ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XV (1972)

B. M. SCHEIN (Saratow) i A. WIWEGER (Warszawa)

Jak dzielić przez zbiór pusty?

W niektórych zagadnieniach matematycznych, gdy mamy do czynienia z pewnym zbiorem X i jego podzbiorem A, wygodnie jest rozważać nowy zbiór X/A powstały — mówiąc potocznie — przez utożsamienie wszystkich punktów zbioru A i pozostawienie punktów zbioru $X \setminus A$ bez zmiany. Jeżeli rozważa się zbiory postaci X/A przy zmiennym A, to powstaje potrzeba uwzględnienia przypadku, gdy A jest zbiorem pustym. W niniejszych uwagach chcemy omówić pewien kłopot związany z definicją zbioru $X/\emptyset$.

Załóżmy najpierw, że A jest podzbiorem niepustym zbioru X. Definicja zbioru X/A w tym przypadku nie budzi wątpliwości: nasuwa się od razu myśl, że X/A należy zdefiniować jako zbiór X/R klas abstrakcji odpowiednio dobranej relacji równoważności R w X. Niech D_X oznacza relację identyczności w X, tzn.

$$D_X = \{(x, x) : x \in X\}.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$R_{X,A} = D_X \cup (A \times A).$$

Łatwo zauważyć, że $R_{X,A}$ jest relacją równoważności w X taką, że $xR_{X,A}y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ albo $x, y \in A$. Zbiór X/A definiujemy wzorem

$$X/A = X/R_{X,A}. \tag{1}$$

Klasami abstrakcji relacji $R_{X,A}$ są zbiory $\{x\}$, gdzie $x \in X \setminus A$, oraz zbiór A. Wobec tego wzór (1) możemy zapisać w następującej równoważnej postaci:

$$X/A = \{\{x\} : x \in X \setminus A\} \cup \{A\}. \tag{2}$$

Odrzućmy teraz założenie, że zbiór A jest niepusty. Jeżeli chcemy określić $X/\emptyset$ tak, aby wzór (1) był nadal prawdziwy, to z uwagi na równość

$$R_{X,\emptyset} = D_X \cup (\emptyset \times \emptyset) = D_X$$

musimy przyjąć

$$X/\emptyset = X/D_X = \{\{x\} : x \in X\}. \tag{3}$$

Zauważmy, że zbiór X/D_X bywa potocznie utożsamiany z X, ale jest formalnie różny od X. Na razie nie widać tu jeszcze żadnej trudności. Obierzmy jednak nieco inny punkt widzenia i określmy zbiór $X/\emptyset$ opierając się na wzorze (2). Otrzymamy

$$X/\emptyset = \{\{x\} : x \in X\} \cup \{\emptyset\}. \tag{4}$$

Zbiory (3) i (4) są różne, gdyż $\emptyset$ jest elementem zbioru (4), ale nie jest elementem zbioru (3). Zbiór (3) można utożsamić z X, natomiast zbiór (4) zawiera o jeden element więcej.

Łatwo zrozumieć przyczynę wystąpienia tej dwuznaczności: w definicji podziału zbioru zakłada się, że wszystkie zbiory podziału są niepuste. Przechodząc od wzoru (1) do wzoru (2) w przypadku $A = \emptyset$ gubimy to założenie.

Nasuwa się pytanie, który ze wzorów (3), (4) należy przyjąć jako definicję zbioru $X/\emptyset$. Definicja (3) ma już pewną tradycję w literaturze matematycznej i jest przyjmowana np. w teorii półgrup (por. [1], str. 72). Jeżeli X jest półgrupą i A jest ideałem w X, to relacja $R_{X,A}$ nazywa się *kongruencją Reesa*. Relację identyczności w półgrupie wygodnie jest traktować jako kongruencję Reesa wyznaczoną przez ideał pusty; pozwala to w pewnych przypadkach uzyskać odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną między kongruencjami a ideałami w półgrupie.

Definicja (4) wydaje się mniej naturalna od definicji (3) (gdy ją przyjmiemy, to odwzorowanie kanoniczne $X \to X/A$ nie będzie suriekcją dla $A = \emptyset$), ale można przytoczyć ważkie argumenty przemawiające na jej korzyść. Rozpatrzmy następujący przykład. Przez zbiór z wyróżnionym podzbiorem rozumiemy parę (X, A), gdzie X jest zbiorem i $A \subset X$. Przez zbiór z punktem bazowym rozumiemy parę (X, x), gdzie X jest zbiorem niepustym i $x \in X$. Czy dowolnemu zbiorowi z wyróżnionym podzbiorem można przyporządkować w naturalny sposób zbiór z punktem bazowym? Oczywiście tak, mianowicie parze (X, A) możemy przyporządkować zbiór (2) z punktem bazowym A; w szczególności parze $(X, \emptyset)$ przyporządkowujemy zbiór (4) z punktem bazowym $\emptyset$. Otrzymuje się w ten sposób ważny funktor działający między odpowiednimi kategoriami (por. [2]). Definicja (3) jest w tym przypadku niewygodna, gdyż w zbiorze (3) nie ma kandydata na punkt bazowy odpowiadający pustemu podzbiorowi zbioru X.

Również w teorii półgrup wzór (4) ma interesującą interpretację. Mianowicie jeśli X jest półgrupą, to zbiór (4) zaopatrzony w odpowiednio określone działanie półgrupowe możemy traktować jako półgrupę X z dołączonym zerem. Wzór (2) również i w tym przypadku określa pewien funktor (z kategorii półgrup z wyróżnionymi ideałami w kategorię półgrup z zerami).

Tak więc trudno dać jednoznaczną odpowiedź na pytanie, którą z definicji (3), (4) należy się posługiwać. Pierwszy z autorów niniejszych uwag jest zwolennikiem definicji (3), natomiast drugi uważa, że więcej zalet ma definicja (4). Tak czy inaczej, warto zdawać sobie sprawę z faktu, że mamy tu dwie różne możliwości do wyboru. Na zakończenie należy wspomnieć, że dla każdego $A \subset X$ zbiór (2) jest równoliczny

ze zbiorem X/A zdefiniowanym przez drugiego z autorów w artykule [3]. Definicja tam podana jest jednak mniej zgrabna, gdyż posługuje się pojęciem sumy rozłącznej zbiorów, a ponadto występuje w niej suma zbiorów różnych typów.

Prace cytowane

[1] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, vol. I, Providence, R. I., 1961.

[2] Z. Semadeni, *Categorical approach to extension problems*, Proc. Intern. Symp. on Extension Theory of Topological Structures and its Applications, 1967, Berlin 1969, str. 194–198.

[3] A. Wiweger, *Kłopoty ze zbiorem pustym*, Wiadom. Mat. 11 (1970), str. 187–199.