ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XV (1972)

A. MOSTOWSKI (Warszawa)

Matematyka a logika

Refleksje przy lekturze książki A. Grzegorczyka *Zarys arytmetyki teoretycznej*, wraz z próbą recenzji*

Recenzję tej książki poprzedzę krótkim zarysem wzajemnego stosunku logiki do matematyki, bez którego tezy recenzji nie byłyby zrozumiałe.

W dalekiej przeszłości logika i matematyka nie miały ze sobą wiele wspólnego. Z dwu tych nauk matematyka jest starsza: stworzyły ją potrzeby bardzo przyziemne, takie jak konieczność liczenia i mierzenia. Na marginesie tych praktycznych czynności dostrzegano pewne osobliwe fakty, jak np. wzór na sumowanie postępu geometrycznego, lub twierdzenie mówiące, że suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej. Wiele innych podobnych twierdzeń znano już w zaraniu matematyki.

Wczesna matematyka (babilońska, egipska i inne) była więc zbiorem praktycznych przepisów rachunkowych i geometrycznych, do którego dołączano pewną liczbę spostrzeżeń, nie mających bezpośrednich zastosowań, ale spostrzeżeń ciekawych. Co właściwie oznacza słowo „ciekawy" nie jest łatwo wyjaśnić. Idzie tu chyba o prostą prawidłowość, która nie jest bezpośrednio widoczna i do której dojść można dopiero przez pewne rozumowanie, nieraz trudne. Twierdzenie o bokach trójkąta prostokątnego ma właśnie taką własność. Nie jest ono wcale oczywiste: dzieciom w szkole każe się czasem sprawdzać je przez ważenie stosownie wyciętych kwadratów z tektury. A jednak twierdzenie daje się dowieść czystym rozumowaniem, bez żadnego sprawdzenia fizykalnego.

To uczucie zdziwienia, jakie odczuwamy poznając niebanalny fakt matematyczny, jest czymś dla tej nauki bardzo istotnym. Nie mniej istotna jest głęboka satysfakcja, którą matematyk odczuwa, poznając nowy niebanalny dowód. Nieraz widzimy uśmiech niczym niekłamanego zadowolenia na twarzy matematyka, któremu kolega opowiada świeżo odkryty dowód.

Zapewne te uczucia zadowolenia, których genezę powinna wyjaśnić psychologia, były powodem, dla którego rozwinęła się teoretyczna matematyka. Jak wiadomo

* Biblioteka Matematyczna, tom 39, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1971, str. 314, cena zł 48.—

nastąpiło to w czasach greckich. W szkole Pitagorasa, która wywarła tak potężny wpływ na rozwój matematyki teoretycznej, uprawianie tej nauki wiązało się też z dziwnym mistycyzmem, zapewne zaczerpniętym ze źródeł wschodnich, tych samych, z których wzięły się pierwsze wzmianki o teoretycznych wynikach matematyki.

Tak więc u źródeł matematyki napotykamy praktyczne zastosowania, nieoczekiwane własności liczb i figur, zadowolenie z poznania dowodu i wreszcie mistycyzm.

Te same elementy napotykamy też często w dalszej historii matematyki. Wspomnijmy na przykład, że powstanie rachunku różniczkowego i całkowego wiąże się z zastosowaniami do opisu zjawisk fizycznych, ale że Leibniz, jeden z współtwórców tego rachunku, wiązał z nim mistyczne pojęcia. Także wczesne sposoby wprowadzania liczb zespolonych nie były wolne od dziwnych pojęć, od których matematycy musieli się dopiero uwalniać w żmudny sposób. To zaś, że liczby zespolone przyjęły się w matematyce, pochodzi w równym stopniu z możności ich zastosowań, jak i z ciekawych i nieoczekiwanych twierdzeń teoretycznych, które udało się dzięki tym liczbom wykryć.

Logika rozwijała się zupełnie inaczej. Jest ona wytworem racjonalnego umysłu greckiego i od chwili swego powstania stawiała sobie cel nadzwyczaj rozsądny, jakkolwiek daleki od praktyki takiej, której służy liczenie i mierzenie. Celem logiki była analiza rozumowań, uczyła ona przeprowadzania argumentacji w taki sposób, żeby nie można jej było obalić. Być może logika rozwinęła się właśnie w Grecji dlatego, że demokratyczny ustrój miast greckich umożliwiał i czynił pożyteczną sztukę dyskutowania, zbijania argumentów przeciwnika i przeprowadzania poprawnego, niezawodnego dowodu. Logicy wczesnych greckich szkół znaleźli wiele prawidłowości w poprawnych dowodach. Stwierdzili oni, że pewne proste formy rozumowania powtarzają się w nich systematycznie, potrafili sobie uświadomić te formy i zapisać je w doskonałej, jak na owe czasy symbolice. Analiza ta była jednak bardzo różna od twórczości matematyków. Nie szukano związków niezwykłych i zaskakujących, przeciwnie, analizowano rozumowania najzwyklejsze. Uwaga logika koncentrowała się na wydobyciu na światło dzienne ogólnych schematów poprawnego wnioskowania; każdy poszczególny przypadek schematu jest oczywisty, a odkrycie polega na dostrzeżeniu jego ogólności.

Logicy nie wsławili się przy tym odkryciami matematycznymi, podobnie zresztą jak matematycy — logicznymi. Największy logik starożytności, Arystoteles, był filozofem i przyrodnikiem: w logice zajmowały go ogólne problemy, takie jak zagadnienie prawdy, przyczynowości, możliwości. Stworzona przez niego i uprawiana wiele wieków po nim sylogistyka kodyfikuje niezmiernie proste formy rozumowania i w minimalnym tylko stopniu stosuje się do matematyki.

Podobnie było w wiekach średnich: wielu logików prowadziło bardzo subtelne i pojęciowo trudne rozważania, badając np. problem znaczenia implikacji i rozróżnianie implikacji materialnej i formalnej. Logicy ci nie byli matematykami nie obchodziły ich rachunki dające się zastosować w praktyce, nie cieszyły ich też osobliwości matematyczne. Byli to filozofowie, ich przedmiotem zainteresowań

były sprawy o wiele ogólniejsze niż specjalne, choć ciekawe, własności tworów matematycznych.

To samo można powiedzieć o późniejszych okresach logiki, która po Odrodzeniu stawała się nauką coraz bardziej humanistyczną.

Pisząc to — bardzo schematyczne — porównanie, nie chcę oceniać dorobku tych dwu nauk. Na pewno tylu jest ludzi, którym wydają się ważniejsze wyniki logiki niż matematyki, co na odwrót. *One man's meat is another man's poison*, mówią Anglicy. Jedyne, co pragnę podkreślić, to fakt, że przez wiele stuleci nauki te były zupełnie odrębne. Tylko nieliczni wielcy twórcy, jak Leibniz, mieli zasługi na polu ich obu.

Od połowy XIX wieku zaczął się, jak wiadomo, rozwój logiki matematycznej. Od tego też czasu datujemy wzajemne zainteresowanie logików — matematyką i matematyków — logiką. Nazwiska ludzi, którzy spowodowali tę zmianę, są doskonale znane i nie będę ich tu przytaczał. Poza ich geniuszem, do zbliżenia obu nauk przyczyniła się sytuacja w matematyce, która po burzliwym i dość chaotycznym okresie rozwoju w wieku XVIII domagała się wielkim głosem uporządkowania swych podstaw.

Logika tego okresu nie była w podobnej sytuacji, natomiast w tym właśnie czasie stworzyła pojęcia, które nadawały się do wspólnych, logiczno-matematycznych badań. Tak np. z tego okresu datuje się powstanie pojęcia kwantyfikatora (Peirce) i początki teorii relacji (de Morgan, Schröder).

Nie będziemy tu opowiadać znanej historii, jak Frege próbował pierwszy sprowadzić arytmetykę do logiki. Jedynym prekursorem tej idei był chyba tylko Leibniz. Russell, który odkrył sprzeczność w naiwnej logice Fregego, próbował, najpierw sam, a potem z Whiteheadem, zbudować inny niesprzeczny system, obejmujący logikę i matematykę. Działający mniej więcej w tym samym czasie Hilbert, chociaż nie chciał uznać matematyki za część logiki, też tworzył systemy, które obejmowały matematykę i logikę. Matematykę miał, według tej koncepcji, zastąpić formalny, sztywny system znaków i reguł służących do ich przekształcania. Tylko intuicjoniści, działający w tym czasie pod wodzą Brouwera, trzymali się z daleka od prób zamknięcia matematyki w logice.

Tak więc w początku obecnego stulecia, pod wpływem logiki i matematyki, stworzono pojęcie formalnego systemu i dowodów zmechanizowanych, które uznano za „absolutnie ścisłe". W szkole Hilberta, zwanej formalistyczną, zaczęto wyznawać pogląd, że cała matematyka sprowadza się do „gry" polegającej na przekształcaniu formuł (czyli ciągów złożonych ze znaczków) za pomocą ustalonych reguł. Głównym zadaniem metamatematyki miał być dowód niesprzeczności tych „gier".

Przez cały wiek XX logika i matematyka żyją ze sobą blisko. Idea, że właściwie matematyka jest formalnym systemem („grą") lub zbiorem takich systemów, jest w zasadzie przyjmowana przez wielu wpływowych matematyków. Poza Hilbertem należy tu wymienić grupę nadzwyczaj aktywnych francuskich matematyków, działających pod pseudonimem Bourbaki. Przekonanie, że sformalizowana nowoczesna

logika jest podstawą matematyki, przyjęło się wśród pedagogów, i ono częściowo jest przyczyną powstania pewnych kierunków w matematyce szkolnej.

Ale oficjalna wiara to jedno, a życie i temperament to drugie. Wprawdzie często mówimy, że matematykę można przedstawić w postaci formalnego systemu i zbudować ją na gruncie logiki, wzbogaconej niewielką liczbą aksjomatów, ale naprawdę tego wcale nie robimy. Przeciwnie, przeważająca część matematyków stroni od formalnych dowodów i jak dawniej rozumuje tylko na gruncie intuicji. Sami Bourbakiści nie korzystają bodaj nigdzie w swym wielotomowym wykładzie matematyki z wyników i metod logiki, przedstawionych (niezbyt zresztą udatnie) w pierwszym rozdziale. Zresztą przedstawiciele grupy Bourbaki nie przeceniają sami roli formalnych dowodów: „Każdy matematyk wie, że dowód nie jest jeszcze dokładnie zrozumiany, gdy sprawdziło się tylko krok za krokiem ścisłość dedukcji, z których się on składa, a nie postarało o jasny wgląd w jego ideę" (N. Bourbaki, *Architektur der Mathematik*, Physikalische Blätter 1961, str. 163). Dlatego też próby zupełnie sformalizowanego wykładu choćby fragmentów matematyki z wymienianiem explicite wszystkich reguł wnioskowania są nieliczne i zawsze przyjmowane przez ogół matematyków niechętnie (por. np. prace Leśniewskiego ogłoszone w Fundamenta Mathematicae 13 i 14, które pozostały bez żadnego wpływu). *Principia Mathematica* Russella i Whiteheada są słusznie uznane za dzieło przestarzałe i nikt już ich nie czyta. Z nowszych podręczników logiki matematycznej tylko niewiele pokazuje jak formalizować dowody, a przeważająca większość koncentruje się na problematyce metamatematycznej.

Wydaje mi się, że pełna formalizacja matematyki jest w tej chwili hasłem już przebrzmiałym. Antynomie teorii mnogości nikogo już nie straszą. Matematyka, której przeważna część w ogóle nigdy nie ucierpiała z powodu „kryzysu podstaw", rozwija się dalej nie bardzo dbając o to, co dzieje się w jej podstawach.

Nie znaczy to bynajmniej, by ustała współpraca logików i matematyków, tak owocnie rozwijająca się od połowy zeszłego wieku. Nie polega ona jednak — jak tego chcieli dawni formaliści — na próbach zamykania matematyki w okowy formalnego języka ze sztywnymi regułami dowodów. Odbywa się ona zupełnie inaczej.

Logicy obdarzeni temperamentem matematycznym działają głównie na terenie metamatematyki, dyscypliny zajmującej się dyskutowaniem teorii matematycznych metodami matematyki. Dawniej sądzono — i ja sam, jak to muszę z żalem przyznać, wypowiadałem ten pogląd często na wykładach — że ścisłemu badaniu można poddać tylko teorie w pełni sformalizowane, operujące syntaktycznie określonym pojęciem dowodu, podobnym do tego, jaki wprowadzili uczeni ze szkoły Hilberta. Obecnie wiadomo, że bynajmniej tak nie jest: Badaniu metamatematycznemu można poddać też teorie, w których pojęcie wynikania jest określone semantycznie; oczywiście język teorii i zbiór jej aksjomatów musi być precyzyjnie określony, zanim można w ogóle zacząć rozumowanie metamatematyczne. Ale czy dowody są określone przez tradycyjne reguły wnioskowania, czy też przez semantyczne pojęcia, jest w zasadzie obojętne. Z twierdzenia o zupełności wiadomo, że w odniesieniu do

teorii pierwszego rzędu semantyczne i syntaktyczne określenia wynikania są równoważne, ale oczywiście łatwiej jest operować pojęciami semantycznymi, które ponadto mają tę zaletę, że można ich używać także w teoriach wyższego rzędu. Dlatego też liczne nowe książki z logiki wychodzą od semantycznego pojęcia wynikania (por. np. R. Lyndon, *Notes on logic*, van Nostrand 1964; jest też tłumaczenie polskie).

Logicy o nastawieniu bardziej filozoficznym badają tradycyjne problemy logiczne i filozoficzne, stosując do tych dziedzin nowe, nieco zmatematyzowane metody badań. Również wielu matematyków poświęca się częściowo lub całkowicie metamatematyce lub wspomnianym dziedzinom granicznym.

Niektóre wyniki uzyskane w tych dziedzinach są uderzające. Wymienimy tu przykładowo kilka najważniejszych. Prace Tarskiego o pojęciu prawdy pozwoliły — zdaniem wielu filozofów — pierwszy raz podejść naukowo do zagadnień semantyki. Prace Gödla i Cohena pozwoliły ustalić niesprzeczność i niezależność głównych hipotez teorii mnogości i wobec tego rozstrzygnąć najważniejsze dotąd otwarte zagadnienia tej teorii. Inne wyniki Gödla zapoczątkowały teorię funkcji obliczalnych, której używają specjaliści z teorii maszyn matematycznych i która pozwoliła m. in. rozwiązać liczne problemy rozstrzygalności stawiane już dawno w matematyce, jak np. problem słów w teorii grup i dziesiąty problem Hilberta. Praca Tarskiego o rozstrzygalności teorii liczb rzeczywistych znalazła liczne i nieoczekiwane zastosowania w analizie i algebrze i to przy rozwiązywaniu zagadnień bardzo dalekich od metamatematyki.

Mimo więc, że program dawny — formalizacji matematyki — został praktycznie rzecz biorąc zaniechany, współpraca logiki i matematyki była owocna i zapewne nadal będzie przynosić ważne rezultaty.

Próby budowania systemów formalnych stworzyły oczywiście pewien ideał ścisłości dowodów matematycznych. Dowód całkowicie zmechanizowany można w pewnym sensie uznać za dowód zupełnie ścisły. Jak wspomniałem już jednak, ten ideał nie daje się praktycznie zrealizować, a to z uwagi na zbytnią złożoność i rozwlekłość dowodów w pełni sformalizowanych. Umysł ludzki pracuje najwyraźniej w świecie inaczej niż maszyna. Toteż nie należy twierdzić, że dowód jest tym lepszy, im bardziej zbliża się do sformalizowanego. Oczywiście logika ma pierwszorzędne znaczenie przy analizowaniu dowodów. Taki był przecież pierwotny cel logiki i prawa przez nią odkryte stosuje się bezustannie we wszystkich dowodach. Nie należy jednak sądzić, że samo poznanie tych praw od razu dopomoże początkującemu matematykowi do nauczenia się dowodów, ani też że dowody po prostu redukują się do tych praw. Dowód matematyczny jest czymś o wiele bardziej skomplikowanym niż proste następstwo elementarnych prawideł zawartych w tzw. regułach wnioskowania (por. zacytowaną wyżej uwagę Bourbaki). Dowód matematyczny jest zawiłym tworem, ma zawsze część konstrukcyjną, występuje w nim „punkt istotny", dokoła którego cały dowód się obraca, i oczywiście także wiele punktów pomocniczych, mniej ważnych. Prawa logiki stosuje się bez różnicy w tych rozmaitych częściach dowodu. Dlatego niezbędny jest umiar w podkreślaniu roli praw logicznych w dowodach: jeśli będziemy zbyt usilnie tę rolę podkreślali, zamienimy wykład

matematyczny na coś zbliżonego do systemu sformalizowanego, a systemy takie, jak starałem się wyżej pokazać, nie mają już dziś znaczenia i tylko odstraszają większość słuchaczy od matematyki.

Nie ma chyba jednoznacznej odpowiedzi na pytanie, jak daleko powinniśmy posuwać ścisłość (w rozumieniu zbliżania się do systemu sformalizowanego) w wykładzie matematyki. Z reguły wystarczy na pewno rozumowanie dość od tego (wątpliwej jakości) ideału dalekie. Dążenie do mechanizacji rozumowań matematycznych wydaje mi się czynnością wysoce zdehumanizowaną: jak napisał kiedyś E. L. Post, istotą matematyki są pojęcia prawdy i znaczenia.

Najgorzej chyba na dotychczasowej współpracy logików i matematyków wyszła młodzież szkolna. W ruchu, skądinąd godnym pochwały, reformowania programów szkolnych, koncepcje logików wzięły wyraźnie górę nad koncepcjami matematyków stojących daleko od logiki. Np. Papy przesyca program szkolny pojęciami ogólnymi, zwraca w nim wielką uwagę na ścisłość rozumowania i precyzję definicji, a mniejszą na ciekawe fakty matematyczne. Moim zdaniem jest to zjawisko godne pożałowania. Logika jest analizą rozumowania, trzeba je więc najpierw poznać na wielu ciekawych przykładach, zanim odczuje się satysfakcję z wykrywania w nim pewnych prawidłowości. Tymczasem wspomniane programy każą już uczniom pierwszej klasy licealnej zaczynać od prawideł logiki.

Kierunek nastawiony na ogólność, na metodę aksjomatyczną, na daleko posuniętą dokładność dowodów wywołuje nudę i zniechęca do matematyki. Szkoda, że z arsenału nowoczesnej matematyki wybrano dla wielu szkolnych programów właśnie ten trochę beznadziejny kierunek. Tyle jest przecież w nowej i starej matematyce pięknych wyników i metod pobudzających wyobraźnię i umiejętność samodzielnego myślenia. Logika powinna przyjść na końcu nauki, w ostatniej klasie liceum, jako refleksja nad użytymi w poprzednio poznanym materiale środkami dowodowymi.

Wszystkie te uwagi i refleksje przyszły mi na myśl podczas czytania książki profesora Grzegorczyka, wymienionej w tytule. Autor jej przez kilka lat wykładał arytmetykę teoretyczną w Uniwersytecie Warszawskim i książka powstała w wyniku opracowania tych wykładów.

Składa się ona z pięciu rozdziałów. Dwa pierwsze traktują o arytmetyce liczb naturalnych, trzeci o rozszerzeniach pojęcia liczby (liczby wymierne, względne i rzeczywiste), czwarty jest poświęcony wykładowi teorii liczb rzeczywistych, a piąty modelom arytmetyki.

Powiem od razu, że książkę przeczytałem z przyjemnością, ale także, że czytałbym ją z o wiele większą satysfakcją, gdyby miała inny tytuł. Moim zdaniem do przeważającej partii materiału nadawałby się lepiej tytuł *Logiczne podstawy arytmetyki*, a do pierwszego rozdziału nawet *Logika ilustrowana na przykładzie arytmetyki*.

Autor rozwija najpierw arytmetykę liczb naturalnych opartą na aksjomatach Peano i na logice pierwszego rzędu wraz z regułą wprowadzania nowych stałych funkcyjnych dla funkcji zdefiniowanych przez rekursję prostą. Dowody są niezmiernie

drobiazgowe: autor kładzie kropkę nad *i* w każdym niemal nawet najprostszym dowodzie i często wypisuje tezy rachunku zdań, na które powołuje się w swych rozumowaniach. Korzysta też ze sposobności, aby zaznajomić czytelnika z pojęciem kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego, zmiennej wolnej i związanej i regułami rachunku kwantyfikatorów. Jednym słowem, podaje cały aparat rachunku logicznego. Problematyka logiczna przeplata się w tym rozdziale bezustannie z arytmetyczną. Z tej ostatniej autor dochodzi do prostych własności kongruencji, algorytmu Euklidesa, dobrze nadającego się na zilustrowanie definicji indukcyjnych i do pojęcia liczby pierwszej, jednak bez dowodu, że każda liczba rozkłada się na ich iloczyn: ten temat jest umieszczony dopiero w następnym rozdziale.

Rozdział drugi zajmuje się nadal liczbami naturalnymi, ale na wyższym poziomie logicznym. Autor operuje bowiem pojęciami rzędu 2 (dowolnymi funkcjami o wartościach i argumentach naturalnych), ale nie dopuszcza jeszcze kwantyfikatorów wiążących zmienne drugiego rzędu. Ten system logiczny jest bardzo ładnie przedstawiony; jak się zdaje, został on wybrany bardzo trafnie do wysławiania w nim twierdzeń arytmetyki. Podobnie jak w rozdziale pierwszym, autor opisuje dokładnie, jak operować systemem ze zmiennymi rzędu 2, po czym przystępuje do uzasadnienia wybranych twierdzeń z teorii liczb. Oczywiście nie było zamiarem autora dać pełnego wykładu tej teorii, ani nawet tego, co tradycyjnie nazywa się „elementarną teorią liczb". Wybór, jakiego autor dokonał, świadczy dobitnie, że jego cele były skierowane więcej ku logice niż arytmetyce. Jednym z centralnych twierdzeń jest chińskie twierdzenie o resztach, które pozwala autorowi dowieść twierdzenia metamatematycznego o eliminowaniu definicji indukcyjnych. Drugim centralnym twierdzeniem jest twierdzenie Eulera. Wydaje mi się, że autor wybrał to twierdzenie, aby na jego przykładzie pokazać, jak można podać zupełny, pozbawiony wszelkich luk, dowód niebanalnego twierdzenia matematycznego. Ta analiza jest bardzo interesująca: jest dobrze uświadomić sobie, jak wiele trudu wymaga kompletna analiza dowodu, jak wiele faktów explicite nie wypowiadanych tkwi w zwięzłych dowodach, zazwyczaj podawanych w podręcznikach. W przypadku dowodu obranego przez autora główne trudności przy (niemal) kompletnej formalizacji są związane z pojęciem iloczynu ciągu skończonego liczb naturalnych i dowodzie, że ten iloczyn nie zmienia się przy permutowaniu ciągu. Dlatego też znajdujemy w tym rozdziale długą analizę permutacji skończonych zbiorów i dowód jednoznaczności rozkładu permutacji na iloczyn transpozycji. Jest dość nieoczekiwane natrafić na ten temat w rozdziale o elementarnej teorii liczb.

Rozdział II książki Grzegorczyka dobrze nadaje się jako ilustracja omówionej wyżej różnicy temperamentów logika i matematyka: Logik pasjonuje się takimi zagadnieniami jak analiza dowodu i eliminacja definicji indukcyjnych. Matematyk na pewno nie powstrzymałby się od podania choćby dowodu jednoznaczności rozkładu na iloczyn liczb pierwszych, wzoru na funkcję Gaussa i teoriogrupowej interpretacji twierdzeń Eulera i Fermata.

W rozdziale trzecim autor jeszcze bardziej rozszerza przyjętą poprzednio podstawę logiczną, dopuszczając kwantyfikatory wiążące zmienne drugiego rzędu.

Na tej podstawie pokazuje on, jak można wprowadzić liczby wymierne dodatnie, bądź jako klasy równoważności pewnej relacji pomiędzy parami liczb naturalnych o następniku różnym od 0, bądź jako pewne liczby naturalne (numery par liczb wzajemnie pierwszych). Dalej wprowadza pojęcie przekroju i definiuje liczby rzeczywiste dodatnie. Rozdział kończy wprowadzenie liczb względnych i rozszerzenie teorii równań nieoznaczonych i kongruencji na dowolne liczby względne. W poprzednich rozdziałach autor musiał ograniczać się tylko do liczb nieujemnych, co pozbawiało teorię kongruencji prostoty i elegancji.

Czwarty rozdział poświęcony jest aksjomatycznemu wykładowi teorii liczb rzeczywistych. Podstawą logiczną jest ten sam system, co w rozdziale III z tym, że autor dopuszcza zmienne nie tylko dla funkcji, ale i dla zbiorów. Celem, który sobie autor postawił w tym rozdziale, jest wprowadzenie pojęcia potęgi o wykładniku rzeczywistym, dowód twierdzenia o rozwinięciach systematycznych liczb rzeczywistych przy dowolnej zasadzie oraz twierdzenia o rozwijaniu liczb rzeczywistych na ułamki łańcuchowe. Dla wykonania tych zadań autor wyłożył szczegółowo teorię granic ciągów liczbowych. Problematyka logiczna jest w tym rozdziale odsunięta na dalszy plan, podane są dokładne dowody przeliczalności zbioru liczb wymiernych i nieprzeliczalności zbioru liczb niewymiernych.

Ostatni, piąty rozdział jest w całości poświęcony problemom metamatematycznym. Autor omawia najpierw krótko ogólne pojęcie modelu, po czym podaje dowody rozstrzygalności dwu fragmentów arytmetyki, a mianowicie teorii następnika i teorii dodawania. Drugi z tych wyników pochodzi, jak wiadomo, od Mojżesza Pressburgera. Po ustaleniu rozstrzygalności autor dowodzi zupełności obu teorii i konstruuje dla nich różne modele. W dalszym ciągu konstruuje on niestandardowy model dla arytmetyki opartej na pełnym układzie aksjomatów Peano, korzystając z pojęcia iloczynu zredukowanego i — dla kontrastu — dowodzi kategoryczności klasycznej aksjomatyki Peano. W ten sposób autor dobrze zilustrował różnicę między arytmetyką rzędu 1 a arytmetyką rzędu 2. W dalszym ciągu autor wprowadził hierarchię zbiorów arytmetycznie definiowalnych i pokazał, że klasy tej hierarchii są istotnie rosnące. Wreszcie w ostatnim paragrafie autor opisał własną koncepcję arytmetyki liczb rzeczywistych, opartą na języku rzędu 1, a równoważną arytmetyce Peano wysłowionej w języku rzędu 2 i opartej na aksjomatach arytmetycznych oraz prostej aksjomatyce dotyczącej zbiorów obejmującej aksjomat ekstensjonalności i schemat pseudodefinicji (każda formuła o jednej zmiennej liczbowej wolnej wyznacza zbiór). Pojęciami pierwotnymi u autora są działania mnożenia i dodawania liczb rzeczywistych oraz funkcja „entier". Kulminacyjnym punktem rozważań autora jest dowód, że żaden model tej teorii standardowy dla liczb naturalnych nie jest arytmetycznie definiowalny.

Jest wiele ciekawego materiału w książce Grzegorczyka. Na uwagę zasługuje elegancki wykład oparty na logice rzędu 2 zawarty w rozdziale II. Wydaje się, że autor trafił tu na system logiczny doskonale nadający się do wykładu arytmetyki. Drugim udanym oryginalnym pomysłem jest wspomniany wyżej system opisany w ostatnim paragrafie książki. Bardzo elegancko rozwiązał też autor zagadnienie,

jak wprowadzać symbole dla funkcji nie wszędzie określonych, np. $1/x$, chociaż nigdzie nie wspominał, że ten temat budzi bezustanne spory na elementarnym poziomie szkolnym. Rozdział V jest doskonałym wstępem do głębszych studiów metamatematycznych nad modelami dla arytmetyki. Należy też policzyć autorowi za zasługę, że dał w swej książce wstęp do teorii funkcji obliczalnych, pokazując ich zastosowanie do wykładu elementarnej arytmetyki i poruszając głębsze tematy w rozdziale ostatnim.

Autor nie chciał powiedzieć czytelnikowi, że pisze o logice. Fakt ten spowodował pewne niedomówienia, które mogą utrudnić lekturę początkującemu czytelnikowi. Rzucił mi się w oczy w szczególności punkt następujący:

Nie jest jasne, dlaczego autor zabrania używać wyrażeń z wielokropkami (p. str. 93). Na stronie tej czytamy, że wyrażenia takie nie występują w normalnych formalizacjach teorii matematycznych. Czytelnik miałby tu prawo wnieść protest. Po pierwsze nikt mu nie powiedział, że uczy się sposobu, w jaki należy formalizować teorię matematyczną: autor powiedział tylko, że dowody będą ścisłe. Co gorsza, czytelnik na ogół nie będzie wiedział, ani w tym miejscu, ani po skończeniu książki, co to jest formalizacja, a tym bardziej normalna formalizacja. Autor chce tę formalizację pokazać „w akcji", bez podawania wyjaśnień, na czym ona polega i po co się ją przeprowadza. A co najgorsze, czytelnik przecież już na str. 9 widział te zakazane mu teraz wielokropki. Tego, że występowały w tekście metamatematycznym, autor mu nie powiedział, a czy czytelnik sam pojmie tę dość przecież subtelną różnicę, nie wiadomo.

Z drugiej strony standardy autora nie są wszędzie takie same. Opis (str. 77) operacji sumowania i mnożenia skończonego budzi we mnie wątpliwości. Autor pisze, że „sumy i iloczyny skończone można uważać za funkcjonały, ale tradycyjny zapis traktuje je jako operatory". Te nigdzie przedtem nie opisane pojęcia są wprawdzie krótko objaśnione (moim zdaniem zresztą niedostatecznie), ale nie jest powiedziane czy i kiedy mamy prawo wprowadzać do systemu takie znaki. Czytelnik może się tu zdziwić: dla nowych znaków funkcyjnych była specjalna reguła pozwalająca je w stosownych okolicznościach dołączać; czemuż więc nie ma takiej reguły dla operatorów, czymkolwiek by one były?

Wszystko to pochodzi stąd, że autor nie opisał języka, w którym wykłada arytmetykę, a nie uczynił tego, bo chciał utrzymać czytelnika w mniemaniu, że studiuje on książkę matematyczną, ot taki kurs arytmetyki. Tymczasem książka jest par excellence logiczna i lepiej by było, żeby autor wyciągnął stąd wszystkie konsekwencje.

Jest w tej książce pewna drobna ilość usterek w wysłowieniach. Omówię tutaj dwie, które mnie najbardziej raziły.

Na str. 115 autor pisze, że zbiór zależy od $t_1, \ldots, t_n, Y_1, \ldots, Y_k$ jako od parametrów, czyli jest funkcją. Podobnie na str. 155 jest mowa o zbiorze i parametrach „od których ten zbiór staje się funkcją". Czytelnikowi, którego od początku studiów uczono, że funkcja jest zbiorem par, powinny przy odczytywaniu tych miejsc włosy stanąć na głowie ze zdumienia.

Druga uwaga związana jest z tekstem na str. 166, gdzie autor pisze: „Ciągi są to funkcje, określone na zbiorze liczb naturalnych i o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych". Kilka wierszy dalej jednak autor twierdzi, że „dla każdej zmiennej funkcyjnej, np. postaci f, i dla każdej zmiennej liczbowej, np. x, albo dla stałej 0 lub 1/2, symbol wartości funkcji $f(x)$, $f(0)$, $f(1/2)$ itp. zawsze ma sens i oznacza pewną liczbę...". I dalej: „Przy powyższych ustaleniach nie ma potrzeby i nawet nie ma możliwości określać co to jest ciąg" (!).

Czytelnik znów tu się zdziwi: autor zdefiniował ciągi, i to tak, jak czytelnik uczył się od początku studiów, ale zaraz dalej autor odwołuje tę definicję i mówi, że nie jest ona potrzebna, a nawet nie jest możliwa.

Sądzę, że autor powinien był wyjaśnić czytelnikowi powody, które go skłoniły do tak zaskakujących sformułowań. Tajemnica polega — jak sądzę — na tym, że autor pisząc ten tekst miał przed oczami system sformalizowany, w którym każde wyrażenie nazwowe (czyli „term", jak się czasem brzydko wyrażają niektórzy logicy) jest wyrażeniem sensownym. W takim systemie oczywiście nie można używać zmiennych przebiegających zbiór, który zawiera funkcje częściowe.

Należy żałować, że autor nie napisał wyraźnie, jaki system formalny ma na myśli i nie przedyskutował trudności związanych z formalizacją teorii używających zmiennych dla funkcji częściowych. Autor znowu zataił tu przed czytelnikiem pewien kłopot natury logicznej. Nawiasem mówiąc, przekonywanie czytelnika, że należy — dla ułatwienia formalizacji — zrezygnować w matematyce z używania funkcji nie wszędzie określonych, jest chyba z góry skazane na niepowodzenie. Nikt przecież nie zgodzi się na to, żeby funkcja wykładnicza była określona dla argumentów będących zbiorami lub figurami geometrycznymi. Jest faktem, że można rozpatrywać systemy, w których dla wygody przyjmie się, że $e^A = 0$ jeśli A nie jest liczbą, ale na pewno jest lepiej unikać takich sztucznych umów. W każdym zaś razie, jeśli się chce, aby matematycy traktowali logikę poważnie, nie należy twierdzić, że tylko dopuszczając takie sztuczności „można swobodnie, a zarazem precyzyjnie operować symbolami funkcyjnymi" (por. str. 166).

Wreszcie jeszcze jedna uwaga: na str. 114 w wierszu 9 autor pisze, że wprowadzenie zmiennych wyższego rzędu okazało się niezbędne przy wszelkich znanych konstrukcjach liczb rzeczywistych. Recenzent sądzi, że słowo „znany" należy tu skreślić: przecież twierdzenie Skolema–Löwenheima dowodzi, że konstrukcja tych liczb rzeczywistych, które autor bada, w logice pierwszego rzędu nie jest możliwa.

O ile od strony logicznej książka jest ciekawa i twórcza, o tyle jej zalety jako podręcznika elementów teorii liczb i arytmetyki są o wiele mniejsze. Koncepcje teorioliczbowe są bowiem ukryte w gąszczu drobiazgowych dowodów (formalizacja!), zaś ilość materiału tak z teorii liczb, jak z arytmetyki, jest uboga. O teorii liczb wspomniałem już wyżej; w arytmetyce bardzo razi brak nawet wzmianki o liczbach zespolonych i hiperzespolonych.

Jak już powiedziałem wyżej, przeczytałem książkę Grzegorczyka z prawdziwym zainteresowaniem. Sama moja recenzja pokazuje, jak sądzę dobitnie, ile wzbudziła ona we mnie refleksji; jestem przekonany, że tak samo zareagują i inni czytelnicy.

Ale muszę otwarcie powiedzieć, że sposób, w jaki ta książka usiłuje pokazać współpracę logiki i matematyki, a zwłaszcza fakt, że propaguje ona formalizację rozumowań matematycznych, nie wzbudził mego entuzjazmu.

Następujący spis błędów drukarskich został sporządzony przez dra P. Zbierskiego.

Str. 32_9. Zamiast $y+k$ powinno być $y \cdot k$.
Str. 33_1. Należy pominąć znak równości między formułami.
Str. 48_{19}. Zamiast $-x$ powinno być $\dot{-}x$.
Str. 58. W T85 należy zastąpić $\rightarrow$ przez $\Rightarrow$.
Str. 61. Aksjomat A.6 powinien brzmieć $0 \cdot y = 0$.
Str. 64. Zasada J5 powinna być sformułowana jak następuje:

$$\left(\bigvee x\ x \in X \wedge \bigwedge x\ ((x \neq 0 \wedge x \in X) \Rightarrow \bigvee y\ (y < x \wedge y \in X))\right) \Rightarrow 0 \in X.$$

Str. 70_9. Zamiast S_j powinno być Sj.
Str. 81_{17}. Zamiast $p_x y$ powinno być $p_x < y$.
Str. 88_1. Nie odbite w całości słowo „liczbowe".
Str. 96, wzór (99). Należy pominąć zmienną y.
Str. 112. W T56 należy $b^{b \dot{-} 1}$ zastąpić przez $a^{b \dot{-} 1}$.
Str. 113, zadanie 5. Zamiast $F(X)$ powinno być $F(x)$.
Str. 126. We wzorze kończącym sformułowanie T4 brak jest założenia $x \neq 0$; ponadto zdanie stwierdzające istnienie działania odwrotnego do mnożenia nie jest prawdziwe, o ile do W^* włącza się 0.
Str. 134. Należy pominąć słowa „W szczególności" przed wzorem (46).
Str. 144^3. Zamiast $x \in G_z$ powinno być $u \in G_z$.
Str. 165_8. Należy pominąć przedostatni znak „$\wedge$".
Str. 171^7. Zamiast $x+a$ powinno być $x+y$.
Str. 179_7. Zamiast $\bigwedge x\, a(n)$ powinno być $\bigwedge n a(n)$.
Str. 180, zadanie 7. Zastąpić λx przez λn i dodać założenie $k > 1$.
Str. 190_7. Zastąpić $\sqrt{x}$ przez $\sqrt[k]{x}$.
Str. 190. W T61 należy $\sqrt{a}$ zastąpić przez $\sqrt[n]{a}$.
Str. 194^1. Zamiast $\frac{1}{n}$ powinno być 1.
Str. 220^5. Zamiast < 1 powinno być > 1.
Str. 236_1. Zamiast $\bigwedge n \in \mathcal{N}\ x \neq s^n(x)$ powinno być $\bigwedge n \in \mathcal{N}\ (n \neq 0 \Rightarrow x \neq s^n(x))$.
Str. 274^3. Zamiast $i \sim g$ powinno być $f \sim g$.
Str. 281^8. Zamiast litery O powinno być zero.
Str. 301^{17}. Zamiast Π_2^0 i $\Sigma_2^0 \cap$ powinno być: $\Pi_2^0 \cap \Sigma_2^0$.