn nieskończony. Związek z liczbami pierwszymi tylko sygnalizowany, bo w tej książce na więcej miejsca nie ma. Hipoteza Riemanna jest sformułowana, krótko wyjaśniono kwestię przedłużenia funkcji ζ na całą płaszczyznę i z nieudowodnionego równania funkcyjnego wiążącego funkcje Γ i ζ wywnioskowano zerowanie się funkcji ζ w parzystych liczbach całkowitych ujemnych. Podano też dowód Hermite'a przestępności liczby e i dowód przestępności liczby π.

W książce jest wiele informacji historycznych. Są krótkie notki o ważnych matematykach.

Materiał jest ogromny, ale przedstawiony w przystępny sposób. Podkreślam, że – w odróżnieniu od wielu książek popularnonaukowych – tu prawie wszystko zostało udowodnione. Autorzy nie proszą czytelników o wiarę w to, co piszą, lecz tezy uzasadniają. Warto tę pozycję polecić młodym ludziom zainteresowanym matematyką. Również nauczycielom, którzy chcą przypomnieć sobie pewne w miarę elementarne zagadnienia ze studiów lub zapoznać się z twierdzeniami, których dowodów na studiach nie widzieli, a o których czasem mówią uczniom (na przykład niewymierność liczby π). Myślę, że do książki zajrzy wiele osób i że spora ich część przestudiuje obszerne jej fragmenty.

Przeczytałem książkę uważnie, by móc powyższe zdania napisać odpowiedzialnie i zachęcać do lektury. Oczywiście natknąłem się na na trochę literówek, trochę rzeczy, które moim zdaniem powinny być opisane inaczej, wreszcie na kilka błędów. Niżej są moje uwagi do tekstu (autorom przekazuję więcej).

– str. 5. Nie zdefiniowano a^0. Przydałby się komentarz na temat 0^0. Niejawnie oczywiście 0^0 pojawia się, na przykład w dwumianie Newtona. Na stronie 16 napisano, że $w^0 = 1$ i wyjaśniono, dlaczego tak być powinno. A na stronie 17 dowiadujemy się, że w tej książce $0^0 = 1$, ale są powody (jakie?!), by traktować to jako symbol nieoznaczony.

– str. 12. To, że liczba podzbiorów zbioru n-elementowego równa jest 2^n powinno być też dowiedzione bez użycia dwumianu Newtona. Powinny być dwa dowody.

– str. 19. Dlaczego twierdzenie o gęstości zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych nazwano aksjomatem? Aksjomat ciągłości (Dedekinda, w wersji z kresem górnym) jest w tekście. Jest trochę niejasne, czy zbiór liczb rzeczywistych jest konstruowany, czy istnieje z założenia. Działania są w nim definiowane poprzez działania na liczbach

wymiernych, więc nie ma ich w pewnikach, ale nierówność już w pewnikach jest (str. 21). W rezultacie nie bardzo wiadomo, co należy udowodnić, a co założono.

– str. 26–27. Definicję potęgi o dowolnym wykładniku wymiernym należało poprzedzić uwagą o niezależności potęgi od przedstawienia liczby wymiernej w postaci ilorazu liczb całkowitych. Przydałoby się stwierdzenie monotoniczności funkcji wykładniczej zdefiniowanej na $\mathbb{Q}$, bo z niej autorzy korzystają się w dowodzie następnego twierdzenia. Powinno pojawić się twierdzenie: jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest monotoniczna i $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, to $f(x) = f(1)^x$. Wzory typu $(a^x)^y = a^{xy}$ są ważne, ale wtórne.

Takie same uwagi dotyczą opisu własności logarytmów (następne twierdzenia).

– str. 36. Dowód wzorów Viète'a dla równania kwadratowego, absolutnie poprawny, ale przeprowadzony w oparciu o wzory na pierwiastki równania kwadratowego, więc nie działa dla równań wyższych stopni. Powinien być przeprowadzony w oparciu o twierdzenie o jednoznaczności współczynników wielomianu. Może jako drugi, ale uważam, że raczej jako jedyny.

– str. 54. Autorzy napisali, że Hilbert dowiódł niemożliwości wykazania piątego aksjomatu Euklidesa. Modele geometrii nieeuklidesowej pojawiły się wcześniej (jeden z nich zaproponował Poincaré w 1882 roku), a sama geometria jeszcze wcześniej. *Podstawy geometrii* Hilberta to rok 1899. Model Poincarégo (półpłaszczyzna z metryką hiperboliczną) pochodzi zresztą od Beltramiego, który użył go do uzasadnienia, że geometria Łobaczewskiego jest równie dobra jak euklidesowa. W tle są inne nazwiska – jest model Kleina, jest wersja modelu Poincarégo na kole należąca według Wikipedii do Riemanna. I jeszcze jedno. W biogramie Hilberta wymieniono niektórych jego doktorantów: Teiji Takagiego, Ernsta Zermelo i Hugona Steinhausa. Zabrakło m.in. Richarda Couranta i Hermanna Weyla.

– str. 84. Na dole strony jest dowód monotoniczności funkcji sinus na odpowiednich przedziałach korzystający ze wzoru na $\sin\alpha - \sin\beta$. Nie podoba mi się to, bo przecież funkcje zostały określone wcześniej na kole trygonometrycznym, więc ta monotoniczność nie wymaga dowodu – przecież widać, co dzieje się ze współrzędnymi punktu, gdy zwiększamy kąt. Z tej definicji zresztą natychmiast wynikają też nierówności $|\sin\alpha - \sin\beta| \leqslant |\alpha - \beta|$ oraz $|\cos\alpha - \cos\beta| \leqslant |\alpha - \beta|$ – kolejno stwierdzamy, że łuk jest dłuższy od cięciwy, przeciwprostokątna od przyprostokątnej i to pokazywać warto młodym, dobrze zapowiadającym się ludziom oraz ich nauczycielom. Tym bardziej, że nierówność $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$ dla $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ jest uzasadniana geometrycznie. Nie ma przecież innego wyjścia, bo funkcje kosinus i sinus zdefiniowano geometrycznie. Można pójść krok dalej: $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha > \alpha\cos^2\alpha = \alpha(1-\sin^2\alpha) > \alpha(1-\alpha^2)$, co przydaje się do oszacowania błędu przybliżenia $\sin\alpha \approx \alpha$. W szkołach tak być powinno, a na wykładzie uniwersyteckim z analizy matematycznej startującym z aksjomatyki liczb rzeczywistych może być inaczej (w 1934 roku Ludwik Bieberbach zarzucał Edmundowi Landauowi, że definicje kosinusa i sinusa za pomocą szeregów są nienie-

mieckie, ale może taka argumentacja to już przeszłość).

– str. 91. Klasyczny dowód istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych udziwniono. W dodatku wydaje się, że jest on błędny, choć łatwo go poprawić. Autorzy napisali (skracam nieco):

> Niech $p_1p_2\dots p_n$ będzie iloczynem wszystkich liczb pierwszych nie większych niż a i niech $p = 1+p_1p_2\dots p_n$. Wtedy $p = q_1q_2\dots q_k$ dla pewnych liczb pierwszych $q_1, q_2, \dots, q_k$. Wtedy przynajmniej jedna z liczb q_i musi być równa jednej spośród liczb $p_1, p_2, \dots, p_n$, bo inaczej $q_i > p_j$ dla każdego $i \leqslant k$ oraz $j \leqslant n$, zatem [...] $g_i > p_j + 1$ i wobec tego $p = q_1q_2\dots q_k > (p_1 + 1)(p_2 + 1)\dots(p_n + 1)$ itd.

Ale przecież jedno j może odpowiadać kilku różnym i, więc tak nie można. Prościej jest klasycznie. Zacytujmy twierdzenie 6.6 w wersji z książki.

> Niech $a \geqslant 2$ będzie dowolną liczbą naturalną. Jeśli $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych nie większych niż a, to $p_1p_2\dots p_n + 1$ jest liczbą pierwszą.

Nie jest ono prawdziwe. Dla $a = 14$ mamy $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 59 \cdot 509$.

Poprawny wniosek z tego twierdzenia jest niżej.

> Dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ istnieje taka liczba pierwsza p, że $n \leqslant p < n!$.

Wolałbym dowód w wersji „liczba $n! - 1$ dzieli się przez jakąś liczbę pierwszą p i $p \nmid n!$, więc $p > n$”.

Dziwi mnie, że po tym twierdzeniu nie pojawiła się informacja o twierdzeniu Czebyszewa o liczbie pierwszej w przedziale $(n, 2n)$. A są informacje na temat innych twierdzeń (bardzo dobrze!), w tym o wyniku Tao i Greena o długich ciągach arytmetycznych złożonych z samych liczb pierwszych.

Na dole strony 97 napisano, że równość $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$ można sprawdzić (bez wzoru Cardano) za pomocą uciążliwych rachunków. Ja się nie zmęczyłem sprawdzając, że $(1 \pm \sqrt{5})^3 = 16 \pm 8\sqrt{5} = 8(2 \pm \sqrt{5})$.

– str. 137. Pojawia się wzór Bineta na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego. Nie znam się dobrze na historii matematyki, ale wydaje mi się zupełnie nieprawdopodobne, by Leonard Euler, który zmarł trzy lata przed narodzinami Jacquesa Bineta, nie znał tego wzoru. Indukcyjny dowód na str. 138 jest poprawny, ale dla młodzieży mało zrozumiały. Należało napisać, że jeśli ciąg geometryczny o ilorazie q spełnia zależność $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, to $a_1q^{n+2} = a_1q^{n+1} + a_1q^n$, czyli $q^2 - q - 1 = 0$ i wyjaśnić, że $f_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$ dla $n = 1, 2, \dots$, bo a_1 i a_2 wyznaczają ciąg spełniający to równanie rekurencyjne. To jest miejsce, w którym bez uczonej terminologii można powiedzieć czytelnikom, co to jest dwuwymiarowa przestrzeń liniowa. Wzór staje się mniej cudowny.

– str. 148. Granicą ciągu (a_n) jest $\sqrt{a}$, ale to za mało, by używać go do obliczania pierwiastków. Jest okazja, by pokazać więcej w prosty sposób: $a_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n}) - \sqrt{a} = \frac{1}{2a}(a_n - \sqrt{a})^2$, więc jeśli na przykład $a \geqslant 1$ i $|a_n - \sqrt{a}| < 10^{-k}$, to

$0 \leqslant a_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-2k}$, a to oznacza, że liczba dokładnych miejsc po przecinku co najmniej podwoiła się przy przejściu do następnego wyrazu. Ten ciąg to przecież wynik zastosowania metody Newtona do funkcji $x \mapsto x^2 - a$ i nie wierzę, by łatwo można było sytuację poprawić zastosowawszy wzór Taylora, zresztą do jakiej funkcji? Tym bardziej wypadałoby wspomnieć, że tu chodzi o metodę Newtona, że informacja o obliczaniu pierwiastka trzeciego stopnia odnosi się do ciągu otrzymanego w ten sam sposób z funkcji $x \mapsto x^3 - a$. W części poświęconej pochodnym warto też wspomnieć o metodzie Newtona przybliżonego rozwiązywania równań, ciągle stosowanej, czasem trochę modyfikowanej.

– str. 155. Do wymienionych dwóch uczniów Weiestrassa powinna być dopisana Sofia Kowalewska.

– str. 182. Dowód wzoru $\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ wymaga istotnych poprawek.

– str. 198. Na tej stronie są informacje na temat przybliżeń liczby π podawanych przez różnych ludzi – jak w wielu książkach popularnonaukowych. Jednak nie mówi się, jak oni do tych oszacowań dochodzili. Jest też informacja, że w internecie można znaleźć mnóstwo cyfr rozwinięcia tej liczby. Nie ma jednak (zwyczajowo) informacji, dlaczego ludzie tym się zajmują. W końcu gdyby założyć, że równik jest okręgiem, to dziesięć cyfr po przecinku i znajomość promienia gwaratowałoby długość równika z błędem mniejszym od milimetra, a w rzeczywistości równik okręgiem nie jest i chyba nie da się jego długości tak dokładnie zdefiniować.

– str. 200–209. Brak informacji o wzorach Cardano, które wymusiły wprowadzenie liczb zespolonych (przypadek nieprzywiedlny). Nie napisano, że traktowano je jako nieistniejący, ale przydatny dziwoląg do chwili ulokowania ich na płaszczyźnie, czyli podania ich geometrycznej interpretacji – to historycznie ważne, choć dziś wprowadzanych pojęć interpretować geometrycznie nie trzeba.

– str. 241. Według autorów stopień wielomianu zerowego to 0, a mnie uczono, że $-\infty$. Niby to rzecz gustu, ale kilka elementarnych twierdzeń lepiej brzmi, gdy stopień wielomianu zerowego jest nieskończony, ewentualnie niezdefiniowany, na przykład twierdzenie o dzieleniu wielomianów ze str. 242. Można twierdzić, że jest nieprawdziwe, bo wedle autorów reszta z dzielenia wielomianu 1 przez 1 ma mieć stopień mniejszy od 0, a ich definicja tego nie dopuszcza.

– str. 254. A które liczby *całkowite* są pierwsze? Na stronie 90 zdefiniowano naturalne liczby pierwsze jako te, które nie są iloczynami dwóch czynników większych od 1, dla ujemnych działa to źle, bo wedle takiej definicji każda całkowita liczba ujemna jest pierwsza. Autorzy piszą, że przy mnożeniu wielomianów stopnie dodają się i prawie mają rację, ale co z mnożeniem przez wielomian zerowy?

– str. 260. Dowód lematu Gaussa trzeba poprawić.

– str. 309. Wielomian minimalny nie ma pierwiastków wielokrotnych, bo one są pierwiastkami pochodnej, której stopień jest o 1 mniejszy od stopnia wielomianu.

– str. 355, 356. Nie podoba mi się to podejście. Rozwinięta została wcześniej

teoria Galois, w każdym razie do pewnego stopnia. Pojawiło się zasadnicze twierdzenie tej teorii. Przy okazji rozwiązywania równania $z^{17} - 1 = 0$ można ją zastosować, tzn. znaleźć podciała ciała rozkładu odpowiadające podgrupom, co wyjaśniłoby, skąd wzięto podstawienia. Bez teorii Galois wpaść na pomysł tych podstawień nie jest łatwo, choć chyba Gaussowi to się udało.

– str. 381/382. Pochodne obliczał Fermat (bez algorytmów), rozwiązując zadania optymalizacyjne. Twierdzenie o zerowaniu się pochodnej w tych punktach wewnętrznych dziedziny, w których funkcja przyjmuje wartości ekstremalne, pochodzi od niego.

– str. 397. W regule de l'Hospitala w części dotyczącej mianownika dążącego do nieskończoności założenie o zachowaniu licznika jest zbędne, co ukryto przed czytelnikami zapisując dowód tak, by tego nie dostrzegli. Andrzej Birkholc zauważył, że można zastąpić twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej monotonicznością. Jego dowód jest najlepszy (można go znaleźć m.in. w mojej książce *Analiza matematyczna dla ekonomistów*).

– str. 407. Oszacowanie błędu z wzoru Taylora przy obliczaniu e jest kiepskie, oszacowano błąd przez $\frac{3}{40320}$, a użycie szeregu daje $\frac{1}{7\cdot 5040} = \frac{1}{35320}$. Ogólnie, wbrew reklamie, wzór Taylora z resztą Lagrange'a lub Cauchy'ego nie jest szczególnie efektywny. Jego wagę trudno przecenić, ale chodzi głównie o resztę Peano lub całkową.

– str. 433. Zdanie „[z]bieżności szeregu (28.9) nie da się rozstrzygnąć za pomocą kryteriów wcześniej poznanych" jawnie przeczy temu, że zrobiono to wcześniej za pomocą kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu (zwanego w tej książce i wielu innych kondensacyjnym).

– str. 443. Kiedyś: „podstawimy", teraz: „wykonamy podstawienie". Czy to jest postęp?

– str. 457. Brak ważnej informacji: funkcje ciągłe nigdzie nieróżniczkowalne pojawiają się w matematycznych modelach zjawisk fizycznych (ruch Browna) i w modelach matematycznych w ekonomii (proces Wienera). Warto napisać, że G. Hardy dowiódł, że funkcja $x \mapsto \sum a^n \cos(b^n \pi x)$ jest ciągła i nigdzie nieróżniczkowalna, jeśli $0 < a < 1 \leqslant ab$. Obecnie modne jest oskarżanie Rosjan o wszelkie możliwe zło, więc notka na temat Banacha jest śliczna, ale byłaby prawdziwsza, gdyby ograniczyć okres pracy Stefana Banacha w Instytucie Weigla do okupacji niemieckiej, bo za radzieckiej był profesorem uniwersytetu... Poza tym zamiast pisać „karmicielem wszy" można napisać, że wszy karmiono jego i innych krwią (z podudzia), bo były potrzebne do wytwarzania szczepionki przeciw tyfusowi. Inaczej młodzież nie zrozumie, co się działo. Sprawdzałem na trzydziestolatkach.

– str. 486. Trzeba wyraźnie napisać, że chodzi o istnienie pochodnej w kole (zbiorze) otwartym – inaczej to nieprawda.

Michał Krych
Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne



Włodzimierz Odyniec, *Imigracja do ZSRR do wybuchu wojny – profile matematyków* (ros.), Izdatielstwo Syktywkarskowo Gosudarstwiennowo Uniwiersitieta im. Pitirima Sorokina, Syktywkar 2019, 123 str.

Autor jest matematykiem rosyjskim polskiego pochodzenia (zob. Wiad. Mat. 2014, str. 363), interesującym się historią matematyki. Ta książka przedstawia matematyków, którzy przyjechali do ZSRR w latach dwudziestych i trzydziestych XX wieku, ich losy i niektóre osiągnięcia. Nie obejmuje matematyków z uniwersytetów we Lwowie, Wilnie, Rydze i Tartu, którzy nie ze swojej woli znaleźli się w 1939 roku na terytorium ZSRR, chociaż o niektórych z nich wspomina. Polskiego czytelnika powinien zainteresować fakt, że większość bohaterów tej książki była związana z Polską. Oto niektórzy z nich.

Herman (Chaim) Müntz (1884––1957) urodził się w Łodzi i tam się kształcił do matury w 1902 roku. Po maturze wyjechał do Berlina na studia z filozofii, nauk przyrodniczych i matematyki (1902–1906). Następnie specjalizował się w zakresie matematyki pod kierunkiem Amandusa Schwarza i Friedricha Schottky'ego, rozpoczynając aktywną działalność naukową zwieńczoną w 1910 roku doktoratem w Berlinie. Wyjechał do Monachium i w czasie I wojny światowej był nauczycielem, a po wojnie wrócił na krótko do Polski, gdzie snuł plany emigracji do Palestyny. Chęć kontynuacji pracy naukowej skłoniła go jednak do powrotu do Niemiec, ale po kilku latach kryzys ekonomiczny na Zachodzie sprawił, że zdecydował się na emigrację do ZSRR. Latem 1929 roku przyjechał do Leningradu, gdzie został profesorem i kierownikiem katedry równań różniczkowych na tamtejszym uniwersytecie. Przed przyjazdem opublikował dwadzieścia siedem prac z analizy matematycznej i jej zastosowań w czołowych czasopismach, a w Rosji nadal intensywnie pracował. Był w składzie delegacji matematyków radzieckich na IX Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Zurychu w 1932 roku, odgrywał ważną rolę przy organizacji II Wszechzwiązkowego Zjazdu Matematyków w Leningradzie, a w 1935 roku otrzymał (bez obrony!) stopień doktora nauk matematycznych. W szczytowym okresie swojej tam działalności odegrał sporą rolę w przyjazdach do ZSRR kilku matematyków, w tym Arnolda Walfisza i Stefana Bergmana (zob. niżej). Dobrą passę przerwało aresztowanie go w 1937 roku i wymuszony wyjazd do Szwecji, gdzie pozostał do końca życia.

Fritz Noether (1884–1938), brat Emmy Noether, zdecydował się na przyjazd do ZSRR w 1934 roku. Został profesorem uniwersytetu w Tomsku, gdzie spotkał Stefana Bergmana, choć nie współpracowali matematycznie. Odyniec ujawnia, że 20 VIII 1937 Stalin wydał Biuru Politycznemu polecenie aresztowania wszystkich Niemców. Noethera aresztowano 22 XI 1937 pod zarzutem szpiego-

stwa na rzecz Niemiec, a synów wyrzucono z kraju. Rok później Noether został skazany na dwadzieścia pięć lat łagru, a 8 IX 1941, gdy wojska niemieckie zbliżały się do Orła, gdzie był wówczas osadzony, rozstrzelano go. Zrehabilitowano go w 1988 roku.

Stefan Bergman (1895–1977) był matematykiem polskim i jest dobrze znany polskim czytelnikom z różnych opracowań (w książce autora tej recenzji *Matematycy XIX i XX wieku związani z Polską* można znaleźć biogramy i dodatkowe informacje o niektórych z nich, w tym o Stefanie Bergmanie, Celestynie Burstinie, Myronie Mathissonie, Arnoldzie Walfiszu i Mikołaju Czajkowskim). Nieznana natomiast była rola Müntza w jego życiu: najpierw pomógł on Bergmanowi w uzyskaniu zaproszenia do Tomska, gdzie Bergman objął posadę 1 IX 1934, a potem zaznajomił go z Walfiszem, który mu napisał o seminarium, jakie prowadził Muscheliszwili w Tbilisi, i pomógł uzyskać z kolei jego zaproszenie. W rezultacie Bergman przyjechał jesienią 1936 roku z Tomska do Tbilisi i był tam do wiosny 1939 roku, kiedy wyjechał wyjechał do Paryża, a stamtąd do Stanów.

Feliks Frankl (1895–1961), jeśli nie liczyć jego publikacji w *Fundamenta Mathematicae*, nie miał nic wspólnego z Polską. Poznał na kongresie matematyków w Bolonii Pawła S. Aleksandrowa, który mu pomógł przyjechać na początku 1929 roku do Moskwy. Odtąd jego życie biegło w ZSRR i Odyniec ze szczegółami je opisuje, w tym okres po 1950 roku, kiedy padł ofiarą „walki z kosmopolityzmem" i został zesłany do Frunze (zrehabilitowany w 1956 roku, do Moskwy już nie wrócił).

Stefania Szilárd (1898–1938) wyszła za mąż za medyka Erwina Bauera jeszcze w rodzinnych Węgrzech. Mąż był aktywnym uczestnikiem komunistycznej rewolty Kuna. W 1925 roku Brauerowie przenieśli się do Moskwy i w 1934 roku do Leningradu. Tam zostali aresztowani w 1937 roku i na początku 1938 roku rozstrzelani. Ich dwaj mali synowie zostali oddani do domów dziecka i ich drogi się rozeszły (spotkali się dopiero po kilkudziesięciu latach). Brat Stefanii, Kárl Szilárd (1901–1980), członek partii komunistycznej w Niemczech, też emigrował w 1934 roku do ZSRR, gdzie pracował w Moskwie pod kierunkiem Frankla. Aresztowany w 1938 roku, został skierowany do „szaraszki" (łagier dla uczonych), gdzie pracował nad konstrukcjami lotniczymi. Zwolniony w 1948 roku, zrehabilitowany w 1956 roku, wrócił w 1960 roku do Węgier.

Celestyn Burstin (1888–1938) był matematykiem polskim. W 1929 roku przyjął zaproszenie Białoruskiej Akademii Nauk i przyjechał do Mińska, gdzie przez pierwsze dwa lata był kierownikiem katedry i profesorem uniwersytetu, a w 1931 roku został członkiem rzeczywistym Białoruskiej Akademii Nauk i dyrektorem jej instytutu matematyczno-fizycznego. Publikował sporo, głównie po niemiecku, ale także po rosyjsku i białorusku (jest uważany za jednego z twórców białoruskiej terminologii matematycznej). W grudniu 1937 roku został aresztowany i w listopadzie 1938 roku zmarł w więziennym szpitalu. Zrehabilitowano go w 1956 roku.

Jakub Grommer (1881–1933) urodził się w Brześciu. Za młodu mówił tylko w jidysz i studiował Talmud, ale pociągnęła go matematyka i w 1914 roku uzy-

skał w Getyndze doktorat pod kierunkiem Hilberta, a następnie został asystentem Einsteina, z którym napisał kilka ważnych prac. Publikował na pograniczu fizyki i matematyki, a w połowie lat dwudziestych zapragnął uczyć na uniwersytecie. Z braku takiej możliwości w Niemczech uzyskał, z pomocą Einsteina, zaproszenie do Mińska, gdzie w listopadzie 1928 roku został profesorem, ale kilka lat później zmarł.

W czasie dwóch międzywojennych dekad przez ZSRR przewinęło się kilku dalszych fizyków, w tym Polak Miron Mathisson (1897–1940), który w roku 1936/1937 był profesorem uniwersytetu w Kazaniu. Imigrantami w ZSRR byli także Stefan Cohn-Vossen (1902–1936) i Abraham Plessner (1900–1961). Ten pierwszy urodził się we Wrocławiu, tam studiował i się doktoryzował, a potem pracował w Getyndze, gdzie się habilitował i napisał z Hilbertem znaną książkę *Anschauliche Geometrie* (*Geometria poglądowa*), oraz w Kilonii. Po dojściu Hitlera do władzy zdecydował się, po wymianie listów z Müntzem, na emigrację i wybrał ZSRR. Jesienią 1934 roku został profesorem uniwersytetu w Leningradzie, ale klimat mu nie służył i półtora roku później zmarł w Moskwie na zapalenie płuc. Plessner pochodził z Łodzi, gdzie uczęszczał do państwowego gimnazjum, w którym językiem nauczania najpierw był rosyjski, potem niemiecki, a na końcu polski. Po maturze w 1919 roku wyjechał na studia do Niemiec (Giessen, Getynga, Berlin) i w 1922 roku doktoryzował się w Giessen. Potem pracował w Marburgu, ale na początku kryzysu ekonomicznego zdecydował się na emigrację do ZSRR. Znając język rosyjski wykładał na uniwersytecie w Moskwie i pracował w Instytucie Matematycznym Akademii Nauk im. Stiekłowa. W ramach „walki z kosmopolityzmem" stracił obie te posady (w latach 1948–1949) i odtąd żył w nędzy, bez regularnych środków do życia. Emeryturę uzyskał dopiero w 1960 roku, ale wkrótce potem zmarł.

Najwięcej miejsca w swojej książce autor poświęcił dobrze w Polsce znanemu polskiemu matematykowi Arnoldowi Walfiszowi (1892–1963). Po pogromie w 1905 roku rodzina przeniosła się z Warszawy do Wiesbaden w Niemczech, gdzie Arnold rozpoczął naukę gimnazjalną, ale wrócił w 1908 roku do Warszawy i rok później zdał tam z wyróżnieniem maturę. Na uniwersytet wstąpił w Monachium, a po roku spędził także w Berlinie, Heidelbergu i Getyndze. Pierwszą wojnę światową przeżył w Wiesbaden, a następnie kontynuował studia w Getyndze, gdzie się doktoryzował w 1921 roku z teorii liczb pod kierunkiem Edmunda Landaua. Ulubionym jego tematem było badanie liczby punktów całkowitoliczbowych w okręgu. Do Polski wrócił w 1927 roku i w 1930 roku habilitował się na Uniwersytecie Warszawskim, a w 1935 roku założył, z Salomonem Lubelskim, czasopismo *Acta Arithmetica*, którego jednym z redaktorów był do śmierci. Po wymianie listów z Müntzem zdecydował się na emigrację do ZSRR. W październiku 1936 roku przyjechał do Tbilisi i tam biegła jego dalsza kariera, którą Odyniec szczegółowo opisuje.

Ostatni rozdział książki jest poświęcony kilku osobom, w tym Wernerowi Brombergowi (1909–2003), który spędził w ZSRR lata 1934–1937, związanemu ze Lwowem ukraińskiemu mate-

matykowi Mikołajowi Czajkowskiemu (1887–1970) oraz Alfredowi Lustigowi (1908–1985). Ten trzeci był wiedeńskim fizykiem. Po anszlusie Austrii znalazł się w Polsce, gdzie w październiku 1939 roku przekroczył granicę z ZSRR. Od początku wojny niemiecko-radzieckiej był na froncie, dwukrotnie ranny, nagrodzony kilkoma medalami. Po wojnie został docentem.

Książka przynosi wiele faktów bibliograficznych oraz informacji o naukowych osiągnięciach omawianych osób i z tego powodu zasługuje na uwagę. Z faktami historycznymi obchodzi się jednak różnie. Aresztowania i represje w ZSRR traktuje jak zjawisko meteorologiczne i nie ocenia (zdarzyło się, trzeba żyć dalej). Niewygodne dla ZSRR fakty pomija, na przykład „1 września 1939 roku zaczęła się II wojna światowa, przy czym uniwersytety lwowski (od grudnia 1939 roku), wileński, ryski i tartuski (od jesieni 1940 roku) funkcjonowały już w ramach ZSRR, do początku Wielkiej Wojny Ojczyźnianej 1941 roku" (str. 103). Nie ma więc mowy o agresji ZSRR i aneksji tych ziem, ale to pozwoliło mu na wspomnienie losów Stefana Banacha, Juliusza Schaudera, Stanisława Krystyna Zaremby, Antoniego Zygmunda, Antoniego Chwistka, Marka Wiszyka i paru innych „imigrantów". Słowem nie wspomina jednak o Józefie Marcinkiewiczu i innych ofiarach zbrodni katyńskiej, którzy przecież też byli „imigrantami". Takiego umiaru nie stosuje natomiast do zjawisk poza granicami ZSRR, w Niemczech czy Polsce, na przykład surowo ocenia „skrajny nacjonalizm i antysemityzm" polityki Rydza-Śmigłego, ówczesne bojówki antyżydowskie na polskich uczelniach i odejście z uniwersytetu Samuela Dicksteina (str. 89–90).

Dziwi pominięcie w takiej książce urodzonego w Łodzi Ary Jakuba Sternfelda (1905–1980), który do ZSRR przyjechał w 1935 roku i rok później zyskał tam obywatelstwo, a uchodzi za jednego z twórców teorii lotów kosmicznych.

Nie oczekujmy jednak zbyt wiele. Treść matematyczna książki zasługuje na uwagę.

Roman Duda
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski



G. I. Sinkiewicz, *Georg Cantor i polska szkoła teorii mnogości* (ros.), Izdatielstwo Sankt-Pietierburgskowo Gosudarstwiennowo Architiekturno-Stroitielnowo Uniwiersitieta, Sankt-Peterburg 2012, 352 str.

Monografia składa się z dwóch części. Bohaterem pierwszej (objętościowo większej) jest Georg Cantor (1845–1918), z którego prac z lat siedemdziesiątych dziewiętnastego wieku wyrosła teoria mnogości. Bohaterem drugiej jest Wa-

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

cław Sierpiński (1882–1969), lider polskiej szkoły matematycznej, która teorię mnogości wypisała na swoich sztandarach i znacznie ją rozwinęła. Łącznikiem jest teoria mnogości, a tematem wiodącym jej historia.

W części pierwszej, na tle rozwoju Petersburga i w oparciu o szerokie badania archiwalne (głównie rosyjskie) autorka przedstawia przodków Georga Cantora, członków rodziny ojca i matki (z domu Boehm) oraz niektórych dalszych. Przodkowie ci tworzą niezwykle bogatą galerię osobowości, mającą korzenie – ze strony ojca – w hiszpańsko-portugalskich Żydach, którzy przyjęli luteranizm i przez Danię trafili do stolicy nad Newą (rozdział I), oraz – ze strony matki – katolickie korzenie węgiersko-czeskie ludzi o szerokich zainteresowaniach artystycznych, zwłaszcza muzycznych (rozdział II). W pokoleniu rodziców wszyscy mówili już po niemiecku i stanowili element licznej i bardzo aktywnej niemieckiej kolonii w Petersburgu. Ta część jest niewątpliwie najpełniejszą z dotychczasowych, a przy tym solidnie udokumentowaną biografią rodzinną Georga Cantora, opisującą jego przodków i jego samego do wyjazdu z Rosji w wieku jedenastu lat. Potem następują dwa dalsze i znacznie krótsze rozdziały *Młodość. Ojciec i syn* oraz *Halle. Teoria mnogości*. Ta część biografii Cantora jest już dość dobrze znana, ale różnice w rozmiarach rozdziałów pokazują także, że autorka znacznie pewniej czuje się na swoim terenie i w sprawach biograficznych najwięcej ma do powiedzenia.

Stosunki ojca z synem były bardzo bliskie i ojciec Georga chciał, by syn zrealizował jego marzenia, wybierając po maturze studia inżynierskie. Syn wolał muzyczne, bo chciał być skrzypkiem. W końcu doszło doszło do kompromisu – Georg zapisał się na matematykę w Zurychu, skąd po roku (i po śmierci ojca) przeniósł się do matki w Berlinie, gdzie ukończył studia matematyczne, uzyskując w 1867 roku doktorat na podstawie rozprawy z teorii liczb. Ciekawy polonik – na jego roku w Berlinie był Franciszek Mertens, z którym się zaprzyjaźnił, a potem korespondował. Rok po doktoracie Cantor przeniósł się do Halle, gdzie się habilitował w 1869 roku, też z teorii liczb. Pod wpływem Heinego, który go tam zaprosił, zainteresował się już wówczas problemami analizy, a w szczególności zbieżnością szeregów trygonometrycznych. Potrzeba charakteryzacji pojawiających się tu zbiorów doprowadziła go do teorii mnogości, której jest niekwestionowanym twórcą i która później przeobraziła całą matematykę. W Halle Cantor pozostał do emerytury w 1913 roku, od 1872 roku jako profesor nadzwyczajny i od 1877 roku zwyczajny.

Część pierwszą monografii kończą załączniki i spis literatury – dziewięć załączników o charakterze biograficzno-historycznym i ostatni dziesiąty (liczący dwadzieścia dwie strony) zawierający wypisy z wszystkich ważniejszych monografii zachodnich o Cantorze (E. T. Bella, H. Meschkowskiego, I. Grattana-Guinnessa, J. W. Daubena, A. Kertésza, J. O'Connora i E. F. Robertsona, A.-M. Décaillota), niewątpliwie z myślą o rosyjskim czytelniku. Spis literatury liczy sto dwadzieścia dwie pozycje.

Druga część monografii jest poświęcona „analizie rozwoju teorii zbiorów i teorii miary" w Warszawie, w tym roli Sierpińskiego jako „założyciela tego kierunku matematyki w Polsce". Dzieli

się na wprowadzenie, cztery rozdziały i zakończenie, które kolejno omówimy, a kończy spisem literatury do tej części oraz imiennym wykazem większości osób wspomnianych w obu częściach.

Krótkie wprowadzenie zawiera szkic najnowszych dziejów Polski z radziecko-rosyjskiego punktu widzenia – Polska rozbiorowa dzieli się ziemie warszawskie (Rosja), część poznańską, Śląsk i Pomorze (Prusy), ziemie krakowskie i południowa Polska (Austria), ale o ziemiach zabranych ani słowa. I podobnie: „[w] 1939 r. Zachodnia Ukraina i Zachodnia Białoruś [...] weszły – jak wiadomo – w skład Ukraińskiej i Białoruskiej radzieckich socjalistycznych republik". Krótkie „wiadomo" kryje w sobie pakt Ribbentrop–Mołotow, wybuch II wojny światowej, agresję ZSRR na uwikłaną w walkę z Niemcami Polskę i aneksję połowy jej terytorium. Ale monografia nie jest traktatem historycznym, zostawmy więc ten wątek.

Innego rodzaju zastrzeżenia budzi krytyka oceny działalności „od środka", na przykład krytykując poglądy Orlicza i Rolewicza na przyczyny pojawienia się polskiej szkoły matematycznej po I wojnie światowej, autorka przeciwstawia im swój pogląd: „[p]onieważ większa część przemysłu pozostawała w rękach kapitału zagranicznego, w badaniach naukowych rozwijają się przede wszystkim kierunki abstrakcyjne, nie wymagające dużych finansowych nakładów" (str. 213). Dla mojego pokolenia takie wyjaśnienie brzmi wprawdzie znajomo, ale bliższe jest mi jednak stanowisko Orlicza i Rolewicza, akcentujące entuzjazm grupy młodych skupionych wokół charyzmatycznych liderów i połączonej silnymi więzami przyjaźni i współpracy. Wprowadzenie jest moim zdaniem najsłabszą (ale i najmniej ważną) częścią monografii.

Rozdział I jest poświęcony przeglądowi historii matematyki polskiej i powstaniu szkoły warszawskiej. Zawiera obok informacji ważnych także poważne nieścisłości. Autorka twierdzi, że „oświata do roku 1773 była w rękach jezuitów" (str. 214). To duże uproszczenie, bo przecież obok szkół jezuickich istniały szkoły pijarskie (i to od reformy Konarskiego szkół pijarskich zaczęło się reformowanie szkolnictwa w Polsce), teatyńskie i bazyliańskie, a także gimnazja protestanckie w Gdańsku i Toruniu, a nadto wybitną rolę odgrywała Akademia Krakowska, która wygrała spór z jezuitami i prowadziła liczne szkoły własne. Wytknąć też można, że reforma oświaty w Polsce miała miejsce nie w wieku XVII (str. 215), a w wieku XVIII.

Rozdział II (str. 223–238), poświęcony Wacławowi Sierpińskiemu „jako uczonemu i kierownikowi naukowemu szkoły warszawskiej", omawia jego życie i sygnalizuje jego odkrycia, analizę tych ostatnich odkładając do następnych rozdziałów. Obraz jest bogaty i zawiera interesujące szczegóły, ale i tu nasuwa się kilka uwag. Autorka uważa, że twierdzenie Sierpińskiego o wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniu płaszczyzny i prostej „wygląda jak geometryczny kontrprzykład" (str. 225) na twierdzenie Cantora o równości mocy przestrzeni różnych wymiarów, ale przecież jest to raczej specyfikacja twierdzenia Cantora dla prostej i płaszczyzny. Dzięki Banachiewiczowi Sierpiński zainteresował się pracami Cantora i (o czym autorka już nie napisała) pojechał na semestr do Getyngi. Na tejże stronicy informuje, że

w 1910 roku Sierpiński został profesorem uniwersytetu Jana Kazimierza, ale do końca I wojny światowej był to uniwersytet austriacki (imienia cesarza Franciszka) i dopiero w wolnej Polsce zyskał miano Jana Kazimierza. Wspomina jeden podręcznik szkolny Sierpińskiego, wspólny z Banachem i Stożkiem (str. 232), ale ta trójka autorów napisała siedem podręczników, a nadto Banach pisywał podręczniki sam i w innych układach autorskich. Szczegółowego omówienia podręczników, których autorem lub współautorem był Banach dokonała Danuta Ciesielska w przygotowywanej do druku pracy *Stefan Banach. Doświadczenia szkolne vs autorstwo podręczników do matematyki*. Częsty jest też brak precyzji, na przykład autorka napisała, że „krzywa uniwersalna Sierpińskiego [tu odsyła do pracy o „dywanie"] zawiera w sobie obraz każdej krzywej" (str. 234), a powinno być: każdej krzywej płaskiej.

Rozdział III omawia „warszawską szkołę teorii mnogości" (str. 238–252). Zaczyna się od omówienia artykułu Janiszewskiego, napisanego w odpowiedzi na ankietę Kasy Mianowskiego, który stał się programem szkoły polskiej. Są to sprawy dobrze znane, ale warto przy tej okazji pamiętać, że na tę ankietę odpowiedzieli także Zaremba i Mazurkiewicz. Uwidoczniła się wtedy zasadnicza różnica podejść Janiszewskiego i Zaremby (Mazurkiewicz stał po stronie Janiszewskiego), o czym ostro i wyraźnie pisał Łuzin w liście do Denjoy i co miało spory wpływ na matematykę polską lat międzywojennych. Autorka napisała o tym liście w dalszej części w trochę innym kontekście, co trochę zaciera istotę sprawy. Widać to nieco niżej, autorka uważa bowiem realizację programu Janiszewskiego za właściwie konieczną, spowodowaną „sytuacją polityczną, tendencją uczonych do emigracji, znajdujących poparcie w ośrodkach naukowych Europy, a zwłaszcza Ameryki" (str. 239). Pomijając okoliczność, że emigracja była wówczas trudna, wszystkie kraje europejskie zmagały się bowiem wówczas z biedą, a Stany Zjednoczone zamykały w izolacjonizmie i nikt nie witał emigrantów z otwartymi rękami, to argument ten przemawiał jednako za oboma programami. Przyczyny sukcesu programu Janiszewskiego leżą gdzie indziej.

O lwowskiej szkole matematycznej (str. 243) bardziej rzetelne informacje można znaleźć w w polskich i amerykańskich opracowaniach (na przykład w książkach autora tej recenzji – *Lwowska szkoła matematyczna*, Wrocław 2014 lub *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów nauki i kultury*, Warszawa 2019).

Autorka napisała, ze kres lwowskiej szkoły matematycznej położyła okupacja hitlerowska (str. 244). Rzeczywistość była jednak bardziej złożona. Okupacja niemiecka była wprawdzie okrutna, ale nastąpiła po dwuletniej okupacji radzieckiej, która też odcisnęła swoje piętno (aresztowania, deportacje, Katyń), a okupację niemiecką przeżyli twórcy szkoły Banach i Steinhaus, przeżył Mazur, Nikliborc i Zaryckij, przeżyli (poza Lwowem) warszawscy współtwórcy Sierpiński i Kuratowski, a także część młodszych matematyków. Banach zmarł po wojnie, Steinhaus i Nikliborc nie mogli do Lwowa wrócić, a Mazur organizował wyjazdy Polaków ze Lwowa, bo Jałta przyznała to miasto Związkowi Radzieckiemu. Nie można wszystkiego zwalać na Niemców.

Nieściśle autorka napisała też o lwowskiej szkole logiki, za jej liderów uznając m.in. Tarskiego, Łukasiewicza i Leśniewskiego. W latach międzywojennych wszyscy trzej byli związani z Warszawą i była to szkoła lwowsko-warszawska, do której lwowska działalność Chwistka nie przystawała.

Autorka napisała: „[p]óźniej do Warszawy przyjechali Kuratowski i Tarski ze Lwowa" (str. 249), co sugeruje, że byli lwowiakami. A to nie tak. Obaj byli warszawiakami z urodzenia, przywiązanymi do swego miasta. Tarski Lwów tylko odwiedzał, a Kuratowski spędził we Lwowie lata 1925–1934, bo Politechnika Lwowska oferowała mu wówczas katedrę, ale po jej likwidacji wrócił do Warszawy i pozostał z nią związany do końca życia.

Pod koniec rozdziału autorka wymienia najważniejsze osiągnięcia szkoły warszawskiej (str. 249). Lista jest bezdyskusyjna, ale parę rzeczy można dorzucić, na przykład twierdzenie Borsuka–Ulama o antypodach, które zainspirowało wiele prac w tym kierunku, twierdzenie Kuratowskiego o grafach niespłaszczalnych, od którego zaczął się nowy rozdział teorii grafów, czy podniesienie logiki matematycznej do rangi samodzielnej dziedziny matematyki.

Informacja o stratach wojennych (str. 251) też jest nieprecyzyjna. Przypisanie lwowskiemu gestapo, że jego ofiarami padli Zaremba (zmarł w 1942 roku w swoim mieszkaniu w Krakowie), Przeborski (zmarł w 1941 roku w swoim mieszkaniu w Warszawie), Pepis (zaginął w 1941 roku po wkroczeniu Niemców do Lwowa), Saks (zginął w 1942 roku w drodze ze Lwowa do Warszawy) – jest błędne. Niemców obciąża przede wszystkim rozstrzelanie dwudziestu trzech profesorów lwowskich i członków ich rodzin na Wzgórzach Wóleckich oraz Holocaust, ale nie śmierć Kempistego (zginął w 1940 roku w radzieckim więzieniu w Wilnie, zob. R. Duda, *Okupacja Wilna i śmierć Kempistego*, Antiq. Math. 2017). Także Wilkosz nie zginął w Treblince, ale zmarł w swoim mieszkaniu w Krakowie w 1940 roku. A skoro o ofiarach wojny mowa, to wypada pamiętać i o winach radzieckiej strony. Stanisław Leja był deportowany, logik Hetper zginął w łagrze, a Marcinkiewicz i paru innych matematyków padło ofiarą zbrodni katyńskiej.

Najdłuższy rozdział IV (str. 253–302) jest poświęcony teorii miary. Po krótkim przedstawieniu historii i znaczenia teorii miary w matematyce XX wieku, autorka definiuje jej główne problemy około 1920 roku, które określiły tematykę szkoły warszawskiej. Wyróżniając w twórczości Sierpińskiego różne działy matematyki – teoria liczb, ogólna teoria mnogości, zbiory analityczne i rzutowe, topologia ogólna, teoria miary i kategorii, teoria funkcji zmiennej rzeczywistej – w tym rozdziale dokonuje analizy jego prac poświęconych teorii miary i mierzalności. Podkreślając jego samodzielność i wysoką kulturę matematyczną, dostrzega jego stopniową ewolucję od metod klasycznych do podejścia mnogościowego, w tym do teorii Lebesgue'a. Przypomina, że w latach 1908–1914 Sierpiński wykładał we Lwowie różne działy matematyki klasycznej, dopełniając te wykłady własnymi opracowaniami, w tym *Przyczynek do teorii całek oznaczonych* (Sprawozd. WTN 1911), który autorka poddaje wnikliwej analizie historycznej. Sierpiński oparł się tam na teorii miary Lebesgue'a, a jego praca *O mierze*

Lebesgue'a (Prace Mat.-Fiz. 1916), chociaż ukazała się dopiero pięć lat później, i tak była pierwszą poświęconą tej teorii poza granicami Francji. Teoria miary stanowiła też punkt wyjścia współpracy Sierpińskiego z Łuzinem, jaka nawiązała się w Moskwie w latach 1915–1918, w następstwie internowania Sierpińskiego w Rosji i wspólnoty zainteresowań obu. Te ostatnie wiązały się też z podstawami teorii mnogości, a ściślej z hipotezą continuum (Łuzin) i aksjomatem wyboru (Sierpiński). Obaj współpracowali blisko i autorka dokonuje dokładnej analizy tej współpracy na przykładzie ich wspólnej pracy o niektórych własnościach A-zbiorów. Najważniejsze osiągnięcie Sierpińskiego stanowi, zdaniem autorki, cykl prac o mierze i kategorii z lat dwudziestych i trzydziestych, a w szczególności odkrycie ich dwoistości (przedstawiona w pracy z 1934 roku), czemu poświęca kolejny fragment swojej analizy. Ostatni rozdział pracy stanowi przegląd innych polskich wyników, poczynając od twierdzeń z wykorzystaniem metody kategorii Baire'a i uwag o rozwoju teorii dwoistości w matematyce współczesnej, a następnie przechodząc do omówienia wyników i roli Kuratowskiego w szkole polskiej, wkładu Marczewskiego w rozwój teorii zbiorów w Polsce i prac Ottona Nikodyma. Brakuje mi tu osiągnięć polskich logików matematycznych (Alfred Tarski, Adolf Lindenbaum i inni), ale mimo to uważam ten rozdział za najciekawszy w drugiej części monografii.

Monografia ma krótkie zakończenie, po którym następuje obszerny spis literatury do drugiej części (liczący 332 pozycje, w tym 84 prace Sierpińskiego, ale wiele jego publikacji autorka cytuje tylko z jego dzieł zebranych) oraz imienny wykaz wymienianych w książce osób, opatrzony lakonicznymi informacjami o ich życiu, a liczący około 780 nazwisk.

Książka budzi zaciekawienie i czyta się ją dobrze, wzbogaca też naszą wiedzę o nieznane dotychczas informacje oraz wnikliwe analizy dorobku Cantora, Łuzina, Sierpińskiego i niektórych przedstawicieli warszawskiej szkoły matematycznej. Obie jej części są jednak tak bardzo różne, że mogłyby stanowić przedmiot osobnych książek. Imponuje oczytanie autorki, udokumentowane obszernymi bibliografiami (122 pozycje w części pierwszej i 332 pozycje w części drugiej) oraz bogata szata ilustracyjna (185 rycin). W części drugiej przeszkadza mieszanie czasów i wątków oraz częsty brak precyzji. Wydaje się też, że jeszcze lepsza znajomość polskiej i zachodniej literatury historycznej pozwoliłaby autorce na głębsze analizy. Odnosi się to w szczególności do logiki matematycznej, gdzie dziwi pominięcie monografii Jana Woleńskiego (*Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Warszawa 1985), najwybitniejszego historyka polskiej logiki, i licznych jego artykułów, monografii G. H. Moore'a (*Zermelo's Axiom of Choice. Its Origin, Development and Influence*, Nowy Jork 1982, zwłaszcza rozdział IV zatytułowany *The Warsaw School*), której obszerne fragmenty omawiają dorobek w tytułowym zakresie Wacława Sierpińskiego i jego istotny wpływ na stosunek matematyków do aksjomatu wyboru oraz, ogólniej, nieefektywnych metod dowodzenia, książeczki Christiny Phili (*La gènese et le dévelopment de la théorie descrptive des ensembles*, Moskwa 2010, zwłaszcza rozdział *L'école de*

Varsovie) o początkach deskryptywnej teorii zbiorów, czy artykułu Jean-Pierre Kahane'a o polskiej szkole matematycznej(*Próba oceny wpływu polskiej szkoły matematycznej lat 1918–1939*, Wiad. Mat. 1995). Także dorobek polskich historyków matematyki mógłby być szerzej i z wyraźną tylko korzyścią dla książki uwzględniony; dorobku niektórych (Danuta Ciesielska, Stanisław Domoradzki, Jerzy Mioduszewski, Marek Zakrzewski i inni) autorka w ogóle nie zna, dorobek innych zna częściowo.

Mimo tych niedomagań uważam monografię Sinkiewicz za wartościową. Wnosi ciekawe informacje i analizy, dobrze naświetla kluczową rolę Sierpińskiego w rozwoju polskiej szkoły matematycznej i jego znaczenie dla początków szkoły moskiewskiej, podkreśla znaczenie polskiej szkoły matematycznej, a także, *last but not least*, pokazuje bogactwo i historyczną wagę tematów, jakie tkwią w matematyce polskiej.

Jak mi niedawno pisała autorka, pierwsza część jej monografii jest tłumaczona na język angielski i ma się ukazać na Zachodzie.

Roman Duda
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

O Wacusiu

Jestem przeciwko wychowaniu seksualnemu w szkołach. Wiecie dlaczego? Dlatego, że kiedy chodziłem do szkoły to zaczęto mnie uczyć algebry i od tej pory algebra potwornie mnie nudzi.

Falczak zażądał, żeby fryzjer robił mu przedziałek przez środek, tak żeby włosy były rozdzielone dokładnie na pół. „Trudno będzie, proszę pana – oświadczył fryzjer – ma pan nieparzystą liczbę włosów".

Piwo + piwo + piwo + piwo = chodzenie krzywo.

Nawet w geometrii dla piątej klasy – mówi Falczakowa – nie ma tylu kątów, ile ja mam do sprzątania w naszym mieszkaniu.

Plotkarzom kiedy dodają dwa do dwóch zawsze wychodzi pięć.

Gdyby nie ten cały Newton – mówi Falczakowa – to by mi na pewno tak wszystko nie leciało z rąk.

Człowiek przemawiający przez 30 minut do 200 osób traci tylko pół godziny własnego czasu, natomiast zabiera 100 godzin czasu słuchaczom, co stanowi równo 12 i pół dniówki.

Kiedy spytano Falczaka, w czym się specjalizuje jego najstarszy syn, który studiuje już na trzecim fakultecie, Falczak odpowiedział: „Zdaje się, że głównie w stypendiach".

Różnicę między butelką wody mineralnej a butelką piwa nazywamy pięciozłotówką.

Sąsiadka Falczakowej, której mąż poszedł właśnie na emeryturę, mówi, że co prawda pieniędzy jest teraz dwa razy mniej, ale za to męża dwa razy więcej.

Matematyczny dziwoląg to – alfabet. Ma tylko siedem liter, a zawiera ich aż dwadzieścia cztery.

Znałem jednego bardzo dobrego matematyka. Dawał ludziom pięćset złotych za tysiąc.

Lekarz pozwolił ci pić flaszkę piwa dziennie, a ty pijesz trzy – powiedziała Falczakowa do Falczaka. – Byłem jeszcze u dwóch innych lekarzy,

Z *Przekroju* lat 1948–2002, z rubryki autorstwa Ludwika Jerzego Kerna

Wiad. Mat. 56 (2) 2020, 527–530
© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Książki nadesłane

Gabriela Besler, *„Podążamy tymi samymi lub podobnymi drogami myślowymi". Tematyka korespondencji logicznej Gottloba Fregego z Giuseppem Peanem, Davidem Hilbertem i Bertrandem Russellem*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2019, 194 str.

Książka poświęcona jest korespondencji Gottloba Fregego dotyczącej rozmaitych zagadnień logiki. Po omówieniu w rozdziale wstępnym wątków filozoficznych, do których nawiązuje Frege w swojej korespondencji oraz przedstawieniu jego oryginalnej notacji logicznej, autorka omawia w kolejnych trzech rozdziałach korespondencję z Giuseppem Peanem, Davidem Hilbertem i Bertrandem Russellem. Wymienia zachowane listy, przedstawia wzajemną znajomość tekstów korespondentów i odpowiedź na pytanie, czy cytowali się wzajemnie. Dalej omawia szczegółowo wybrane tematy dyskutowane w listach. Na końcu podaje tabelaryczne zestawienie uporządkowanych czasowo związków danego korespondenta z Fregem. Do książki dołączono chronologiczne zestawienie wszystkich odnalezionych listów naukowych Fregego oraz obszerną bibliografię i indeksy.

Marek Aleksander Kowalski, *Aproksymacja, informacja, algorytm*, Wydawnictwo Naukowe UKSW, Warszawa 2019, 273 str.

Książka poświęcona jest analitycznej złożoności obliczeniowej, teorii aproksymacji i ich wzajemnym powiązaniom. Powstała w oparciu o wykłady, ćwiczenia i seminaria prowadzone przez autora na Uniwersytecie Kardynała Stefana Wyszyńskiego i na Uniwersytecie Śląskim. Może być podstawą semestralnych wykładów i ćwiczeń dla studentów matematyki i informatyki na studiach II stopnia. Składa się z trzech części: *Aproksymacja w przestrzeniach unormowanych*, *Algorytmy optymalne*: *optymalne*

© 2020 Polskie Towarzystwo Matematyczne

metody aproksymacji, *Przetwarzanie zaburzonej informacji*: *problemy w przestrzeniach funkcyjnych*. Poszczególne rozdziały zawierają ćwiczenia. Celem autora jest wskazanie na rolę matematyki ciągłej, w szczególności analizy funkcjonalnej, w algorytmice.

Gottlob Frege, *Korespondencja naukowa. Wydanie krytyczne*, Gabriela Besler, Joanna Zwierzyńska (red.), Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2020, 598 str.

Gottlob Frege to współtwórca nowoczesnej logiki. Uważany jest za jednego z czterech najwybitniejszych logików wszech czasów (obok Arystotelesa, Alfreda Tarskiego i Kurta Gödla). Stąd waga i znaczenie jego korespondencji naukowej. Prezentowana książka zawiera jego korespondencję naukową z 48 różnymi uczonymi. Jej podstawę stanowi niemiecka edycja korespondencji. Nie jest to jednak tylko tłumaczenie na język polski tego dzieła. Do oryginału niemieckiego dołączono bowiem inne, nowo odnalezione i odkryte listy Fregego. Książka zawiera więc wszystkie odnalezione dotąd listy naukowe do i od Fregego. Odnotowano też listy, o których wiadomo, że istniały, ale które się nie zachowały (przynajmniej w świetle najnowszych ustaleń). Trzon książki stanowią oczywiście listy. Poprzedzono je wprowadzeniem opisującym dzieje korespondencji Fregego, notą edytorską (opis podstawy wydania, struktury książki, zasad opracowania), wykazem symboli i wykazem skrótów. Na końcu zaś książki znajdujemy pracę Jourdaina poświęconą Fregemu, recenzję pierwszego tomu *Grundgesetze der Arithmetik* Fregego napisaną przez Peana oraz wykaz archiwów, w których znajdują się tłumaczone listy, słownik terminologii Fregego, obszerną bibliografię i indeksy – osobowy i rzeczowy. Podziw budzi staranność i skrupulatność redaktorów i tłumaczy. Dzieło to nie tylko zostało przygotowane wedle wszelkich wymogów sztuki, ale może stanowić wzorzec przyszłych tego typu opracowań.

Krzysztof Maurin, *Odczyty w Castel Gandolfo*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2020, 175 str.

Jest to pierwszy z zaplanowanych trzech tomów serii prac Krzysztofa Maurina, wybitnego fizyka, twórcy polskiej szkoły fizyki matematycznej. Zajmował się on również teologią i filozofią (prace z tych dziedzin zaczął publikować już w latach pięćdziesiątych, początkowo pod pseudonimem Michał Mazur). Tom przygotowany przez uczniów i przyjaciół Maurina zawiera teksty trzech wystąpień w Castel Gandolfo wygłoszonych w latach 1980, 1986 i 1988 (dwa pierwsze były już publikowane wcześniej). Noszą one następujące tytuły: *Matematyka jako język i sztuka*, *Logos* (*język*) *i jego rola kosmotwórcza* oraz *Tradycja i postęp w nauce, filozofii, religii*. Ten ostatni tekst został – zgodnie z zamysłem autora – podzielony na trzy części: *Tradycja w nauce, filozofii, religii*, *Religia postępu jako sekularyzacja eschatologii chrześcijańskiej* i *Tradycja i antropogeneza jako życie Syna Człowieczego*. W kolejnych tomach znajdą się teksty napisane przez Maurina do książek, których nie zdążył wydać.

Anna Romanowska, *Algebra i jej zastosowania*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2020, 230 str.

Książka oparta jest na wykładach z algebry prowadzonych od lat przez autorkę na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej. Zakłada znajomość algebry liniowej oraz elementów logiki i teorii mnogości. Poszczególne rozdziały poświęcone są takim zagadnieniom, jak półgrupy i monady, algebry abstrakcyjne i ich własności, kraty i algebry Boole'a, pierścienie przemienne i ciała, grupy, reprezentacje liniowe grup skończonych, quasigrupy. Wykład zawiera dużą liczbę przykładów. W planach jest przygotowanie zbioru zadań do książki.

Marcus Du Sautoy, *Kod kreatywności. Sztuka i innowacje w epoce sztucznej inteligencji*, tłumaczenie: Tadeusz Chawziuk, Copernicus Center Press, Kraków 2020, 351 str.

Autor to jeden z czołowych brytyjskich uczonych, profesor matematyki na Uniwersytecie w Oxfordzie i członek Royal Society. W książce zastanawia się, na czym polega istota kreatywności w różnych dziedzinach (matematyka, malarstwo, grafika, muzyka, piosenka, literatura, sztuka przekładu) i czy komputer (sztuczna inteligencja) może zastąpić człowieka, czy jego wytwory/dzieła są lepsze czy gorsze od wytworów człowieka, czy są od nich odróżnialne. Zastanawia się, czy sztuczna inteligencja może dorównać lub nawet przekroczyć cudowności ludzkiego kodu kreatywności, czy komputery mogą być kreatywne. Pyta, w jakim stopniu nasza reakcja emocjonalna na sztukę jest produktem tego, jak nasze mózgi odpowiadają na złożony ludzki kod kierujący działaniem naszych mózgów. Rozważa, czy w przyszłości profesja matematyka nadal będzie dostępna dla człowieka, czy zastąpi go komputer. Mamy też w książce akcent polski – autor wspomina projekt Mizar, zainicjowany i realizowany przez matematyków i informatyków z Uniwersytetu w Białymstoku. Celem tego projektu było stworzenie biblioteki dowodów matematycznych zapisanych w języku formalnym.

Ian Stewart, *Czy kości grają rolę Boga. Matematyka niepewności*, tłumaczenie: Urszula i Mariusz Seweryńscy, Prószyński i S-ka, Warszawa 2020, 374 str.

Książka poświęcona jest problemowi niepewności w nauce i sposobom radzenia sobie z tym, co nieprzewidywalne. Autor proponuje wędrówkę od rachunku prawdopodobieństwa, przez teorię chaosu, aż po świat mechaniki kwantowej. Czytelnik znajdzie tu ciekawe zagadki, trochę prostych obliczeń i mnóstwo niespodzianek. Autor to znany już polskiemu czytelnikowi światowej sławy matematyk i popularyzator matematyki, emerytowany profesor Uniwersytetu w Warwick. Opublikował wiele książek poświęconych matematyce i znakomicie się przyczynił do jej popularyzacji.

Steven Strogatz, *Potęga nieskończoności. Jak rachunek różniczkowy i całkowy odkrywa tajemnice wszechświata*, tłumaczenie: Tadeusz Chawziuk, Copernicus Center Press, Kraków 2021, 427 str.

Autor to profesor matematyki stosowanej na Cornell University, popularny wykładowca, prowadzi blog o matematyce dla *New York Timesa* i *New Yorkera*. Książka opowiada w sposób interesujący (nie stroniąc od anegdot i metafor) o powstaniu i rozwoju rachunku różniczkowego i całkowego. Tłumaczy jego działanie i pokazuje, że jest on językiem, który pozwala opisywać rozmaite zjawiska, że jest „prawdziwym językiem wszechświata".

Opracowanie: Roman Murawski (Poznań)