ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XV (1972)

A. PEŁCZYŃSKI (Warszawa)

O pewnych problemach Banacha*

W bieżącym roku mija 80 lat od chwili narodzin Stefana Banacha i 40 lat od ukazania się jego monografii *Théorie des opérations linéaires* [1]. W monografii tej zostały sformułowane podstawowe pojęcia i rezultaty teorii przestrzeni unormowanych, uznane obecnie za klasyczne. Ponadto książka ta zawiera wiele problemów o różnym stopniu trudności, z których część pozostała nie rozwiązana do dziś, chociaż były one intensywnie atakowane przez wielu matematyków. Niektóre problemy mają obecnie czysto „sportowy" charakter, podczas gdy inne znajdują się w centrum rozwoju analizy funkcjonalnej.

W moim referacie pragnę omówić bliżej następujące problemy:

1° *Problem aproksymacji i problem istnienia bazy,*

2° *Problemy metrycznej i izomorficznej* (= liniowo topologicznej) *charakteryzacji przestrzeni Hilberta w klasie wszystkich przestrzeni Banacha.*

I. Problem aproksymacji i problem istnienia bazy

Przy badaniu własności operatorów liniowych (krótko — operatorów) wygodnie jest przedstawić zadany operator jako granicę operatorów o prostej budowie. Ponieważ najlepiej zbadane są operatory skończenie wymiarowe, więc rozsądnie jest pytać się, kiedy dany operator można przedstawić jako granicę operatorów skończenie wymiarowych. Wobec tego, że granica w normie operatorowej ciągu operatorów skończenie wymiarowych jest operatorem zwartym, naturalne jest pytanie: Kiedy ustalona przestrzeń Banacha Y ma następującą własność zwaną *własnością aproksymacji*:

(A) *Dla każdego operatora zwartego* $T: X \to Y$ *z dowolnej przestrzeni Banacha* X *istnieją operatory skończenie wymiarowe* $F_n: X \to Y$ *takie, że*

$$\lim_n |||F_n - T||| = \lim_n \sup_{\|x\|=1} \|F_n x - Tx\| = 0.$$

* Referat wygłoszony dnia 12 stycznia 1972 r. na Sesji Naukowej z okazji podpisania umowy o powołaniu Międzynarodowego Centrum im. Stefana Banacha.

Przypomnijmy, że operator $T\colon X \to Y$ nazywa się *zwarty*, jeżeli przeprowadza kulę jednostkową $\{x \in X\colon \|x\| \leqslant 1\}$ w warunkowo zwarty podzbiór przestrzeni Y. Operator $F\colon X \to Y$ nazywa się *skończenie wymiarowy*, jeżeli podprzestrzeń liniowa (krótko — podprzestrzeń) $F(X)$ jest wymiaru skończonego.

Hipoteza aproksymacji orzeka co następuje:

(*) *Każda przestrzeń Banacha ma własności aproksymacji.*

Nie wiemy czy ta hipoteza jest prawdziwa [1]. Jest ona powiązana z rozmaitymi problemami, jak np. problemem jednoznaczności określenia śladu dla operatorów nuklearnych.

Grothendieck [5] odkrył w 1955 r. wiele hipotez równoważnych hipotezie aproksymacji. Niektóre z nich są pozornie bardzo proste. Dla przykładu przytoczymy następujące:

(**) *Dla każdej funkcji f rzeczywistej i ciągłej określonej na kwadracie* $[0; 1]\times[0; 1]$ *i dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje liczba naturalna n, punkty* $s_1, s_2, \ldots, s_n; t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0; 1]$ *i liczby rzeczywiste* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *takie, że*

$$\left| f(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(s,t_i) f(s_i,t) \right| < \varepsilon \quad \text{dla } (s,t) \in [0;1]\times[0;1].$$

(***) *Dla każdej nieskończonej macierzy liczbowej* $M = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,2,\ldots}$, *takiej że* $\sum_i \sup_j |a_{i,j}| < +\infty$ *warunek* $M^2 = 0$, *tzn.* $\sum_j a_{ij}a_{jk} = 0$ *dla* $i, k = 1, 2, \ldots$, *pociąga*

$$\operatorname{tr} M = \sum_i a_{ii} = 0.$$

Należy podkreślić, że implikacja (**) $\Rightarrow$ (*) została udowodniona przez S. Mazura jeszcze przed wojną. Dodam jeszcze, że nietrudno pokazać, że hipoteza aproksymacji równoważna jest następującej hipotezie:

Dowolna ośrodkowa przestrzeń Banacha ma własność aproksymacji.

Typowe przykłady ośrodkowych przestrzeni Banacha mają własności silniejsze niż własność aproksymacji. Spośród wielu takich własności wyróżnimy za Banachem [1] dwie.

1. Własność ograniczonej aproksymacji:

(B) *Istnieje ciąg operatorów skończenie wymiarowych* $F_n\colon Y \to Y$ *silnie zbieżny do operatora tożsamościowego na* Y, *tzn.*

$$\lim_n \|F_n(y) - y\| = 0 \quad \text{dla} \quad y \in Y.$$

2. Własność istnienia bazy (Schaudera):

(C) *Istnieje układ biortogonalny* $\{y_n, f_n\}$ *taki, że dla dowolnego* $y \in Y$

$$\lim_n \left\| \sum_{m=1}^{n} f_m(y) y_m - y \right\| = 0.$$

---

[1] Obecnie już wiemy (!), por.: Dodane w korekcie, na str. 10.

Jasne jest, że (C) $\Rightarrow$ (B) (wystarczy w tym celu położyć $F_n(y) = \sum_{m=1}^{n} f_m(y) y_m$); nietrudno też pokazać, że (B) $\Rightarrow$ (A) (sprawdzając, że dla dowolnego zwartego operatora $T\colon X \to Y$ mamy $\lim_n |||F_n T - T||| = 0$). Ciekawe jest natomiast, że pewne fakty wskazują, iż własności (A), (B), (C) są w pewnym sensie „bliskie siebie".

Należy tu wymienić przede wszystkim głęboki wynik, który zawdzięczamy Grothendieckowi [5]:

Jeśli Y jest refleksywną przestrzenią Banacha, to (A) $\Rightarrow$ (B).

W związku z tym twierdzeniem Grothendiecka chciałbym zasygnalizować wynik uzyskany ostatnio przez Figla [4], a obalający pewne przypuszczenie Grothendiecka.

Jeżeli istnieje przestrzeń Banacha nie mająca własności aproksymacji, to istnieje przestrzeń refleksywna nie mająca własności (ograniczonej) aproksymacji.

Związek między własnościami (B) a (C) pokazuje następujące twierdzenie, które zostało niedawno niezależnie udowodnione przez Johnsona, Rosenthala Zippina [6] oraz Pełczyńskiego [8].

Na to, aby przestrzeń Banacha Y miała własność ograniczonej aproksymacji potrzeba i wystarcza, aby Y była izomorficzna (= liniowo homeomorficzna) *z pewną uzupełnialną podprzestrzenią pewnej przestrzeni Banacha X z bazą Schaudera.*

Przypomnę, że podprzestrzeń Z przestrzeni X nazywa się *uzupełnialna w X*, jeżeli istnieje rzut $P\colon X \xrightarrow[\text{na}]{} Z$, tj. taki liniowy operator, że $Pz = z$ dla $z \in Z$.

Warto jeszcze dodać, że przestrzeń X z bazą można wybrać w poprzednim twierdzeniu w sposób niezależny od Y, tzn. uniwersalnie i jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Wynika to z pewnego rezultatu Pełczyńskiego [8] (1969). Oznaczmy tę jedyną uniwersalną przestrzeń przez B. Jak zauważył W. B. Johnson [13 a], ma miejsce następujący fakt:

Na to, aby każda przestrzeń Banacha miała własność aproksymacji, potrzeba i wystarcza, aby przestrzeń B^* (sprzężona do B) miała własność aproksymacji.

Przejdziemy obecnie do problemu istnienia bazy. W przeciwieństwie do własności aproksymacji i własności ograniczonej aproksymacji nie jest na ogół łatwo sprawdzić dla konkretnej przestrzeni Banacha własność (C), tzn. skonstruować w tej przestrzeni bazę. Naturalną bazę „wektorów jednostkowych" mają jedynie przestrzenie ciągowe. Natomiast konstrukcja bazy w przestrzeniach funkcyjnych wymaga już pokonania pewnych trudności.

W przestrzeni $C([0;1])$ wszystkich funkcji rzeczywistych i ciągłych na odcinku $[0;1]$ baza została skonstruowana przez Schaudera [10] w 1927 r. Następnie Schauder [11] zauważył, że układ ortogonalny Haara jest bazą w przestrzeniach L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ wszystkich mierzalnych funkcji rzeczywistych na $[0;1]$, których p-ta potęga modułu jest całkowalna względem miary Lebesgue'a. Wyniki te zostały następnie przez różnych autorów uogólnione na przypadek wszystkich ośrodkowych przestrzeni $L_p(\mu)$, gdzie μ jest dowolną miarą, oraz na przypadek przestrzeni $C(S)$ wszystkich ciągłych funkcji rzeczywistych na przestrzeni metrycznej zwartej S.

Znacznie trudniejszy okazał się następujący problem Banacha [1]:

Skonstruować bazę w przestrzeni $C^1([0;1]\times[0;1])$ *wszystkich funkcji rzeczywistych określonych na kwadracie* $[0;1]\times[0;1]$ *i mających ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe.*

Problem ten został rozwiązany stosunkowo niedawno przez Schonefelda [12] i niezależnie przez Ciesielskiego [2]. Wypracowane przez nich metody pozwoliły skonstruować bazę w przestrzeniach funkcji k razy różniczkowalnych na n-wymiarowej kostce lub n-wymiarowym torusie (cf. Schonefeld [13], Ciesielski i Domsta [3]). Równocześnie Mitiagin [7] wykazał, że przestrzeń $C^k(\Omega)$ funkcji rzeczywistych k-krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły i określonych na n-wymiarowej rozmaitości zwartej Ω z brzegiem lub bez brzegu jest izomorficzna z odpowiednią przestrzenią k razy różniczkowalnych funkcji na n-wymiarowej kostce $[0;1]^n$. Kombinując ten wynik z rezultatami Schonefelda oraz Ciesielskiego i Domsty, otrzymujemy istnienie bazy w $C^k(\Omega)$.

Na zakończenie tej części referatu chciałbym jeszcze wspomnieć, że pozostaje otwarte następujące pytanie Banacha [1]:

Czy istnieje baza w przestrzeni A wszystkich funkcji zespolonych ciągłych w kole $|z| \leqslant 1$ *i analitycznych w jego wnętrzu?*

Norma w A określona jest wzorem

$$\|f\| = \sup_{|z|=1} |f(z)|.$$

II. Charakteryzacje przestrzeni Hilberta

Przestrzeń Banacha X nazywa się *przestrzenią Hilberta*, jeżeli norma w X zadana jest wzorem

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie $(\cdot,\cdot)$ jest dodatnio określoną symetryczną formą dwuliniową, którą nazywamy iloczynem skalarnym.

Z uwagi na rozmaite zastosowania w innych działach matematyki i w fizyce teoretycznej, przestrzenie Hilberta zajmują wyjątkowe miejsce wśród przestrzeni Banacha. Specjalna technika przestrzeni Hilberta, którą zawdzięczamy J. von Neumanowi, F. Rieszowi, M. H. Stone'owi i innym, opiera się przede wszystkim na pojęciach ortogonalności i ortogonalnych rzutów, które w naturalny sposób określa się poprzez iloczyn skalarny.

Jednakowoż rozmaite konsekwencje istnienia iloczynu skalarnego określającego normę przestrzeni mają czysto metryczny charakter. Powstaje więc naturalne pytanie, w jakim stopniu pewne z tych własności same określają iloczyn skalarny. Innymi słowy:

Jak „wewnętrznie" w języku przestrzeni unormowanych zdefiniować przestrzenie Hilberta?

Najprostszy i najbardziej elegancki wynik w tym kierunku zawdzięczamy Jordanowi i von Neumanowi [25].

Na to, aby przestrzeń Banacha X była izometryczna z przestrzenią Hilberta, potrzeba i wystarcza, aby dla dowolnych $x, y \in X$ spełniona była tożsamość równoległoboku

$$||x+y||^2+||x-y||^2 = 2(||x||^2+||y||^2).$$

W szczególności więc przestrzeń Banacha jest izometryczna z przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy każda dwuwymiarowa podprzestrzeń tej przestrzeni jest izometryczna z przestrzenią Hilberta.

Ponieważ wszystkie przestrzenie Hilberta ustalonego wymiaru k ($k = 1, 2, \ldots$) są izometryczne między sobą, więc w każdej przestrzeni Hilberta wymiaru $> k$ wszystkie k-wymiarowe podprzestrzenie są izometryczne.

Banach [1] zapytuje, czy ta własność charakteryzuje przestrzenie Hilberta w klasie wszystkich przestrzeni Banacha. Dokładniej:

Niech X będzie przestrzenią Banacha i k-liczbą naturalną $\geqslant 2$. Załóżmy, że wszystkie k-wymiarowe podprzestrzenie X są izomorficzne między sobą oraz dim $X > k$. *Czy założenie to pociąga za sobą to, że X jest izometryczna z przestrzenią Hilberta*?

Problem ten nie jest jeszcze całkowicie rozwiązany. Historia jego jest ciekawa.

Dla $k = 2$ pozytywna odpowiedź została uzyskana przez Auerbacha–Mazura i Ulama [14] w 1935 r. Dla dowolnej przestrzeni nieskończenie wymiarowej pozytywną odpowiedź uzyskał Dvoretzky [19] w 1959 r.

Dla dim $X = n$ pytanie jeszcze pozostaje otwarte, chociaż istotny postęp został uzyskany przez Gromova [22] w 1967 r., który otrzymał pozytywną odpowiedź na problem Banacha dla wszystkich par (k, n) wyszczególnionych w poniższej tabelce.

	X rzeczywista przestrzeń Banacha $\dim X = n$	X zespolona przestrzeń Banacha $\dim X = n$
k parzyste	$n > k$	$n > k$
k nieparzyste	$n \geqslant k+2$	$n \geqslant 2k$

Najprostszy nie rozwiązany przypadek, to $n = 4$, $k = 3$.

Kilka słów o metodach, których używano przy rozwiązywaniu tego problemu Banacha. Łatwo pokazać, że w przypadku gdy X jest wymiaru skończonego n, to problem można sformułować równoważnie następująco:

W n-wymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych dana jest bryła wypukła ograniczona i centralnie symetryczna taka, że wszystkie jej przekroje przez środek symetrii hiperpłaszczyznami k-wymiarowymi są (jako podzbiory przestrzeni k-wymiarowej) *afinicznie równoważne. Czy bryła ta jest elipsoidą? Zakładamy, że $n > k \geqslant 2$.*

Ciekawe jest, że dla rozwiązania takiego problemu geometrii afinicznej Auerbach, Mazur i Ulam użyli znanego twierdzenia Hopfa o zaczesaniu, tzn. twierdzenia o nieistnieniu na dwuwymiarowej sferze ciągłego pola wektorów stycznych nie zerowych. Gromov używał jeszcze bardziej wyrafinowanego aparatu topologicznego dotyczącego grupy strukturowej kanonicznego rozwłóknienia nad rozmaitością Grassmana.

Metoda Dvoretzky'ego wiąże się z jego twierdzeniem o prawie sferycznych przekrojach. Twierdzenie to jest bardzo interesujące samo przez się i wskazuje na specjalne miejsce, jakie zajmują przestrzenie Hilberta wśród przestrzeni Banacha. Brzmi ono następująco:

Dla każdego $\varepsilon > 0$ *i* k *naturalnego istnieje* $n = n(k, \varepsilon)$ *takie, że dowolna* n *lub więcej wymiarowa bryła wypukła ograniczona i mająca środek symetrii ma* ε*-sferyczny* k*-wymiarowy przekrój przez środek symetrii* (ε*-sferyczność* oznacza, że stosunek promienia kuli k-wymiarowej opisanej na tym przekroju do promienia kuli k-wymiarowej wpisanej w ten przekrój nie przewyższa $1+\varepsilon$).

W języku przestrzeni unormowanych wynik Dvoretzky'ego formułuje się następująco.

Dla każdego $\varepsilon > 0$ *i dla każdego* k *naturalnego istnieje* $n = n(k, \varepsilon)$ *takie, że dla dowolnej przestrzeni unormowanej* X *wymiaru* $\geqslant n(k, \varepsilon)$ *istnieje operator liniowy* (ε*-izometryczny*) $T: H_k \to X$ *taki, że*

$$||h|| \leqslant ||Th|| \leqslant (1+\varepsilon)||h|| \quad \text{dla } h \in H_k,$$

gdzie H_k *jest* k*-wymiarową przestrzenią Hilberta.*

Dowód tego twierdzenia, anonsowanego w [19], opublikował Dvoretzky w pracy [20]. Dowód ten jest bardzo skomplikowany. Opiera się on na subtelnych oszacowaniach dla pewnych całek względem miary Haara rozmaitości Grassmana, traktowanych jako przestrzenie jednorodne grup ortogonalnych. Niestety, dowód ten zawiera lukę, którą udało się zapełnić dopiero w 1969 r. (Figiel [21]). Ostatnio Milman [30] podał znacznie prostszy dowód twierdzenia Dvoretzky'ego, który opiera się na pewnym wariacyjnym lemacie P. Lévy'ego. Ta metoda przenosi się też na przypadek przestrzeni zespolonych, który to przypadek w ogóle nie był traktowany przez Dvoretzky'ego.

Rezultaty Gromova i Dvoretzky'ego dają metryczną charakteryzację przestrzeni Hilberta poprzez własności podprzestrzeni dowolnie wysokiego wymiaru. Tym różnią się istotnie od charakteryzacji Jordana i von Neumana, która — jak zauważyłem — ma „dwuwymiarowy charakter". Obecnie istnieje bardzo wiele dwuwymiarowych charakteryzacji przestrzeni Hilberta. Zainteresowanym tym przedmiotem można rekomendować książkę Daya [18]. Bardzo ciekawa „wielowymiarowa", a w istocie 3-wymiarowa, charakteryzacja przestrzeni Hilberta pochodzi od Kakutaniego [26] dla przestrzeni rzeczywistych i od Bohnenblusta [16] dla przestrzeni zespolonych.

Niech X *będzie przestrzenią Banacha wymiaru* $\geqslant 3$ *taką, że dla dowolnej podprzestrzeni* E *istnieje rzut* $P: X \underset{\text{na}}{\to} E$ *o normie* $||P|| = 1$. *Wówczas* X *jest izometryczna z przestrzenią Hilberta.*

Wynik ten wiąże się z następującym problemem Banacha [1]:

Niech X będzie przestrzenią Banacha taką, że dowolna jej podprzestrzeń E jest uzupełnialna w X, tzn. istnieje rzut $P: X \xrightarrow[\text{na}]{} E$. Czy X jest izomorficzna z przestrzenią Hilberta, tzn. czy istnieje pewna przestrzeń Hilberta H i operator liniowy odwracalny $T: H \xrightarrow[\text{na}]{} X$?

Odpowiedź twierdząca na to pytanie oznacza, że w dowolnej przestrzeni Banacha nieizomorficznej z przestrzenią Hilberta istnieje nieuzupełnialna podprzestrzeń liniowa. Jednakże skonstruować przykład jakiejkolwiek podprzestrzeni nieuzupełnialnej w jakiejś przestrzeni Banacha okazuje się zadaniem nietrywialnym. Taki przykład został po raz pierwszy podany przez Banacha i Mazura [15] w 1933 r. dla przypadku przestrzeni $C([0; 1])$. Murray [31] podał skomplikowaną konstrukcję nieuzupełnialnych podprzestrzeni w przestrzeniach l_p i $L_p (p \neq 2)$. Dalszy postęp został uzyskany przez Sobczyka [32] w 1941 r., który, wykorzystując pewną własność inwolucji związanych z układem ortogonalnym Walsha, nie tylko podał bardzo prostą konstrukcję nieuzupełnialnych podprzestrzeni w l_p oraz w L_p, lecz także udowodnił istnienie nieuzupełnialnych podprzestrzeni dla dużej klasy przestrzeni Banacha (obejmującej m. in. przestrzenie Orlicza), których kule jednostkowe mają — mówiąc nieprecyzyjnie — dostatecznie wiele hiperpłaszczyzn symetrii. Dopiero w 1971 r. Lindenstrauss i Tzafriri [28] uzyskali całkowite rozwiązanie problemu Banacha o uzupełnialnych podprzestrzeniach.

Warto wspomnieć o użytej przez nich metodzie.

Można stosunkowo prosto pokazać, że przestrzeń Banacha X jest izomorficzna z przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy

$$K_X = \sup_n \sup_{E \subset X;\, \dim E = n} d(E, H_n) < +\infty,$$

gdzie $d(E, H_n)$ oznacza kres dolny norm operatorów liniowych $T: E \xrightarrow{\text{na}} H_n$ takich, że $||e|| \leqslant ||Te|| \leqslant ||T|| \cdot ||e||$ dla $e \in E$, zaś H_n oznacza n-wymiarową przestrzeń Hilberta. Ten wynik znajduje się *implicite* w pracy Grothendiecka [23]; w sposób jawny pojawia się dopiero w pracy Joichi [24].

Następnie Davis, Dean i Singer [17] zauważyli, że jeżeli X jest taką przestrzenią Banacha, której wszystkie podprzestrzenie są uzupełnialne, to $C_X < +\infty$, gdzie C_X oznacza kres górny po wszystkich skończenie wymiarowych podprzestrzeniach X z kresów dolnych norm rzutów X na każdą z tych podprzestrzeni.

Dowód Lindenstraussa i Tzafriri przebiega nie wprost. Autorzy pokazują, wykorzystując w istotny sposób twierdzenie Dvoretzky'ego o prawie sferycznych przekrojach, że jeżeli $K_X = +\infty$, to też $C_X = +\infty$.

Wynik Lindenstraussa i Tzafriri jest przykładem eleganckiej liniowo topologicznej charakteryzacji przestrzeni Hilberta w klasie wszystkich przestrzeni Banacha. Tego typu charakteryzacji, w przeciwieństwie do charakteryzacji metrycznych, znamy niewiele. Przypuszczalnie pierwszą izomorficzną charakteryzację przestrzeni Hilberta podał Grothendieck [23]. Jest ona następująca:

Na to, aby przestrzeń Banacha X była izomorficzna z przestrzenią Hilberta

potrzeba i wystarcza, aby istniał zbiór zwarty S taki, że przestrzenie X i jej sprzężona X^* są izomorficzne z ilorazowymi przestrzeniami przestrzeni $C(S)$ wszystkich funkcji skalarnych ciągłych na S.

Bardzo ciekawą izomorficzną charakteryzację przestrzeni Hilberta podał ostatnio Kwapień [27]. Jego wynik jest następujący:

Niech X będzie przestrzenią Banacha. Rozpatrzmy przestrzeń unormowaną $L_0^2(R, X)$ złożoną z wszystkich funkcji ciągłych o zwartych nośnikach określonych na prostej rzeczywistej R i przyjmujących wartości w X. Przyjmujemy $|f| = (\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$ dla $f \in L_0^2(R, X)$. Niech $L^2(R, X)$ będzie uzupełnieniem $L_0^2(R,X)$ w normie $|\cdot|$. Określamy przekształcenie Fouriera $F\colon L_0^2(R, X) \to L^2(R, X)$ klasycznym wzorem

$$F(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} f(s)\, ds \quad \text{dla } s \in R;\ f \in L_0^2(R, X).$$

Wówczas F jest ograniczonym operatorem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy X jest izomorficzna z przestrzenią Hilberta.

Chciałbym jeszcze wpomnieć o następującym pytaniu Banacha [1].

Niech X będzie przestrzenią Banacha o tej własności, że wszystkie nieskończenie wymiarowe ośrodkowe podprzestrzenie X są izomorficzne między sobą. Czy X jest izomorficzne z przestrzenią Hilberta?

Dodane w korekcie: W maju 1972 r. problem aproksymacji został rozwiązany przez matematyka szwedzkiego P. Enflo, który skonstruował przestrzeń Banacha nie mającą własności aproksymacji [13 b].

Bibliografia

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa — Lwów 1932.

Do części I

[2] Z. Ciesielski, *A construction of basis in $C^1(I^2)$*, Studia Math. 33 (1969), str. 243–247.

[3] — and J. Domsta, *Construction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p(I^d)$*, ibidem 41 (1972), str. 211–224.

[4] T. Figiel, *Factorization of compact operators and applications to the approximation problem*, ibidem 45 (1973), str. 191–209.

[5] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[6] W. B. Johnson, H. Rosenthal and M. Zippin, *On bases, finite dimensional decompositions, and weaker structures in Banach spaces*, Israel J. Math. 9 (1971), str. 489–506.

[7] B. S. Mitiagin, *Гомотопическая структура линейной группы банахового пространства*, Усп. Мат. Наук 25 (155) 1971, str. 63–106.

[8] A. Pełczyński, *Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with the basis*, Studia Math. 40 (1971), str. 239–243.

[9] — *Universal bases*, ibidem 32 (1969), str. 247–268.

[10] J. Schauder, *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalraumen*, Math. Zeit. 26 (1927), str. 47–65.
[11] — *Einige Eigenschaften des Haarschen Orthogonalsystems*, ibidem 28 (1928), str. 317–320.
[12] S. Schonefeld, *Schauder bases in spaces of differentiable functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), str. 586–590.
[13] — *A study of products and sums of Schauder bases in Banach spaces*, teza doktorska, Purdue University, 1969.
[13a] W. B. Johnson, *A complementably Universal Conjugate Banach Space and its relation to the Approximation Problem*, Israel J. Math. (w druku).
[13b] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem*, Acta Math. (w druku).

Do części II

[14] H. Auerbach, S. Mazur et S. Ulam, *Sur une propriété caractéristique de l'ellipsoide*, Monastschefte für Mathematik und Physik 42 (1935), str. 45–48.
[15] S. Banach und S. Mazur, *Zur Theorie der linearen Dimension*, Studia Math. 4 (1933), str. 100–112.
[16] F. Bohnenblust, *A characterization of complex Hilbert spaces*, Portugal. Math. 3 (1942), str. 103–109.
[17] W. J. Davis, D. W. Dean and I. Singer, *Complemented subspaces and Λ-systems in Banach spaces*, Israel J. Math. 6 (1952), str. 303–330.
[18] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Academic Press and Springer Verlag, New York 1962.
[19] A. Dvoretzky, *A theorem on convex bodies and applications to normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45 (1959), str. 223–226.
[20] — *Some results on convex bodies and Banach spaces*, Proc. Inter. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem (1961), str. 123–160.
[21] T. Figiel, *Some remarks on Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies*, Colloq. Math. 24 (1972), str. 241–252.
[22] М. Л. Громов, *Об одной геометрической гипотезе Банаха*, Изв. Акад. Наук СССР, Сериа мат. 31 (1967), str. 1105-1114.
[23] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956), str. 1–79.
[24] J. T. Joichi, *Normed linear spaces equivalent to inner product spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), str. 423–426.
[25] P. Jordan and J. von Neumann, *On inner products in linear metric spaces*, Ann. of Math. 36 (1935), str. 719–723.
[26] S. Kakutani, *Some characterizations of Euclidean spaces*, Jap. J. Math. 16 (1939), str. 93–97.
[27] S. Kwapień, *Isomorphic characterizations of inner product spaces by Fourier series with vector coefficients*, Studia Math. 44 (1972), str. 583–595.
[28] J. Lindenstrauss and I. Tzafriri, *On the complemented subspace problem*, Israel J. Math. 9 (1971), str. 263–269.
[29] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Math. 29 (1968), str. 275–326.
[30] В. Д. Мильман, *Новое доказательство теоремы А. Дворецкого о сечениях выпуклых тел*, Функциональный анализ и прил. 5 (1971), str. 28–37.
[31] F. J. Murray, *On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), str. 138–152.
[32] A. Sobczyk, *Projections in Minkowski and Banach spaces*, Duke Math. J. 8 (1941), str. 78–106.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK