ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XV (1972)

A. Białynicki-Birula i A. Pełczyński (Warszawa)

Na marginesie artykułu K. Siekluckiego „O geometrii i topologii"

Traktowanie jednej dyscypliny naukowej w izolacji od innych dyscyplin, jednego działu matematyki w odosobnieniu od innych jest równie absurdalne, jak odcinanie nauki uprawianej w jednym kraju od nauki światowej. Tradycje polskiej topologii wskazują na żywe związki, które łączyły badania prowadzone w Polsce z głównymi nurtami topologii na świecie z jednej strony i z rozwojem innych dyscyplin matematycznych z drugiej strony. Kuratowski odkrył podstawowe związki między logiką a teorią mnogości i topologią mnogościową. Uogólnienia twierdzenia Brouwera o punkcie stałym, które zawdzięczamy Schauderowi, stworzyły nowe metody w teorii równań różniczkowych. Liczne zastosowania metody kategorii Baire'a i wskazanie na rolę klasy przestrzeni metrycznych zupełnych i ośrodkowych w matematyce wiąże się z nazwiskami Saksa, Banacha, Mazura, Steinhausa, Sierpińskiego, Mazurkiewicza i Kuratowskiego. Borsuk, rozwiązując problem Banacha o izomorfizmie przestrzeni C z jej maksymalnymi hiperpłaszczyznami, wprowadził aparat liniowych operatorów przedłużania i metodę dekompozycji, stanowiące dziś podstawowe narzędzia przy badaniu liniowo-topologicznej i topologicznej struktury przestrzeni Banacha. Przykłady te można by mnożyć. Z prac powojennych wspomnimy choćby o zastosowaniu przez Rasiową i Sikorskiego metod topologicznych w logice i stworzoną przez Bessagę technikę norm niezupełnych (za pomocą której udowodnił on dyfeomorfizm sfery w przestrzeni Hilberta z przestrzenią Hilberta), stanowiącą dziś jeden z podstawowych środków dla badania nieskończenie wymiarowych rozmaitości różniczkowych.

Za jeden z braków artykułu K. Siekluckiego uważamy pominięcie w nim charakteryzacji aktualnej roli głównych kierunków rozwoju współczesnej topologii oraz wskazania, jakie miejsce w rozwoju tym zajmują badania topologiczne prowadzone w Polsce. Za drugi z braków artykułu Siekluckiego uważamy traktowanie geometrii i topologii w izolacji od pozostałych dyscyplin matematycznych. Dotyczy to zarówno tej części, w której próbuje on ustalić „czym jest obecnie geometria i topologia", jak i części, w której zawarta jest ocena obecnego stanu badań topologicznych w Polsce oraz wyrażone są opinie dotyczące procesu kształcenia matematyków. Wstępna deklaracja Siekluckiego, że „sprawę jedności matematyki i wza-

jemnego przenikania się różnych jej idei uważamy dalej za oczywistą i bezsporną" nie skłoniła autora do wyciągnięcia z niej żadnych wniosków w dalszym ciągu artykułu. Przeciwnie, po przeczytaniu artykułu Siekluckiego odnieśliśmy wrażenie, że stara się on ściśle wytyczyć granice utopijnego Królestwa Geometrii i Topologii, otoczyć te granice prawdziwie chińskim murem zbudowanym ze zmurszałych (jego zdaniem) cegiełek programu Kleina, wzmocnionych elementami teorii kategorii. Mur broniłby królestwa od barbarzyńskich plemion Analizy i Algebry, czyhających na jego zgubę. Zagrożenie królestwa zmusza do żelaznej dyscypliny wewnętrznej, jasnego wyznaczenia zakresu dopuszczalnych kontaktów z barbarzyńcami, dokładnego podziału administracyjnego kraju, precyzyjnego określenia kryteriów pozwalających wyłuskać ewentualnych heretyków pozostających pod wpływami analityczno-algebraicznej ideologii oraz ustalenia hierarchii władzy. Ster rządów Siekluckiego oddaje strukturze metrycznej... Pozostawiając czytelnikowi dalsze rozwijanie tej analogii, postaramy się sformułować niżej nasz punkt widzenia.

1. Rozsądne dzielenie matematyki przynosi niewątpliwie korzyści dla porządkowania i organizowania działalności matematycznej. Dla tych potrzeb bardzo wygodny jest podział opracowany niedawno w USA (i stosowany np. w Math. Rev.) ([1]). Wyróżniono w nim kilkadziesiąt działów o stosunkowo wąskim zakresie i jest to tak zrobione, że możliwe jest stałe przeprowadzanie bieżących korektur, zgodnie z aktualnymi tendencjami rozwojowymi matematyki (tzn. w terminologii Siekluckiego podział ten jest czuły na zmienne kaprysy mody). Natomiast wszelkie próby jasnego określenia zakresu tzw. dyscyplin podstawowych czy np. ustalenie „czym jest obecnie geometria i topologia" na podstawie matematycznej definicji obiektów badanych w tych dyscyplinach wydają się działalnością równie nieszkodliwą, jak i jałową. Choć matematyka nie przedstawia się nam w postaci jednorodnej masy definicji i twierdzeń, to jednak uważamy, że możliwości różnorakich interpretacji pojęć matematycznych oraz wzajemne przenikania teorii matematycznych powodują, że zaszeregowanie danej teorii matematycznej czy danego twierdzenia (jak np. „Podstawowego twierdzenia algebry") do którejkolwiek z dyscyplin podstawowych będzie musiało w wielu przypadkach budzić słuszne obiekcje i wątpliwości. Sztuczność, umowność i mała przydatność podziału matematyki na te dyscypliny musi obecnie wystąpić silniej niż w przeszłości, gdyż punkt ciężkości współczesnych badań przeniósł się w wielu przypadkach na działy leżące na pograniczach dyscyplin podstawowych (np. teoria grup Liego, analiza różniczkowa, teoria indeksu operatorów różniczkowych, geometria algebraiczna). Dużo łatwiejsze jest zaliczenie danej teorii matematycznej lub twierdzenia do jednego z mniejszych działów matematyki (jak geometria różniczkowa, funkcje wielu zmiennych zespolonych, algebra homologiczna) o bliżej sprecyzowanym zakresie.

Tym niemniej szereg teorii matematycznych można bez cienia wątpliwości zaliczyć do jednego z działów podstawowych. Zostawiając więc na uboczu problem jasnego określenia zakresu podstawowych dyscyplin, można by jedynie spróbować

([1]) *Klasyfikacja dziesiętna matematyki i jej zastosowań*, Wiadom. Mat. 12 (1969), str. 155–172.

odpowiedzieć w sposób bardzo przybliżony, jakiego typu teorie matematyczne przywykliśmy tradycyjnie uważać np. za geometryczne, a jakie np. za algebraiczne. Sądzimy, podobnie jak Sieklucki, że cechą decydującą są tu obiekty badań rozpatrywanej teorii, a nie stosowane metody, a tym bardziej rodzaj wyobraźni matematyków pracujących w danej dziedzinie. Obiekty badań, pojęcia matematyczne, struktury wywodzące się z intuicji stosunków przestrzennych czy kształtu przedmiotów w otaczającym nas świecie uważamy zwykle za geometryczne, a wywodzące się z intuicji ilościowych czy kombinatorycznych — za algebraiczne. Podane określenie nie jest z pewnością ścisłą definicją i nie może stanowić podstawy do jasnego sprecyzowania zakresu algebry czy geometrii. Jednakże definicja ścisła i na tyle ogólna, by obejmowała struktury powszechnie uważane za geometryczne, musiałaby z pewnością obejmować wiele struktur nie interesujących i wątpliwych. Z tych to względów większość współczesnych geometrów nie szuka uniwersalnej definicji, a zadowala się znalezieniem definicji struktur geometrycznych pewnego ustalonego typu (np. G-struktur, struktur geometrycznych opartych na pojęciu pseudogrupy przekształceń, struktur geometrycznych opartych na pojęciu przestrzeni topologicznej z wyróżnioną klasą funkcji ciągłych, itp.). Kilkadziesiąt lat temu Veblen i Whitehead stwierdzili, że pewne gałęzie matematyki nazywa się geometrią, ponieważ taką nazwę uważa za odpowiednią, ze względów emocjonalnych lub tradycyjnych, dostatecznie wielu ludzi kompetentnych i wydaje się, że dotychczas nikt lepiej zakresu geometrii nie określił. Wyjaśnimy niżej dlaczego — naszym zdaniem — artykuł Siekluckiego sytuacji tej nie zmienił.

W pierwszej części swych rozważań Sieklucki przedstawia własną definicję struktury geometrycznej oraz teorii geometrycznej (tj. specjalnej geometrii) i na tej drodze stara się ustalić zakres geometrii i topologii. Próba Siekluckiego zdefiniowania (prostej) struktury geometrycznej jako struktury podporządkowanej strukturze metrycznej jest z wielu względów chybiona. Wychodząc z niewątpliwie słusznej przesłanki o wyjątkowej roli przestrzeni euklidesowej, autor pisze, że „możliwość mierzenia odległości w przestrzeniach euklidesowych oraz istnienie przekształceń zachowujących odległości (w szczególności ruchów sztywnych) są najbardziej oczywistymi własnościami geometrycznymi tych przestrzeni". Stwierdzenie to ma charakter subiektywny. Warto jednak zwrócić uwagę na fakt, że jeśli przyjmować za najbardziej oczywiste te pojęcia, które występują w znanych aksjomatykach geometrii euklidesowej, to za oczywiste pojęcia należałoby też przyjąć pewne pojęcia liniowe (np. pojęcie liniowe prostej). Gdy zgodzimy się nawet z tym poglądem autora, dalszy tok jego rozumowania musi budzić wątpliwości i sprzeciwy. Przyjmując bowiem istnienie metryki i przekształceń zachowujących odległości za najbardziej oczywiste, autor pomija możliwość zdefiniowania struktury geometrycznej za pomocą grupy przekształceń lub jej uogólnień, natomiast stwierdza, że ponieważ „badanie specjalnych przestrzeni metrycznych (takich jak przestrzenie euklidesowe, czy też ciągowa przestrzeń Hilberta l^2) oraz uogólnień przestrzeni metrycznych (takich jak przestrzenie topologiczne czy jednostajne) okazało się płodne i doprowadziło do rozwoju nowych działów geometrii", więc to „centralne położenie pojęcia

przestrzeni metrycznej pozwala posłużyć się nim do wyróżnienia struktur i kategorii geometrycznych". A dalej definiuje geometryczny rodzaj struktury jako rodzaj podporządkowany rodzajowi struktury metrycznej. Geneza pomysłu powyższej definicji nie jest jasna. Pojęcie przestrzeni metrycznej jest ważne i płodne, ale przy tym bardzo ogólne i uniwersalne. Istnieją przestrzenie metryczne o własnościach bardzo odbiegających od pierwotnych modeli. Dlaczego więc strukturę nazywać geometryczną tylko wtedy, gdy strukturę tego rodzaju da się określić w każdej przestrzeni metrycznej? Dlaczego klasa wszystkich przestrzeni metrycznych (a nie jej podklasa złożona z przestrzeni o bardziej regularnych własnościach) ma być punktem odniesienia i fundamentem geometrii? Przyjęcie za podstawę klasy wszystkich przestrzeni metrycznych daje w efekcie definicję (nawet w obrębie tzw. struktur prostych) o bardzo wąskim z pewnego punktu widzenia zakresie. Nie obejmuje ona wielu struktur uważanych za geometryczne, jak np. ogólne przestrzenie rzutowe i afiniczne. Z drugiej strony geometryczna jest w tym sensie każda struktura wyznaczona przez dwuargumentowe przekształcenie danego zbioru w inny ustalony zbiór, zawierający zbiór liczb rzeczywistych (gdyż ten rodzaj struktury jest podporządkowany rodzajowi struktury metrycznej). Przyjęta przez Siekluckiego definicja jest więc jednocześnie za szeroka, bo obejmuje struktury, których geometryczny charakter jest bardziej niż wątpliwy.

„Szkicowy charakter rozważań" Siekluckiego i wprowadzone przez niego uproszczenia nie pozwalają wywnioskować, jakie struktury złożone chce on uważać za geometryczne (warto tu może zwrócić uwagę na fakt, że pojęcie struktury prostej i złożonej ma charakter umowny, np. struktura przestrzeni metrycznej uważana przez Siekluckiego za prostą może być też uważana za złożoną). Autor zapewnia, że struktury złożone występujące w geometrii różniczkowej są geometryczne i chętnie wierzymy mu na słowo.

Podana przez Siekluckiego próba definicji geometrii jako teorii niezmienników pewnej kategorii geometrycznej również budzi sprzeciwy. Z uczynionego przez autora założenia, że np. kategoria wszystkich zbiorów jest geometryczna oraz że podkategoria kategorii geometrycznej jest geometryczna wynika, że każda podkategoria kategorii wszystkich zbiorów jest geometryczna. A więc geometrią w sensie Siekluckiego jest prawie cała matematyka (co prawda bez teorii homotopii). W szczególności geometria liniowa jest geometrią w tym sensie (z czego się bardzo cieszymy, tym bardziej że przeczy to zapewnieniom autora — patrz str. 20, wiersz 28-29). Z podanych wyżej powodów zamieszczoną we wstępie do artykułu Siekluckiego obietnicę „ustalenia, czym jest obecnie geometria i topologia" należy uznać za niespełnioną.

2. Topologię dzieli się zwykle na trzy działy: topologię ogólną, topologię algebraiczną oraz topologię rozmaitości i w dalszym ciągu tym podziałem będziemy się posługiwać. Użyty przez Siekluckiego podział na topologię ogólną, algebraiczną, różniczkową i geometryczną nie jest tradycyjny, ani też powszechnie stosowany. Topologia geometryczna w sensie użytym przez Siekluckiego jest najczęściej uważana za część topologii ogólnej, termin „topologia geometryczna" używany jest w innym

sensie i dotyczy pewnego poddziału topologii rozmaitości (57. 05 we wspomnianym na wstępie podziale stosowanym przez Math. Rev., patrz też przeglądowy referat M. H. A. Newmana wygłoszony pod tym tytułem na Kongresie w Sztokholmie w 1962 r., lub referat C. T. C. Walla, *Topologia geometryczna: rozmaitości i struktury*, wygłoszony na Kongresie w Nicei w 1970 r.). Topologia różniczkowa rozpatrywana jest zwykle jako część topologii rozmaitości (57. 10–57. 20 w klasyfikacji (²)).

W Polsce tradycyjnie prowadzono badania w zakresie topologii ogólnej. Po ustaleniu (głównie w latach trzydziestych) pewnych podstawowych metod i faktów topologicznych, wchodzących w zakres topologii ogólnej, punkt ciężkości badań topologicznych na świecie zaczął przesuwać się w kierunku najpierw topologii algebraicznej, a następnie w kierunku topologii rozmaitości, mającej najsilniejsze powiązania z innymi działami matematyki. Rozwój współczesnej matematyki oraz analogie między rozwojem topologii a rozwojem innych działów matematyki pozwalają przypuszczać, że proces ten ma charakter trwały (a doszukiwanie się w nim „kaprysów zmiennej mody" jest raczej tylko wyrazem osobistych życzeń). Przesunięcia te nie znalazły należytego odbicia w tematyce badań topologicznych podejmowanych w Polsce. W tej sytuacji nastrój bezkrytycznego zadowolenia nie jest uzasadniony. Niestety, w artykule Siekluckiego brak jest jakiejkolwiek charakteryzacji tendencji rozwojowych topologii na świecie i porównania ich z kierunkami badań prowadzonymi w Polsce. Prowadzi to do utraty poczucia rzeczywistości i zniekształcenia właściwych proporcji. Dalecy jesteśmy przy tym od stwierdzenia, że obecnie topologią ogólną zajmują się głównie matematycy w Polsce, lub że badania w tym kierunku powinny być zaniechane. Topologia ogólna jest z pewnością istotnym działem topologii uprawianym w wielu krajach, a rola, jaką odegrała i odgrywa w jej rozwoju polska szkoła matematyczna, jest powszechnie znana i doceniana.

Stwierdzenie, że nowe na gruncie polskim działy „można planować raczej w nowo tworzących się ośrodkach i środowiskach" jest szkodliwe chociażby dlatego, że tylko niewielki procent prawdziwie uzdolnionej młodzieży odbywa studia matematyczne w małych ośrodkach. Ponadto tylko duże ośrodki w naszym kraju mogą zapewnić odpowiednio szerokie wykształcenie potrzebne do podjęcia specjalizacji w „modnych" działach współczesnej topologii.

Propozycja rozszerzenia nurtu geometrii i topologii w nauczaniu na pierwszych latach studiów matematycznych z pewnością zasługuje na uwagę. Na poparcie zasługuje w szczególności położenie większego nacisku na geometrię różniczkową jako przedmiotu, w którym metody analityczne i algebraiczne służą badaniu obiektów geometrycznych, a którego metody i twierdzenia stosuje się w istotny sposób np. w topologii rozmaitości, teorii względności itp. Proponowane rozszerzenie nurtu geometrii i topologii w kształceniu powinno być również realizowane przez szersze (tam, gdzie jest to możliwe) omawianie na wykładach z analizy i algebry intuicji geo-

(²) Patrz notka ze str. 26.

metrycznych związanych z wprowadzonymi pojęciami i metodami. W procesie kształcenia młodych matematyków powinno się położyć większy nacisk na wskazanie naturalnych związków między geometrią, topologią, analizą i algebrą, na omówienie wzajemnego przenikania metod geometrycznych, analitycznych i algebraicznych w różnych działach matematyki. Należałoby, być może, poświęcić trochę czasu na zaznajomienie studentów ze znanymi topologicznymi niezmiennikami takich obiektów, jak przestrzenie rzutowe, przestrzenie grup klasycznych (np. grup ortogonalnych), rozmaitości Stiefela i Grassmana. Strukturę topologiczną tych przestrzeni bada się korzystając z innych struktur określonych na tych obiektach. Na odwrót, pewne niezmienniki topologiczne powyższych przestrzeni pozwalają uzyskać informacje o tych innych strukturach.

Rozwijaniu intuicji geometrycznych powinno na wykładach z geometrii i topologii towarzyszyć dostarczanie słuchaczom pewnych metod badawczych i nauczanie ich posługiwania się nimi. Warto tu przytoczyć słowa Choqueta ([1] w bibliografii Siekluckiego) „Szkoda wielka, że ciągle jeszcze wielu autorów nie wie nic o istnieniu całego szeregu podstawowych narzędzi, których sprawność potwierdziła praktyka. Z wielkim nakładem pracy i pomysłowości odkrywają oni bowiem ciągle na nowo szczególne przypadki znanych twierdzeń ogólnych".

Przygotowanie do samodzielnego rozwiązywania konkretnie postawionych problemów polega między innymi na przyswojeniu standardowych metod badawczych właściwych danej dziedzinie, a nieporadność, o której pisze Sieklucki, jest z pewnością większa u tych matematyków, którzy tych metod nie opanowali. Tendencja Siekluckiego do eliminowania z nauczania geometrii i topologii standardowych metod algebraicznych i analitycznych, faworyzuje te działy topologii, w których metody te są mniej przydatne z powodu dużej ogólności badanych pojęć oraz dopuszczeniu obiektów nieregularnych i patologicznych (a więc przede wszystkim topologię ogólną). Nauczanie współczesnych, standardowych metod i ich zastosowań nie wchodzi jeszcze do programów studiów matematycznych w Polsce i znajomość tych metod wśród polskich matematyków jest raczej niewielka. Nawet wprowadzenie do wykładów geometrii, nie nowych już przecież, metod algebry liniowych budzi tu sprzeciwy i powoduje trudności (raczej u wykładowców niż u studentów). Z tych względów niebezpieczeństwo „jednostronnego wykształcenia z predyspozycją do żonglowania modnymi teoriami matematycznymi" i „biegłego opanowania standardowych metod" „bez przygotowania do samodzielnego rozwiązywania konkretnie postawionych problemów" jest, biorąc pod uwagę aktualną sytuację w Polsce, zupełnie urojone. Natomiast realne niebezpieczeństwo widzimy w takim wykształceniu absolwenta, które uniemożliwia mu podjęcie badań w jednym z głównych kierunków rozwoju współczesnej topologii i w efekcie zmusza go do zajmowania się tradycyjną problematyką.